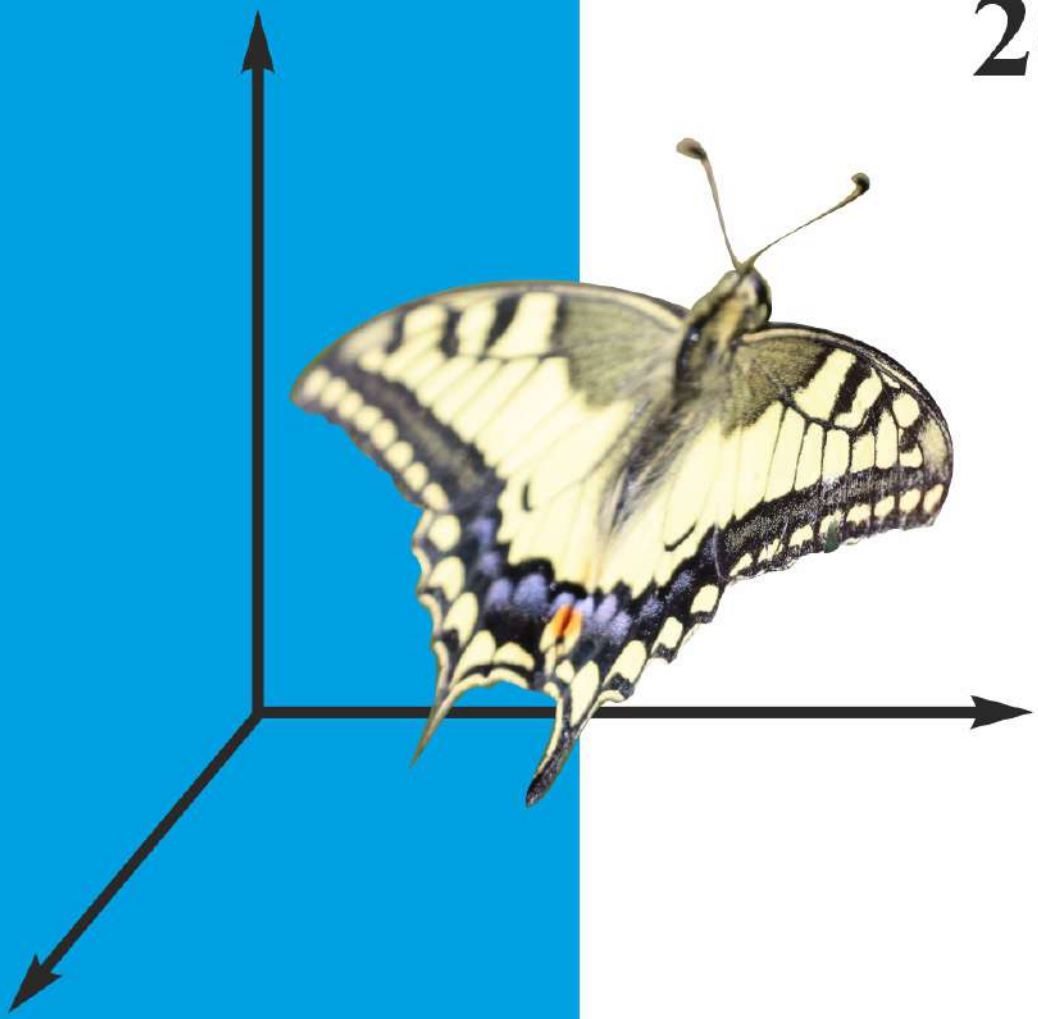
Model Theory and Algebra 2026



НОВОСИБИРСК
2026

Novosibirsk State Technical University

Model Theory and Algebra 2026

Collection of papers

edited by M. Shahryari and S. V. Sudoplatov

Novosibirsk
2026

UDC 510
M78

Editorial board: M. Amaglobeli (Tbilisi, Georgia), B. Baizhanov (Almaty, Kazakhstan), I. Chajda (Olomouc, Czech Republic), A. Iwanow (Gliwice, Poland), R. Halas (Olomouc, Czech Republic), B. Kulpeshov (Almaty, Kazakhstan), A. Myasnikov (New York, USA), N. Peryazev (Irkutsk, Russia), B. Poizat (Lyon, France), M. Shahryari (Tabriz, Iran; Muscat, Oman), P. Stefaneas (Athens, Greece), S. Sudoplatov (Novosibirsk, Russia), E. Timoshenko (Novosibirsk, Russia), J. Truss (Leeds, United Kingdom), D. Tussupov (Astana, Kazakhstan), E. Vasilyev (Corner Brook, Canada)

M78 **Model Theory and Algebra 2026**: Collection of papers / Edited by M. Shahryari, S. V. Sudoplatov. – Novosibirsk : NSTU Publisher, 2026. – 114 pp.

ISBN 978-5-7782-5703-0

The papers in this book are devoted to some problems of model theory and algebra.

UDC 510

ISBN 978-5-7782-5703-0

© Composite authors, 2026
© Novosibirsk State Technical University, 2026

INTRODUCTION

Model Theory and Algebra 2026

The 18th International Summer School-Conference "Problems Allied to Model Theory and Universal Algebra" was held from June 18 to 25, 2026 at Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University NETI and at the Camping Center "Erlagol" in Altai mountains. The School was organized by Algebra and Mathematical Logic Department of Novosibirsk State Technical University (NSTU NETI) and Sobolev Institute of Mathematics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (IM SB RAS). The School was supported by Grant of International Mathematical Center in Akademgorodok and by Faculty of Applied Mathematics and Computer Science of NSTU NETI. The school-conference included both online and in-person talks. At the school-conference, there were participants from Russia, Kazakhstan, Uzbekistan, Iran, Oman, Hungary, Poland. A total of 41 talks were delivered. Within the school-conference, the discussions on current problems on Model Theory, Algebra and related subjects were held. Information about the conference is posted on the conference website https://erlagol.ru.

The Organizing Committee
of the School-Conference

Programme of 18th International Summer School-Conference "Problems Allied to Model Theory and Universal Algebra"

June 18, Thursday

Chairperson S.V. Sudoplatov

9:00 – 9:10, Opening Ceremony

9:10 – 9:50, A.A. Stepanova (Vladivostok, Russia), Endomorphism semigroups of projective S-acts (online)

9:55 – 10:35, A.A. Zholobov, S.P. Odintsov (Novosibirsk, Russia), Twist-structures over Heyting-Brauer algebras

10:40 – 11:20, A.I. Stukachev (Novosibirsk, Russia), Semantic similarity of linguistic structures

11:20 – 11:50, Coffee Break

11:50 – 12:30, M. Shahryari (Muscat, Oman), On the universality of CS$\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{X}$T-groups (online)

12:35 – 13:15, A.S. Panasenko (Novosibirsk, Russia), Right representations of Novikov algebras

Chairperson B.Sh. Kulpeshov

15:00 – 15:40, I.O. Tungushbaeva (Karaganda, Kazakhstan), On existentially prime Jonsson theories (online)

15:45 – 16:25, G. Czédli (Szeged, Hungary), Sublattice and congruence densities of finite lattices (online)

16:25 – 16:50, Coffee Break

16:50 – 17:20, A.V. Litavrin (Krasnoyarsk, Russia), On the problem of finding all n-groupoids with a fixed universe G that admit a fixed transformation of the set G by their endomorphism, and some of its partial solutions (online)

17:25 – 17:55, N.L. Polyakov (Moscow, Russia), Classification of symmetric conservative clones with finite universe and its applications in social choice theory (online)

18:00 – 18:20, K.V. Grekovich (Krasnoyarsk, Russia), Decidability and unification in temporal logic (NML) (online)

18:25 – 18:45, N.A. Protsenko (Krasnoyarsk, Russia), Admissibility and unification in a certain class of multimodal logics ($MLinML_N$) (online)

18:50 – 19:20, I.K. Uktamaliev (Namangan, Uzbekistan), Hierarchical extensions of the algebraic closure operator and logical metrics on commutative semigroups (online)

19:25 – 19:55, I.A. Emelyanenkov (Novosibirsk, Russia), An approach to the study of a class of countable models of a complete theory, using special functors and some generalizations of the concepts of primeness and homogeneity of models

June 19, Friday

Chairperson B.Sh. Kulpeshov

9:00 – 9:40, V.N. Zhelyabin, A.S. Mamontov (Novosibirsk, Russia), Primitive Jordan Banach algebras

9:45 – 10:25, V.Yu. Gubarev (Novosibirsk, Russia), Rota-Baxter ternary groups and braces

10:30 – 11:00, O.V. Kravtsova (Krasnoyarsk, Russia), Structural questions for semifields of orders p^3 and p^4

11:00 – 11:30, Coffee Break

11:30 – 12:10, M.E. Goncharov (Novosibirsk, Russia), Averaging operators on rack bialgebras

12:15 – 12:55, S.M. Dudakov (Tver, Russia), On algorithmic properties of theories of subset algebras (online)

Chairperson V.Yu. Gubarev

15:00 – 15:30, A.A. Iwanow (Opole, Poland), Model theoretic aspects of metric local embeddability (online)

15:35 – 16:05, D.O. Ershov, B.Sh. Kulpeshov (Almaty, Kazakhstan), On degrees of rigidity for partial orders (online)

16:10 – 16:40, E.K. Netalieva (Astana, Kazakhstan), On strongly minimal partial orderings having an infinite non-trivial width (online)

16:40 – 17:00, Coffee Break

17:00 – 17:30, A.B. Altaeva, B.Sh. Kulpeshov (Almaty, Kazakhstan), The noncommutativity proportion in algebras of binary formulas for weakly circularly minimal theories (online)

17:35 – 17:55, A.A. Savelyev (Novosibirsk, Russia), Rota–Baxter operators on the extra-special group

18:00 – 18:15, A.I. Vokuev (Novosibirsk, Russia), A criterion for the simplicity of algebraically increasing derivations on the algebra of truncated polynomials

June 21, Sunday

Chairperson S.V. Sudoplatov

9:00 – 9:40, A.E. Mironov (Novosibirsk, Russia), Integrable geodesic flows on cones over Riemannian manifolds

9:50 – 10:30, V.V. Przyjalkowski (Moscow, Russia), Picard–Fuchs equations and multidimensional residues

10:40 – 11:20, I.B. Gorshkov (Novosibirsk, Russia), Finite simple groups as automorphism groups of non-associative algebras and colored graphs

11:30 – 12:10, N.A. Shchuchkin (Volgograd, Russia), Applications of non-associative algebras in cryptography

12:20 – 13:00, V.L. Usol'tsev (Volgograd, Russia), Galois theory of Rees closure in some classes of finite algebras with one operator, main ternary, and main nullary operation

Chairperson N.A. Shchuchkin

15:00 – 15:30, N.A. Daurtseva (Novosibirsk, Russia), Why spheres "don't want" to be almost complex

15:35 – 16:05, S.B. Malyshev (Novosibirsk, Russia), On closures defined by algebras of isolating formulas

June 22, Monday

Chairperson F.A. Dudkin

9:00 – 9:40, B.Sh. Kulpeshov (Almaty, Kazakhstan), Pseudo-strongly minimal partial orderings

9:50 – 10:30, S.V. Sudoplatov (Novosibirsk, Russia), On degrees of rigidity and super-rigidity of structures

10:40 – 11:20, I.I. Pavlyuk, S.V. Sudoplatov (Novosibirsk, Russia), Approximations and closures for group theories

11:30 – 12:10, D.Yu. Emelyanov (Novosibirsk, Russia), Algebras of binary formulas for the conormal / disjunctive product of graphs

Chairperson V.V. Przyjalkowski

15:00 – 15:30, A.V. Chekhonadskikh (Novosibirsk, Russia), Digraphs of mutial locations of real polynomial roots

15:35 – 16:05, N.Yu. Galanova (Tomsk, Russia), Classification of linearly ordered fields by the types of their cuts

16:10 – 16:40, A.V. Vaseneva (Novosibirsk, Russia), Equationality ranks for predicate and functional signature structures

June 23, Tuesday

Free day

June 24, Wednesday
Chairperson V.L. Usol'tsev

9:00 – 9:40, A.P. Pozhidaev (Novosibirsk, Russia), On differentially prime modules

9:50 – 10:30, F.A. Dudkin (Novosibirsk, Russia), Criterion for isomorphism of GBS$(n, 1)$ groups with nontrivial center

10:40 – 11:20, E.A. Shaporina (Novosibirsk, Russia), Some generalizations in the questions of describing automorphisms of cyclic extensions of free groups

11:20, Closing Ceremony

СМЕЖНОСТЬ В ГРАФАХ РАСПОЛОЖЕНИЙ КОРНЕЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

А.В. Чехонадских

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: chekhonadskikh@corp.nstu.ru

1 Введение

Переходные процессы в системах автоматического управления (САУ) включают в себя две фазы: фазу действия возмущения и фазу стабилизации, т.е. восстановления значений заданного режима после того, как возмущающий импульс сошел на нет. В линейных стационарных системах они связаны с так называемыми ‘модами’ контролируемых величин [1] — слагаемыми решения, соответствующими корням характеристического многочлена. Если ‘медленные’ моды сказываются на продолжительности подавления последствий возмущения, то ‘быстрые’ моды отвечают за реакцию системы на подачу и снятие возмущающего воздействия, особенно если какое-то из них имеют вид фронта — удара, при котором в контролируемую величину за незначительный промежуток времени вносится слагаемое, сопоставимое с действующими значениями процесса [2, 3].

Долгое время в теории линейных стационарных САУ основное внимание уделялось фазе стабилизации: как скоро и точно система возвращается к рабочим значениям и выдерживаются ли при этом заданные показатели качества.

Для линейной стационарной системы важнейшие требования к управлению — устойчивости, достаточного быстродействия, бесколебательности — находят хорошее соответствие в условиях на расположение полюсов (корней характеристического многочлена системы) на комплексной плоскости [4, 5], причем главную роль в этом играет расположение ‘са-

мых правых' из них, задающих скорость убывания тех слагаемых в возмущенном переходном процессе, которые гаснут сравнительно медленно [6, 7].

В настоящее время возросло внимание исследователей и к первой фазе: к поведению системы во временно́м интервале действия возмущения. В частности, к эффекту всплеска — возникающему при подаче и снятии возмущения превышению (иногда многократному) откликом системы самого возмущающего воздействия [8–10]. Для практики это это зачастую так же важно, как качество стабилизации после снятия возмущения, поскольку короткие временные интервалы переднего или заднего фронта возмущающего импульса могут задавать большие коэффициенты при быстро гаснущих модах решения, в линейных системах задаваемых левыми полюсами $z = x \pm \boldsymbol{i} y$ с большими значениями модуля действительной $|x|$ и мнимой y частей (т.е. быстро спадающей амплитудой и высокой частотой осцилляций). В такой ситуации существенное влияние на переходные процессы оказывают и медленные, и быстрые слагаемые переходного процесса.

Достичь удовлетворительного результата в обеих фазах тем более проблематично, если в САУ применяется регулятор пониженного порядка, не обеспечивающий произвольно заданного расположения полюсов [2, 4, 6]. В таких системах приходится использовать оптимизационный подход, когда за счёт выбора структуры регулятора и значений его параметров ищется возможно лучшее корневое расположение, что предполагает минимизацию некоторой целевой функции, учитывающей расположение полюсов.

Одним из типов таких функций является R-градуировка [11], см. далее п.2. На это понятие опирается метод критических корневых диаграмм, разработанный А.А. Воеводой, А.Н. Корюкиным и автором [6,7] С помощью R-градуировки вводятся корневые координаты, конструкция корневого симплекса и его сегментарно-граничное описание в виде симплектического графа [12]. Собственно критические корневые диаграммы [6, 13] указывают критические для R-градуировки взаимные расположения 'самых правых' полюсов САУ, определяющие оптимальные устойчивость и быстродействие системы и тем самым эффективность регулирования во второй фазе переходного процесса. Но оптимальность по быстродействию мало связана с поведением САУ во время действия импульса, а его при тестировании стандартными возмущениями иногда нельзя признать удовлетворительным. В итоге при выборе структуры и настроек регулятора необходимо учитывать и быстрые моды "неправых" полюсов.

Сказанное ещё более убедительно, если принять во внимание разви-

тый школой А.С. Вострикова метод разделения движений; нацеленный на синтез нелинейных систем, он предусматривает для их стационарных линеаризаций создание двухтемповых моделей, переходные процессы в которых разделяются на ‘быстрые’ и ‘медленные’, соответствующие группам полюсов с большими и малыми по модулю действительными частями [1, 5].

Из этих соображений в работе предпринимается более полное теоретико-графовое описание взаимных расположений всех (а не только самых правых) корней действительных многочленов при выбранной R-градуировке. Тем самым продолжается рассмотрение, начатое в [14], где указаны кодировки всевозможных взаимных расположений корней действительных многочленов произвольной степени n и построена функция их числа в зависимости от n. Этим также развиваются результаты [12] за счёт дополнения описания корневых расположений в том, что касается кратных комплексных пар — роль последних в задачах синтеза оптимальных САУ, как показали исследования последних десятилетий, нередко оказывалась ведущей.

2 R-градуировки корневых множеств

В настоящей работе не включается в рассмотрение непосредственно пространство параметров управления P — всевозможные настройки регулятора системы, входящие в коэффициенты её характеристического многочлена и таким образом задающие расположение её полюсов, равно как и сама система управления. Везде далее речь идёт о корнях $z_1, ..., z_n$ некоторого многочлена $\chi(s)$ с действительными коэффициентами.

Будем считать, что на комплексной плоскости задан предпорядок $\leq_\alpha$, позволяющий различать ‘более или менее устойчивое’ расположение действительного полюса x или комплексно сопряженной пары $z = x \pm \boldsymbol{i}y$, что соответствовало бы ‘лучшим’ или ‘худшим’ с прикладной точки зрения модам $f_x(t) = ce^{xt}$ или $f_z(t) = e^{xt}(a\cos yt + b\sin yt)$ соответственно.

На действительной оси предпорядок $\leq_\alpha$ совпадает с обычным сравнением $\leq$, а на комплексной плоскости он задаёт семейство вложенных областей $\{B_\alpha = \{z | z \leq_\alpha \alpha | \alpha \in \mathbf{R}\}\}$, так что $B_\gamma \subset B_\beta$ при $\gamma < \beta\}$ и $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathbf{R}} B_\alpha = \mathbf{C}$.

Обычным способом вводится α-равенство $=_\alpha$, являющееся эквивалентностью, и строгое α-неравенство.

Комплексную плоскость, снабженную семейством $\{B_\alpha | \alpha \in R\}$, будем называть R-градуированной, а функцию $F(z) = \inf\{\alpha \mid z \in B_\alpha\}$ — R-градуировкой.

Простейшим примером R-градуировки оказывается гурвицева функция $H(z) = \max\{Rez_1, ..., Rez_n\}$, задаваемая предпорядком сравнения действительных частей $z_1 \leq_\alpha z_2 \Leftrightarrow Re(z_1) \leq Re(z_2)$ вместе с градуировочным семейством левых полуплоскостей $B_\alpha = \{z | Re(z) \leq \alpha\}$.

Некоторые примеры, связанные с возможными техническими требованиями и отражающие часто рассматриваемые в синтезе САУ ситуации, а также более точные формулировки понятия R-градуировки можно найти в [6, 14, 15].

Границу $\{z \mid F(z) = \alpha\}$ области B_α будем называть α-*вертикалью*. Каждый полюс или комплексно-сопряжённая пара задают некоторую α-вертикаль, на которой располагаются α-равные им корни.

Замечание. Оптимизация R-градуировки в [6, 7] и др. сводилась к смещению правой вертикали влево без учёта расположения остальных полюсов, что решало задачу оптимального поведения системы в фазе стабилизации. Но обрисованная во введении двухфазность иногда требует включения в корневой орграф расположений не только самых правых полюсов и, в отличие от критических корневых диаграмм, предполагает распределение корней на две и более α-вертикалей и определение размерностей таких расположений.

3 Постановка задачи

Если в [14] построены множество матричных кодов расположений корней и алгоритм полного перечисления их множества, то цель настоящей работы — теоретико-графовое описание всевозможных вариантов взаимного расположения всех корней многочлена в соответствии с предпорядком $\leq_\alpha$ — т.е. корневыми R-градуировками. Приняв всевозможные матричные коды в качестве вершин орграфа, нужно выяснить соответствующую им размерности корневых множеств, и решить вопрос смежности вершин в орграфе, отражающую сегментарно-граничное соответствие в корневом симплексе [11]. После этого окажется возможно рассмотреть и смежность в корневом неорграфе, включающем в себя только расположения фиксированной размерности в качестве вершин и границы между ними в качестве ребер.

Таким образом будет достигнуто более полное графовое представление всевозможных корневых расположений, чем достигалось в [12, 13], поскольку (1) координатизация и кодирование сегментов корневых симплексов производились в [12] без учета кратных комплексных пар; (2) критические корневые диаграммы [6, 13] не включают корней, расположенных левее правой вертикали.

В связи с этим при кодовом описании вершин в [14] стало невозможно ограничиваться двухстрочными матрицами [12]. Однако в [14] и здесь не приходится учитывать соотношение мнимых частей корней на разных α-вертикалях (что требуется на каждой из них в отдельности), т.к. с точки зрения дифференциальных и оптимизационных свойств совпадение мнимых частей при различных действительных существенного значения не имеет.

4 Задающие α-неравенства и R-градуировочное кодирование корней многочленов

Предпорядок $\leq_\alpha$ можно доопределить до линейного порядка $\leq$ на мультимножестве корней[1] лексикографически, упорядочивая α-равные действительные корни и комплексные пары по возрастанию мнимой части:

при $y_{k+2} < y_{k+4}$ считаем $x_k < x_{k+1} \pm y_{k+2}\boldsymbol{i} < x_{k+3} \pm y_{k+4}\boldsymbol{i}$ и $x_l - y_{l+1}\boldsymbol{i} < x_l + y_{l+1}\boldsymbol{i}$.

Разбиение мультимножеств α-равных корней на подмножества кратных позволяет согласовать их нумерацию со строгим возрастанием модулей мнимых частей.

Таким образом, действительные корни и комплексные пары корней нумеруются в порядке строгого возрастания с повторениями равных элементов.

Соответствующие упорядоченные и пронумерованные последовательности будем называть *задающими неравенствами*; например,

$x_1 =_\alpha x_2 \pm y_3\boldsymbol{i} = x_4 \pm y_5\boldsymbol{i} < x_6 = x_7 =_\alpha x_8 \pm y_9\boldsymbol{i}$

(на левой α-вертикали действительный корень и двукратная пара, на правой — двукратный корень и комплексная пара),

или $x_1 \pm y_2\boldsymbol{i} =_\alpha x_3 \pm y_4\boldsymbol{i} = x_5 \pm y_6\boldsymbol{i} <_\alpha x_7 \pm y_8\boldsymbol{i} <_\alpha x_9$,

(на левой α-вертикали простая пара и двукратная пара с большей мнимой частью, на центральной — простая комплексная пара, на правой — простой корень).

Всякое такое неравенство задаёт в пространстве $\mathbf{R}^n$ конус координат размерности, не превосходящей n и ограниченный конусами на единицу меньшей размерности. Эти граничные конусы задаются неравенствами такого же типа и возникают из задающих неравенств исходного конуса (1) заменой одного из нестрогих α-неравенств на α-равенство (вклю-

[1] Мультимножество корней при нумерации перечисляется с повторениями, учитывающими их кратности.

чая равенство действительных корней — ведь на действительной оси α-(не)равенство и обычное (не)равенство совпадают) или (2) заменой α-равенства комплексных пар на их обычно равенство [12].

Всякий конус такого вида называется *корневым сегментом*, а их совокупность — *корневым симплексом* [12].

В работе [14] введена следующая кодировка корневых расположений.

Кодом каждого из них будет матрица формата не более $([n/2]+1)\times n$, где n — число корней (степень характеристического многочлена САУ). Столбцы соответствуют корневым вертикалям слева направо, так что если α-вертикаль корня x_k или пары $z_{k,k+1} = x_k \pm y_{k+1}$ оказываются 'левее' α-вертикали корня x_l или пары $z_{l,l+1} = x_l \pm y_{l+1}$ (и, таким образом, в задающих неравенствах так же расположены сами корни) то столбец, кодирующий корни, α-равные x_k или $z_{k,k+1}$, оказывается левее столбца, кодирующего корни x_l или $z_{l,l+1}$ и α-равных им соседей. Верхний элемент столбца равен кратности действительного корня, расположенного на соответствующей α-вертикали, ниже в этом столбце записаны кратности α-равных ему комплексных пар в порядке возрастания модуля мнимой части. Очевидно, столбцов не более n, и в каждом из столбцов не более $[n/2] + 1$ элементов.

Если число различных комплексных пар, кодируемых в некотором столбце, меньше максимального в матрице, то нижние элементы столбца полагаются равными нулю до максимальной во всей матрицы высоты. Некоторые примеры приведены в [14].

Из определения матричного кода вытекает следующее утверждение.
Предложение 1. Размерность корневого сегмента, имеющего кодовую матрицу $A_\mu = (a_{ij})_{k\times l}$, равняется сумме числа её столбцов k с числом ненулевых элементов в строках ниже первой.

5 Смежность в корневых орграфах

Пусть n — степень многочлена. В качестве множества вершин его корневого орграфа $G = \langle \mathbf{M}; P\rangle$ примем множество $\mathbf{M}$ различных задающих неравенств μ для n корней, или, что то же самое, их матричных кодов.

Упорядоченная пара вершин $\langle \mu_1; \mu_2\rangle$ будет дугой $p \in P$ в двух нижеследующих случаях.

(1) Заменив одно из строгих α-неравенств в задающих неравенствах μ_1 на α-равенство, мы получим задающие неравенства μ_2 второй:

$...\sigma z_k <_\alpha z_{k+1}\sigma... \mapsto ...\sigma z_k =_\alpha z_{k+1}\sigma...$, где $\sigma \in \{=; =_\alpha\}$.

Очевидно, эта замена соответствует выходу на ту границу корневого

сегмента, заданного неравенствами μ_1, на которой две группы α-равных корней, соседствующие в неравенствах μ_1, становятся α-равны между собой. Иными словами, две соседние α-вертикали сливаются в одну.

По аналогии с определением [корневые симплексы и симпл. графы] такую замену будем называть *столбцовым сложением.*

(2) Заменив в группе α-равных корней задающих неравенств μ_1 одно из α-равенств на равенство, получим задающие неравенства μ_2:

$...\sigma z_k =_\alpha z_{k+1}\sigma... \mapsto ...\sigma z_k = z_{k+1}\sigma...$, где $\sigma \in \{=; =_\alpha\}$.

Эта замена соответствует выходу на ту границу корневого расположения, заданного неравенствами μ_1, на которой в одной группе α-равных между собой корней два или даже три корня становятся равными, т.е. кратными или многократными: либо две комплексные пары кратностей r_1 и r_2 сливаются в одну кратности $r_1 + r_2$, либо действительный корень кратности r_1 сливается с комплексной парой кратности r_2, образуя действительный корень кратности $r_1 + 2r_2$; частным случаем последнего можно считать слияние комплексной пары с ноль-кратным (т.е. отсутствующим) действительным корнем, когда комплексная пара кратности r_2 сливается в действительный корень кратности $2r_2$. Иными словами, на некоторой α-вертикали сливаются два (три) соседствующих корня.

Такую замену будем называть *строчным сложением.*

Из определения матричного кода очевидно следующее утверждение:

Предложение 2. Вершины корневого орграфа допускают $\nu - \zeta$ строчных сложений каждая, где ν — число ненулевых элементов в кодовой матрице, а ζ — число её столбцов.

Предложение верно и для единственной вершины с нулевой исходящей степенью: это одномерный корневой сегмент, соответствующий n-кратному действительному корню.

Поскольку число равенств в задающих неравенствах при обоих сложениях увеличивается на единицу, то размерность корневых сегментов при переходе по дуге на единицу уменьшается. Следовательно, любой путь в орграфе G имеет длину не более $n - 1$.

Заметим, что в корневых сегментах, где все действительные корни и комплексные пары имеют различные R-градуировки, кодовые матрицы имеют вид единственной строки, заполненной единицами, или двухстрочной матрицы, столбцы которой столбцы равны $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; в обоих случаях $\nu = \zeta$, и строчные сложения невозможны.

Критерий смежности вершин в орграфе задаёт следующее утверждение.

Предложение 3. Если кодовая матрица M_2 получается при строч-

ном сложении из кода с матрицей M_1, то для некоторого k в них различаются k-е столбцы:

$\begin{pmatrix} s \\ r_1 \\ r_2 \\ t \end{pmatrix}$ в матрице M_1 и $\begin{pmatrix} s \\ r_1 + r_2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ в матрице M_2,

где отрезки столбцов s и t(возможно, пустые) и все остальные столбцы матриц попарно совпадают.

Обратное также верно.

Таким образом, смежность, обусловленная строчным сложением — достаточно простое соответствие на множестве вершин M.

При столбцовом сложении k-я и $k+1$-я корневые α-вертикали объединяются в одну, причём в кодовой матрице M складываются только элементы первой строки k-го и $k+1$-го столбцов, соответствующие кратностям действительных корней на этих α-вертикалях. Остальные элементы обоих столбцов расставляются всевозможными способами в новом столбце с сохранением порядка между собой; если потребуется, число строк матрицы M увеличивается.

Пример. Пусть второй и третий столбцы матрицы M имеют вид $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ соответственно.

При выполнении соответствующего столбцового сложения в задающих неравенствах действительный корень на новой α-вертикали остается единственным: $1 + 0 = 1$, а элементы третьего столбца, кодирующие кратности 2, 4 и 2 корней 3-й α-вертикали, переходят в новый столбец следующими способами:

(а) располагаясь в столбце рядом друг с другом —
выше обоих элементов 2-го столбца,
между элементами 2-го столбца,
ниже обоих элементов 2-го столбца;

(б) располагаясь в столбце двумя группами —
выше соответственных элементов 2-го столбца,
ниже соответственных корней 2-го α-вертикали,
обрамляя оба элемента 2-го столбца;

(в) располагаясь в столбце порознь — чередуясь с элементами 2-го столбца.

Заметим, что для варианта (б) разбить три элемента третьего столбца на две группы можно двумя способами, и оба приводят в разным расположениям элементов по столбцу.

В итоге получается 10 вариантов:

$$\text{(а)}\begin{pmatrix}1\\2\\4\\2\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\2\\4\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\1\\2\\4\\2\end{pmatrix},\text{(б)}\begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\2\\4\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\\4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\\4\\2\end{pmatrix},\text{(в)}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Число строк в кодовой матрице увеличилось на две; столбцы, начиная с 4-го, сдвигаются влево.

Допуская отнесение выражения “столбцовое сложение” к действиям в кодовой матрице, в общем случае получаем следующее.

Пусть кодовая матрица M_2 получается при столбцовом сложении k-го и $k+1$-го столбцов кодовой матрицы M_1, тогда k-й столбец матрицы M_2 образуется сложением элементов в первой строке: $m_{1k} + m_{1k+1}$ — и всевозможными расположениями остальных элементов $k+1$-го столбца выше, ниже и между элементов k-го столбца с сохранением последовательности в каждом из исходных расположений элементов в столбцах: если элемент m_{ik} стоял в матрице M_1 выше, чем m_{jk}, то он перейдёт в более высокую строку матрицы M_2. Число строк матрицы M_1 при необходимости увеличивается, а столбцы, стоявшие правее $k+1$-го, сдвигаются влево.

Число способов столбцового сложения можно оценить сверху.

Предложение 4. Для числа Σ всевозможных столбцовых сложений k-го и $k+1$-го столбцов выполняется неравенство

$$\Sigma \le \sum_{l=1}^{l_k+1} (C^l_{l_k+1} \cdot C^{l-1}_{l_{k_2}-1}).$$

Без ограничения общности можно считать, что в сложении участвуют 1-й и 2-й столбцы, l_1 и l_2 — длины отрезков ненулевых элементов этих столбцов, начинающихся со 2-й строки, и $l_1 \le l_2$.

Для обоснования формулы заметим, что для элементов 2-го столбца в 1-м столбце имеется l_1+1 место, так что можно распределять элементы 2-го столбца по l местам, где $1 \le l \le l_1 + 1$. Конкретные l мест можно выбрать $C^l_{l_1+1}$ различными способами. При каждом варианте выбора элементы 2-го столбца делятся на l групп с помощью $l-1$ раздела. Поскольку $l - 1 \le l_1 \le l_2$ это можно сделать $C^{l-1}_{l_2-1}$ способами. Таким образом, для каждого l в заданном интервале значений возникает $C^l_{l_1+1} \cdot C^{l-1}_{l_2-1}$ вариантов; а если $l_1 = l_2$ и формально возникает возможность $l = l_1 + 1 > l_2$, используется правило $C^m_n = 0$ при $m > n$.

Замечание. Для рассмотренного выше примера формула даёт точное равенство:

$\sum_{l=1}^{2+1}(C_{2+1}^{l}\cdot C_{3-1}^{l-1}) = C_3^1\cdot C_2^0 + C_3^2\cdot C_2^1 + C_3^3\cdot C_2^2 = 3+6+1 = 10.$

Следовательно, полученная оценка достижима даже в численности получаемых *различных* результатов. Однако если на обеих объединяемых α-вертикалях нет кратных корней и их кодовые столбцы имеют вид, например, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, то все столбцовые сложения дают единственный результат $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$.

Определение. Множество $\Sigma(M)$ всевозможных результатов строчного и столбцового сложения для кодовой матрицы будем называть *суммой матрицы.*

Для полных корневых орграфов справедлив матричный критерий, аналогичный Теореме 4 [12]:

Предложение 5. Вершины μ_1 и μ_2 в орграфе $\langle \mathbf{M}; P\rangle$, для которых $dim\mu_1 = 1+dim\mu_2$, смежны, если для их матриц выполняется включение $M_2 \in \Sigma(M_1)$, и наоборот.

6 Смежность в корневых неорграфах

Если орграфы отражают связи между корневыми сегментами размерности d и их границами размерности $d-1$ для $d = 2, ..., n$, то в сериях неорграфов $H_d = \langle \mathbf{M}_d; Q_d\rangle, d = 2, ..., n$ отображается смежность другого вида: между парами сегментов одинаковой размерности, имеющих общую границу. Множеством вершин корневого неорграфа H_d являются задающие неравенства $\mathbf{M}_d$ сегментов размерности $d \le n$, или, что то же самое, их кодовые матрицы; ребрами $q \in Q$ становятся неупорядоченные пары вершин μ_1, $\mu_2 \in \mathbf{M}_d$, сегменты которых имеют общую границу размерности $d-1$.

Например, две вершины, отличающиеся перестановкой двух соседних α-вертикалей (т.е. перестановкой столбцов их кодовых матриц), смежны, т.к. соответствующие им корневые сегменты граничат между собой через сегмент меньшей размерности, соответствующий любой из их столбцовых сумм (как в примере п.5)

Предложение 5 обосновывает матричный критерий смежности вершин в корневом неорграфе $H_d = \langle \mathbf{M}_d; Q_d\rangle$.

Предложение 6. Вершины μ_1 и μ_2 размерности d в корневом неорграфе $H_d = \langle \mathbf{M}_d; Q_d\rangle$ смежны, если для их матриц M_1 и M_2 выполняется условие $\Sigma(M_1) \cap \Sigma(M_2) \neq \varnothing$, и наоборот.

7 Обсуждение результатов

Предложения 5 и 6 устанавливают графовые структуры на множестве матричных кодов M , описанном и алгоритмически перечисленном в [14]. Матричные коды в многострочной форме п. 4 уточняют взаимные расположения всевозможных корней многочлена $\chi_n(s)$, действительных и комплексных, простых и кратных, поэтому полученный орграф можно назвать *полным* в отличие от орграфов, построенных в [12] с двухстрочными кодами в качестве вершин [2]. Для корневого симплекса многочлена полный орграф характеризует сегментарно-граничное соответствие k-мерных сегментов и их $k-1$-мерных границ, $k = 2, \ldots, n$, т.е. представляет 'вертикальную' структуру (по размерности) симплекса.

Полные неорграфы H_k характеризуют сегментарно-граничное соответствие k-мерных сегментов, имеющих общую $k-1$-мерную границу, $k = 2, \ldots, n$, т.е. представляют 'горизонтальную структуру' симплекса. В частности, если $k = n-p+1$, где p — число параметров управления, то множество рёбер M_{n-p} соответствует критическим корневым диаграммам [6, 12, 13] и нульмерным многообразиям в пространстве параметров P (от пустого множества до нескольких точек), а вершины M_{n-p+1} — подходящим к ним одномерным многообразиям в пространстве P, позволяющим оценить экстремальность критических расположений, соответствующих кодам $\mu \in M_{n-p}$.

Тем более важно иметь явную неорграфовую структуру при использовании сепарабельных составляющих характеристического многочлена, в пределах одного сегмента обеспечивающих гладкость целевой функции в ходе минимизации R-градуировки [15], но при смене кратностей какого-то из корней (и смене сегмента!) не сохраняющей даже непрерывности.

Возвращаясь в задаче, отмеченной во введении: синтезу управления динамической системой с помощью регулятора пониженного порядка, которое было бы эффективно в обеих фазах переходного процесса — отметим следующую возможность. Часть вариативных возможностей, предоставляемых пространством P, связать с фазой стабилизации, а остальные — с фазой возмущения и необходимостью подавления всплесков. Тем самым придется рассматривать *два* корневых многочлена [6, 7]: $r_{right}(s)$ и $r_{left}(s)$ и искать критические корневые расположения ха-

[2] В [12] отмечалось, что "коды (в виде двухстрочных матриц) представляют собой более удобный способ описания сегментов и вершин, чем сами задающие системы неравенств — с той оговоркой, что коды не улавливают разницы между α-равными (эквивалентными) и просто равными (т.е. кратными) комплексными корнями, тогда как сами задающие (не)равенства такую возможность оставляют"

рактеристического многочлена $\chi_n(s)$ с помощью корневого многочлена $r(s) = r_{right}(s)r_{left}(s)$, выбирая решения, где самые правые корни $\chi_n(s)$, относящиеся к $r_{right}(s)$, займут возможно более левое положение на комплексной плоскости, а самые правые, относящиеся к $r_{left}(s)$ - возможно более правое.

Поскольку синтез регуляторов осуществляется в настоящее время для систем не слишком больших размерностей, а $degr_{right}(s)+degr_{left}(s) = degr(s) \leq deg\chi_n(s)$, сумма степеней многочленов $r_{right}(s)$ и $r_{left}(s)$ вполне может сравняться со степенью многочлена $\chi_n(s)$, правая и левая корневые вертикали могут собрать на себя все характеристические корни, и варианты синтеза сведутся к распределению степеней $degr_{right}(s) + degr_{left}(s) = n$.

С этой точки зрения полное графовое описание всевозможных корневых расположений оказывается существенным шагом к формализации задачи синтеза линейных стационарных систем с регулятором пониженного порядка. Рассматривая синтез как *гибкий процесс* [16], желательно иметь полную логическую схему возможных ветвлений и слияний на каждой его стадии [16, 17], в том числе при первичном назначении структуры регулятора (и, в частности, размерности пространства P) и ее корректировке на компараторной стадии, где как раз и могут проявиться неприемлемые реакции системы в фазе возмущающего импульса. Повышение степени системы $deg\chi_n(s)$ позволяет увеличить степень $r_{left}(s)$ и возможность влиять на расположение левых полюсов и косвенно — на величину всплеска.

Задача явного описания гомоморфизма полного корневого орграфа G_n и серии неорграфов H_k в соответственные графы сепарабельных составляющих является предметом дальнейшего изучения.

Список литературы

[1] Востриков А.С. Синтез систем регулирования методом локализации. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. 252 с.

Vosrikov A.S. Control system design by the localization method. Novosibirsk: NSTU Publ., 2007. 252 pp. (Russian)

[2] Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014. 560 с.

Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Control of Linear

Systems with External Perturbations. M.:LENAND, 2014. 560 pp. (Russian)

[3] Polyak B.T., Tremba A.A., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S., Smirnov G.V. Large deviations in linear control systems with nonzero initial conditions. Automation and Remote Control. 2015. V. 76, No 6. Pp. 957–976.

[4] Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019, 500 с.

B.T. Polyak, M.V. Khlebnikov, L.B. Rapoport. Mathematical theory of automatic control, Moscow: LENAND, 2019. 500 pp. (Russian)

[5] Zhmud V.A., Voevoda A.A., Vosrikov A.S. Control of Linear Dynamic Objects by the Method of Division of Motions.- Novosibirsk: KANT, 2017. 109 pp.

[6] Чехонадских А.В. Корневые координаты в синтезе одноканальных систем автоматического управления пониженного порядка // Автометрия.- 2015.- Т. 51. № 5.- С. 69–81.

Chekhonadskikh A.V. Root coordinates in the design of SISO control systems. Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2015. 51(5). 485–495.

[7] Chekhonadskikh A.V., Voevoda A.A. Algebraic design method of low order control systems. In: 2015 International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2015, Proceedings. 2015. P. 7147022.

[8] B.T. Polyak, M.V. Khlebnikov. Static controller synthesis for peak-to-peak gain minimization as an optimization problem. Automation and Remote Control. 2021. V. 82. No 9. Pp. 1530–1553.

[9] B.T. Polyak, M.V. Khlebnikov. New criteria for tuning PID controllers. Automation and Remote Control. 2022. V. 83. No 11. Pp. 1724–1741.

[10] M.V. Khlebnikov, E.A. Stefanyuk. Peak-minimizing design for linear control systems with exog-enous disturbances and structured matrix uncertainties. Control Sciences. 2023. No 3. Pp. 9–14.

[11] Чехонадских А.В. О ступенчато-дифференциальной оптимизации корней характеристического многочлена САУ. Науч. вестник НГТУ. 2008. № 4 (33). С. 205–208.

Chekhonadskih A.V. On gradua-differential characteristic root optimization of automatic control system Scientific Bulletin of NSTU. 2008. No 4 (33). P. 205–208. (Russian)

[12] Чехонадских А.В. Корневые симплексы и симплектические графы действительных многочленов. Науч. вестник НГТУ. 2009. № 1 (34). С. 143–164.

A.V. Chekhonadskikh. Root simplices and symplectic graphs of real polynomials. Scientific Bulletin of NSTU. 2009. No 1 (34). P. 143–164. (Russian)

[13] A.V. Chekhonadskikh. Some classical number sequences in control system design. Siberian Electronic Mathematical Reports. 2017. V. 14. P. 620–628.

[14] Чехонадских А.В. Кодирование и перечисление корневых расположений корней действительных многочленов. В сборнике: Algebra and Model Theory 15. Collection of papers. Новосибирск: НГТУ. 2025. С. 16-30.

A.V. Chekhonadskikh. Root simplices and symplectic graphs of real polynomials.In: Algebra and Model Theory 15. Collection of papers. Novosibirsk: NSTU. 2025. Pp. 16–30. (Russian)

[15] Воевода А.А., Чехонадских А.В. Преодоление недифференцируемости при оптимизационном синтезе систем автоматического управления Автометрия. 2010. Т. 46. № 5. С. 11–17.

A.A. Voevoda, A.V. Chekhonadskikh. Overcoming nondifferentiability in optimization synthesis of automatic control systems. Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2010. V. 46(5). Pp. 408–413.

[16] Rudometkina M.N., Kakovkin P.A., Chekhonadskikh A.V. Flexible process model design. Key Engineering Materials. 2016. V. 685. Pp. 892–896.

[17] Рудометкина М.Н., Спицын В.Г. Модель логической сети с предикатными операциями. Междунар. журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2014. № 10-3. С. 21–26.

Rudometkina M.N., Spitsyn V.G. Logical network model with predicate operations. International journal of applied and fundamental research. 2014. №10-3. Pp. 21–26. (Russian)

BOUNDS ON THE NUMBERS OF POSSIBLE VALUES OF $|\mathbf{Con}(L)|$ AND $|\mathbf{Sub}(L)|$ FOR n-ELEMENT LATTICES L

G. Czédli

University of Szeged, Bolyai Institute. Szeged, Aradi vértanúk tere 1, HUNGARY 6720

e-mail: czedli@math.u-szeged.hu

This paper is dedicated to Eszter K. Horváth on her sixty-third birthday

Abstract. For a positive integer n, let $\mathrm{Snc}(n) := \{|\mathrm{Con}(L)| : L \text{ is an } n\text{-element lattice}\}$ be the set of the numbers of congruences of n-element lattices, and let $\mathrm{Sns}(n) := \{|\mathrm{Sub}(L)| : L \text{ is an } n\text{-element lattice}\}$ be the analogous set for sublattices. Several papers have been devoted to the study of these sets. For example, D. Ahmed and E. K. Horváth determined the fifth largest element of $\mathrm{Sns}(n)$, and D. Ahmed with other coauthors obtained the sixth and the seventh. This paper establishes lower and upper bounds on $|\mathrm{Snc}(n)|$ and $|\mathrm{Sns}(n)|$, the numbers of elements of $\mathrm{Snc}(n)$ and $\mathrm{Sns}(n)$, respectively.

1 Note on the dedication

Habilitated associate professor Eszter K. Horváth is my coauthor on ten joint papers. Her sixty-third birthday, to which this paper is dedicated, appears in the numerator in Theorem 3.1. As shown by [1] and [13], the present paper is closely related to her research interests.

2 Introduction

For $n \in \mathbb{N}^+ := \{1, 2, 3, \dots\}$, we introduce the notation

$$\begin{aligned} \mathrm{Snc}(n) &:= \{|\mathrm{Con}(L)| : L \text{ is a lattice with } |L| = n\} \text{ and} \\ \mathrm{Sns}(n) &:= \{|\mathrm{Sub}(L)| : L \text{ is a lattice with } |L| = n\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

for the *set of the numbers of congruences* and the *set of the numbers of sublattices* of n-element lattices. Our goal is to present lower and upper bounds on the numbers $|\mathrm{Snc}(n)|$ and $|\mathrm{Sns}(n)|$.

This goal is motivated by known results on the sets $\mathrm{Snc}(n)$ and $\mathrm{Sns}(n)$. To mention some of these results, note that the large elements of $\mathrm{Snc}(n)$ and $\mathrm{Sns}(n)$ (or their equivalent counterparts in terms of densities rather than numbers) have recently been investigated in several papers, including Ahmed and Horváth [1], Czédli [3], [4], [6], [8], [9], and [10], Mureşan and Kulin [21], and Zaya, Dilbak, and Ahmed [23]. There are also papers where algebras other than lattices are considered; see Ahmed, Salih, and Haje [2], Czédli [5] and [7], and Kwuida and Mureşan [20]. Future work might bring analogous results for further types of algebras and reduce the gaps between the lower and upper bounds presented in this paper.

3 Results

In this section we state three theorems, whose proofs are deferred to Section 4.

3.1 Lower bounds

With the notation introduced in (2.1), we have the following lower bound, in which $\pi \approx 3.141\,592\,653\,589\,793$ denotes the circular constant and $e \approx 2.718\,281\,828\,459\,045$ the base of the natural logarithm.

Theorem 3.1. *For $n \in \mathbb{N}^+$ with $n \geq 564$, we have*

$$|\mathrm{Sns}(n)| \geq \frac{63 \cdot e^{\pi\sqrt{n/3-47/72}}}{44 \cdot (24n-47)^{3/4} \cdot \sqrt{n-2}}. \tag{3.1}$$

Example 3.2. (3.1) *tells us that*

$$\begin{aligned} |\mathrm{Sns}(564)| &\geq 2.282\,520\,098 \cdot 10^{14}, \\ |\mathrm{Sns}(2026)| &\geq 2.673\,673\,0546 \cdot 10^{30}, \quad \textit{and} \\ |\mathrm{Sns}(10^{10})| &\geq 8.437\,977\,896 \cdot 10^{78\,758}. \end{aligned}$$

Before formulating another theorem, consider the following polynomial:

$$h(x) := (1-4x)^4 - x(1-3x)^3 = 283x^4 - 283x^3 + 105x^2 - 17x + 1. \tag{3.2}$$

Using computer algebra, we obtain that

$$h \text{ has a unique root } \tau \approx 0.150\,837\,340\,460 \in (0, \tfrac{1}{4})_{\mathbb{R}} \tag{3.3}$$

in the interval $(0, \frac{1}{4})_{\mathbb{R}}$. (It is the smaller of the two real roots of h.) As usual, $\operatorname{round}(n\tau)$ denotes the integer nearest to the product $n\tau$. (By convention, if t is an integer, then $\operatorname{round}(t + \frac{1}{2}) = t + 1$.) We write $\operatorname{ds}(x)$ for the (signed) *distance* between $x \in \mathbb{R}$ and the nearest integer:

$$\operatorname{ds}(x) := \operatorname{round}(x) - x \in (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]_{\mathbb{R}}. \tag{3.4}$$

The asymptotic equality stated in (3.7) means that the ratio of the two expressions converges to 1 as $n \to \infty$. We adopt the convention that

$$\text{for integers } u \text{ and } v, \ \binom{u}{v} = 0 \text{ whenever } 0 \leq v \leq u \text{ does not hold.} \tag{3.5}$$

Theorem 3.3. *Let $n \in \mathbb{N}^+$. With $\tau \approx 0.150\,837\,340\,460$ defined in (3.3),*

$$|\operatorname{Snc}(n)| \geq \binom{n - 3 - 3 \cdot \operatorname{round}(n\tau)}{\operatorname{round}(n\tau) - 1}. \tag{3.6}$$

Furthermore, letting

$$\kappa := \sqrt{\frac{1 - 3\tau}{2\pi\tau(1 - 4\tau)}} \approx 1.206\,809\,854,$$
$$\rho := \left(\frac{1 - 3\tau}{\tau}\right)^{\tau} \left(\frac{1 - 3\tau}{1 - 4\tau}\right)^{1-4\tau} \approx 1.380\,277\,569, \quad \textit{and}$$
$$\operatorname{Fl}(n) := \tau^{1-\operatorname{ds}(n\tau)} \cdot \left(\frac{1 - 4\tau}{1 - 3\tau}\right)^{2+4\operatorname{ds}(n\tau)} \approx \tau^{1-\operatorname{ds}(n\tau)} \cdot 0.724\,491\,959^{2+4\operatorname{ds}(n\tau)},$$

the binomial coefficient occurring in (3.6) satisfies the asymptotic equality

$$\binom{n - 3 - 3 \cdot \operatorname{round}(n\tau)}{\operatorname{round}(n\tau) - 1} \sim \frac{\kappa \cdot \operatorname{Fl}(n) \cdot \rho^n}{\sqrt{n}} \quad \textit{as} \quad n \to \infty, \tag{3.7}$$

and for all $n \in \mathbb{N}^+$,

$$0.058\,581\,879 \approx \tau^{3/2} < \operatorname{Fl}(n) < \tau^{1/2} \cdot \left(\frac{1 - 4\tau}{1 - 3\tau}\right)^4 \approx 0.107\,001\,216. \tag{3.8}$$

Since τ is an irrational number, $\operatorname{ds}(n\tau)$ fluctuates in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\mathbb{R}}$; in fact, each element of $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]_{\mathbb{R}}$ is an accumulation point of $\{\operatorname{ds}(n\tau) : n \in \mathbb{N}^+\}$. One of the roles of $\operatorname{Fl}(n)$ in (3.7) is to neutralize this fluctuation. By (3.8), the supremum-to-infimum ratio of the fluctuation is less than 2.

Example 3.4. *For the same three values of n as in Example 3.2, the available lower bounds from (3.6) and the asymptotic estimates from (3.7) are listed in (3.9).*

$n =$	$\lvert\mathrm{Snc}(n)\rvert \overset{(3.6)}{\geq}$	$\frac{\kappa \mathrm{Fl}(n)\rho^n}{\sqrt{n}} \approx$
564	$6.440\,4349 \cdot 10^{76}$	$3.363\,0780 \cdot 10^{76}$
2026	$1.447\,5773 \cdot 10^{281}$	$1.010\,3258 \cdot 10^{281}$
10^{10}	*not available*	$1.860\,4317 \cdot 10^{1\,399\,664\,297}$

(3.9)

3.2 Upper bounds

Let $\mathrm{lnc}(n,k)$ denote the k-th largest element of $\mathrm{Snc}(n)$. In particular, $\mathrm{lnc}(n,1)$ is the largest element of $\mathrm{Snc}(n)$. Assume that we have a function $n \mapsto k(n)$ such that, for some threshold value $2 \leq n_0 \in \mathbb{N}^+$, we know $\mathrm{lnc}(n,k(n))$ for all $n \in \mathbb{N}^+$ with $n \geq n_0$. Then

$$\text{for every } n \geq n_0, \text{ we have } \lvert\mathrm{Snc}(n)\rvert \leq k(n) + \mathrm{lnc}(n,k(n)) - 2. \tag{3.10}$$

Indeed, $\mathrm{lnc}(n,k) \geq 2$. Hence, apart from the $k(n)$ "large" numbers in $\mathrm{Snc}(n)$, the rest of the members of $\mathrm{Snc}(n)$ are in the $\big(\mathrm{lnc}(n,k(n)) - 2\big)$-element set $\{2, 3, \ldots, \mathrm{lnc}(n,k(n))-1\}$. This implies (3.10). Combining (3.10) with (the Main) Theorem 2(iii) of Czédli [8]—in which $k(n) = n$ and $\mathrm{lnc}(n,k(n)) = 2^{n-4}+3$—we obtain

$$\lvert\mathrm{Snc}(n)\rvert \leq n + 1 + 2^{n-4} = n + 1 + 8 \cdot 2^{n-7} \quad \text{for all} \quad n \geq 8. \tag{3.11}$$

Later, the arXiv preprint [10] improved the result of [8] by proving $\mathrm{lnc}(n, n+4) = 25 \cdot 2^{n-9}$ for $n \geq 9$. This result together with (3.10) yields

$$\lvert\mathrm{Snc}(n)\rvert \leq n + 2 + 25 \cdot 2^{n-9} = n + 2 + 6.25 \cdot 2^{n-7} \quad \text{for all} \quad n \geq 9. \tag{3.12}$$

Let $\mathrm{lns}(n,k)$ denote the kth largest member of $\mathrm{Sns}(n)$, and assume that $2 \leq n_0' \in \mathbb{N}^+$. Then the situation for $\lvert\mathrm{Sns}(n)\rvert$ is analogous to that for $\lvert\mathrm{Snc}(n)\rvert$ discussed above. If we are given a function $n \mapsto k'(n)$ and the values $\mathrm{lns}(n,k'(n))$ for all $n \geq n_0'$, then—taking into account that $\emptyset$, L, and the singleton subsets of L are always in $\mathrm{Sub}(L)$ and, in particular, that $n - 2 \leq \mathrm{lns}(n,k'(n))$—we have that

$$\lvert\mathrm{Sns}(n)\rvert \leq k'(n) + \mathrm{lns}(n,k'(n)) - n - 2 \quad \text{for all} \quad n \geq n_0'. \tag{3.13}$$

Combining (3.13) with Ahmed and Horváth [1], which proves $\operatorname{lns}(n,5) = 85\cdot 2^{n-7}$ for $n \geq 7$, we obtain

$$|\operatorname{Sns}(n)| \leq 85\cdot 2^{n-7} - n + 3 \quad \text{for all} \quad n \geq 7. \tag{3.14}$$

For $n \geq 8$, (3.13) and (the Abstract of) Zaya, Haje, and Ahmed [23] imply $|\operatorname{Sns}(n)| \leq 83\cdot 2^{n-7} - n + 5$ for $n \geq 8$, which improves (3.14).

At the cost of not determining a concrete threshold n_0 and upper bounds valid for all $n \geq n_0$, the following theorem improves the $O(2^n)$ upper bounds given in (3.11), (3.12), and (3.14) to an $o(2^n)$ upper bound on $|\operatorname{Snc}(n)|$ and on $|\operatorname{Sns}(n)|$.

Theorem 3.5. $|\operatorname{Snc}(n)| = o(2^n)$ *and* $|\operatorname{Sns}(n)| = o(2^n)$. *Equivalently, for every positive* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{Snc}(n)| \leq \varepsilon\cdot 2^n$ *and* $|\operatorname{Sns}(n)| \leq \varepsilon\cdot 2^n$ *for all sufficiently large* n.

Yet another way to formulate this statement is that for every positive integer m, $|\operatorname{Snc}(n)| \leq 2^{n-m}$ and $|\operatorname{Sns}(n)| \leq 2^{n-m}$ for all but finitely many n.

4 Proofs

Proof of Theorem 3.1. Assume that $564 \leq n \in \mathbb{N}^+$. Let $k \in \mathbb{N}^+$ with $k \leq m := n-2$. A k-tuple $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_k)$ of positive integers is called an *integer partition* of m into k *distinct parts* if $t_1 + \cdots + t_k = m$ and $t_1 > t_2 > \cdots > t_k$. Let $\operatorname{DIP}_k(m)$ denote the set of these *distinct integer partitions*, and let $q_k(m) := |\operatorname{DIP}_k(m)|$ stand for their number. The function

$$f_{m,k}\colon \operatorname{DIP}_k(m) \to \mathbb{N}^+, \quad (t_1, \ldots, t_k) \mapsto \sum_{i=1}^{k} 2^{t_i}$$

is injective, since the binary expansion of a natural number is unique.

For each $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in \operatorname{DIP}_k(m)$, we define an n-element lattice $K(\vec{t})$ as follows. For $i \in \{1, \ldots, k\}$, let U_i be a t_i-element chain such that, for $i \neq j$, $U_i \cap U_j = \emptyset$ and $\{0,1\} \cap U_i = \emptyset$. Then $K(\vec{t}) := U_1 \cup \cdots \cup U_k \cup \{0,1\}$ such that 0 is the bottom element of $K(\vec{t})$, 1 is the top element, U_i is a chain in $K(\vec{t})$ for $i \in \{1, \ldots, k\}$, and for any $x \in U_i$ and $y \in U_j$, $i \neq j$ implies that x and y are incomparable or, equivalently, $x \vee y = 1$ and $x \wedge y = 0$. For example, $K(2,1) = N_5$ and $K(4,3,2)$ are drawn in the middle of Figure 1.

To determine $|\operatorname{Sub}(K(\vec{t}))|$, note that there are 2^m sublattices S such that $\{0,1\} \subseteq S$, and there are three members S of $\operatorname{Sub}(K(\vec{t}))$ such that $S \subset \{0,1\}$. (Note that, as usual in lattice theory, "$\subset$" is the conjunction of

"$\neq$" and "$\subseteq$".) Each further $S \in \mathrm{Sub}(K(\vec{t}))$ is of the unique form $A \cup B$ such that $A \subset \{0,1\}$ and B is a nonempty subset of exactly one of the chains $U_1, \ldots, U_k$. We can choose A and B in 3 ways and $(2^{t_1}-1)+\cdots+(2^{t_k}-1) = f_{m,k}(\vec{t}) - k$ ways, respectively. Thus

$$|\mathrm{Sub}(K(\vec{t}))| = 2^m + 3 + 3\big(f_{m,k}(\vec{t}) - k\big) = 3f_{m,k}(\vec{t}) + (2^m + 3 - 3k).$$

This equality, the injectivity of $f_{m,k}$, and $|\mathrm{Sub}(K(\vec{t}))| \in \mathrm{Sns}(n)$ imply that

$$\text{for any } k \in \mathbb{N}^+, \quad q_k(n-2) = q_k(m) = |\mathrm{DIP}_k(m)| \leq |\mathrm{Sns}(n)|. \tag{4.1}$$

The rest of the proof focuses on distinct integer partitions. Denote by $q(m)$ the number of all distinct integer partitions of m. That is, $q(m) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(m)$. Of course, far fewer than infinitely many summands are sufficient here. Specifically, if $q_k(m) > 0$, then pick an integer partition $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathrm{DIP}_k(m)$ to obtain

$$k^2/2 \leq k(k+1)/2 = 1 + \cdots + k \leq t_1 + \cdots + t_k = m,$$

whereby $k \leq \sqrt{2m}$. Hence $q(m) = \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{2m}\rfloor} q_k(m)$, where $\lfloor\sqrt{2m}\rfloor$ denotes the integer part of $\sqrt{2m}$. Thus pigeonhole principle and $\lfloor\sqrt{2m}\rfloor \leq \sqrt{2m}$ imply that

$$\text{there is a } k \in \mathbb{N}^+ \text{ such that } q(m)/\sqrt{2m} \leq q_k(m). \tag{4.2}$$

The rest of the proof relies on Dong and Ji [14]. Basically, we are going to turn the first inequality in [14, (1.8)] into an explicit formula in a straightforward way.

Denote the set of real numbers by $\mathbb{R}$. For $x \in \mathbb{R}$, let

$$G(x) := 1 - \frac{3}{8x} - \frac{15}{128x^2} - \frac{105}{1024x^3} - \frac{4725}{32768x^4} - \frac{72765}{262144x^5} - \frac{31}{x^6}.$$

Note that, using $E_I(x)$ from [14, (2.3)], $G(x) = E_I(x) - 31/x^6$. Let $I_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stand for the first modified Bessel function of the first kind; we do not need its definition. The "lower estimate" part of Lemma 2.2 of Dong and Ji [14] asserts that

$$\text{if } \ x \geq 26, \ \text{ then } \ I_1(x) \geq \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \cdot G(x). \tag{4.3}$$

Following Dong and Ji [14, (1.3) and (1.7)], but using $m = n - 2$ instead of n, define

$$\nu(m) := \frac{\pi}{\sqrt{72}}\sqrt{24m+1} \ \text{ and} \tag{4.4}$$

$$M(m) := \frac{\sqrt{2}\cdot\pi^2}{12\,\nu(m)}\, I_1\big(\nu(m)\big). \tag{4.5}$$

A part of Theorem 1.3 of Dong and Ji [14] asserts that

$$\text{if } \ \nu(m) \geq 43, \ \text{ then } \ M(m)\Big(1-\nu(m)^{-6}\Big) \leq q(m). \tag{4.6}$$

We denote $G(43)(1-1/43^6)$ by η. A straightforward computation yields that

$$\eta = G(43)(1-1/43^6) = \frac{1\,297\,893\,279\,365\,102\,398\,023\,045}{1\,309\,397\,181\,964\,700\,103\,507\,968}.$$

Since $G(x)$ and $G(x)\cdot(1-1/x^6)$ are monotone increasing on the interval $(0,\infty)_{\mathbb{R}}$,

$$\text{if } \ x \geq 43, \ \text{ then } \ G(x)\cdot\Big(1-\frac{1}{x^6}\Big) \geq \eta. \tag{4.7}$$

It is straightforward to see that

$$\text{for } m \geq 562, \text{ we have } \nu(m) \geq 43. \tag{4.8}$$

Using the equalities and inequalities presented so far, assuming $n \geq 564$ (equivalently, $m \geq 562$), implicitly taking (4.8) into account (that is, $\nu(m) \geq 43$), and choosing k according to (4.2), we compute as follows.

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Sns}(n)| &\overset{(4.1)}{\geq} q_k(m) \overset{(4.2)}{\geq} \frac{q(m)}{\sqrt{2m}} \overset{(4.6)}{\geq} \frac{M(m)\big(1-\nu(m)^{-6}\big)}{\sqrt{2m}} \\
&\overset{(4.5)}{=} \frac{\sqrt{2}\,\pi^2 I_1\big(\nu(m)\big)\big(1-\nu(m)^{-6}\big)}{12\nu(m)\cdot\sqrt{2m}} \\
&\overset{(4.3)}{\geq} \frac{\sqrt{2}\,\pi^2 G(\nu(m))\big(1-\nu(m)^{-6}\big)}{12\nu(m)\cdot\sqrt{2m}\cdot\sqrt{2\pi\nu(m)}}\cdot e^{\nu(m)} \\
&\overset{(4.7)}{\geq} \frac{\sqrt{2}\,\pi^2\cdot\eta}{12\nu(m)\cdot\sqrt{2m}\cdot\sqrt{2\pi\nu(m)}}\cdot e^{\nu(m)} \\
&= \frac{\eta\pi^{3/2}\sqrt{2}\cdot e^{\nu(m)}}{24\nu(m)^{3/2}\cdot\sqrt{m}} = \frac{\eta\pi^{3/2}\sqrt{2}\cdot e^{\nu(n-2)}}{24\nu(n-2)^{3/2}\cdot\sqrt{n-2}} \\
&\overset{(4.4)}{=} \frac{\eta\pi^{3/2}\sqrt{2}\cdot e^{\pi\sqrt{24n-47}/\sqrt{72}}}{24\pi^{3/2}(24n-47)^{3/4}\cdot 72^{-3/4}\cdot\sqrt{n-2}} \\
&= \frac{44\cdot 72^{3/4}\eta\sqrt{2}}{63\cdot 24}\cdot\frac{63\cdot e^{\pi\sqrt{n/3-47/72}}}{44\cdot(24n-47)^{3/4}\cdot\sqrt{n-2}}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Computer algebra shows that the first fraction in (4.9) is larger than 1. (It is approximately 1.008 283 911.) This completes the proof of Theorem 3.1. □

Remark 4.1. *The exciting story of the number $q(m)$ of distinct (also called unequal) partitions of m goes back to Hardy and Ramanujan [19], who proved that*

$$q(m) \sim \frac{1}{4 \cdot 3^{1/4} \cdot m^{3/4}} \cdot e^{\pi\sqrt{m/3}} \quad \textit{as} \quad m \to \infty. \tag{4.10}$$

This result is only implicit in [19], but (4.10) is cited and attributed to [19] in Erdős and Lehner [15, (3.61)], and (4.10) also occurs in other publications, including Rosen [22, §11 on page 149]. Combining (4.1), (4.2), and (4.10), it follows that for each positive $\varepsilon \in \mathbb{R}$, there exists a positive integer $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+$ such that for all $n \in \mathbb{N}^+$,

$$\text{if} \quad n \geq n_0(\varepsilon), \quad \text{then} \quad \frac{(1-\varepsilon) \cdot e^{\pi\sqrt{(n-2)/3}}}{4 \cdot 3^{1/4} \cdot (n-2)^{3/4} \cdot \sqrt{2n-4}} \leq |\mathrm{Sns}(n)|. \tag{4.11}$$

In contrast to Theorem 3.1, (4.11) does not seem suitable for obtaining concrete lower bounds as in Example 3.2. Indeed, determining $n(\varepsilon)$ might be difficult and would lead us too far afield from the focus of this lattice-theoretic paper.

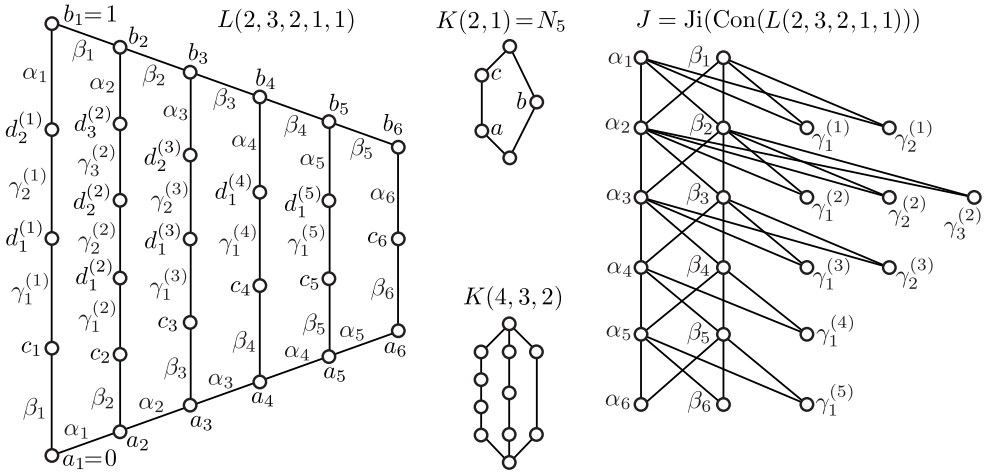


Figure 1: $L(2,3,2,1,1)$, N_5, $K(4,3,2)$, and $\mathrm{Ji}(\mathrm{Con}(L(2,3,2,1,1)))$

Proof of Theorem 3.3. We may assume $n \geq 11$, since otherwise the binomial coefficient in (3.6) is 0 or 1. For $k \in \mathbb{N}^+$ and $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{N}^{+k}$, we define a lattice $L(\vec{u}) = L(u_1, \ldots, u_k)$. Note that for $k = 5$ and $\vec{u} = (2,3,2,1,1)$, the lattice $L(\vec{u})$ is drawn on the left of Figure 1. The base set of $L(\vec{u})$ and the list of edges (that is, the covering relation) of this lattice

are the following:

$$L(\vec{u}) = \bigcup_{i=1}^{k+1}\{a_i, b_i, c_i\} \cup \bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{u_i}\{d_j^{(i)}\}, \quad a_{k+1} \prec c_{k+1},\ c_{k+1} \prec b_{k+1},$$
$$a_i \prec a_{i+1},\ b_i \prec b_{i+1},\ a_i \prec c_i,\ c_i \prec d_1^{(i)},\ d_{u_i}^{(i)} \prec b_i \ \text{ for } i \in \{1, \dots, k\},$$
$$d_j^{(i)} \prec d_{j+1}^{(i)} \ \text{ for } i \in \{1, \dots, k\} \text{ and } j \in \{1, \dots, u_i - 1\}.$$

For a pair $(x, y) \in L^2$ of elements, let $\mathrm{con}(x, y)$ denote the *congruence* (relation) *generated* by (x, y). Let $\mathrm{Edg}(L)$ stand for the set of *edges* of L, that is, $\mathrm{Edg}(L) = \{(x, y) \in L^2 : x \prec y\}$. Similarly, $\mathrm{So}(L)$ denotes the *strict order* of L, that is, $\mathrm{So}(L) = \{(x, y) \in L^2 : x < y\}$. Note that $\mathrm{Edg}(L) \subseteq \mathrm{So}(L)$. For $(a, b), (c, d) \in \mathrm{So}(L)$, we say that (a, b) and (c, d) are *perspective*—in notation, $(a, b) \sim_{\mathrm{p}} (c, d)$—if either $(a, b) = (c, d)$ or $\{a, b, c, d\}$ is a four-element non-chain (equivalently, a four-element Boolean) sublattice of L.

The *monolith* edge of N_5 is (a, c), the only edge whose endpoints are distinct from 0 and 1; see the top middle part of Figure 1. Let $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathrm{Edg}(L)$. Following Grätzer [18], we say that the edge (a_1, b_1) is *weakly perspective* to the edge (a_2, b_2)—in notation, $(a_1, b_1) \sim_{\mathrm{w}} (a_2, b_2)$—if either $(a_1, b_1) \sim_{\mathrm{p}} (a_2, b_2)$, or $|\{a_1, b_1, a_2, b_2\}| = 4$ and there exists a lattice embedding $\varphi\colon N_5 \to L$ such that (a_2, b_2) is the φ-image of the monolith edge of N_5. As opposed to perspectivity, weak perspectivity is not a symmetric relation in general. For edges (a_1, b_1) and (a_2, b_2) of a finite lattice L, the *Prime-Projectivity Lemma* (together with Note 1.2) of Grätzer [18] asserts that $\mathrm{con}(a_2, b_2) \leq \mathrm{con}(a_1, b_1)$ (equivalently, $(a_2, b_2) \in \mathrm{con}(a_1, b_1)$) if and only if there exists $t \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ and a sequence $(x_0, y_0) = (a_1, b_1)$, (x_1, y_1), $\dots$, (x_{t-1}, y_{t-1}), $(x_t, y_t) = (a_2, b_2)$ of edges such that $(x_{i-1}, y_{i-1}) \sim_{\mathrm{w}} (x_i, y_i)$ for all $i \in \{1, \dots, t\}$. In particular, if $(a_1, b_1) \sim_{\mathrm{p}} (a_2, b_2)$, then $\mathrm{con}(a_1, b_1) = \mathrm{con}(a_2, b_2)$.

For a finite lattice K, an element $x \in K$ is *join-irreducible* if it has exactly one lower cover. The set of these elements is denoted by $\mathrm{Ji}(K)$. It is well known, see the first sentence in the Introduction of Grätzer [18], that for every finite lattice K,

$$\mathrm{Ji}(\mathrm{Con}(K)) = \{\mathrm{con}(x, y) : (x, y) \in \mathrm{Edg}(K)\}. \tag{4.12}$$

For a vector $\vec{u} \in \mathbb{N}^{+k}$, let $J = J(\vec{u})$ denote the poset (partially ordered set) $\mathrm{Ji}(\mathrm{Con}(L(\vec{u})))$. For $\vec{u} = (2, 3, 2, 1, 1)$, this poset is depicted on the right of Figure 1. Next, we describe $J(\vec{u})$ in general; the correctness of this description and that of the figure is a straightforward consequence of the Prime-Projectivity Lemma and (4.12). Define the congruences $\alpha_i := \mathrm{con}(a_i, a_{i+1}) =$

$\operatorname{con}(d_{u_i}^{(i)}, b_i)$, $\beta_i := \operatorname{con}(b_i, b_{i+1}) = \operatorname{con}(a_i, c_i)$, and $\gamma_1^{(i)} := \operatorname{con}(c_i, d_1^{(i)})$ for $i \in \{1, \ldots, k\}$, the congruences $\gamma_j^{(i)} := \operatorname{con}(d_{j-1}^{(i)}, d_j^{(i)})$ for $i \in \{1, \ldots, k\}$ and $j \in \{2, \ldots, u_i\}$, and the congruences $\alpha_{k+1} := \operatorname{con}(c_{k+1}, b_{k+1})$ and $\beta_{k+1} := \operatorname{con}(a_{k+1}, c_{k+1})$. Then $J(\vec{u})$ consists exactly of these congruences, which are distinct. Furthermore, the coverings (alternatively, the edges) of the poset $J(\vec{u})$ are exactly the following: $\alpha_{i+1} \prec \alpha_i$, $\alpha_{i+1} \prec \beta_i$, $\beta_{i+1} \prec \alpha_i$, and $\beta_{i+1} \prec \beta_i$ for $i \in \{1, \ldots, k\}$ and, furthermore, $\gamma_j^{(i)} \prec \alpha_i$ and $\gamma_j^{(i)} \prec \beta_i$ for $i \in \{1, \ldots, k\}$ and $j \in \{1, \ldots, u_i\}$.

Let $\operatorname{Id}(J(\vec{u}))$ denote the poset of order ideals of $J(\vec{u})$ ordered by the "$\subseteq$" relation; a subset X of $J(\vec{u})$ is an *order ideal* if for all $x \in X$ and $y \in J(\vec{u})$, $y \leq x$ implies $y \in X$. We know that $\operatorname{Con}(L)$ is a distributive lattice. Thus the well-known structure theorem of finite distributive lattices (see Grätzer [17, Theorem 107]), combined with (4.12), yields that

$$\operatorname{Con}(L(\vec{u})) \cong \operatorname{Id}(J(\vec{u})), \quad \text{and therefore} \quad |\operatorname{Con}(L(\vec{u}))| = |\operatorname{Id}(J(\vec{u}))|. \tag{4.13}$$

For a vector $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{N}^{+k}$, we use the notations

$$\delta(\vec{u}) := k \quad \text{and} \quad s(\vec{u}) := u_1 + \cdots + u_k.$$

We claim that for every $\vec{u} \in \mathbb{N}^{+k}$,

$$|\operatorname{Con}(L(\vec{u}))| = 2^{s(\vec{u})} + 3\sigma(\vec{u}), \text{ where } \sigma(\vec{u}) := \sum_{i=0}^{\delta(\vec{u})} 2^{u_1+u_2+\cdots+u_i}. \tag{4.14}$$

To prove this, we use (4.13), that is, we count the order ideals of $J(\vec{u})$. For $X \in \operatorname{Id}(J(\vec{u}))$, we define the *depth* of X, denoted by $\operatorname{depth}(X)$, as follows.

$$\operatorname{depth}(X) := \begin{cases} k+2, & \text{if } X \cap \{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_{k+1}, \beta_{k+1}\} = \emptyset, \\ m, & \text{if } m = \min\{i : X \cap \{\alpha_i, \beta_i\} \neq \emptyset\} \text{ otherwise.} \end{cases}$$

For $X \in \operatorname{Id}(J(\vec{u}))$ with $i := \operatorname{depth}(X) \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$, we have that

$$\begin{aligned} &\alpha_t, \beta_t \in X \text{ for all } t \text{ with } i < t \leq k+1 = 1 + \delta(\vec{u}), \\ &\{\alpha_t, \beta_t\} \cap X = \emptyset \text{ for all } t \text{ with } 1 \leq t < i, \\ &\gamma_j^{(t)} \in X \text{ for all } t \text{ and } j \text{ with } i \leq t \leq k \text{ and } 1 \leq j \leq u_t, \text{ but} \\ &\text{there is no stipulation on } \gamma_j^{(t)}, \text{ if } 1 \leq t < i \text{ and } 1 \leq j \leq u_t. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Since (4.15) affects $u_1 + \cdots + u_{i-1}$ congruences, $X \cap \{\gamma_j^{(t)} : t < i \text{ and } 1 \leq j \leq u_t\}$ can be chosen in $2^{u_1+\cdots+u_{i-1}}$ ways. There are three possibilities

to choose the nonempty intersection $X \cap \{\alpha_i, \beta_i\}$. Hence there are exactly $3 \cdot 2^{u_1+\cdots+u_{i-1}}$ members $X \in \mathrm{Id}(J(\vec{u}))$ with $\mathrm{depth}(X) = i \in \{1, \ldots, k+1\}$. This explains the $3\sigma(\vec{u})$ part of (4.14); note that the summation index is shifted by 1. Since we have exactly $2^{s(\vec{u})}$ order ideals with depth $k+2$, we have shown (4.14).

Next, we claim that whenever $\vec{u}$ and $\vec{v}$ are vectors of positive integers such that $\delta(\vec{u}) = \delta(\vec{v})$ and $s(\vec{u}) = s(\vec{v})$, then

$$\vec{u} \neq \vec{v} \text{ implies } |\mathrm{Con}(L(\vec{u}))| \neq |\mathrm{Con}(L(\vec{v}))|. \tag{4.16}$$

To prove this, assume that $k := \delta(\vec{u}) = \delta(\vec{v})$, $s(\vec{u}) = s(\vec{v})$, and $\vec{u} \neq \vec{v}$. By (4.14), it suffices to show that $\sigma(\vec{u}) \neq \sigma(\vec{v})$. Since $\vec{u} \neq \vec{v}$, there is a smallest j such that $u_1 + \cdots + u_j \neq v_1 + \cdots + v_j$. By symmetry, we may assume $u_1 + \cdots + u_j < v_1 + \cdots + v_j$. The binary expansion of $\sigma(\vec{u})$ consists of $1 + s(\vec{u})$ bits. Namely, the bits of weights 2^0, 2^{u_1}, $2^{u_1+u_2}$, $\ldots$, $2^{u_1+\cdots+u_k} = 2^{s(\vec{u})}$ are equal to 1, all remaining bits are 0, and analogously for $\vec{v}$. By the choice of j, the bit of weight $2^{u_1+\cdots+u_i}$ is 1 both in $\sigma(\vec{u})$ and $\sigma(\vec{v})$ for $i \in \{0, 1, \ldots, j-1\}$, but the bit of weight $2^{u_1+\cdots+u_j}$ is 1 in $\sigma(\vec{u})$, while it is 0 in $\sigma(\vec{v})$. This fact and the uniqueness of binary expansions yield $\sigma(\vec{u}) \neq \sigma(\vec{v})$, which implies (4.16).

By construction, the number of elements of $L(\vec{u})$ is given by

$$|L(\vec{u})| = 3(k+1) + u_1 + \cdots + u_k = 3\delta(\vec{u}) + 3 + s(\vec{u}). \tag{4.17}$$

Next, let $k \in \mathbb{N}^+$. To determine how many vectors $\vec{u}$ with $|L(\vec{u})| = n$ and $\delta(\vec{u}) = k$ there exist, note that $s(\vec{u}) = n - 3 - 3k$ by (4.17). Thus $s := s(\vec{u})$ does not depend on $\vec{u}$. We have already seen that the binary expansion of $\sigma(\vec{u})$ has $1 + s$ bits. Furthermore, the bits of weights 2^0 and 2^s are 1, and exactly $k-1$ additional bits are equal to 1. If 2^{v_1}, 2^{v_2}, $\ldots$, $2^{v_{k-1}}$ are the weights of these additional bits such that $1 \leq v_1 < v_2 < \cdots < v_{k-1} < s$, then the system

$$u_1 = v_1,\ u_1 + u_2 = v_2,\ \ldots,\ u_1 + \cdots + u_{k-1} = v_{k-1},\ u_1 + \cdots + u_k = s$$

of equalities determines $\vec{u}$, and each eligible $\vec{u}$ is obtained in this way from a unique $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_{k-1})$ with $1 \leq v_1 < v_2 < \cdots < v_{k-1} \leq s-1$. Since there are exactly

$$f(n,k) := \binom{s-1}{k-1} = \binom{n-3-3k}{k-1} \tag{4.18}$$

eligible vectors $\vec{v}$, there are $f(n,k)$ many corresponding vectors $\vec{u}$ and, by (4.16), $f(n,k)$ many n-element lattices $L(\vec{u})$ with pairwise different numbers

of congruences (such that $s(\vec{u}) = n - 3 - 3k$). Hence, for any $n, k \in \mathbb{N}^+$,

$$|\mathrm{Snc}(n)| \geq f(n,k). \tag{4.19}$$

Since $1 \leq v_1 < v_2 < \cdots < v_{k-1} \leq s-1$, here and later in the proof, we may assume that $k-1 \leq v_{k-1} \leq s-1 = (n-3-3k)-1$, that is, $k \leq (n-3)/4$. Since $n \geq 11$, it is straightforward to verify that $k := \mathrm{round}(n\tau)$ satisfies this inequality. Therefore, after substituting $\mathrm{round}(n\tau)$ for k, (4.18) and (4.19) imply (3.6).

We now present a plausible argument explaining why we choose $k := \mathrm{round}(n\tau)$. This is not an integral part of the proof of Theorem 3.3, and therefore does not affect its validity. Let $k_0(n)$ denote the value of k at which $f(n,k)$ attains its maximum for a given n; that is, $f(n,k_0(n)) = \max\{f(n,k) : 1 \leq k \leq (n-3)/4\}$. We make it plausible that $k_0(n) \sim n\tau$ as $n \to \infty$, but we do not prove this rigorously.

To approximate $k_0(n)$, we examine the ratio

$$r(k) := \frac{f(n,k+1)}{f(n,k)}. \tag{4.20}$$

Combining (4.18) and (4.20), a direct computation yields that

$$r(k) = \frac{(n-5-4k)(n-4-4k)(n-3-4k)(n-2-4k)}{k(n-5-3k)(n-4-3k)(n-3-3k)}. \tag{4.21}$$

This expression would be difficult to handle. Thus we assume that n is large. We divide the numerator and the denominator of (4.21) by n^4, and we ignore the low-order terms. Then, letting $x := k/n$, we obtain that, as $n \to \infty$,

$$r(k) \approx R(x) := \frac{(1-4x)^4}{x(1-3x)^3}.$$

Since $1 \leq k \leq (n-3)/4$, we have $x \in (0, \frac{1}{4})_{\mathbb{R}}$. It is routine to verify—even by computer algebra if desired—that the polynomial h, defined in (3.2), is positive on $(0,\tau)_{\mathbb{R}}$ and negative on $(\tau, \frac{1}{4})_{\mathbb{R}}$. Since h is the difference between the numerator and denominator of $R(x)$, which are positive on $(0, \frac{1}{4})_{\mathbb{R}}$, we obtain $R(x) > 1$ in the interval $(0,\tau)_{\mathbb{R}}$ and $R(x) < 1$ in the interval $(\tau, \frac{1}{4})_{\mathbb{R}}$. Using $r(k) \approx R(x)$, $k = nx$, and (4.20), it follows asymptotically that the sequence $f(n,1), f(n,2), \ldots, f(n,k), \ldots$ is increasing up to about $k \approx n\tau$, and decreases thereafter. This explains the choice $k(n) = \mathrm{round}(n\tau)$ in Theorem 3.3.

Note that, using computer algebra, we obtain

$$\begin{aligned}
&|\{n : n \in \{11, 12, \dots, 2026\} \text{ and } k_0(n) \neq \operatorname{round}(n\tau)\}| = 123,\\
&|\{n : n \in \{11, 12, \dots, 2026\} \text{ and } k_0(n) \neq \lceil n\tau \rceil\}| = 879,\\
&|\{n : n \in \{11, 12, \dots, 2026\} \text{ and } k_0(n) \neq \lfloor n\tau \rfloor\}| = 1137,\\
&|\{n : n \in \{11, 12, \dots, 2026\} \text{ and } k_0(n) \notin \{\operatorname{round}(n\tau), \lfloor n\tau \rfloor, \lceil n\tau \rceil\}\}| = 0.
\end{aligned}$$

The last line of the display above is equivalent to the statement that, for every $n \in \{11, 12, \dots, 2026\}$, we have $|k_0(n) - n\tau| < 1$. It would not make much sense to extend the display to $n \in \{1, \dots, 10\}$, since in that range the binomial coefficient in (3.6) is 0 or 1, in most cases by (3.5), while the definition of $k_0(n)$ becomes problematic.

Resuming the rigorous proof, to show (3.7), we need Stirling's formula:

$$\text{for } \ m \in \mathbb{N}^+, \quad m! \sim \sqrt{2\pi m}\Big(\frac{m}{e}\Big)^m. \tag{4.22}$$

To avoid more cumbersome notation, we often abbreviate $\operatorname{round}(\tau n)$ by r, that is,

$$r := \operatorname{round}(\tau n), \ \text{ and we let } \ y := r - n\tau = \operatorname{ds}(n\tau) \in (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]_{\mathbb{R}}.$$

In fact, $y \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\mathbb{R}}$, since τ is irrational. In the remaining of the proof, we often mark $=$, $\sim$, and $\to$ (denoting convergence) with $*$ to indicate that, in addition to possible other considerations, we simplify fractions by suitable powers of n. Implicitly, we often use that $r/n \to \tau$ as $n \to \infty$. We now compute as follows.

$$\begin{aligned}
&\binom{n - 3 - 3 \cdot \operatorname{round}(n\tau)}{\operatorname{round}(n\tau) - 1} = \frac{(n-3-3r)!}{(r-1)!(n-2-4r)!} \overset{(4.22)}{\sim}\\
&\frac{\sqrt{2\pi(n-3-3r)} \cdot (n-3-3r)^{n-3-3r} \cdot e^{r-1} \cdot e^{n-2-4r}}{e^{n-3-3r}\sqrt{2\pi(r-1)} \cdot (r-1)^{r-1}\sqrt{2\pi(n-2-4r)} \cdot (n-2-4r)^{n-2-4r}}\\
&= a_1 a_2 a_3 a_4 a_5,
\end{aligned} \tag{4.23}$$

where

$$a_1 = \frac{\sqrt{2\pi(n-3-3r)} \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi(r-1)}\sqrt{2\pi(n-2-4r)}} \overset{*}{\sim} \frac{\sqrt{1-3\tau}}{\sqrt{2\pi\tau(1-4\tau)}} = \kappa, \tag{4.24}$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}, \tag{4.25}$$

$$a_3 = \Big(\frac{n-3-3r}{n-3n\tau}\Big)^{n-3n\tau} \cdot \Big(\frac{n\tau}{r-1}\Big)^{n\tau} \cdot \Big(\frac{n-4n\tau}{n-2-4r}\Big)^{n-4n\tau}, \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{(n-3-3r)^{-3-3y}}{(r-1)^{y-1}\cdot(n-2-4r)^{-2-4y}} \\ &= \Big(\frac{r-1}{n-3-3r}\Big)^{1-y}\cdot\Big(\frac{n-2-4r}{n-3-3r}\Big)^{2+4y} \\ &\overset{*}{\sim} \tau^{1-y}\cdot\Big(\frac{1-4\tau}{1-3\tau}\Big)^{2+4y} = \mathrm{Fl}(n). \end{aligned} \tag{4.27}$$

and

$$\begin{aligned} a_5 &= \frac{(n-3n\tau)^{n-3n\tau}}{(n\tau)^{n\tau}\cdot(n-4n\tau)^{n-4n\tau}} = \frac{(n-3n\tau)^{n\tau}}{(n\tau)^{n\tau}}\cdot\frac{(n-3n\tau)^{n-4n\tau}}{(n-4n\tau)^{4-4n\tau}} \\ &\overset{*}{=} \Big(\frac{1-3\tau}{\tau}\Big)^{\tau\cdot n}\cdot\Big(\frac{1-3\tau}{1-4\tau}\Big)^{(1-4\tau)\cdot n} = \rho^n. \end{aligned} \tag{4.28}$$

By Lagrange's Mean Value Theorem and $(\log x)' = 1/x$, we have that for any positive $u, v \in \mathbb{R}$, regardless of which of u and v is smaller,

$$\log v - \log u = \frac{v-u}{u+\theta\cdot(v-u)} \quad \text{for some } \theta \in (0,1)_{\mathbb{R}}. \tag{4.29}$$

Hence, using (4.26), (4.29), $r - n\tau = y$, $r/n \to \tau$, and that $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ below are in $(0,1)_{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} \log a_3 &= (n-3n\tau)\big(\log(n-3-3r) - \log(n-3n\tau)\big) \\ &\quad + n\tau\big(\log(n\tau) - \log(r-1)\big) \\ &\quad + (4-4n\tau)\big(\log(n-4n\tau) - \log(n-2-4r)\big) \\ &= \frac{(n-3n\tau)\cdot(-3-3y)}{n-3n\tau+\theta_1(-3-3y)} + \frac{n\tau\cdot(1-y)}{r-1+\theta_2(1-y)} \\ &\quad + \frac{(n-4n\tau)\cdot(2+4y)}{n-2-4r+\theta_3(2+4y)} \\ &\overset{*}{\to} (-3-3y)+(1-y)+(2+4y) = 0 \quad \text{as} \quad n\to\infty. \end{aligned}$$

This implies that

$$a_3 \sim e^0 = 1. \tag{4.30}$$

Next, (4.23), (4.24), (4.25), (4.27), (4.28), and (4.30) imply (3.7). Finally, consider the function

$$f(x) := \tau^{1-x}\cdot\xi^{2+4x}, \quad \text{where } \xi := \frac{1-4\tau}{1-3\tau}.$$

Its derivative is

$$f'(x) = \big(e^{\log(\tau^{1-x}\xi^{2+4x})}\big)' = \big(e^{(1-x)\log\tau+(2+4x)\log\xi}\big)'$$

$$= e^{(1-x)\log\tau+(2+4x)\log\xi}\cdot\big((1-x)\log\tau+(2+4x)\log\xi\big)'$$
$$= f(x)\big(-\log\tau+4\log\xi\big).$$

Since $-\log\tau+4\log\xi\approx 0.602\,414\,774>0$ and $f(x)$ is positive on $\mathbb{R}$, the derivative $f'(x)$ is also positive on $\mathbb{R}$. Hence $\tau^{3/2}=f(-\frac{1}{2})<f(x)<f(\frac{1}{2})=\tau^{1/2}\xi^4$ for all $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})_{\mathbb{R}}$. This implies (3.8), since $\mathrm{ds}(n\tau)\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})_{\mathbb{R}}$ and $\mathrm{Fl}(n)=f\big(\mathrm{ds}(n\tau)\big)$. The proof of Theorem 3.3 is complete. □

Proof of Theorem 3.5. First, we outline the main idea of the proof. Building on results proved in earlier papers, we show that the Jordan measure of the complementary set $I\subseteq[0,1]_{\mathbb{R}}$ of the set of densities (to be defined soon) is 1. Then, after normalizing the natural numbers that could be $|\mathrm{Con}(L)|$ or $|\mathrm{Sub}(L)|$ for lattices L with $|L|=n$ to the interval $[0,1]_{\mathbb{R}}$, it turns out that, apart from $o(2^n)$ exceptions, these numbers fall into I. Thus, apart from these $o(2^n)$ exceptions, no further numbers arise in the form $|\mathrm{Con}(L)|$ or $|\mathrm{Sub}(L)|$. Although I is Jordan measurable, we work with the Lebesgue measure to take advantage of its σ-additivity. For convenience, we also work with a suitable subset $I_0\subseteq I$, which still has Jordan measure 1.

For a finite lattice L, the *congruence density* $\mathrm{cd}(L)$ and the *sublattice density* $\mathrm{sd}(L)$ of L are defined by

$$\mathrm{cd}(L):=|\mathrm{Con}(L)|\cdot 2^{1-|L|}\quad\text{and}\quad\mathrm{sd}(L):=|\mathrm{Sub}(L)|\cdot 2^{-|L|}.$$

Since $\mathrm{lnc}(|L|,1)=2^{|L|-1}$, by Freese [16] or Czédli [3], $\mathrm{cd}(L)$ belongs to the real interval $(0,1]_{\mathbb{R}}$. Trivially, so does $\mathrm{sd}(L)$. Hence,

$$\begin{aligned}\mathrm{SCD}&:=\{\mathrm{cd}(L):L\text{ is a finite lattice}\}\subseteq(0,1]_{\mathbb{R}}\text{ and}\\ \mathrm{SSD}&:=\{\mathrm{sd}(L):L\text{ is a finite lattice}\}\subseteq(0,1]_{\mathbb{R}}.\end{aligned}\tag{4.31}$$

Define

$$\begin{aligned}\mathrm{TCC}&:=\text{the topological closure of SCD}\quad\text{and}\\ \mathrm{TCS}&:=\text{the topological closure of SSD}.\end{aligned}$$

Then $\mathrm{TCC}\subseteq[0,1]_{\mathbb{R}}$ and $\mathrm{TCS}\subseteq[0,1]_{\mathbb{R}}$. Note that TCC = SCD∪{accumulation points of SCD}, and analogously for TCS. It is proved in Czédli [11] and [12] that $0,1\in\mathrm{TCC}\cap\mathrm{TCS}$, and that these two sets are countably infinite, that is,

$$|\mathrm{TCC}|=\aleph_0\quad\text{and}\quad|\mathrm{TCS}|=\aleph_0.\tag{4.32}$$

Note that, from now on, the arguments for $|\mathrm{Snc}(n)|$ and $|\mathrm{Sns}(n)|$ are practically the same; the main difference is which equality in (4.32) is needed (that is, whether [11] or [12] is invoked) and which of $\mathrm{lnc}(n,1)=2^{n-1}$ and $\mathrm{lns}(n,1)=2^n$ is used. Therefore, we give the details only for $|\mathrm{Snc}(n)|$.

Let

$$I_0 := [0,1]_{\mathbb{R}} \setminus \mathrm{TCC}, \quad \text{and note that} \quad 0, 1 \notin I_0.$$

For $p \in I_0$, we define an open interval $J_p = (a_p, b_p)$ containing p as follows. Let a_p be the supremum of $[0,p)_{\mathbb{R}} \cap \mathrm{TCC}$. Since $0 \in \mathrm{TCC}$ and $p \leq 1$, the set $[0,p)_{\mathbb{R}} \cap \mathrm{TCC}$ is nonempty and bounded above, so this supremum exists. Then $a_p \in \mathrm{TCC}$, since TCC is topologically closed. Since $a_p \leq p$ and $p \notin \mathrm{TCC}$, we have $a_p < p$. Clearly, $(a_p, p]_{\mathbb{R}} \cap \mathrm{TCC} = \emptyset$. Defining $b_p := \inf\big((p,1] \cap \mathrm{TCC}\big)$, we obtain similarly (or by duality) that $p < b_p$ and $[p, b_p)_{\mathbb{R}} \cap \mathrm{TCC} = \emptyset$. To summarize,

$$\text{for every } p \in I_0, \quad p \in (a_p, b_p)_{\mathbb{R}} =: J_p, \text{ and } J_p \subseteq I_0. \tag{4.33}$$

Observe that

$$\text{for any } p, q \in I_0, \text{ either } J_p = J_q \text{ or } J_p \cap J_q = \emptyset. \tag{4.34}$$

To see this, assume that $J_p \cap J_q \neq \emptyset$ and pick $x \in J_p \cap J_q$. If we had $b_q < b_p$, then b_q would belong to $(x, b_p)_{\mathbb{R}} \subseteq (a_p, b_p)_{\mathbb{R}} = J_p$, and since $b_q \in \mathrm{TCC}$, this contradicts $J_p \subseteq I_0$. Thus $b_p \leq b_q$. By symmetry, $b_q \leq b_p$, so $b_p = b_q$. By duality, $a_p = a_q$. Hence $J_p = J_q$, showing (4.34).

By (4.33) and (4.34), $\{J_p : p \in I_0\}$ is a partition of I_0. Since $\mathrm{TCC} = \aleph_0$, this partition has infinitely many blocks J_p. But each open interval J_p contains a rational number, and therefore (4.34) implies that there are at most $\aleph_0$ such intervals. Thus there are exactly $\aleph_0$ of them. The facts presented in the current paragraph imply that—although we have considered continuum many numbers p—there are only countably many distinct intervals J_p, so they can be indexed by natural numbers. That is, each interval J_p can be denoted by U_s for some $s = s(p) \in \mathbb{N}^+$. Then we have that

$$I_0 = \bigcup_{s \in \mathbb{N}^+} U_s, \quad \text{where } U_1, U_2, U_3, \ldots \text{ are pairwise disjoint} \tag{4.35}$$

nonempty open intervals. Let μ denote the *Lebesgue measure* on $\mathbb{R}$. It is additive, and $|\mathrm{TCC}| = \aleph_0$ yields $\mu(\mathrm{TCC}) = 0$. Thus $\mu(I_0) = \mu([0,1]_{\mathbb{R}}) - \mu(\mathrm{TCC}) = 1$. Therefore the σ-additivity of μ and (4.35) imply

$$\sum_{s=1}^{\infty} \mu(U_s) = 1. \tag{4.36}$$

Note that (4.35) and (4.36) imply that I_0 is Jordan measurable and its Jordan measure is 1. However, it is more convenient to continue the proof

with the already defined intervals U_1, U_2, U_3, ... rather than exploiting the Jordan measurability of I_0 in another way.

For $n \in \mathbb{N}^+$, we define a grid, its "scaled up" version, the "scaled up" version of I_0, and an auxiliary set as follows; note that none of them contains 0.

$$\left.\begin{aligned} G_0(2^{n-1}) &:= \{i/2^{n-1} : i \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}\} \subseteq (0,1]_{\mathbb{R}}, \\ G_1(2^{n-1}) &:= \{2^{n-1}x : x \in G_0(2^{n-1})\} = \{1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}\}, \\ I_1(2^{n-1}) &:= \{2^{n-1}x : x \in I_0\}, \\ J(2^{n-1}) &:= I_1(2^{n-1}) \cap G_1(2^{n-1}). \end{aligned}\right\} \tag{4.37}$$

We claim that for any open interval $(a,b)_{\mathbb{R}}$ with $0 \leq a < b \leq 1$,

$$\frac{|(a,b)_{\mathbb{R}} \cap G_0(2^{n-1})|}{2^{n-1}} \to \mu((a,b)_{\mathbb{R}}) = b - a \quad \text{as } n \to \infty. \tag{4.38}$$

Although (4.38) is intuitively clear, we give a formal proof of it. Let $H(n) := (a,b)_{\mathbb{R}} \cap G_0(2^{n-1})$. Its smallest and largest elements are $i_0/2^{n-1}$ and $i_1/2^{n-1}$ with $i_0 := \lfloor a2^{n-1} \rfloor + 1$ and $i_1 = \lceil b2^{n-1} \rceil - 1$, respectively. Thus $|H(n)| = i_1 - i_0 + 1 = \lceil b2^{n-1} \rceil - \lfloor a2^{n-1} \rfloor - 1$, and $|H(n)|/2^{n-1} \to b - a = \mu((a,b)_{\mathbb{R}})$, which proves (4.38).

Now consider an arbitrary $\varepsilon \in (0,1)_{\mathbb{R}}$. By (4.36), there is a $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+$ such that

$$\sum_{s=1}^{k(\varepsilon)} \mu(U_s) \geq 1 - \varepsilon/2. \tag{4.39}$$

Only finitely many intervals U_s occur in (4.39). Hence (4.38) implies the existence of a common threshold value $n_0(\varepsilon)$ that works for all $s \in \{1, \ldots, k(\varepsilon)\}$ as follows:

$$\frac{|U_s \cap G_0(2^{n-1})|}{2^{n-1}} \geq \mu(U_s) - \frac{\varepsilon}{2k(\varepsilon)} \text{ for all } s \leq k(\varepsilon) \text{ and } n \geq n_0(\varepsilon). \tag{4.40}$$

Since the intervals $U_1, \ldots, U_{k(\varepsilon)}$ are pairwise disjoint, so are the sets $U_1 \cap G_0(2^{n-1})$, ..., $U_{k(\varepsilon)} \cap G_0(2^{n-1})$. Hence, using (4.35), (4.37), (4.39), and

(4.40),

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{|I_1(2^{n-1}) \cap G_1(2^{n-1})|}{2^{n-1}} \overset{(4.37)}{=} \frac{|I_0 \cap G_0(2^{n-1})|}{2^{n-1}} \\
&\overset{(4.35)}{\geq} \frac{|(\bigcup_{s=1}^{k(\varepsilon)} U_s) \cap G_0(2^{n-1})|}{2^{n-1}} = \frac{|\bigcup_{s=1}^{k(\varepsilon)} (U_s \cap G_0(2^{n-1}))|}{2^{n-1}} \\
&= \frac{\sum_{s=1}^{k(\varepsilon)} |U_s \cap G_0(2^{n-1})|}{2^{n-1}} = \sum_{s=1}^{k(\varepsilon)} \frac{|U_s \cap G_0(2^{n-1})|}{2^{n-1}} \\
&\overset{(4.40)}{\geq} \sum_{s=1}^{k(\varepsilon)} \Big(\mu(U_s) - \frac{\varepsilon}{2k(\varepsilon)}\Big) = \Big(\sum_{s=1}^{k(\varepsilon)} \mu(U_s)\Big) - \frac{k(\varepsilon)\varepsilon}{2k(\varepsilon)} \\
&\overset{(4.39)}{\geq} (1 - \varepsilon/2) - \varepsilon/2 = 1 - \varepsilon \quad \text{for all} \quad n \geq n_0(\varepsilon).
\end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

From now on, we assume that $n \geq n_0(\varepsilon)$. Multiplying (4.41) by 2^{n-1},

$$|J(2^{n-1})| \overset{(4.37)}{=} |I_1(2^{n-1}) \cap G_1(2^{n-1})| \overset{(4.41)}{\geq} 2^{n-1}(1 - \varepsilon). \tag{4.42}$$

By $\operatorname{lnc}(|L|, 1) = 2^{|L|-1}$, mentioned above (4.31), and (4.37), $\operatorname{Snc}(n) \subseteq G_1(2^{n-1})$ and $J(2^{n-1}) \subseteq G_1(2^{n-1})$. We claim that

$$\operatorname{Snc}(n) \text{ and } J(2^{n-1}) \text{ are disjoint subsets of } G_1(2^{n-1}). \tag{4.43}$$

To see this, assume $p \in \operatorname{Snc}(n)$. Then $p/2^{n-1} \in \mathrm{SCD} \subseteq \mathrm{TCC}$, and therefore $p/2^{n-1} \notin I_0$. Thus, by (4.37), $p = 2^{n-1} \cdot p/2^{n-1} \notin I_1(2^{n-1})$. Hence $p \notin J(2^{n-1})$, proving (4.43).

Combining (4.42), (4.43), and the equality $|G_1(2^{n-1})| = 2^{n-1}$, we obtain that $|\operatorname{Snc}(n)| \leq 2^{n-1}\varepsilon$ for all $n \geq n_0(\varepsilon)$. Thus we have shown $|\operatorname{Snc}(n)| = o(2^n)$.

As we have already mentioned, the argument for $|\operatorname{Sns}(n)| = o(2^n)$ is practically the same; in fact, it is slightly simpler, since $\operatorname{lns}(n, 1) = 2^n$ (witnessed by the n-element chain) is obvious. The proof of Theorem 3.5 is complete. □

References

[1] D. Ahmed, E. K. Horváth: Yet two additional large numbers of subuniverses of finite lattices // Discussiones Mathematicae, General Algebra and Applications 39 (2019), 251–261. doi.org/10.7151/dmgaa.1309

[2] D. Ahmed, M. Salih, D. Hale: Analyzing subuniverse counts in finite semilattices: unveiling the rankings and descriptions. doi.org/10.48550/arXiv.2408.09595,

[3] G. Czédli: A note on finite lattices with many congruences // Acta Universitatis Matthiae Belii, Series Mathematics Online 2018, 19–25. https://actamath.savbb.sk/pdf/aumb2602.pdf

[4] G. Czédli: Eighty-three sublattices and planarity // Algebra Universalis 80:45. (2019). doi.org/10.1007/s00012-019-0615-3

[5] G. Czédli: Finite semilattices with many congruences // Order 36 (2019), 233–247. doi.org/10.1007/s11083-018-9464-5

[6] G. Czédli: Lattices with many congruences are planar // Algebra Universalis 80:16 (2019). doi.org/10.1007/s00012-019-0589-1

[7] G. Czédli: Planar semilattices and nearlattices with eighty-three subnearlattices // Acta Sci. Math. (Szeged) 86 (2020), 117–165. doi.org/10.14232/actasm-019-573-4

[8] G. Czédli: The largest and all subsequent numbers of congruences of n-element lattices // Ural Mathematical Journal 11 (2025), no. 2, 81–99. doi.org/10.15826/umj.2025.2.006

[9] G. Czédli: Notes on the congruence densities and quasiorder densities of sublattices // Algebra and model theory: Collection of papers from the 17th Summer School "Problems Allied to Model Theory and Universal Algebra" Erlagol–Novosibirsk, 2025, 31–44. https://erlagol.ru/wp-content/uploads/cbor/erlagol_2025.pdf#page=31

[10] G. Czédli: Lattices with congruence densities larger than 3/32. doi.org/10.48550/arXiv.2602.04321

[11] G. Czédli: Accumulation points of congruence densities of finite lattices. Submitted. https://tinyurl.com/czedli-accSCD

[12] G. Czédli: Accumulation points of sublattice densities of lattice varieties. Submitted. https://tinyurl.com/czg-sldacc

[13] G. Czédli, E. K. Horváth: A note on lattices with many sublattices // Miskolc Mathematical Notes 20, no. 2 (2019), 839–848. doi.org/10.18514/MMN.2019.2821

[14] Janet J.W. Dong, Kathi Q. Ji: Higher order Turán inequalities for the distinct partition function // Journal of Number Theory 260 (2024), 71–102. doi.org/10.1016/j.jnt.2024.01.002

[15] Paul Erdős, Joseph Lehner: The distribution of the number of summands in the partitions of a positive integer // Duke Math. Journal vol. 8, No 2, June 1941. doi.org/10.1215/S0012-7094-41-00826-8

[16] R. Freese: Computing congruence lattices of finite lattices // Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 3457–3463. doi.org/10.1090/S0002-9939-97-04332-3

[17] G. Grätzer: Lattice Theory: Foundation // Birkhäuser, Basel (2011). doi.org/10.1007/978-3-0348-0018-1

[18] G. Grätzer: Congruences and prime-perspectivities in finite lattices // *Algebra Universalis*, 74 (2015), 351–359. doi.org/10.1007/s00012-015-0355-y

[19] G. H. Hardy, S. Ramanujan: Asymptotic formulae in combinatory analysis // Proceedings of the London Mathematical Society (2) 17 (1918), 75–115. doi.org/10.1112/plms/s2-17.1.75

[20] L. Kwuida, C. Mureşan: On nontrivial weak dicomplementations and the lattice congruences that preserve them // Order 40 (2023) 423–453. doi.org/10.1007/s11083-022-09597-4

[21] C. Mureşan, J. Kulin: On the largest numbers of congruences of finite lattices // Order 37 (2020), 445–460. doi.org/10.1007/s11083-019-09514-2

[22] K. H. Rosen (ed.): Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics // CRC Press, Boca Raton, FL, 2000.

[23] N. E. Zaya, D. Haje, D. Ahmed: The sixth and seventh largest number of subuniverses of finite lattices // Academic Journal of Nawroz University 12 (2023), no. 1, 143–148. doi.org/10.25007/ajnu.v12n1a1713

АЛГЕБРЫ БИНАРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ КО-НОРМАЛЬНОГО / ДИЗЪЮНКТИВНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРАФОВ

Д.Ю. Емельянов*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Проспект Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия;
Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: dima-pavlyk@mail.ru

В работе продолжается изучение алгебр бинарных формул для теорий произведений графов. Рассматривается ко-нормальное, или дизъюнктивное, произведение графов. Получены таблицы Кэли и сформулированы теоремы для циклов, рассматриваемых как графы правильных многоугольников.

Показано, что ко-нормальное произведение графов без изолированных вершин имеет диаметр не больше двух. Если исходные графы содержат ребра, то в произведении появляется симплекс. Поэтому для произведений циклов соответствующие алгебры поглощаются алгебрами симплексов.

1 Предварительные сведения

Определение 1. Пусть $G = (V(G), E(G))$ и $H = (V(H), E(H))$ — простые неориентированные графы. *Ко-нормальным произведением*, или *дизъюнктивным произведением*, графов G и H называется граф $G \vee H$, множество вершин которого равно

$$V(G \vee H) = V(G) \times V(H),$$

а различные вершины (g, h) и (g', h') смежны тогда и только тогда, когда

$$gg' \in E(G) \quad \text{или} \quad hh' \in E(H).$$

*Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект № FWNF-2026-0032.

В отличие от тензорного произведения, в ко-нормальном произведении достаточно смежности хотя бы в одной координате.

Напомним используемую далее терминологию. Пусть X — конечный связный граф. Через $\mathfrak{B}(X)$ будем обозначать алгебру бинарных формул для полной теории графа X в смысле [1]. Метки $\rho_{\nu(p)}$ в рассматриваемых графовых примерах отождествляются с возможными расстояниями между вершинами, поэтому

$$\rho_{\nu(p)} \subseteq \{0, 1, \ldots, \operatorname{diam} X\}.$$

Операция в таблице Кэли задает множество возможных меток композиции бинарных формул: если первая формула имеет метку i, а вторая — метку j, то в клетке $i \cdot j$ записываются все метки, которые могут получиться для их композиции.

Под симплексом ниже понимается полный подграф. Для настоящей работы достаточно случая K_3, то есть треугольника. Далее используется известный результат о симплексном поглощении: если конечный связный граф X диаметра d содержит симплекс, то алгебра $\mathfrak{B}(X)$ совпадает с алгеброй симплексов диаметра d [2]. Эту алгебру в дальнейшем будем обозначать через $\mathfrak{T}_d$.

Лемма 2. *Пусть G и H — графы без изолированных вершин. Тогда диаметр графа $G \vee H$ не превосходит 2.*

Доказательство. Рассмотрим две различные вершины (g, h) и (g', h'). Если g смежна с g' или h смежна с h', то эти вершины смежны в $G \vee H$. В противном случае выберем вершину x, смежную с g, и вершину y, смежную с h'. Тогда (g, h) смежна с (x, y), поскольку g смежна с x, а (x, y) смежна с (g', h'), поскольку y смежна с h'. Следовательно, расстояние между исходными вершинами не больше двух. □

Следствие 3. *Если G и H не имеют изолированных вершин, то алгебра $\mathfrak{B}(G \vee H)$ имеет не более трех основных меток:*

$$\rho_{\nu(p)} \subseteq \{0, 1, 2\}.$$

Предложение 4. *Для любых простых графов G и H произведение $G \vee H$ является полным графом тогда и только тогда, когда оба графа G и H являются полными.*

Доказательство. Если G и H являются полными, то для любых двух различных вершин (g, h) и (g', h') либо $g \neq g'$, либо $h \neq h'$. В первом

случае g смежна с g', во втором случае h смежна с h'. Следовательно, любые две различные вершины произведения смежны.

Обратно, пусть G не является полным. Тогда существуют две различные несмежные вершины $g_0, g_1 \in V(G)$. Зафиксируем любую вершину $h \in V(H)$. Вершины (g_0, h) и (g_1, h) различны, но не смежны в $G \vee H$: первая координата не обеспечивает смежности, а вторая координата совпадает. Значит, $G \vee H$ не является полным. Аналогично рассматривается случай, когда H не является полным. □

2 Ко-нормальные произведения и алгебры симплексов

Лемма 5. *Если графы G и H содержат хотя бы по одному ребру, то ко-нормальное произведение $G \vee H$ содержит треугольник.*

Доказательство. Пусть $g_0g_1 \in E(G)$ и $h_0h_1 \in E(H)$. Рассмотрим три вершины графа $G \vee H$:

$$a = (g_0, h_0), \quad b = (g_1, h_0), \quad c = (g_0, h_1).$$

Вершины a и b смежны, поскольку g_0 смежна с g_1. Вершины a и c смежны, поскольку h_0 смежна с h_1. Наконец, вершины b и c также смежны: первая координата обеспечивает смежность $g_1 \sim g_0$, а вторая координата — смежность $h_0 \sim h_1$. Следовательно, a, b, c образуют симплекс K_3. □

Следствие 6. *Для любых $m, n \geq 3$ ко-нормальное произведение правильных многоугольников $C_m \vee C_n$ содержит треугольник.*

Доказательство. Каждый цикл C_m, $m \geq 3$, содержит ребро. Поэтому утверждение следует из предыдущей леммы. □

Таким образом, для ко-нормального произведения циклов, то есть графов правильных многоугольников, всегда возникает симплекс. Поэтому в этих примерах по результату [2] получаются алгебры симплексов.

2.1 Таблицы алгебр симплексов

Приведем только те таблицы алгебр симплексов, которые нужны для ко-нормальных произведений графов без изолированных вершин. Эти

таблицы являются частными случаями таблиц для алгебр $\mathfrak{S}_d$, описанных в [2]; здесь они обозначаются через $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$.

Если оба сомножителя равны треугольникам, то $C_3 \vee C_3 = K_3 \vee K_3$ является полным графом. В этом случае диаметр равен 1, и возникает алгебра симплексов $\mathfrak{T}_1$ с метками $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1\}$:

$\cdot$	0	1
0	$\{0\}$	$\{1\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 1\}$

Во всех остальных произведениях $C_m \vee C_n$, где $m, n \geq 3$ и $(m, n) \neq (3, 3)$, граф не является полным, но его диаметр равен 2. Поскольку он содержит симплекс, алгебра совпадает с алгеброй симплексов диаметра 2, то есть с $\mathfrak{T}_2$, где $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2\}$:

$\cdot$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$
2	$\{2\}$	$\{0, 1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$

Пример 7. Для графов $C_3 \vee C_4$, $C_4 \vee C_4$, $C_4 \vee C_5$, $C_5 \vee C_5$ и вообще для всех $C_m \vee C_n$, кроме $C_3 \vee C_3$, получается одна и та же таблица Кэли $\mathfrak{T}_2$. Отличаться могут число вершин и число ребер, но алгебра бинарных формул остается алгеброй симплексов.

Теорема 8. *Пусть $m, n \geq 3$, и пусть $\mathfrak{B}_{m,n}$ — алгебра бинарных формул для теории ко-нормального произведения $C_m \vee C_n$. Тогда:*

1) $\mathfrak{B}_{3,3} \cong \mathfrak{T}_1$;
2) $\mathfrak{B}_{m,n} \cong \mathfrak{T}_2$ *для всех остальных* $m, n \geq 3$.

Доказательство. Если $m = n = 3$, то $C_3 = K_3$, поэтому $C_3 \vee C_3 \cong K_9$, и алгебра имеет вид $\mathfrak{T}_1$.

Пусть теперь $(m, n) \neq (3, 3)$. По лемме о диаметре граф $C_m \vee C_n$ имеет диаметр не больше 2. Он не является полным, поскольку хотя бы один из циклов не является полным, и в соответствующей координате можно выбрать две несмежные вершины. Следовательно, диаметр равен 2. По предыдущему следствию граф содержит треугольник, то есть симплекс. Поэтому по результату о симплексном поглощении [2] алгебра бинарных формул совпадает с алгеброй симплексов диаметра 2, то есть с $\mathfrak{T}_2$. $\square$

2.2 Основной результат

Сформулируем общий результат для графов без изолированных вершин.

Теорема 9. *Пусть G и H — конечные простые графы без изолированных вершин, и пусть каждый из них содержит хотя бы одно ребро. Тогда:*

1) если G и H являются полными, то $\mathfrak{B}(G \vee H) \cong \mathfrak{T}_1$;

2) если хотя бы один из графов G, H не является полным, то $\mathfrak{B}(G \vee H) \cong \mathfrak{T}_2$.

Доказательство. Если G и H являются полными, то по критерию полноты граф $G \vee H$ тоже является полным. Поэтому все различные вершины находятся на расстоянии 1, и алгебра бинарных формул имеет вид алгебры симплексов $\mathfrak{T}_1$.

Пусть хотя бы один из графов не является полным. Тогда $G \vee H$ не является полным, но по лемме о диаметре его диаметр не превосходит 2. Следовательно, диаметр равен 2. Кроме того, оба графа содержат ребра, поэтому $G \vee H$ содержит треугольник. По результату о симплексном поглощении [2] алгебра бинарных формул совпадает с $\mathfrak{T}_2$. □

Замечание 10. В ко-нормальном произведении множество меток стабилизируется: при отсутствии изолированных вершин диаметр не больше двух, а наличие симплекса приводит к алгебре симплексов [2].

2.3 Примеры

Приведем несколько примеров ко-нормальных произведений.

Произведение	Условие	Диаметр	Алгебра
$K_m \vee K_n$	$m, n \geq 2$	1	$\mathfrak{T}_1$
$C_m \vee C_n$	$(m, n) \neq (3, 3)$	2	$\mathfrak{T}_2$
$P_m \vee P_n$	$m, n \geq 3$	2	$\mathfrak{T}_2$
$K_{1,m} \vee K_{1,n}$	$m, n \geq 2$	2	$\mathfrak{T}_2$
$K_m \vee C_n$	$m \geq 2,\ n \geq 4$	2	$\mathfrak{T}_2$
$K_{r,s} \vee C_n$	$r, s \geq 1,\ n \geq 3$	2	$\mathfrak{T}_2$

Здесь C_n — цикл, или граф правильного n-угольника; K_n — полный граф на n вершинах; P_n — путь на n вершинах; $K_{1,n}$ — звезда; $K_{r,s}$ — полный двудольный граф с долями мощности r и s.

Пример 11. Для произведения путей $P_m \vee P_n$, где $m, n \geq 3$, каждый сомножитель имеет ребро и не имеет изолированных вершин. При этом пути не являются полными графами. Поэтому

$$\mathfrak{B}(P_m \vee P_n) \cong \mathfrak{T}_2.$$

Пример 12. Для произведения звезд $K_{1,m} \vee K_{1,n}$, где $m, n \geq 2$, оба сомножителя имеют центр и листья, следовательно не являются полными. В произведении всегда возникает треугольник, например из двух ребер исходных звезд, и снова получается алгебра симплексов $\mathfrak{T}_2$.

Пример 13. Если один сомножитель является полным, например $K_m \vee C_n$, то результат не всегда является полным. При $n = 3$ оба сомножителя являются полными, и получается $\mathfrak{T}_1$. При $n \geq 4$ цикл C_n не является полным, поэтому произведение имеет диаметр 2 и алгебру $\mathfrak{T}_2$.

2.4 Изолированные вершины

Условие отсутствия изолированных вершин существенно. Если один из сомножителей имеет изолированную вершину, то доказательство диаметра 2 уже не работает. Более того, в ко-нормальном произведении могут появляться слои, где смежность определяется только другой координатой.

Пример 14. Пусть E_m — пустой граф на m вершинах, то есть граф без ребер. Тогда в произведении

$$E_m \vee H$$

смежность определяется только второй координатой. Если H не связан, то и произведение может быть несвязным. Следовательно, алгебры таких произведений не обязаны быть алгебрами симплексов.

Замечание 15. Классификация ко-нормальных произведений с изолированными вершинами должна рассматриваться отдельно. В этом случае важно не только наличие симплекса, но и число компонент связности, расположение изолированных вершин и то, какие типы реализуются в каждой компоненте. Поэтому в настоящей статье основной классификационный результат формулируется для графов без изолированных вершин.

2.5 Связь с сильным произведением

Сравним ко-нормальное произведение с сильным произведением. Для сильного произведения $G \boxtimes H$ вершины (g, h) и (g', h') смежны, если выполняется одно из условий:

$$g = g' \text{ и } h \sim h', \quad h = h' \text{ и } g \sim g', \quad g \sim g' \text{ и } h \sim h'.$$

Для ко-нормального произведения условие короче:

$$g \sim g' \quad \text{или} \quad h \sim h'.$$

В ко-нормальном произведении не требуется совпадения одной координаты. Поэтому в нем появляется больше ребер и чаще возникают треугольники.

Предложение 16. *Если G и H — простые графы, то каждое ребро сильного произведения $G \boxtimes H$ является ребром ко-нормального произведения $G \vee H$. Следовательно,*

$$E(G \boxtimes H) \subseteq E(G \vee H)$$

при одинаковом множестве вершин.

Доказательство. Если две вершины смежны в сильном произведении, то либо смежность возникает в первой координате, либо во второй, либо сразу в обеих. В каждом из этих случаев выполняется дизъюнктивное условие смежности для $G \vee H$. □

Поэтому для циклов C_n, рассматриваемых как графы правильных многоугольников, ко-нормальное произведение сразу приводит к алгебрам симплексов, тогда как для других произведений могут сохраняться таблицы, зависящие от четности и диаметра.

3 Заключение

В работе описаны алгебры бинарных формул для ко-нормальных произведений графов. Показано, что для графов без изолированных вершин диаметр произведения не превосходит двух. Если оба сомножителя являются полными, то получается алгебра $\mathfrak{T}_1$. Если хотя бы один из сомножителей не является полным, но оба графа содержат ребра, то возникает симплекс и получается алгебра $\mathfrak{T}_2$.

Для циклов, рассматриваемых как графы правильных многоугольников, получена следующая классификация: для $C_3 \vee C_3$ возникает $\mathfrak{T}_1$, а для всех остальных $C_m \vee C_n$, $m, n \geq 3$, возникает $\mathfrak{T}_2$. Дальнейшее исследование можно продолжить для ко-нормальных произведений графов с изолированными вершинами, циркулянтных графов и графов Мычельского.

Список литературы

[1] Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры бинарных формул. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2023.

[2] Емельянов Д.Ю. Алгебры бинарных изолирующих формул для теорий симплексов // Algebra and Model Theory. Novosibirsk: Edition of NSTU, 2017. P. 66–74.

[3] Harary F. Graph Theory. Addison-Wesley, 1969.

[4] Hammack R., Imrich W., Klavzar S. Handbook of Product Graphs. Second edition. CRC Press, 2011.

[5] Sudoplatov S.V. Classification of Countable Models of Complete Theories. Novosibirsk: NSTU Publisher, 2018.

ON SZMIELEW INVARIANTS FOR PSEUDOFINITE ABELIAN GROUPS

Z.G. Fazyl, B.Sh. Kulpeshov, N.D. Markhabatov, In.I. Pavlyuk, S.V. Sudoplatov*

L.N. Gumilyov Eurasian National University,
Qajymuqan, 13, Astana, 010000, Kazakhstan;
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
28, Shevchenko street, Almaty, 050010, Kazakhstan;
Kazakh British Technical University,
59, Tole Bi street, Almaty 050000, Kazakhstan;
Novosibirsk State Technical University,
20, K.Marx avenue, Novosibirsk, 630073, Russia;
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
1, Pirogova street, Novosibirsk, 630090, Russia
e-mail: fzhebei@gmail.com, kulpesh@mail.ru, markhabatov@gmail.com,
pavlyuk@corp.nstu.ru, sudoplat@math.nsc.ru

In a series of papers [1, 2, 3, 4, 5, 6] Szmielew invariants [7, 8, 9] for natural classes of abelian groups are described. In this paper we adapt these results for pseudofinite [10, 11, 12] abelian groups.

1. Preliminaries

Let $\mathcal{A}$ be an abelian group in the language $\Sigma = \langle +^{(2)}, -^{(1)}, 0^{(0)} \rangle$. Then $k\mathcal{A}$ denotes its subgroup $\{ka \mid a \in A\}$ and $\mathcal{A}[k]$ denotes the subgroup $\{a \in A \mid ka = 0\}$. Let P be the set of all prime numbers. If $p \in P$ and $pA = \{0\}$, then $\dim\mathcal{A}$ denotes the dimension of the group $\mathcal{A}$, considered as a vector space over a field with p elements. The following numbers, for arbitrary $p \in P$ and $n \in \omega \setminus \{0\}$ are called the *Szmielew invariants* for the

*The work was carried out in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No. FWNF-2026-0032, and partially supported by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan, Grant No. AP26194247.

group $\mathcal{A}$ [9, 7]:

$$\alpha_{p,n}(\mathcal{A}) = \min\{\dim((p^{n-1}\mathcal{A})[p]/(p^n\mathcal{A})[p]), \omega\},$$
$$\beta_p(\mathcal{A}) = \min\{\inf\{\dim((p^n\mathcal{A})[p]) \mid n \in \omega\}, \omega\},$$
$$\gamma_p(\mathcal{A}) = \min\{\inf\{\dim((\mathcal{A}/\mathcal{A}[p^n])/p(\mathcal{A}/\mathcal{A}[p^n])) \mid n \in \omega\}, \omega\},$$

$$\varepsilon(\mathcal{A}) \in \{0, 1\},$$
$$\text{and } \varepsilon(\mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow (n\mathcal{A} = \{0\} \text{ for some } n \in \omega, n \neq 0).$$

It is known [9, Theorem 8.4.10] that two abelian groups are elementarily equivalent if and only if they have same Szmielew invariants. In addition, the following proposition holds.

Proposition 1.1. [9, Proposition 8.4.12] *Let for any p and n the cardinals $\alpha_{p,n}$, β_p, $\gamma_p \leq \omega$, and $\varepsilon \in \{0, 1\}$ be given. Then there is an abelian group $\mathcal{A}$ such that the Szmielew invariants $\alpha_{p,n}(\mathcal{A})$, $\beta_p(\mathcal{A})$, $\gamma_p(\mathcal{A})$, and $\varepsilon(\mathcal{A})$ are equal to $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p, and ε, respectively, if and only if the following conditions hold:*

(1) *if for prime p the set $\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ is infinite, then $\beta_p = \gamma_p = \omega$;*

(2) *if $\varepsilon = 0$, then for any prime p, $\beta_p = \gamma_p = 0$ and the set $\{\langle p, n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ is finite.*

We denote by $\mathbb{Q}$ the additive group of rational numbers, $\mathbb{Z}_{p^n}$ — the cyclic group of the order p^n, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — the quasi-cyclic group of all complex roots of 1 of degrees p^n for all $n \geq 1$, R_p — the group of irreducible fractions with denominators which are mutually prime with p. The groups $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_{p^n}$, R_p, and $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ are called *basic*. Below the notations of these groups will be identified with their universes.

Since abelian groups with same Szmielew invariants have the same theories, any abelian group $\mathcal{A}$ is elementarily equivalent to a group

$$\oplus_{p,n} \mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus \oplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\beta_p)} \oplus \oplus_p R_p^{(\gamma_p)} \oplus \mathbb{Q}^{(\varepsilon)}, \tag{1}$$

where $\mathcal{B}^{(k)}$ denotes the direct sum of k subgroups isomorphic to a group $\mathcal{B}$. Thus, any theory of an abelian group has a model represented by a direct sum of based groups. The groups of form (1) are called *Szmielew* or *standard*.

Here finite subgroups are exhausted by direct sums of the groups $\mathbb{Z}_{p^n}$, and divisible ones — by direct sums of the groups $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ and $\mathbb{Q}$.

Recall that any complete theory of an abelian group is based by the set of positive primitive formulas [9, Lemma 8.4.5], reduced to the set of the following formulas:

$$\exists y(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n \approx p^k y), \tag{2}$$

$$m_1x_1 + \ldots + m_nx_n \approx 0, \tag{3}$$

where $m_i \in \mathbb{Z}$, $k \in \omega$, and p is a prime number [8], [9, Lemma 8.4.7]. Formulas (2) and (3) witness that Szmielew invariants define theories of abelian groups modulo Proposition 1.1.

In view of Proposition 1.1 and equations (2) and (3), we have the following:

Remark 1.2. Theories of abelian groups are forced by sentences implied by formulas of form (2) and (3) and describing dimensions with respect to $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p, and ε as well as bounds for orders p^k of elements and possibilities for divisions of elements by p^k. Moreover, various values of Szmielew invariants are separated by some sentences modulo Proposition 1.1.

Recall that infinite structures and their theories approximable by finite ones (i.e. such that all their satisfiable sentences are satisfied in finite structures, too) are called *pseudofinite*.

Theorem 1.3. [1] *For any theory T of an infinite abelian group the following conditions are equivalent:*

(1) *T is pseudofinite;*

(2) *T has some infinite $\alpha_{p,n}$, or some $\beta_p = \gamma_p = \omega$, or $\varepsilon = 1$, moreover, for all nonzero values β_p and γ_p, $\beta_p = \gamma_p = \omega$;*

(3) *T has infinite models, and all nonzero values β_p and γ_p imply $\beta_p = \gamma_p = \omega$.*

2. Countably categorical and pseudo-countably-categorical pseudofinite abelian groups

Recall [2, 3] that an elementary theory T of an infinite structure $\mathcal{M}$, which is not $\aleph_0$-categorical, is called *pseudo-$\aleph_0$-categorical* or *pseudo-countably-categorical*, if any sentence, which is true in $\mathcal{M}$, has an infinite $\aleph_0$-categorical model $\mathcal{N}$. The models $\mathcal{N}$ are called *approximations* for $\mathcal{M}$, and $\mathcal{M}$ is called *pseudo-$\aleph_0$-categorical* or *pseudo-countably-categorical*.

Definition. [13] For a group G the least number n, such that $g^n = e$ for all $g \in G$, if that n exists, is called the *exponent* of the group G.

Theorem 2.1. [13] *An infinite abelian group $\mathcal{A}$ is $\aleph_0$-categorical iff $\mathcal{A}$ has a finite exponent.*

By definition, the existence of an exponent for a group G implies that all elements of G have bounded order; furthermore, if such a group is infinite and abelian, then, according to Proposition 1.1,all Szmielew invariants β_p, γ_p, and ε are equal to zero, and only a finite number of the invariants $\alpha_{p,n}$ take positive values, with at least one of these values being infinite. In

view of Theorem 2.1 these arguments, using approximations, produce the following:

Theorem 2.2. [3] *For any complete theory T of abelian groups the following conditions are equivalent:*

1) *T is pseudo-countably-categorical;*

2) *T has infinitely many positive values $\alpha_{p,n}$ and all positive values β_p and γ_p imply $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$ and $\beta_p = \gamma_p = \omega$, and the equality $\varepsilon = 1$ implies $|\{\langle p, n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$.*

Applying Theorems 1.3, 2.1 and 2.2 we observe that both countably categorical and pseudo-countably-categorical abelian groups are approximated by finite Szmielew invariants $\alpha_{p,n}$ producing the pseudofiniteness. Thus the following Theorem holds:

Theorem 2.3. *Any countably categorical and pseudo-countably-categorical abelian group is pseudofinite.*

3. Strongly minimal and pseudo-strongly-minimal pseudofinite abelian groups

Recall [14] that an infinite structure $\mathcal{M}$ is called *minimal* if, for any formula $\varphi(x, \overline{a})$ in the signature of $\mathcal{M}$ with parameters $\overline{a}$, either the set $\varphi(\mathcal{M}, \overline{a})$ is finite or the set $\neg\varphi(\mathcal{M}, \overline{a})$ is finite. A complete theory T that has no finite models is called *strongly minimal* if every model $\mathcal{M} \models T$ is minimal. Models of a strongly minimal theory are also called *strongly minimal*.

Following [4], a non-strongly-minimal structure, which is approximable by strongly minimal ones, is called *pseudo-strongly-minimal*.

Theorem 3.1. [15] *Let G be a group. Then the following conditions are equivalent:*

1) *G is strongly minimal,*

2) *G is minimal,*

3) *G is abelian and has the form $G = \mathbb{Q}^{(\lambda)} \oplus \bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\beta_p)}$, where λ is some positive cardinality, $\beta_p \in \omega$, or the form $G = \mathbb{Z}_p^{(\alpha_{p,1})}$, $\alpha_{p,1} \geq \omega$, i.e. for the theory $\mathrm{Th}(G)$ either $\alpha_{p,n} = 0$, $\beta_p \in \omega$, $\gamma_p = 0$, $\varepsilon = 1$, or some $\alpha_{p,1}$ equals ω, and for the remaining Szmielew invariants the following holds: $\alpha_{p',n} = 0$, $\beta_p = 0$, $\gamma_p = 0$, $\varepsilon = 0$.*

Applying Theorems 1.3 and 3.1 we obtain:

Theorem 3.2. *A strongly minimal group G is pseudofinite iff $G = \mathbb{Z}_p^{(\alpha_{p,1})}$ for some $\alpha_{p,1} \geq \omega$.*

Theorem 3.3. [4] *Let G be a group. Then the following conditions are equivalent:*

1) *G is pseudo-strongly-minimal,*

2) *G is abelian and has the form $G = \mathbb{Q}^{(\lambda)} \oplus \bigoplus\limits_{p} \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\beta_p)}$, where λ and β_p are some cardinalities including at least one infinite β_p, i.e. for the theory $\mathrm{Th}(G)$ all $\alpha_{p,n} = 0$, $\beta_p \in \omega + 1$, $\gamma_p = 0$, $\varepsilon = 1$, with $\max\limits_{p} \beta_p = \omega$.*

In view of Theorem 3.3 all pseudo-strongly-minimal groups are abelian and divisible whereas, by Theorem 3.1 ,there are strongly minimal groups which are not divisible.

Applying Theorems 1.3 and 3.3 we observe that pseudo-strongly minimal groups are not approximable by finite ones. Thus we have:

Theorem 3.4. *Any pseudo-strongly-minimal group G is not pseudofinite.*

4. Uncountably categorical and pseudo-uncountably categorical pseudofinite abelian groups

As above approximations by uncountably categorical theories produce *pseudo-uncountably-categorical theories T*, which are assumed to be non-uncountably-categorical.

The following Macintyre's theorem describes all possibilities for ω_1-categorical theories of abelian groups.

Theorem 4.1. [16] *For any abelian group $\mathcal{A}$ the following conditions are equivalent:*

a) $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *is ω_1-categorical;*

b) *$\mathcal{A}$ is infinite and has one of the following forms:*

(i) *$K \oplus H$, where H is finite, and K is a direct sum of copies of a cyclic group $\mathbb{Z}_{p^n}$;*

(ii) *$D \oplus H$, where H is finite, and D is a divisible group such that for any prime p, D has finitely many elements of the order p.*

Theorem 4.1 and Proposition 1.1 imply:

Corollary 4.2. [5] *For any abelian group $\mathcal{A}$ the following conditions are equivalent:*

a) $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *is ω_1-categorical;*

b) $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *has one of the following possibilities for its Szmielew invariants:*

(i) *for some unique pair (p, n), $\alpha_{p,n} = \omega$, $\sum\limits_{(p',n') \neq (p,n)} \alpha_{p',n'} \in \omega$, and all β_p, γ_p, ε equal 0;*

(ii) $\sum\limits_{(p,n)} \alpha_{p,n} \in \omega$, *all β_p are finite, all γ_p equal 0, and $\varepsilon = 1$.*

In view of Theorem 1.3 and Corollary 4.2 we observe that all possibilities in Item i) are pseudofinite, and pseudofinite cases in Item ii) are exhausted by the equalities $\beta_p = 0$ for all p. Thus we have the following:

Theorem 4.3. *For any ω_1-categorical abelian group $\mathcal{A}$ the following conditions are equivalent:*

a) $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *is pseudofinite;*

b) $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *has one of the following possibilities for its Szmielew invariants:*

(i) *for some unique pair (p,n), $\alpha_{p,n} = \omega$, $\sum\limits_{(p',n')\neq(p,n)} \alpha_{p',n'} \in \omega$, and all β_p, γ_p, ε equal 0;*

(ii) $\sum\limits_{(p,n)} \alpha_{p,n} \in \omega$, *all β_p and γ_p equal 0, and $\varepsilon = 1$.*

Theorem 4.4. [5] *For any abelian group $\mathcal{A}$ the following conditions are equivalent:*

a) $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *is pseudo-ω_1-categorical;*

b) $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *has one of the following possibilities for its Szmielew invariants:*

(i) *for some pairs (p,n), such that there are at least two of them and finitely many, $\alpha_{p,n} = \omega$, $\sum\limits_{(p',n')\neq(p,n)} \alpha_{p',n'} \in \omega$, and all β_p, γ_p, ε equal 0;*

(ii) *all values $\alpha_{p,n}$ are arbitrary, $\varepsilon = 1$, and for some p, $\beta_p = \omega$; here $\gamma_p = 0$ for each finite β_p with the finite set $\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$, and $\gamma_p = \omega$ for each $\beta_p = \omega$ with the infinite set $\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$;*

(iii) *all values $\alpha_{p,n}$ are arbitrary, $\sum\limits_{(p,n)} \alpha_{p,n} = \omega$, all sets $\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ are finite, there are infinitely many positive β_p, all of them are finite, and $\varepsilon = 1$; here $\gamma_p = 0$ for each p.*

In view of Theorem 1.3, Item i) corresponds to pseudofiniteness, Item ii) admits the pseudofiniteness iff either $\beta_p = \gamma_p = 0$ or $\beta_p = \gamma_p = \omega$ for each p, and Item iii) excludes the pseudofiniteness. Thus we have the following:

Theorem 4.5. *For any pseudo-ω_1-categorical abelian group $\mathcal{A}$ the following conditions are equivalent:*

a) $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *is pseudo-ω_1-categorical;*

b) $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *has one of the following possibilities for its Szmielew invariants:*

(i) *for some pairs (p,n), such that there are at least two of them and finitely many, $\alpha_{p,n} = \omega$, $\sum\limits_{(p',n')\neq(p,n)} \alpha_{p',n'} \in \omega$, and all β_p, γ_p, ε equal 0;*

(ii) *all values $\alpha_{p,n}$ are arbitrary, $\varepsilon = 1$, and for any prime p, $\beta_p = \gamma_p = 0$ or $\beta_p = \gamma_p = \omega$, with at least one p having $\beta_p = \gamma_p = \omega$, and this equality holds whenever $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$.*

5. λ-stable and pseudo-λ-stable pseudofinite abelian groups

It is well known that every abelian group has a normal theory, and that every normal theory is stable [17]. Thus, there are no pseudo-stable abelian groups. On the other hand, Macintyre classified ω-stable abelian groups [16]. He showed that ω-stable abelian groups can be represented as direct sums of groups of bounded exponent (i.e., groups $\mathcal{B}$ such that $n\mathcal{B} = 0$ for some positive integer n) and divisible groups of the form $\oplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\beta_p)} \oplus \mathbb{Q}^{(\lambda)}$, where the Szmielew invariants β_p, with only a finite number of them being non-zero; furthermore, there are λ summands, each isomorphic to the group of rational numbers $\mathbb{Q}$.

When considering pseudofinite ω-stable abelian groups, it follows from Theorem 1.3 that the only possibilities are $\sum_{\langle p,n\rangle} \alpha_{p,n} \in \omega$ and $\varepsilon = 1$, with all $\beta_p = \gamma_p = 0$.

Recall the characterization of the theories of pseudo-ω-stable abelian groups.

Theorem 5.1. [6] *The theory* $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *of an abelian group* $\mathcal{A}$ *is pseudo-ω-stable if and only if* $\mathcal{A}$ *can be represented either as a direct sum of a pseudo-countably-categorical group and a divisible group, or as a direct sum of an ω-categorical group and a divisible group that has infinitely many non-zero Szmielew invariants* β_p *or at least one infinite invariant* β_p.

Theorem 5.2. *There exist pseudo-ω-stable pseudofinite abelian groups.*

Proof. Let $G_\sigma = \bigoplus_{p\in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [18] and put $\mathcal{A} = G_\sigma \oplus \mathbb{Q}$. For every prime p its Szmielew invariants satisfy

$$\alpha_{p,1}(\mathcal{A}) = 1, \qquad \alpha_{p,n}(\mathcal{A}) = 0\ (n \geq 2), \qquad \beta_p(\mathcal{A}) = \gamma_p(\mathcal{A}) = 0, \qquad \varepsilon(\mathcal{A}) = 1.$$

Since infinitely many invariants $\alpha_{p,n}(G_\sigma)$ are positive, Theorem 2.2 implies that G_σ is pseudo-$\aleph_0$-categorical. As $\mathbb{Q}$ is divisible, Theorem 5.1 implies that $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ is pseudo-ω-stable. On the other hand, Theorem 1.3 implies that $\mathcal{A}$ is pseudofinite. Thus $\mathcal{A}$ is a pseudo-ω-stable pseudofinite abelian group. □

Theorem 5.3. [6] *Any theory of an infinite abelian group is either ω-stable, or superstable non-ω-stable, or pseudo-superstable.*

Notice that a description above of theories of ω-stable abelian groups and their accumulation points in the class of pseudo-ω-stable and pseudo-superstable structures can be realized by pseudofinite abelian groups. The first one is represented in Theorem 5.2. The pseudo-superstability is obtained by infinite descending chains of definable subgroups with infinite indices for each subgroup with respect to the previous one. Thus Theorem 5.3 produces:

Theorem 5.4. *Any theory of an infinite pseudofinite abelian group is either ω-stable, or superstable non-ω-stable, or pseudo-superstable, and all these possibilities are realized.*

References

[1] Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V. Ranks for families of theories of Abelian groups // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2019. — Vol. 28. — P. 95–112.

[2] Kulpeshov B. Sh., Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V. Ranks and approximations for families of ordered theories // Mathematical Notes. — 2024. — Vol. 116, No. 4. — P. 669–684.

[3] Kulpeshov B. Sh., Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V. Pseudo-countably categorical formulae and theories // Mathematical Notes. — 2025. — Vol. 117, No. 3. — P. 442–457.

[4] Kulpeshov B. Sh., Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V. Pseudo-strongly-minimal structures and theories // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — Vol. 45, No. 12. — P. 6515–6525.

[5] Kulpeshov B. Sh., Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V. Pseudo-uncountably-categorical structures and theories // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2026. — Vol. 47, No. 4. — P. 1668–1682.

[6] Kulpeshov B. Sh., Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V. Pseudo-stable structures and theories // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2026. — Vol. 47, No. 10. — P. 5111–5123.

[7] Szmielew W. Elementary properties of Abelian groups // Fundamenta Mathematicae. — 1955. — Vol. 41. — P. 203–271.

[8] Eklof P. C., Fischer E. R. The elementary theory of Abelian groups // Annals of Mathematical Logic. — 1972. — Vol. 4. — P. 115–171.

[9] Ershov Yu. L., Palyutin E. A. Mathematical Logic. — Moscow : Fizmatlit, 2011. — 356 p.

[10] Ax J. The Elementary Theory of Finite Fields // Annals of Mathematics. — 1968. — Vol. 88, No. 2. — P. 239–271.

[11] Rosen E. Some Aspects of Model Theory and Finite Structures // The Bulletin of Symbolic Logic. — 2002. — Vol. 8, No. 3. — P. 380–403.

[12] Väänänen J. Pseudo-finite model theory // Matematica Contemporanea. — 2003. — Vol. 24. — P. 169–183.

[13] Rosenstein J. G. $\aleph_0$-categoricity of groups // Journal of Algebra. — 1973. — Vol. 25. — P. 435–467.

[14] Baldwin, J. T., Lachlan, A. H. On strongly minimal sets // Journal of Symbolic Logic. — 1971. — Vol. 36, No. 1. — P. 79–96.

[15] Reineke J. Minimale Gruppen // Zeitschrift für die mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. — 1975. — Vol. 21, No. 1. — P. 357–359.

[16] Macintyre A. On ω_1-categorical theories of abelian groups // Fundamenta Mathematicae. — 1971. — Vol. 70. — P. 253–270.

[17] Pillay A. Countable models of stable theories // Proc. Amer. Math. Soc. — 1983. — Vol. 89, No. 4. — P. 666–672.

[18] Fazyl Z. G., Markhabatov N. D., Baisalov Y. R. On Some Pseudofinite Abelian Groups // Siberian Electronic Mathematical Reports. (to appear)

О ЗАМЫКАНИЯХ, ЗАДАВАЕМЫХ АЛГЕБРАМИ ИЗОЛИРУЮЩИХ ФОРМУЛ

С. Б. Малышев*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Проспект Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия;
Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: sergei2-mal1@yandex.ru

1 Введение

Предгеометрия и геометрическая структура моделей остаются одними из центральных объектов изучения в математической логике и теории моделей. С 1970-х годов активно развиваются подходы к описанию и классификации предгеометрий, возникающих в различных теориях, включая o-минимальные, ω-стабильные и сильно минимальные. Существенный вклад в эти исследования внесли Б. И. Зильбер [25, 26, 27], А. Пилай [20], Э. Хрушовский [15], а также работы, связанные с ω-категоричными структурами [1] и систематическим изложением теории моделей [14]. Типы предгеометрий — вырожденные, локально модулярные, модулярные, локально конечные, проективные — играют при этом роль структурных инвариантов моделей [2, 3, 4, 19].

С другой стороны, развивается комбинаторно-алгебраическое направление, связанное с алгебрами распределений бинарных изолирующих формул — производными структурами полной теории, кодирующими композиционное поведение главных 2-типов. Их систематическое исследование было инициировано в работе И. В. Шулепова и С. В. Судоплатова [23]; впоследствии такие алгебры были построены для ряда конкретных классов теорий — унарных [5], теорий архимедовых тел [8], полигонометрических [9], — а накопленные результаты подытожены в монографии

*Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект № FWNF-2026-0032.

[10]. Вопросы устойчивости и наследования типов предгеометрий при операциях над структурами изучались в [16, 17]; замыкания, комбинации и иерархии расширений структур рассматривались в [21, 22], а топологии и ранги в семействах теорий — в [18].

Несмотря на параллельное развитие этих двух направлений, связь между алгебраической структурой $\mathfrak{B}(T,p)$ и геометрическим типом порождаемой ею предгеометрии систематически не изучалась. Именно этому вопросу посвящена настоящая работа. На множестве реализаций $p(\mathfrak{M})$ фиксированного самосопряжённого полного 1-типа p полной теории T алгебра $\mathfrak{B}(T,p)$ естественным образом задаёт отношение достижимости: элемент b достижим из a, если выполнена некоторая бинарная изолирующая формула $\varphi_u(a,b)$ с меткой $u \in L$. Однако одношаговая достижимость не образует предгеометрии в содержательном смысле, поэтому вводится *итерированный* оператор замыкания $\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}$, замыкающий множество относительно всех конечных цепочек изолирующих переходов.

Возникает естественный вопрос: какой геометрический тип имеет предгеометрия $\langle p(\mathfrak{M}), \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}\rangle$ и насколько богатой может быть её структура при усложнении композиционной таблицы (таблицы Кэли) алгебры $\mathfrak{B}(T,p)$?

Основной результат работы даёт исчерпывающий ответ. Показано, что $\langle p(\mathfrak{M}), \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}\rangle$ всегда является предгеометрией, и установлена *теорема о вырожденности*: любая такая предгеометрия тривиальна. Тем самым выявляется принципиальная граница чисто бинарного подхода: никакая сложность таблицы Кэли алгебры $\mathfrak{B}(T,p)$ не приводит к нетривиальному геометрическому типу.

В развитие этого наблюдения описана тонкая структура индуцированных предгеометрий: получены критерий локальной конечности через конечность множества достижимых меток, формула размерности через число орбит достижимости алгебры, монотонность предгеометрий по включению самосопряжённых подалгебр и инвариантность относительно размеченного изоморфизма, учитывающего мощности классов реализаций. В качестве содержательного примера рассмотрены семейства $\mathfrak{Hp}_e$ и $\mathfrak{Hp}_o$, отвечающие теориям гомоморфных произведений правильных многоугольников на ребро, алгебры бинарных изолирующих формул для которых построены в [11]: для них индуцированные предгеометрии вырождены и локально конечны, а их размерность определяется числом орбит достижимости.

Полученные результаты развивают идеи работ [16, 17], где изучалась наследуемость типов предгеометрий относительно операций булевой алгебры предикатных структур и композиций структур, и переносят

геометрический анализ на семейство алгебр бинарных изолирующих формул, дополняя существующую теорию описанием поведения предгеометрий в этом новом контексте.

2 Предварительные сведения

2.1 Предгеометрии

Следуя [20, 14], напомним определения.

Определение 1. *Предгеометрией* называется пара $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ с оператором $\mathrm{cl}\colon P(S) \to P(S)$, удовлетворяющим аксиомам:

1. $X \subseteq \mathrm{cl}(X)$ для любого $X \subseteq S$;
2. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$ для любого $X \subseteq S$;
3. *замена:* для любых $X \subseteq S$ и $a, b \in S$, если $a \in \mathrm{cl}(X \cup \{b\}) \setminus \mathrm{cl}(X)$, то $b \in \mathrm{cl}(X \cup \{a\})$;
4. для любых $X \subseteq S$ и $a \in S$: если $a \in \mathrm{cl}(X)$, то $a \in \mathrm{cl}(Y)$ для некоторого конечного $Y \subseteq X$.

Определение 2. Пусть $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ — предгеометрия. Множество $B \subseteq S$ называется *независимым*, если для всякого $b \in B$ выполнено $b \notin \mathrm{cl}(B \setminus \{b\})$. Подмножество $B \subseteq X$ называется *базисом* множества $X \subseteq S$, если $X \subseteq \mathrm{cl}(B)$ и B независимо. *Размерностью* множества X называется мощность его базиса:

$$\dim(X) = |B|.$$

Определение 3. Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется:

- *вырожденной* (тривиальной), если для любого $X \subseteq S$ выполнено $\mathrm{cl}(X) = \bigcup_{a \in X} \mathrm{cl}(\{a\})$;
- *модулярной*, если для любых конечномерных замкнутых $X, Y \subseteq S$ выполнено $\dim(X \cup Y) + \dim(X \cap Y) = \dim(X) + \dim(Y)$;
- *локально конечной*, если для любого конечного $A \subseteq S$ множество $\mathrm{cl}(A)$ конечно.

2.2 Алгебры распределений бинарных изолирующих формул

Пусть T — полная теория в языке $\mathcal{L}$, $\mathfrak{M} \models T$ — ω-насыщенная модель, $M = |\mathfrak{M}|$. Зафиксируем полный 1-тип $p(x) \in S_1(\varnothing)$ и обозначим $p(\mathfrak{M}) = \{a \in M \mid a \models p\}$.

Определение 4. [23, 10] Формула $\varphi(x, y)$ называется *бинарной изолирующей* для пары (p, q), где $q \in S_1(\varnothing)$, если выполняются следующие условия:

1. сама беспараметрическая формула $\varphi(x, y)$ изолирует некоторый полный 2-тип $r(x, y) \in S_2(\varnothing)$, продолжающий $p(x) \wedge q(y)$; то есть $\varphi \in r$ и для всякой формулы $\psi(x, y) \in r$ выполнено

$$T \models \forall x \forall y \, (\varphi(x, y) \to \psi(x, y));$$

2. для любого $a \models p$ сечение

$$R_\varphi(a) = \{b \in M \mid \mathfrak{M} \models \varphi(a, b)\}$$

конечно и непусто.

Замечание 1. Тип $r(x, y) \in S_2(\varnothing)$ *продолжает* $p(x) \wedge q(y)$, если r содержит все формулы из p по переменной x и все формулы из q по переменной y:

$$p(x) \subseteq r(x, y) \quad \text{и} \quad q(y) \subseteq r(x, y).$$

Здесь $p(x)$ рассматривается как множество формул от пары переменных (x, y), не зависящих от y, и аналогично $q(y)$.

В частности, если $\varphi(x, y)$ изолирует продолжающий $p(x) \wedge q(y)$ тип, то при $a \models p$ всякий элемент $b \in R_\varphi(a)$ автоматически реализует q.

Две бинарные изолирующие формулы $\varphi(x, y)$ и $\varphi'(x, y)$ называются *эквивалентными*, если они изолируют один и тот же полный 2-тип, т. е. $\mathfrak{M} \models \varphi(a, b) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi'(a, b)$ для любых a, b. Символ $[\varphi]$ обозначает класс эквивалентности формулы φ; каждому классу присваивается *метка* u, а его представитель обозначается $\varphi_u(x, y)$. Поскольку эквивалентные формулы задают одно и то же отношение, сечение $R_u(a) = R_{\varphi_u}(a)$ не зависит от выбора представителя.

Определение 5. [23, 10] *Алгеброй распределений бинарных изолирующих формул* $\mathfrak{B}(T, p)$ называется множество классов эквивалентности бинарных изолирующих формул для пары (p, p), т. е. изолирующих полные

2-типы, продолжающие $p(x) \wedge p(y)$, снабжённое операцией композиции

$$[\varphi] \cdot [\psi] = \big\{\, [\theta] \;\big|\; \theta(x,z) \equiv \exists y \,\big(\varphi(x,y) \wedge \psi(y,z)\big), \\ \theta \text{ изолирует главный 2-тип} \big\}.$$

Операция $\cdot$ многозначна. Множество меток всех классов обозначается $L = L(\mathfrak{B}(T,p))$.

Определение 6. Пусть $\mathfrak{B}(T,p)$ — алгебра распределений бинарных изолирующих формул, связанная с типом p. Тип p *самосопряжён* (*обратим*) относительно $\mathfrak{B}(T,p)$, если для любой метки $u \in L$ существует $u^* \in L$ такая, что формула $\varphi_u(y,x)$ эквивалентна представителю класса $[\varphi_{u^*}](x,y)$. В этом случае отображение $^*\colon L \to L$ обладает двумя свойствами:

1. *инволютивность:* $(u^*)^* = u$ для всякого $u \in L$, т. е. двойное сопряжение возвращает исходную метку;
2. *антигомоморфизм:* $(u \cdot v)^* = v^* \cdot u^*$, т. е. сопряжение обращает порядок умножения.

Замечание 2. Инволютивность гарантирует, что обращение цепочки изолирующих формул является обратимой операцией: если из a в b ведёт цепочка с метками $u_1, \ldots, u_k$, то обратная цепочка с метками $u_k^*, \ldots, u_1^*$ ведёт из b в a, а повторное обращение восстанавливает исходную цепочку.

Замечание 3. Самосопряжённость гарантирует *свойство замены* в предгеометрии: если b достижим из a по формуле с меткой u, то a достижим из b по формуле с меткой u^*. Без этого условия обратный путь мог бы не существовать, и оператор замыкания не удовлетворял бы аксиоме замены.

В дальнейшем считаем p самосопряжённым. Это условие выполнено, в частности, для всех алгебр из [5, 6, 7, 11]: их таблицы Кэли симметричны и $u^* = u$.

Пример 1. Рассмотрим теорию T дизъюнктного объединения бесконечного числа треугольников $\bigsqcup_{i<\omega} K_3$ в языке одного симметричного иррефлексивного отношения смежности E, и пусть p — 1-тип вершины. Бинарными изолирующими формулами для пары (p,p) являются ровно две: формула тождества (метка 0) и формула смежности $\varphi_1(x,y) \equiv E(x,y)$ (метка 1). Их сечения конечны: $|R_0(a)| = 1$, $|R_1(a)| = 2$; напротив, 2-тип «разные компоненты» имеет бесконечное сечение и потому в алгебру не входит. Таблица умножения

$\cdot$	0	1
0	$\{0\}$	$\{1\}$
1	$\{1\}$	$\{0,1\}$

ассоциативна; операция многозначна на метке 1, так как композиция $\exists y\,(\varphi_1(x,y)\wedge\varphi_1(y,z))$ возвращает либо исходную вершину x (метка 0), либо третью вершину треугольника (метка 1), откуда $1\cdot 1=\{0,1\}$. Тип p самосопряжён, причём $0^*=0$ и $1^*=1$ (отношение E симметрично). Здесь $\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\})$ совпадает с треугольником, содержащим a, и состоит из трёх элементов.

Многозначные таблицы большей сложности доставляют семейства $\mathfrak{Hp}_e$ (чётный диаметр) и $\mathfrak{Hp}_o$ (нечётный), возникающие в теориях гомоморфных произведений ребра на правильный n-угольник [11], с равномерной оценкой $|R_u(a)|\le 2$ при $u\neq 0$.

3 Оператор итерированного замыкания

Пусть $p\in S_1(\varnothing)$ — зафиксированный выше самосопряжённый полный 1-тип, $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}(T,p)$ — соответствующая алгебра распределений бинарных изолирующих формул, $L=L(\mathfrak{B})$ и $S=p(\mathfrak{M})$. Для произвольного множества $A\subseteq S$ введём *одношаговый оператор*

$$\delta_{\mathfrak{B}}(A)=A\cup\bigl\{b\in S\;\big|\;\exists\,a\in A,\ \exists\,u\in L\colon\ \mathfrak{M}\models\varphi_u(a,b)\bigr\}$$

Содержательно: $\delta_{\mathfrak{B}}(A)$ берёт все элементы A и добавляет к ним все элементы, до которых можно «дотянуться» из A *за один шаг* по какой-нибудь бинарной изолирующей формуле с меткой u.

Введём *итерированный оператор*

$$\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)=\bigcup_{n\ge 0}\delta^n_{\mathfrak{B}}(A),\qquad \delta^0_{\mathfrak{B}}(A)=A,\quad \delta^{n+1}_{\mathfrak{B}}(A)=\delta_{\mathfrak{B}}(\delta^n_{\mathfrak{B}}(A)).$$

Формально: $b\in\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)\Leftrightarrow$ существует конечная цепочка

$$a=c_0\xrightarrow{u_1}c_1\xrightarrow{u_2}\cdots\xrightarrow{u_k}c_k=b$$

с $a\in A$, метками $u_i\in L$ и $\mathfrak{M}\models\varphi_{u_i}(c_{i-1},c_i)$. При $k=0$ имеем $a=b\in A$.

Теорема 7 (Корректность)**.** *Пусть p — самосопряжённый полный 1-тип над $\varnothing$, $\mathfrak{B}(T,p)$ — соответствующая алгебра распределений бинарных изолирующих формул, $S=p(\mathfrak{M})$, а $\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}$ — индуцированный итерированный оператор замыкания. Тогда $\langle S,\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}\rangle$ — предгеометрия.*

Доказательство. Нужно проверить четыре аксиомы.

Экстенсивность: $A \subseteq \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)$**.** (Аксиома 1)

$A = \delta^0_{\mathfrak{B}}(A) \subseteq \bigcup_{n\geq 0} \delta^n_{\mathfrak{B}}(A) = \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)$.

Тривиально: цепочка длины $k = 0$.

Идемпотентность: $\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)) = \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)$**.** (Аксиома 2)

Пусть $b \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A))$. Тогда для некоторого $c \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)$ существует конечная цепочка

$$c = d_0 \xrightarrow{v_1} d_1 \xrightarrow{v_2} \cdots \xrightarrow{v_k} d_k = b.$$

Так как $c \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)$, для некоторого $a \in A$ существует конечная цепочка

$$a = e_0 \xrightarrow{u_1} e_1 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_m} e_m = c.$$

Конкатенация этих двух выбранных цепочек даёт конечную цепочку

$$a = e_0 \xrightarrow{u_1} \cdots \xrightarrow{u_m} e_m = d_0 \xrightarrow{v_1} \cdots \xrightarrow{v_k} d_k = b.$$

Следовательно, $b \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)$, поэтому $\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)) \subseteq \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)$. Обратное включение следует из экстенсивности.

Замена. (Аксиома 3)

Это *ключевое* место, где нужна самосопряжённость.

Пусть $a \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(X \cup \{b\}) \setminus \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(X)$. Существует свидетельствующая цепочка $c_0 \to c_1 \to \ldots \to c_k = a$. Если $c_0 \in X$, то $a \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(X)$ — противоречие. Значит $c_0 = b$.

Теперь *разворачиваем* цепочку: идём от $c_k = a$ назад к $c_0 = b$, заменяя каждую метку u_i на обратную u_i^*. По самосопряжённости $u_i^* \in L$, поэтому обратная цепочка

$$c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0 = b \quad \text{с метками} \quad u_k^*, u_{k-1}^*, \ldots, u_1^*$$

корректна, и $b \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\}) \subseteq \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(X \cup \{a\})$.

Конечный характер. (Аксиома 4)

Цепочка, свидетельствующая о $b \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)$, стартует в одном элементе $c_0 \in A$. Значит $b \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{c_0\})$ — конечное множество $Y = \{c_0\} \subseteq A$ достаточно. □

4 Основные структурные теоремы

Теорема 8 (Вырожденность)**.** *Пусть T — полная теория, $\mathfrak{M} \models T$, $p \in S_1(\varnothing)$ — самосопряжённый полный 1-тип, $S = p(\mathfrak{M})$.*

Тогда предгеометрия $\langle S, \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}} \rangle$ вырождена.

Доказательство. Нужно доказать, что для всякого $A \subseteq S$

$$\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A) = \bigcup_{a \in A} \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\}).$$

Сначала отметим простое включение справа налево. Если $a \in A$, то $\{a\} \subseteq A$, и по монотонности оператора $\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}$ имеем $\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\}) \subseteq \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)$. Поэтому

$$\bigcup_{a \in A} \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\}) \subseteq \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A).$$

Докажем обратное включение. Пусть $b \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)$. По определению итерированного замыкания это означает, что существует конечная свидетельствующая цепочка

$$c_0 \xrightarrow{u_1} c_1 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_k} c_k = b,$$

где $c_0 \in A$, все метки u_i принадлежат L, и $\mathfrak{M} \models \varphi_{u_i}(c_{i-1}, c_i)$ для всех $i = 1, \ldots, k$. При $k = 0$ это просто означает, что $b = c_0 \in A$.

Но в этой цепочке используется только один начальный элемент множества A, а именно c_0. Следовательно, ровно та же цепочка является свидетельством того, что $b \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{c_0\})$. Так как $c_0 \in A$, то

$$b \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{c_0\}) \subseteq \bigcup_{a \in A} \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\}).$$

Значит $\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A) \subseteq \bigcup_{a \in A} \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\})$.

Оба включения доказаны, поэтому замыкание любого множества распадается в объединение замыканий его одноточечных подмножеств. По определению это и означает, что предгеометрия $\langle S, \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}} \rangle$ вырождена. □

Следствие 1. *Пусть $p \in S_1(\varnothing)$ — самосопряжённый полный 1-тип, $\mathfrak{B}(T, p)$ — соответствующая алгебра распределений бинарных изолирующих формул и $S = p(\mathfrak{M})$. Тогда индуцированная предгеометрия $\langle S, \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}} \rangle$ модулярна.*

Доказательство. По теореме 8 предгеометрия $\langle S, \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}\rangle$ вырождена. В этой предгеометрии отношение

$$a \asymp b \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\}) = \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{b\})$$

разбивает S на классы параллельности, а замкнутые множества являются объединениями таких классов. Поэтому размерность замкнутого множества равна числу входящих в него классов параллельности.

Пусть $X, Y \subseteq S$ — конечномерные замкнутые множества. Обозначим через $\widehat{X}$ и $\widehat{Y}$ соответствующие конечные множества классов параллельности. Тогда

$$\begin{aligned} \dim(X) &= |\widehat{X}|, & \dim(Y) &= |\widehat{Y}|, \\ \dim(X \cup Y) &= |\widehat{X} \cup \widehat{Y}|, & \dim(X \cap Y) &= |\widehat{X} \cap \widehat{Y}|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\dim(X \cup Y) + \dim(X \cap Y) = |\widehat{X} \cup \widehat{Y}| + |\widehat{X} \cap \widehat{Y}| = |\widehat{X}| + |\widehat{Y}| = \dim(X) + \dim(Y).$$

Это и есть модулярность. □

Определим отношение достижимости на множестве меток: $u \rightsquigarrow v$, если существует последовательность меток $u = u_1, u_2, \ldots, u_k$ такая, что при некоторой расстановке скобок $v \in u_1 \cdot u_2 \cdots u_k$. Для $a \in S$ обозначим

$$L^*(a) = \{\, v \in L \mid \exists\, u \in L \ (R_u(a) \neq \varnothing \text{ и } u \rightsquigarrow v) \,\}$$

— множество меток, достижимых (в смысле $\rightsquigarrow$) из меток, реализующихся на выходящих из a рёбрах; эквивалентно, метки, возникающие в итоговом звене цепочек, стартующих в a.

Теорема 9 (Критерий локальной конечности)**.** *Пусть $S = p(\mathfrak{M})$, $L = L(\mathfrak{B}(T, p))$. Предгеометрия $\langle S, \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}\rangle$ локально конечна тогда и только тогда, когда*

$$|L^*(a)| < \infty \qquad \text{для всякого } a \in S.$$

При этом для всякого конечного непустого $A \subseteq S$ справедлива оценка

$$\left|\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)\right| \ \leq \ |A| \cdot \max_{a \in A} \sum_{u \in L^*(a)} N_u, \qquad N_u = \sup_{a' \in S} |R_u(a')|.$$

Замечание 4. Отдельного условия конечности классов реализаций здесь не требуется: по определению бинарной изолирующей формулы каждое

сечение $R_u(a')$ конечно для всех $u \in L$ и $a' \in S$. Более того, конечность сечений для полного типа p в ω-насыщенной модели влечёт их *равномерную* ограниченность — величина $N_u = \sup_{a' \in S} |R_u(a')|$ конечна для каждой метки u. В самом деле, если бы $N_u = \infty$, то семейство $p(x) \cup \{\exists^{\geq n} y\, \varphi_u(x,y) \mid n < \omega\}$ было бы конечно выполнимым, и по компактности нашлась бы реализация $a' \models p$ с бесконечным сечением $R_u(a')$ — противоречие. Тем самым все величины N_u в оценке корректно определены.

Доказательство. ($\Leftarrow$) По теореме 8 $\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A) = \bigcup_{a \in A} \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\})$, и достаточно оценить $|\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\})|$. Всякий элемент $b \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\}) \setminus \{a\}$ достижим цепочкой, результирующая композиционная формула которой лежит в $\mathfrak{B}(T,p)$ и имеет метку $v \in L^*(a)$. Значит $b \in R_v(a)$ для этой итоговой метки, откуда

$$\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\}) \subseteq \{a\} \cup \bigcup_{v \in L^*(a)} R_v(a).$$

Поскольку $|L^*(a)| < \infty$, а каждое сечение $R_v(a)$ конечно, правая часть конечна. Оценка следует непосредственно.

($\Rightarrow$) Пусть $|L^*(a)| = \infty$. Для каждой метки $v \in L^*(a)$ найдётся элемент $b_v \in R_v(a) \subseteq \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\})$, причём для различных меток $v \neq v'$ сечения $R_v(a)$ и $R_{v'}(a)$ не пересекаются (пара (a,b) реализует единственный полный 2-тип, поэтому ей отвечает ровно одна метка). Значит элементы b_v попарно различны, и $\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\})$ бесконечно, т. е. локальная конечность нарушается. □

Следствие 2 (Локальная конечность для $\mathfrak{Hp}_e$ и $\mathfrak{Hp}_o$)**.** *Для алгебр $\mathfrak{Hp}_e$ и $\mathfrak{Hp}_o$ [11], возникающих в теориях гомоморфных произведений ребра на правильный многоугольник, индуцированные предгеометрии на носителе $S = p(\mathfrak{M})$ локально конечны.*

Доказательство. В этих алгебрах множество меток конечно и определяется диаметром соответствующего графа. В чётном случае имеем семейство $\mathfrak{Hp}_e$ с метками

$$L = \{0, 1, \ldots, n\},$$

где n — чётный диаметр; в нечётном случае имеем семейство $\mathfrak{Hp}_o$ с тем же видом множества меток, но с нечётным n. Метка 0 соответствует тождественному 2-типу, а ненулевые метки кодируют возможные расстояния в графе гомоморфного произведения.

Здесь не предполагается, что носитель $S = p(\mathfrak{M})$ конечен: он может быть бесконечным. Конечность используется только на двух уровнях:

конечно множество меток L и конечны одношаговые классы реализаций $R_u(a)$.

Так как $|L| = n+1 < \infty$, множество достижимых меток $L^*(a)$ конечно для всякого $a \in S$. Более того, из таблиц умножения для $\mathfrak{Hp}_e$ и $\mathfrak{Hp}_o$ [11] следует, что для каждой ненулевой метки u и любого $a \in S$ класс реализаций $R_u(a)$ имеет мощность не больше двух:

$$|R_u(a)| \le 2 \qquad (u \neq 0).$$

Для метки 0 имеем $R_0(a) = \{a\}$. Поэтому условие теоремы 9 выполнено (а величины $N_u \le 2$ при $u \neq 0$ равномерно ограничены), и индуцированная предгеометрия локально конечна. В частности,

$$|\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\})| \le 1 + \sum_{u \in L^*(a)\setminus\{0\}} 2 \le 1 + 2n.$$

□

4.1 Покрытия и орбиты достижимости

Используя введённые в разделе 3 обозначения $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(T, p)$ и $S = p(\mathfrak{M})$, зададим на S бинарное отношение

$$a \sim_{\mathfrak{B}} b \quad \Longleftrightarrow \quad a \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{b\}) \text{ и } b \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\}).$$

Лемма 10. $\sim_{\mathfrak{B}}$ — *отношение эквивалентности на* S.

Доказательство. Рефлексивность из экстенсивности, симметричность очевидна. Транзитивность: если $a \sim_{\mathfrak{B}} b$ и $b \sim_{\mathfrak{B}} c$, то $c \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{b\}) \subseteq \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\})) = \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\})$ по идемпотентности; симметрично $a \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{c\})$. □

Классы эквивалентности отношения $\sim_{\mathfrak{B}}$ будем называть *орбитами* алгебры $\mathfrak{B}$ и обозначать $S/\!\sim_{\mathfrak{B}}$. В самосопряжённом случае они совпадают с компонентами связности симметрического графа достижимости. Это согласуется с обычным употреблением термина «орбита»: роль допустимых преобразований здесь играют конечные цепочки изолирующих переходов.

Следствие 3 (Каноническое орбитальное покрытие)**.**
Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(T, p)$ — *введённая выше алгебра распределений бинарных изолирующих формул. Тогда семейство*

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{B}} = \{\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\}) \mid a \in S\}$$

является покрытием множества S. Более того, любые два элемента этого покрытия либо не пересекаются, либо совпадают:

$$\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\}) \cap \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{b\}) \neq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\}) = \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{b\}).$$

Доказательство. Так как $a \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\})$, семейство $\mathcal{C}_{\mathfrak{B}}$ покрывает S. Пусть $c \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\}) \cap \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{b\})$. По самосопряжённости всякая цепочка может быть обращена, поэтому из достижимости c из a следует достижимость a из c, а из достижимости c из b — достижимость b из c. Следовательно, a, b и c лежат в одной орбите отношения $\sim_{\mathfrak{B}}$. Значит $\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\}) = \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{b\})$. □

Теорема 11 (Размерность)**.** *Пусть $S = p(\mathfrak{M})$ — носитель предгеометрии, индуцированной алгеброй распределений бинарных изолирующих формул $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(T, p)$. Тогда для всякого $A \subseteq S$*

$$\dim\bigl(\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)\bigr) \;=\; \bigl|\, A/{\sim_{\mathfrak{B}}} \,\bigr|$$

— число орбит, пересекающих A.

Доказательство. По теореме 8 предгеометрия вырождена. Поэтому базис множества A можно получить, выбрав по одному представителю из каждого пересекающего A класса отношения $a \asymp b \Leftrightarrow \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\}) = \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{b\})$. Равенство $\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\}) = \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{b\})$ равносильно $a \sim_{\mathfrak{B}} b$ (включение в обе стороны). Следовательно, мощность любого базиса множества A совпадает с числом орбит, пересекающих A, то есть равна $|A/{\sim_{\mathfrak{B}}}|$. Любой такой базис является также базисом $\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)$, откуда

$$\dim\bigl(\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)\bigr) = |A/{\sim_{\mathfrak{B}}}|.$$

□

Следствие 4. *Пусть $S = p(\mathfrak{M})$ — носитель предгеометрии, индуцированной алгеброй распределений бинарных изолирующих формул $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(T, p)$. Если множество $A \subseteq S$ пересекает ровно m орбит отношения $\sim_{\mathfrak{B}}$, то*

$$\dim\bigl(\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)\bigr) = m.$$

В частности, если рассматриваемый носитель S является одной орбитой, то $\dim(S) = 1$.

Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(T, p)$. Под *самосопряжённой подалгеброй* $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$ будем понимать набор классов с множеством меток $L(\mathfrak{C}) \subseteq L(\mathfrak{B})$, замкнутым относительно многозначного произведения и инволюции *; операции и отношения R_u наследуются из $\mathfrak{B}$. Через $\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{C}}$ обозначим оператор, определённый, как в разделе 3, конечными цепочками с метками из $L(\mathfrak{C})$.

Теорема 12 (Монотонность)**.** *Пусть* $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(T,p)$ *— алгебра распределений бинарных изолирующих формул, реализованная на носителе* $S = p(\mathfrak{M})$*, а* $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}_2 \subseteq \mathfrak{B}$ *— её самосопряжённые подалгебры. Тогда для всякого* $A \subseteq S$

$$\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}_1}(A) \ \subseteq \ \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}_2}(A).$$

В частности, локальная конечность предгеометрии, индуцированной алгеброй $\mathfrak{B}_2$*, влечёт локальную конечность предгеометрии, индуцированной алгеброй* $\mathfrak{B}_1$*.*

Доказательство. Положим $L_i = L(\mathfrak{B}_i)$. Из включения подалгебр следует $L_1 \subseteq L_2$. Пусть $b \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}_1}(A)$. Тогда для некоторого $a \in A$ существует $\mathfrak{B}_1$-цепочка

$$a = c_0 \xrightarrow{u_1} c_1 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_k} c_k = b, \qquad u_i \in L_1.$$

Все её метки принадлежат L_2, а соответствующие отношения наследуются из одной и той же алгебры $\mathfrak{B}$. Поэтому эта же цепочка является $\mathfrak{B}_2$-цепочкой. Следовательно, $b \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}_2}(A)$. □

Определение 13. *Размеченным изоморфизмом* алгебр распределений бинарных изолирующих формул $\mathfrak{B}(T_1,p_1)$ и $\mathfrak{B}(T_2,p_2)$ называется пара (α,β), где $L_i = L(\mathfrak{B}(T_i,p_i))$, $S_i = p_i(\mathfrak{M}_i)$, $\alpha\colon L_1 \to L_2$ — биекция меток, сохраняющая операцию $\cdot$ и инволюцию *, а $\beta\colon S_1 \to S_2$ — биекция носителей, удовлетворяющая

$$\beta\big(R_u(a)\big) = R_{\alpha(u)}\big(\beta(a)\big) \qquad \text{для всех } a \in S_1,\ u \in L_1.$$

Теорема 14 (Инвариантность)**.** *Если* (α,β) *— размеченный изоморфизм алгебр* $\mathfrak{B}(T_1,p_1)$ *и* $\mathfrak{B}(T_2,p_2)$*, то он индуцирует изоморфизм предгеометрий*

$$\beta\colon \big\langle S_1, \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}(T_1,p_1)}\big\rangle \ \longrightarrow \ \big\langle S_2, \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}(T_2,p_2)}\big\rangle.$$

Доказательство. Положим $\overline{\mathrm{cl}}_i = \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}(T_i,p_i)}$. Покажем, что

$$\beta(\overline{\mathrm{cl}}_1(A)) = \overline{\mathrm{cl}}_2(\beta(A)).$$

Пусть $b \in \overline{\mathrm{cl}}_1(A)$ и выбрана свидетельствующая цепочка

$$a = c_0 \xrightarrow{u_1} c_1 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_k} c_k = b, \qquad a \in A, \quad u_i \in L_1.$$

Применяя β и используя равенство $\beta(R_{u_i}(c_{i-1})) = R_{\alpha(u_i)}(\beta(c_{i-1}))$, получаем размеченную цепочку

$$\beta(a) = \beta(c_0) \xrightarrow{\alpha(u_1)} \beta(c_1) \xrightarrow{\alpha(u_2)} \cdots \xrightarrow{\alpha(u_k)} \beta(c_k) = \beta(b).$$

Следовательно, $\beta(b) \in \overline{\mathrm{cl}}_2(\beta(A))$. Применяя то же рассуждение к обратному размеченному изоморфизму (α^{-1},β^{-1}), получаем обратное включение. □

5 Заключение

Предложен корректный способ построения предгеометрии из алгебры распределений бинарных изолирующих формул полной теории, основанный на итерированном замыкании $\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}$. Главный результат — теорема 8 о вырожденности всех таких предгеометрий — описывает принципиальную границу бинарного подхода: комбинаторное богатство $\mathfrak{B}(T,p)$ не переводится в геометрическое богатство предгеометрии. Тонкая структура индуцированных предгеометрий уточняется: критерий локальной конечности (теорема 9), формула размерности через число орбит (теорема 11), монотонность по включению самосопряжённых подалгебр (теорема 12), инвариантность относительно размеченного изоморфизма (теорема 14).

В качестве дальнейших направлений отметим:

(а) Тернарные алгебры распределений. Следующий шаг — построить полноценную алгебру распределений тернарных изолирующих формул и уточнить условия координатной самосопряжённости, достаточные для аксиомы замены. Именно здесь может возникнуть зависимость элемента от пары, невозможная в бинарной цепочечной конструкции.

(б) Неитерированные операторы. Альтернативный путь — рассматривать одношаговый $\delta_{\mathfrak{B}}$ как *систему замыкания* без требования замены и изучать её как комбинаторно богатый объект.

(в) Связь с булевой алгеброй структур. В работах [16, 17] исследовалась наследуемость типов предгеометрий при операциях булевой алгебры предикатных структур. Естественный аналог: как ведут себя индуцированные предгеометрии при операциях на алгебрах $\mathfrak{B}(T,p)$ (подалгебра, факторизация, композиция теорий из [12, 13])? Теорема 12 даёт частный ответ; общая картина открыта.

(г) Классификация алгебр по инвариантам $|L^*|$ и $|R_u|$. Теоремы 9 и 11 выделяют функцию $|R_u(a)|$ и структуру ориентированного графа меток как полезные инварианты. Их систематическое вычисление для алгебр из [5, 6, 7, 11] представляет самостоятельный интерес.

Список литературы

[1] Cherlin G.L., Harrington L., Lachlan A.H. ω-categorical, ω-stable structures // Annals of Pure and Applied Logic. 1986. Vol. 28. P. 103–135.

[2] Berenstein A., Vassiliev E. On lovely pairs of geometric structures // Annals of Pure and Applied Logic. 2010. Vol. 161, N 7. P. 866–878.

[3] Berenstein A., Vassiliev E. Weakly one-based geometric theories // J. Symb. Logic. 2012. Vol. 77, N 2. P. 392–422.

[4] Berenstein A., Vassiliev E. Geometric structures with a dense independent subset // Selecta Math. 2016. Vol. 22, N 1. P. 191–225.

[5] Emel'yanov D.Yu. On the algebra distributions of binary formulas of unary theories // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2016. Vol. 17. P. 23–36.

[6] Emelyanov D.Y. Algebras of binary isolating formulas for simplex theories // Algebra and Model Theory 11. Collection of papers. Novosibirsk: NSTU Publisher, 2017. P. 66–74.

[7] Emel'yanov D.Yu. Algebras of binary isolating formulas for theories of Cartesian products of graphs // Algebra and Model Theory 12. Collection of papers. Novosibirsk: NSTU Publisher, 2019. P. 21–31.

[8] Emelyanov D.Yu. Algebra distributions of binary formulas for theories of Archimedean bodies // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2019. Vol. 28. P. 36–52.

[9] Emelyanov D.Y., Sudoplatov S.V. Structure of algebras of binary formulas of polygonometric theories with symmetry condition // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020. Vol. 17. P. 1–20.

[10] Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры бинарных формул: монография. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2023. 330 с.

[11] Емельянов Д.Ю. Алгебры бинарных изолирующих формул для теорий гомоморфных произведений. (рукопись / препринт), 2024.

[12] Emel'yanov D.Y., Kulpeshov B.S., Sudoplatov S.V. Algebras of binary formulas for compositions of theories // Algebra and Logic. 2020. Vol. 59, N 4. P. 295–312.

[13] Emel'yanov D.Y., Kulpeshov B.S., Sudoplatov S.V. Algebras of binary formulas for compositions of theories // Algebra and Logic. 2020. Vol. 59, N 4. P. 432–457.

[14] Hodges W. Model Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 772 p.

[15] Hrushovski E. A new strongly minimal set // Annals of Pure and Applied Logic. 1993. Vol. 62. P. 147–166.

[16] Малышев С.Б. Виды предгеометрий ациклических теорий // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 46. С. 110–120.

[17] Малышев С.Б. Наследуемость типов предгеометрий относительно композиций структур // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 52. С. 162–174.

[18] Markhabatov N.D., Sudoplatov S.V. Topologies, ranks, and closures for families of theories. I // Algebra and Logic. 2021. Vol. 59, N 6. P. 437–455.

[19] Mukhopadhyay M.M., Vassiliev E. On the Vamos matroid, homogeneous pregeometries and dense pairs // Australian Journal of Combinatorics. 2019. Vol. 75, N 1. P. 158–170.

[20] Pillay A. Geometric Stability Theory. Oxford: Clarendon Press, 1996. 361 p.

[21] Судоплатов С.В. Замыкания и множества образующих, связанные с комбинациями структур // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2016. Т. 16. С. 131–144.

[22] Sudoplatov S.V. Expansions and restrictions of structures and theories, their hierarchies. arXiv:2502.03051 [math.LO], 2025. 13 p.

[23] Shulepov I.V., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2014. Vol. 11. P. 380–407.

[24] Sudoplatov S.V. Classification of countable models of complete theories. Part 1. Novosibirsk: NSTU Publisher, 2018. 376 p.

[25] Zilber B.I. Uncountably categorical theories. American Mathematical Society, 1993. 117 p.

[26] Zilber B.I. Strongly minimal countably categorical theories // Sibirsk Matematika Zhurnal. 1980. Vol. 21, N 2. P. 98–112.

[27] Zilber B.I. Strongly minimal countably categorical theories II // Sibirsk Matematika Zhurnal. 1984. Vol. 25, N 3. P. 71–88.

ON RIGIDITY DEGREES OF ABELIAN GROUPS WITH UNARY PREDICATES

In.I. Pavlyuk, S.V. Sudoplatov*

Novosibirsk State Technical University,
20, K.Marx avenue, Novosibirsk, 630073, Russia;
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
1, Pirogova street, Novosibirsk, 630090, Russia
e-mail: pavlyuk@corp.nstu.ru, sudoplat@math.nsc.ru

In a series of papers semantic and syntactic possibilities for definable closures and their characteristics were considered, in general [1] and for special cases including logically cyclic groups [2], their logical generations [3], abelian groups [4, 5], ordered structures [6, 7], unars [8, 9], and partial orderings [10].

In the present paper, we study possibilities of rigidity degrees for abelian groups with unary predicates.

Throughout we consider complete first-order theories and their models.

1. Closures and rigidity degrees

Definition. [11, 12, 13] 1. A tuple $\overline{b}$ is *defined* by a formula $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$ of T with parameters $\overline{a}$, if $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$ has a unique solution $\overline{b}$.

The tuple $\overline{b}$ is *defined* by the type p if $\overline{b}$ is the unique tuple which realizes p. It is *definable* over a set A if $\mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ defines it.

2. For a set A of a theory T the union of sets of solutions of formulae $\varphi(x, \overline{a})$, $\overline{a} \in A$, such that $\models \exists^{=n} x\, \varphi(x, \overline{a})$ for some $n \in \omega$ (respectively $\models \exists^{=1} x\, \varphi(x, \overline{a})$) is said to be an *algebraic* (*definable* or *definitional*) *closure* of A. An algebraic closure of A is denoted by $\mathrm{acl}(A)$ and its definable (definitional) closure, by $\mathrm{dcl}(A)$.

*The work of the second author was carried out in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No. FWNF-2026-0032, and partially supported by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan, Grant No. AP26194247.

In such a case we say that the formulae $\varphi(x, \overline{a})$ *witness* that algebraic / definable (definitional) closure, and these formulae are called *algebraic / defining*.

Any element $b \in \mathrm{acl}(A)$ (respectively, $b \in \mathrm{dcl}(A)$) is called *algebraic* (*definable* or *definitional*) over A. If the set A is fixed or empty, we just say that b is *algebraic*, (*definable*, or definitional).

3. If $\mathrm{dcl}(A) = \mathrm{acl}(A)$, $\mathrm{cl}_1(A)$ denotes their common value.

4. If $A = \mathrm{acl}(A)$ (respectively, $A = \mathrm{dcl}(A)$) then A is called *algebraically* (*definably*) closed.

5. A type p is *algebraic* (*defining*) if it is realized by finitely many tuples (unique one) only, i.e., it contains an algebraic (defining) formula φ. This formula φ can be chosen with the minimal number of solution, and in such a case φ isolates p. The number of these solutions is called the *degree* $\deg(p)$ of p.

6. The complete algebraic types $p(x) \in S(A)$ are exactly ones of the form $\mathrm{tp}(a/A)$, where a is algebraic over A. The *degree* of a over A, $\deg(a/A)$ is the degree of $\mathrm{tp}(a/A)$.

Definition. [14] 1. For $m \in \omega \setminus \{0\}$ and a set A an element b is called *m-algebraic* over A, if $b \in \mathrm{acl}(A)$ and it is witnessed by a formula $\varphi(x, \overline{a})$, for $\overline{a} \in A$, with at most m solutions.

2. The set of all m-algebraic elements over A is denoted by $\mathrm{acl}_m(A)$ (notice that the operator $\mathrm{acl}_m(\cdot)$ can be non-transitive for $m \geq 2$).

3. If $A = \mathrm{acl}_m(A)$ then A is called *m-algebraically* closed.

4. A type p is *m-algebraic* if it is realized by at most m tuples only, i.e., $\deg(p) \leq m$.

5. The complete m-algebraic types $p(x) \in S(A)$ are exactly ones of the form $\mathrm{tp}(a/A)$, where a is m-algebraic over A, i.e., with $\deg(a/A) \leq m$. Here $\deg(a/A) = k \leq m$ defines the *m-degree* $\deg_m(a/A)$ of $\mathrm{tp}(a/A)$ and of a over A.

6. If $\mathrm{acl}(A) = \mathrm{acl}_m(A)$ then minimal such m is called the *degree of algebraization* over the set A and it is denoted by $\deg_{\mathrm{acl}}(A)$. If that m does not exist then we put $\deg_{\mathrm{acl}}(A) = \infty$. The supremum of values $\deg_{\mathrm{acl}}(A)$ with respect to all sets A of given theory T is denoted by $\deg_{\mathrm{acl}}(T)$ and called the *degree of algebraization* of the theory T.

7. Following [15] theories T with $\deg_{\mathrm{acl}}(T) = 1$, i.e., with defined $\mathrm{cl}_1(A)$ for any set A of T, are called *quasi-Urbanik*, and the models $\mathcal{M}$ of T are *quasi-Urbanik*, too.

Definition. [1] For a set A in a structure $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ is called *semantically A-rigid* or *automorphically A-rigid* if any A-automorphism $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ is

identical, i.e. the group $\mathrm{Aut}_A(\mathcal{M})$ of A-automorphisms of $\mathcal{M}$ is a singleton. The structure $\mathcal{M}$ is called *syntactically A-rigid* if $M = \mathrm{dcl}(A)$.

A structure $\mathcal{M}$ is called *$\forall$-semantically / $\forall$-syntactically n-rigid* (respectively, *$\exists$-semantically / $\exists$-syntactically n-rigid*), for $n \in \omega$, if $\mathcal{M}$ is semantically / syntactically A-rigid for any (some) $A \subseteq M$ with $|A| = n$.

The least n such that $\mathcal{M}$ is Q-semantically / Q-syntactically n-rigid, where $Q \in \{\forall, \exists\}$, is called the *$Q$-semantical / Q-syntactical degree of rigidity*, it is denoted by $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-sem}}(\mathcal{M})$ and $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-synt}}(\mathcal{M})$, respectively. Here if a set A produces the value of Q-semantical / Q-syntactical degree then we say that A *witnesses* that degree. If such n does not exist we put $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-sem}}(\mathcal{M}) = \infty$ and $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-synt}}(\mathcal{M}) = \infty$, respectively.

Collecting the rigidity characteristics of the structure $\mathcal{M}$ we put:

$$\deg_4(\mathcal{M}) \rightleftharpoons \left(\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M}), \deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M}), \deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M}), \deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M})\right).$$

A structure $\mathcal{M}$ is called *absolutely rigid* if $\mathcal{M}$ is both semantically and syntactically rigid, i.e. $\deg_4(\mathcal{M}) = (0, 0, 0, 0)$.

If the value $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M})$, respectively $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M})$, is natural then $\mathcal{M}$ is called *somewhere*, or *somehow*, *almost*, or *finitely*, *semantically / syntactically rigid*. If $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M})$ or $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M})$ is natural then we replace somewhere by everywhere, or somehow by anyhow, i.e. $\mathcal{M}$ is everywhere (anyhow) almost (finitely) semantically / syntactically rigid.

If the value $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M})$, respectively $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M})$, is equal to ∞ then $\mathcal{M}$ is *nowhere*, or *nohow*, *almost*, or *finitely*, *semantically / syntactically rigid*. If $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M})$ or $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M})$ is equal ∞ then we replace nowhere by somewhere and nohow by somehow with further negation, i.e. $\mathcal{M}$ is somewhere non-almost (non-finitely) semantically / syntactically rigid, or somehow non-almost (non-finitely) semantically / syntactically rigid.

Structures $\mathcal{M}$ with $\deg_4(\mathcal{M}) = (\infty, \infty, \infty, \infty)$ are called *absolutely finitely nonrigid*.

2. Abelian groups and their rigidity degrees

Let $\mathcal{A}$ be an abelian group in the signature $\Sigma = \langle +^{(2)}, -^{(1)}, 0^{(0)} \rangle$. Then $k\mathcal{A}$ denotes its subgroup $\{ka \mid a \in A\}$ and $\mathcal{A}[k]$ denotes the subgroup $\{a \in A \mid ka = 0\}$. Let P be the set of all prime numbers. If $p \in P$ and $pA = \{0\}$ then $\dim\mathcal{A}$ denotes the dimension of the group $\mathcal{A}$, considered as a vector space over a field with p elements. The following numbers, for arbitrary $p \in P$ and $n \in \omega \setminus \{0\}$ are called the *Szmielew invariants* for the group $\mathcal{A}$ [16, 17]:

$$\alpha_{p,n}(\mathcal{A}) = \min\{\dim((p^{n-1}\mathcal{A})[p]/(p^n\mathcal{A})[p]), \omega\},$$

$$\beta_p(\mathcal{A}) = \min\{\inf\{\dim((p^n\mathcal{A})[p] \mid n \in \omega\}, \omega\},$$
$$\gamma_p(\mathcal{A}) = \min\{\inf\{\dim((\mathcal{A}/\mathcal{A}[p^n])/p(\mathcal{A}/\mathcal{A}[p^n])) \mid n \in \omega\}, \omega\},$$
$$\varepsilon(\mathcal{A}) \in \{0,1\}, \text{ and } \varepsilon(\mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow (n\mathcal{A} = \{0\} \text{ for some } n \in \omega, n \neq 0).$$

We denote the set of Szmielew invariants by **Szm**.

It is known that two abelian groups are elementarily equivalent if and only if they have same Szmielew invariants. Besides, the following proposition holds.

Proposition 2.1. [16, Proposition 8.4.12] *Let for any p and n the cardinals $\alpha_{p,n}$, β_p, $\gamma_p \leq \omega$, and $\varepsilon \in \{0,1\}$ be given. Then there is an abelian group $\mathcal{A}$ such that the Szmielew invariants $\alpha_{p,n}(\mathcal{A})$, $\beta_p(\mathcal{A})$, $\gamma_p(\mathcal{A})$, and $\varepsilon(\mathcal{A})$ are equal to $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p, and ε, respectively, if and only if the following conditions hold:*

(1) *if for prime p the set $\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ is infinite then $\beta_p = \gamma_p = \omega$;*

(2) *if $\varepsilon = 0$ then for any prime p, $\beta_p = \gamma_p = 0$ and the set $\{\langle p, n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ is finite.*

We denote by $\mathbb{Q}$ the additive group of rational numbers, $\mathbb{Z}_{p^n}$ — the cyclic group of the order p^n, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — the p-quasi-cyclic group, or p-Prüfer group, of all complex roots of 1 of degrees p^n for all $n \geq 1$, R_p — the group of irreducible fractions with denominators which are mutually prime with p. The groups $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_{p^n}$, R_p, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ are called *basic*. Below the notations of these groups will be identified with their universes.

Since abelian groups with same Szmielew invariants have the same theories, any abelian group $\mathcal{A}$ is elementarily equivalent to a group

$$\oplus_{p,n} \mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus \oplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\beta_p)} \oplus \oplus_p R_p^{(\gamma_p)} \oplus \mathbb{Q}^{(\varepsilon)}, \tag{1}$$

where $\mathcal{B}^{(k)}$ denotes the direct sum of k subgroups isomorphic to a group $\mathcal{B}$. Thus, any theory of an abelian group has a model being a direct sum of based groups. The groups of form (1) are called *Szmielew*, or *standard*.

Recall that any complete theory of an abelian group is based by the set of positive primitive formulas, reduced to the set of the following formulas:

$$\exists y(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n \approx p^k y), \tag{2}$$

$$m_1x_1 + \ldots + m_nx_n \approx 0, \tag{3}$$

where $m_i \in \mathbb{Z}$, $k \in \omega$, p is a prime number. Formulas (2) and (3) allow to witness that Szmielew invariants defines theories of abelian groups modulo Proposition 2.1.

In view of Proposition 2.1 and equations (2) and (3) we have the following:

Remark. Theories of abelian groups are forced by sentences implied by formulas of form (2) and (3) and describing dimensions with respect to $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p, ε as well as bounds for orders p^k of elements and possibilities for divisions of elements by p^k. Moreover, distinct values of Szmielew invariants are separated by some sentences modulo Proposition 2.1. Hence, counting ranks of families of theories of abelian groups it suffices to consider sentences separating Szmielew invariants.

Definition. (cf. [18]) For an abelian group $\mathcal{A}$ we denote by $\mathrm{rk}(\mathcal{A})$ its *rank*, i.e. the minimal number of generating elements. Here we assume that the generation is closed under all admissible linear combinations with rational coefficients in the frame of given group.

We say that a group $\mathcal{A} \oplus_{p,n} \mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})}$ has a *free* element of order 2, if $\alpha_{2,1} > 0$ and excluding a copy of the group $\mathbb{Z}_2$ from this representation decreases the rank of the group, i.e., some copy of the group $\mathbb{Z}_2$ is not captured by the maximal subgroups $\mathbb{Z}_s$ of the type specified above.

Proposition 2.2. [5] *For any finite abelian group* $\mathcal{A} = \oplus_{p,n} \mathbf{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})}$, $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{A}) = \deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{A}) = \delta$, *with* $\delta = \mathrm{rk}(\mathcal{A}) - 1$ *if* $\alpha_{2,1} = 1$, *and with* $\delta = \mathrm{rk}(\mathcal{A})$ *if* $\alpha_{2,1} \neq 1$.

Proposition 2.3. [5] *For any finite abelian group* $\mathcal{A} = \oplus_{p,n} \mathbf{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})}$ *with some* $\alpha_{p,n} > 0$ *and* $\mathcal{A} \not\cong \mathbf{Z}_2$, $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{A}) = \deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{A}) = \zeta$, *where*

$$\zeta = q^{n_0(\alpha_{q,n_0}-1)} q^{n_0-1} \times \prod_{\alpha_{p,n}>0, p\neq q, \text{ or } p=q \text{ and } n_0>n} p^{n\alpha_{p,n}},$$

if $\alpha_{2,1} = 1$, *and*

$$\zeta = q^{n_0(\alpha_{q,n_0}-1)} q^{n_0-1} \times \prod_{\alpha_{p,n}>0, p\neq q, \text{ or } p=q \text{ and } n_0>n} p^{n\alpha_{p,n}} + 1,$$

if $\alpha_{2,1} \neq 1$, q *is the maximal prime number with* $\alpha_{q,n} > 0$ *and* n_0 *is maximal one among* n *with* $\alpha_{q,n} > 0$.

For a finite abelian group $\mathcal{A}$ we denote by $\delta(\mathcal{A})$ the value δ in Proposition 2.2, and by $\zeta(\mathcal{A})$ the value for $\forall$-degrees in Proposition 2.3. Summarizing these propositions we conclude:

Theorem 2.4. [5] *For any finite abelian group* $\mathcal{A}$ *either*

$$\deg_4(\mathcal{A}) = (0, 0, 0, 0)$$

if $|A| \leq 2$, *or*

$$\deg_4(\mathcal{A}) = (\delta(\mathcal{A}), \delta(\mathcal{A}), \zeta(\mathcal{A}), \zeta(\mathcal{A})),$$

otherwise.

Theorem 2.5. [5] *For any standard infinite abelian group* $\mathcal{A}$ *one of the following conditions holds:*

1) $\deg_4(\mathcal{A}) = (1, 1, 2, 2)$, *if* $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = 1$;

2) $\deg_4(\mathcal{A}) = (1, 1, 3, 3)$, *if* $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = 2$ *and* $\alpha_{2,1}(\mathcal{A}) = 1$;

3) $\deg_4(\mathcal{A}) = (r-1, r-1, \infty, \infty)$, *if* $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = r > 2$ *is finite and* $\alpha_{2,1}(\mathcal{A}) = 1$;

4) $\deg_4(\mathcal{A}) = (r, r, \infty, \infty)$, *if* $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = r > 2$ *is finite and* $\alpha_{2,1}(\mathcal{A}) \neq 1$;

5) $\deg_4(\mathcal{A}) = (\infty, \infty, \infty, \infty)$, *if* $\mathrm{rk}(\mathcal{A})$ *is infinite.*

3. Expansions of standard abelian groups by unary predicates and their rigidity degrees

In this section we consider rigidity degrees for expansions of abelian groups [19].

Theorem 3.1. *For any standard infinite abelian group* $\mathcal{A}$ *and its expansion* $\mathcal{A}'$ *by a unary predicate one of the following conditions holds:*

1) $\deg_4(\mathcal{A}')$ *equals* $(0, 0, 0, 0)$ *or* $(1, 1, 2, 2)$, *if* $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = 1$;

2) $\deg_4(\mathcal{A}')$ *equals* $(0, 0, 0, 0)$ *or* $(1, 1, 3, 3)$, *if* $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = 2$ *and there is a free element of the order* 2 *for the cyclic part of* $\mathcal{A}$;

3) $\deg_4(\mathcal{A}')$ *equals* $(0, 0, 0, 0)$ *or* $(r-k, r-k, \infty, \infty)$, *where* $0 < k < r$, *if the value* $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = r > 2$ *is finite and there is a free element of the order* 2 *for the cyclic part of* $\mathcal{A}$;

4) $\deg_4(\mathcal{A}')$ *equals* $(0, 0, 0, 0)$ *or* $(r-k, r-k, \infty, \infty)$, *where* $0 \leq k < r$, *if the value* $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = r > 2$ *is finite and there are no free elements of the order* 2 *for the cyclic part of* $\mathcal{A}$;

5) $\deg_4(\mathcal{A}')$ *equals* $(0, 0, 0, 0)$, (k, k, ∞, ∞), *where* $k \in \omega \setminus \{0\}$, *or* $(\infty, \infty, \infty, \infty)$, *if some Szmielew invariant is infinite.*

Proof. Let $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = 1$ and $\mathcal{A}'$ be an expansion of $\mathcal{A}$ by a unary predicate U. Using Theorem 2.5, we consider cases for the position of U in $\mathcal{A}'$ and the mobility or partial rigidity of its elements.

1. Let $\deg_4(\mathcal{A}) = (1, 1, 2, 2)$ with $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = 1$. Then either U preserves the mobility a generator g of $\mathcal{A}$ connecting g with other nonzero elements of $\mathcal{A}$, say with $U = \emptyset$, $U = A$, $U = \{0\}$, or $U = A \setminus \{0\}$, obtaining $\deg_4(\mathcal{A}') = (1, 1, 2, 2)$, or U divides elements in $A \setminus \{0\}$ such that generating elements cease to be connected by automorphisms, say with singleton $U \subset A \setminus \{0\}$. In the latter case we obtain the absolute rigidity: $\deg_4(\mathcal{A}') = (0, 0, 0, 0)$.

2. Let $\deg_4(\mathcal{A}) = (1, 1, 3, 3)$ with $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = 2$ and $\alpha_{2,1}(\mathcal{A}) = 1$. Here again $\mathcal{A}$ has the rank 1 outside the cyclic part, and either U preserves the rigidity degrees: $\deg_4(\mathcal{A}) = (1, 1, 3, 3)$, or it fixes a generating element outside the cyclic part producing the absolute rigidity: $\deg_4(\mathcal{A}') = (0, 0, 0, 0)$.

3. Let $\deg_4(\mathcal{A}) = (r-1, r-1, \infty, \infty)$ with finite $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = r > 2$ and $\alpha_{2,1}(\mathcal{A}) = 1$. Then either U fixes generators for various Szmielew invariants producing the absolute rigidity: $\deg_4(\mathcal{A}') = (0, 0, 0, 0)$, or U fixes k there generators, obtaining $\deg_4(\mathcal{A}') = (r-k, r-k, \infty, \infty)$, where $0 < k < r$, the value $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = r > 2$ is finite and there is a free element of the order 2 for the cyclic part of $\mathcal{A}$.

4. Let $\deg_4(\mathcal{A}) = (r, r, \infty, \infty)$ with finite $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = r > 2$ and $\alpha_{2,1}(\mathcal{A}) \neq 1$. Then $\deg_4(\mathcal{A}') = (0, 0, 0, 0)$ fixing independent generators by U, or $\deg_4(\mathcal{A}') = (r-k, r-k, \infty, \infty)$, where $0 \leq k < r$, the value $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = r > 2$ is finite and there are no free elements of the order 2 for the cyclic part of $\mathcal{A}$.

5. Let $\mathcal{A}$ be absolutely finitely nonrigid, i.e. $\deg_4(\mathcal{A}) = (\infty, \infty, \infty, \infty)$ with $\mathrm{rk}(\mathcal{A})$ is infinite. Then either $\deg_4(\mathcal{A}') = (0, 0, 0, 0)$ fixing generators related to infinitely many one-dimensional Szmielew invariants, of $\deg_4(\mathcal{A}) = (k, k, \infty, \infty)$, where $k \in \omega \setminus \{0\}$ and there are k generators related to finite Szmielew invariants, or $\deg_4(\mathcal{A}) = (\infty, \infty, \infty, \infty)$, if some Szmielew invariant is infinite. □

The resulting description is adaptable to arbitrary structures with a group operation and their expansions, including finite abelian groups on a base of Theorem 2.4, linearly ordered [20, 21], circularly ordered [20], and spherically ordered groups [22].

References

[1] Sudoplatov S.V. Variations of rigidity // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2024. Vol. 47. P. 119–136. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.119

[2] Shahryari M. On logically cyclic groups // J. Group Theory. 2015. Vol. 18. P. 263–272. https://doi.org/10.1515/jgth-2014-0047

[3] Abdollahi A., Shahryari M. Logical generation of groups // Communications in Algebra. 2024. Vol. 52, No. 8. P. 3457–3460. https://doi.org/10.1080/00927872.2024.2320811

[4] Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V. On algebraic and definable closures for finite structures // Algebra and model theory 14. Collection of papers,

Novosibirsk : Edition of NSTU, 2023. P. 87–94. https://erlagol.ru/tom-14-2023/?lang=en

[5] Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V. Variations of rigidity for abelian groups // Mathematics and Statistics. 2024. Vol. 12. No. 2. P. 204–210. https://doi.org/10.13189/ms.2024.120210

[6] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Variations of rigidity for ordered theories // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2024. Vol. 48. P. 129–144. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.129

[7] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Variations of rigidity for models of weakly o-minimal theories // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Vol. 45, No. 11. P. 5837–5844. https://doi.org/10.1134/S1995080224606970

[8] Sakharov I.A., Stepanova A.A. Semantic and syntactic degrees of rigidity of unars // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2026. Vol. 23, No. 1. P. 517–531. https://doi.org/110.33048/semi.2026.23.032

[9] Sakharov I.A., Stepanova A.A. Semantic and syntactic degrees of rigidity of unars 2 // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2026. Vol. 23, No. 2. P. 749–755. https://doi.org/10.33048/semi.2026.23.047

[10] Ershov D.O., Kulpeshov B.Sh. Rigidity degrees for partial orderings // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2026. Vol. 23, No. 2. P. 756–765. https://doi.org/10.33048/semi.2026.23.048

[11] Shelah S. Classification theory and the number of non-isomorphic models. Amsterdam : North-Holland, 1990. 705 p.

[12] Hodges W. Model theory. Cambridge : Cambridge University Press, 1993. 772 p.

[13] Tent K., Ziegler M. A Course in Model Theory (Lecture Notes in Logic. No. 40). Cambridge : Cambridge University Press, 2012. 258 p.

[14] Sudoplatov S.V. Algebraic closures and their variations // arXiv:2307.12536 [math.LO], 2023. 16 p. https://doi.org/10.48550/arXiv.2307.12536

[15] Zil'ber B.I. Hereditarily transitive groups and quasi-Urbanik structures // Trudy Inst. Mat. Sib. Otd. AN SSSR. 1988. Vol. 8. P. 58–77. (in Russian)

[16] Ershov Yu.L., Palyutin E.A. Mathematical Logic. Moscow : Fizmatlit, 2011. 356 p. [in Russian]

[17] Szmielew W. Elementary properties of Abelian groups // Fund. Math. 1955, Vol. 41, P. 203–271.

[18] Kargapolov M.I., Merzljakov J.I. Fundamentals of the Theory of Groups. New York : Springer, 2011. 221 p.

[19] Sudoplatov S.V. Expansions and restrictions of structures and theories, their hierarchies // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2025. Vol. 54. P. 143–159.

[20] Fuchs L. Partially ordered algebraic systems. Oxford, London, New York, Paris : Pergamon Press, 1963.

[21] Kokorin A.I., Kopytov V.M. Fully Ordered Groups. Wiley, 1974.147 p.

[22] Sudoplatov S.V. Spherically ordered groups // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2024. Vol. 21. P. 1337–1346.

О ПРАВИЛАХ АГРЕГИРОВАНИЯ С НЕТРИВИАЛЬНЫМ СИММЕТРИЧНЫМ КЛАССОМ ИНВАРИАНТНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Н.Л. Поляков

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Покровский бульвар, 11, Москва, 109028, Российская Федерация
e-mail: npolyakov@hse.ru

Для конечного множества альтернатив A мощности $|A| \geqslant 5$ мы описываем все локальные правила агрегирования индивидуальных выборов на двухэлементных множествах, имеющие нетривиальный симметричный класс инвариантов. Оказывается, что это условие для правил агрегирования равносильно условию его нейтральности, а каждое из удовлетворяющих ему правил инвариантно эквивалентно одному из четырех специальных определенных в работе правил.

1 Основные определения

В теории коллективного выбора (social choice theory) изучаются модели агрегирования индивидуальных предпочтений (или выбора вариантов), см. [1].

Одна из наиболее простых моделей (рассмотрением которой мы ограничиваемся в данной работе[1]) описывается следующим образом. Пусть A есть множество (альтернатив). *Индивидуальным выбором* называется любая функция $\mathfrak{c} : [A]^2 \to A$ с условием $(\forall p \in [A]^2)\, \mathfrak{c}(p) \in p$, где $[A]^2$ есть множество всех двухэлементных подмножеств A.[2] Множество всех индивидуальных выборов обозначается $\mathfrak{C}_2(A)$. Множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_2(A)$ *симметрично*, если для каждой перестановки σ множества A оно вместе с

[1] О более общих моделях см. [2–5], а также [6] и др.

[2] В соответствии с терминологией монографии [5], множество $[A]^2$ в данном (простейшем) случае является множеством *предъявлений*.

каждой функцией $\mathfrak{c}$ содержит функцию $\mathfrak{c}_\sigma$, которая определяется тождеством $\mathfrak{c}_\sigma(p) = \sigma^{-1}(\mathfrak{c}(\sigma p))$, где $\sigma p = \{\sigma(a) : a \in p\}$. Класс $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{P}(\mathfrak{C}_2(A))$ называется симметричным, если для каждой перестановки σ множества A вместе с каждым множеством $\mathfrak{D}$ он содержит множество $\mathfrak{D}_\sigma := \{\mathfrak{d}_\sigma : \mathfrak{d} \in \mathfrak{D}\}$. Для любого связного асимметричного бинарного отношения P на A функция выбора $\mathfrak{c}_P \in \mathfrak{C}_2(A)$ определяется следующим образом:

$$\mathfrak{c}_P(\{a, b\}) = b \Leftrightarrow a\, P\, b$$

для всех различных $a, b \in A$. Очевидно, отображение $P \mapsto \mathfrak{c}_P$ является биекцией из множества всех связных асимметричных отношений на A на множество $\mathfrak{C}_2(A)$. Функция выбора $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$ называется *рациональной*, если

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_\prec$$

для некоторого строгого линейного порядка $\prec$ на A. Множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_2(A)$ называется *рациональным*, если оно состоит только из рациональных функций $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$. Класс $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{P}(\mathfrak{C}_2(A))$ называется *рациональным*, если он состоит только из рациональных множеств $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_2(A)$.

Правилом агрегирования называется любая функция

$$f : (\mathfrak{C}_2(A))^n \to \mathfrak{C}_2(A),$$

где n есть произвольное натуральное число. Правило агрегирования f называется

1. *локальным*, если

   $$f(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n)(p) \subseteq \{\mathfrak{c}_1(p), \mathfrak{c}_2(p), \ldots, \mathfrak{c}_n(p)\}$$

   для всех $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, …, $\mathfrak{c}_n \in \mathfrak{C}_2(A)$ и $p \in [A]^2$,

2. *нейтральным*, если для каждой перестановки σ множества A выполнено: $f_\sigma = f$, где правило f_σ определяется формулой

   $$f_\sigma(\mathfrak{c}^1, \mathfrak{c}^2, \ldots, \mathfrak{c}^n) = f(\mathfrak{c}^1_\sigma, \mathfrak{c}^2_\sigma, \ldots, \mathfrak{c}^n_\sigma)_{\sigma^{-1}}$$

   для всех $\mathfrak{c}^1, \mathfrak{c}^2, \ldots, \mathfrak{c}^n \in \mathfrak{C}_2(A)$,

3. *диктаторским*, если оно является проекцией, т.е. для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, выполнено

   $$f(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n) = \mathfrak{c}_i$$

   для всех $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n \in \mathfrak{C}_2(A)$.

Решающая коалиция на множестве (агентов) $E_n := \{1, 2, \ldots, n\}$ — это множество $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{P}(E_n)$ такое, что для любого множества $X \subseteq E_n$ ровно одно из множеств X и $E_n \setminus X$ принадлежит $\mathscr{K}$. Хорошо известно, что каждое локальное и нейтральное правило агрегирования $f : (\mathfrak{C}_2(A))^n \to \mathfrak{C}_2(A)$ может быть задано с помощью решающей коалиции $\mathscr{K}_f$ следующим образом: для всех $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n \in \mathfrak{C}_2(A)$ и $p = \{a, b\} \in [A]^2$

$$f(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n)(p) = b \Leftrightarrow \{i \in E_n : \mathfrak{c}_i(p) = b\} \in \mathscr{K}_f.$$

Правило агрегирования $f : (\mathfrak{C}_2(A))^n \to \mathfrak{C}_2(A)$ *сохраняет* множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_2(A)$ (а множество $\mathfrak{D}$ *сохраняется* правилом f или является его *инвариантным множеством*), если

$$f(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n) \in \mathfrak{D}$$

для всех $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n \in \mathfrak{D}$.

Множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_2(A)$ называется *тривиальным*, если оно сохраняется всеми локальными правилами агрегирования $f : (\mathfrak{C}_2(A))^n \to \mathfrak{C}_2(A)$. Например, пустое множество, любой синглетон $\{\mathfrak{c}\}$, $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$, и все множество $\mathfrak{C}_2(A)$ тривиальны. Класс $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{P}(\mathfrak{C}_2(A))$ называется *тривиальным*, если он состоит только из тривиальных множеств.

2 Локальные правила агрегирования с нетривиальными симметричными классами инвариантных множеств

Знаменитая *теорема Эрроу о невозможности* утверждает, что при $3 \leqslant |A| < \omega$ не существует не-диктаторских локальных правил агрегирования f, которые сохраняют множество рациональных предпочтений, см. [7]. Этот факт породил большое количество исследований т.н. *ограниченных областей* и инвариантных множеств «естественных» правил агрегирования.[3] Все инвариантные рациональные множества для *правила большинства* описаны А. Сеном [8] и М. Канеко [9] (в терминах линейных порядков). Класс всех таких множеств закономерно является симметричным.

Меняется ли ситуация, если мы выходим за пределы рациональных выборов (равносильно, за пределы транзитивных предпочтений)? Недавние исследования дают, по существу, отрицательный ответ. В работе [10] (наряду с другими результатами) показано, что принцип невозможности

[3] Результаты в этой области обычно называются «теоремами о возможности».

почти дословно распространяется на любые симметричные множества $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_2(A)$, а именно, показано, что при $3 \leqslant |A| < \omega$ не существует не-диктаторских локальных правил агрегирования f, которые сохраняют хотя бы одно непустое собственное симметричное подмножество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_2(A)$ за исключением некоторых экзотических случаев.[4] Таким образом, в общем случае трудно надеяться на то, что какое-либо правило агрегирования будет иметь нетривиальное симметричное инвариантное множество.

В данной работе мы исследуем, какие локальные правила агрегирования $f : (\mathfrak{C}_2(A))^n \to \mathfrak{C}_2(A)$ имеют нетривиальные симметричные *классы* $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{P}(\mathfrak{C}_2(A))$. Заметим, что конструкция таких классов (и соответствующих множеств правил агрегирования) удовлетворяет критерию А. Тарского [12] и, таким образом, может быть отнесена к логическим понятиям. С учетом известных «теорем о возможности» класс *логических* (в этом смысле) правил агрегирования заведомо шире класса проекций (диктаторских правил). Более того, следующее наблюдение показывает, что все локальные и нейтральные правила агрегирования могут быть отнесены к логическим.

Предложение 1. *Каждое локальное и нейтральное правило агрегирования $f : (\mathfrak{C}_2(A))^n \to \mathfrak{C}_2(A)$ сохраняет любое двухэлементное множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_2(A)$.*

Мы показываем (см. [13]), что обратное также верно для $5 \leqslant |A| < \omega$, и приводим простую классификацию всех локальных и нейтральных правил агрегирования.

Для каждого множества A определим четыре специальных локальных и нейтральных правила агрегирования $\delta, \nu, \lambda, \mu : (\mathfrak{C}_2(A))^3 \to \mathfrak{C}_2(A)$ с решающими коалициями:

$$\begin{aligned}
\mathscr{K}_\delta &= \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\},\\
\mathscr{K}_\nu &= \{\{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\},\\
\mathscr{K}_\lambda &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\},\\
\mathscr{K}_\mu &= \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\},
\end{aligned}$$

соответственно. Очевидно, δ — диктатура, а μ — правило большинства.

[4] Более точно, в работе [10] классифицированы все симметричные множества $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$, $r < \omega$, без *свойства Эрроу*, т.е. инвариантные для некоторого не-диктаторского локального правила агрегирования f. Это несколько усиливает результат С. Шелаха, полученный ранее в [11].

Определение 1. *Правила* $f : (\mathfrak{C}_2(A))^n \to \mathfrak{C}_2(A)$ *и* $g : (\mathfrak{C}_2(A))^m \to \mathfrak{C}_2(A)$ *инвариантно эквивалентны, если они сохраняют одни и те же множества* $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_2(A)$.

Теорема 1. *Пусть* $5 \leqslant |A| < \omega$. *Тогда для любого локального правила агрегирования* $f : (\mathfrak{C}_2(A))^n \to \mathfrak{C}_2(A)$ *следующие условия эквивалентны:*

1. f *имеет нетривиальный симметричный рациональный класс инвариантных множеств,*
2. f *имеет нетривиальный симметричный класс инвариантных множеств (т.е.* f *логическое),*
3. f *нейтрально,*
4. f *инвариантно эквивалентно одному из правил* $\delta, \nu, \lambda, \mu$.

References

[1] Brandt F., Conitzer V., Endriss U. et al.: Handbook of Computational Social Choice. Cambridge University Press, Cambridge (2016)

[2] Aizerman M. A., Aleskerov F. T.: Voting operators in the space of choice functions. Math. Soc. S. **11**(3), 201–242 (1986)

[3] Aleskerov F. T.: Arrovian Aggregation Models. Kluwer Academic Publishers, Dordercht (1999)

[4] Aleskerov F. T.: Local Aggregation Models. Automation and Remote Control **10**, 3–26 (2000)

[5] Aizerman M. A., Aleskerov F. T.: Choice of variants (foundation of the theory), 2nd edition. URSS, Moscow (2024)

[6] Danilov V. I.: Introduction to the theory of choice and stable contracts, Uspekhi Mat. Nauk, **80**:4(484), 3–46; Russian Math. Surveys, **80**(4), 549–590 (2025)

[7] Arrow K.: Social Choice and Individual Values. 2nd edn. New Haven: Yale University Press (1963)

[8] Sen A. K.: A Possibility Theorem on Majority Decisions. Econometrica, **3**(4), 491–499 (1966)

[9] Kaneko M.: Necessary and Sufficient Condition for Transitivity in Voting Theory. J. Econ. Th., **11**, 385–393 (1975)

[10] Polyakov, N.L., Shamolin, M.V.: On a generalization of Arrow's impossibility theorem. Dokl. Math. **89**, 290–292 (2014)

[11] Shelah, S.: On the Arrow property. Adv. in Apl. Mat. **34**, 217–251 (2005)

[12] Tarski, A.: What are logical notions? History and Philosophy of Logic **7**, 143–154 (1986)

[13] Polyakov, N.L.: Which Aggregation Rules Can Be Classified as Logical Concepts? In: «Decision-Making, Optimization, and Data Analysis: Theory and Applications» devoted to the 75th birthday of Professor Fuad Aleskerov, to appear. ArXiv version: https://arxiv.org/abs/2604.01260v1.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОПРЯГАЮЩЕЙ МАТРИЦЫ АВТОМОРФИЗМОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ 2

А.М. Попова (Ивлева), О.В. Брюханов, Д.В. Кореневский

Новосибирский государственный технический университет,
пр-кт. Карла Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: ampopova@mail.ru, bryuolegvad@ya.ru, denis.koren@fb.nstu.ru

1 Введение

Пусть G – группа, R – кольцо с единицей. *Групповое кольцо* RG – это множество формальных сумм вида $\sum\limits_{g\in G}\alpha_g g$, $\alpha_g \in R$, с естественно определенными операциями:

$$\Sigma\alpha_g g + \Sigma\beta_g g = \Sigma(\alpha_g + \beta_g)g,$$

$$(\Sigma\alpha_g g)(\Sigma\beta_g g) = \sum_{g\in G}\left(\sum_{\substack{f,h\in G\\ f\cdot h=g}}\alpha_f\beta_h\right)g,$$

$$\alpha(\Sigma\alpha_g g) = \Sigma\alpha\alpha_g g.$$

При этом если $R = \mathbb{Z}$, то говорят о *целочисленном* групповом кольце группы G. В случае, когда R — поле, говорят о *групповой алгебре* RG.

Пусть $h = \Sigma\alpha_g g \in \mathbb{Z}G$. Обозначим $\varepsilon(h) = \Sigma\alpha_g$. Автоморфизм $\theta \in \mathrm{Aut}\mathbb{Z}G$ называется *нормализованным*, если $\varepsilon(\theta(g)) = 1$, для любого $g \in G$. Нормализованные автоморфизмы составляют нормальную подгруппу в группе всех автоморфизмов целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}G$.

Цассенхаузом была выдвинута

Гипотеза 1. (о факторизации автоморфизмов) *Для любого нормализованного автоморфизма $\theta \in \mathrm{Aut}\mathbb{Z}G$ существует единица $s \in \mathbb{Q}G$*

и групповой автоморфизм $\sigma \in \mathrm{Aut}G$ *такие, что* $\theta(g) = s^{-1}\sigma(g)s$, *для любого* $g \in G$.

Другими словами, определена *факторизация* нормализованного автоморфизма $\theta = \sigma \circ \varphi_s$, где $\sigma \in \mathrm{Aut}G$ и φ_s — сопряжение единицей s алгебры $\mathbb{Q}G$

Как известно, гипотеза Цассенхауза о факторизации автоморфизмов целочисленных групповых колец не подтвердилась. Известны контрпримеры Хертвека [1], Роггенкампа [2].

2 Предварительные сведения

Нами в [3] предложена другая факторизация нормализованных автоморфизмов целочисленных групповых колец, основанная на теории представлений конечных групп.

Пусть $G = \{e, g_2, ..., g_n\}$ — конечная группа, $T_1(G)$,...,$T_s(G)$ — все ее неприводимые неэквивалентные представления степеней $n_1, ..., n_s$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

$$D(G) = \{\mathrm{diag}(T_1(g), ..., T_s(g)), g \in G\}$$

Очевидно, что $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}[D(G)]$. Условимся кольца $\mathbb{Z}[T_i(G)]$ называть *клетками* кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$. Рассмотрим отображения

$$\mu_{ij} : \sum \alpha_g T_i(g) \to \sum \alpha_g T_j(g), \alpha_g \in \mathbb{Z}$$

которые либо являются изоморфизмами, либо не являются. Если клетки $\mathbb{Z}[T_p(G)]$,..., $\mathbb{Z}[T_{p+k-1}(G)]$, $k \geq 2$, μ_{ij} -изоморфны, обозначим

$$D_p(G) = \{\mathrm{diag}(T_p(g), ..., T_{p+k-1}(g)), g \in G\}$$

$O_p = \mathbb{Z}[D_p(G)]$ назовем *блоком*. Таким образом, все кольцо $\mathbb{Z}[D(G)]$ разбивается на блоки, точнее $\mathbb{Z}[D(G)] \leq O_{p_1} \oplus \cdots \oplus O_{p_r}$, где $\mathbb{Q}$-алгебры $\mathbb{Q}[O_p]$ являются простыми.

Отметим, что полем представления группы $D(G)$ является круговое поле $\mathbb{Q}(\sqrt[l]{1})$, где $l = \exp G$. При этом, выполняются включения

$$\mathbb{Q}(\chi_i) \subseteq \mathbb{Q}(T_i(G)) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[l]{1}),$$

где $\mathbb{Q}(\chi_i)$ – поле, порожденное над $\mathbb{Q}$ всеми значениями характера χ_i представления $T_i(G)$, $\mathbb{Q}(T_i(G))$ – поле, порожденное над $\mathbb{Q}$ всеми матричными элементами представления $T_i(G)$. Кроме того, все эти поля являются нормальными расширениями поля $\mathbb{Q}$, а их группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i)), \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(T_i(G))), \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[l]{1}))$ – абелевы [3], [4]. При этом,

размерность расширения $|\mathbb{Q}(T_i(G)) : \mathbb{Q}(\chi_i)| = s_i$ – индексу Шура неприводимого расширения $T_i(G)$, где $s_i|n_i$ (см. [5]). Таким образом,

$$l_i = |\mathbb{Q}(T_i(G)) : \mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}(T_i(G)) : \mathbb{Q}(\chi_i)||\mathbb{Q}(\chi_i) : \mathbb{Q}| = s_i k_i.$$

Заметим, что если $\mathbb{F}$ — поле, то любой его автоморфизм $\tau \in \mathrm{Aut}\mathbb{F}$ индуцирует изоморфизм $\hat{\tau}$ кольца матриц над $\mathbb{F}$:

$$\hat{\tau}((a_{ij})) = (a_{ij}^{\tau}).$$

Если автоморфизм φ кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ все блоки оставляет на месте, назовем его *стабилизирующим*, в противном случае — *переставляющим*.

В случае индекса Шура равного 1, справедливо следующее утверждение, доказанное в [3].

Теорема 1. *Любой нормализованный автоморфизм кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ есть композиция $\varphi \circ \hat{\tau} \circ \varphi_s$, где φ — некоторый переставляющий автомофизм из выделенного конечного набора Φ, τ — автоморфизм поля представления группы G, φ_s — сопряжение единицей s алгебры $\mathbb{Q}[D(G)]$*

Разбиение кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ на блоки O_p определяется характерами χ_i представлений $T_i(G)$. Если χ_i — целочисленный, то блок состоит из одной клетки $\mathbb{Z}[T_i(G)]$. Если χ_i содержит алгебраические числа, то блок состоит из k_i клеток, где $k_i = |\mathrm{Aut}\mathbb{Q}(\chi_i)|$. При этом, все степени неприводимых представлений n_i, все поля $\mathbb{Q}(\chi_i)$ и все поля $\mathbb{Q}(T_i(G))$ представлений входящих в один блок совпадают между собой [3]. Поэтому, поле $\mathbb{Q}(T_i(G))$ так же будем называть полем представления блока O_p, в которое входит данное неприводимое представление $T_i(G)$.

Пусть $\mathrm{Aut}\mathbb{Q}(\chi_i) = \{\tau_1 = \mathrm{id}, \tau_2, ..., \tau_{k_i}\}$. Обозначим через $\tau_2', \ldots, \tau_{k_i}' \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(T_i(G)))$ некоторые продолжения нетривиальных автоморфизмов из $\mathrm{Aut}\mathbb{Q}(\chi_i)$. Тогда характерами клеток такого блока являются χ_i, $\tau_2(\chi_i)$, ... ,$\tau_{k_i}(\chi_i)$. Соответственно, клетками блока являются клетки $\mathbb{Z}[T_i(G)]$, $\mathbb{Z}[\hat{\tau_2'}(T_i(G))]$,...,$\mathbb{Z}[\hat{\tau_{k_i}'}(T_i(G))]$, то есть любая матрица блока однозначно определяется своей первой клеткой. Сужение любого стабилизирующего автоморфизма на таком блоке есть композиция $\hat{\tau_j'} \circ \varphi_s$, $j = 1, ..., k_i$.

З а м е ч а н и е. В силу описанного строения блоков, равенство $m_1 D_p(g_1) + \cdots + m_l D_p(g_l) = 0$ выполняется, при некоторых рациональных коэффициентах $m_1, \ldots, m_l$, тогда и только тогда, когда при этих же коэффициентах выполняется равенство $m_1 T_i(g_1) + \cdots + m_l T_i(g_l) = 0$, где $T_i(G)$ – любое неприводимое представление входящее в данный блок.

Возникает естественный

Вопрос 1. *Для любого ли автоморфизма* $\tau \in \mathrm{Aut}\mathbb{Q}(T_i(G))$*, найдется единица* s *алгебры* $\mathbb{Q}[O_p]$ *такая, что композиция* $\hat{\tau} \circ \varphi_s$ *является автоморфизмом блока* O_p*?*

В предыдущей работе [6], нами был разобран случай индекса Шура 1, то есть когда $\mathbb{Q}(\chi_i) = \mathbb{Q}(T_i(G))$. В данной работе мы исследуем общий случай $\mathbb{Q}(\chi_i) \subseteq \mathbb{Q}(T_i(G))$.

3 Основные результаты

В этом параграфе мы опишем алгоритм, отвечающий на вопрос 1, поставленный в предыдущем параграфе.

1. Считаем, что индекс Шура ≥ 1, то есть поле представления блока содержит поле характера. Пусть χ_i — характер первой клетки блока, $\mathbb{Q}(T_i(G))$ — поле представления этой клетки, то есть поле представления данного блока. Если $|\mathbb{Q}(T_i(G)) : \mathbb{Q}| = d_i = s_i k_i$, то $\{\omega\} = \{1, \xi, ..., \xi^{d_i-1}\}$ – фундаментальный базис расширения $\mathbb{Q}(T_i(G)) : \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}(\xi)$, ξ — целое алгебраическое число. Тогда целочисленные линейные комбинации элементов $\{\omega\}$ есть кольцо целых алгебраических чисел поля $\mathbb{Q}(T_i(G))$ [4].

2. Сопоставим каждой матрице из $D(G)$ столбец, составленный из транспонированных строк неприводимых представлений, при этом элементам полей представления каждого блока сопоставим столбцы координат относительно соответствующих фундаментальных базисов расширений. В итоге, получим столбцы высоты $n_1^2 s_1 k_1^2 + \cdots + n_r^2 s_r k_r^2$ состоящих из рациональных коэффициентов. При подходящем натуральном q, переходя к базам расширений $\{\omega'\} = \frac{1}{q}\{\omega\}$, получим таблицу из $n = n_!^2 + \cdots + n_R^2 = |G|, R \geq r$, целочисленных столбцов, где каждому блоку O_p, вернее множеству матриц из $D_p(G)$, соответствует свой слой под-столбцов высоты $n_i^2 s_i k_i^2$(см. [3], стр. 38-39).

3. Как показано в [3], элементарными преобразованиями столбцов построенную целочисленную матрицу можно привести к особому *базисному* виду. Такая базисная матрица имеет ступенчатый нижнетреугольный вид, где каждая ступень сверху содержит подматрицу из соответствующего ей слоя блока O_p шириной $k_i n_i^2$, ограниченной сверху нижнетреугольной матрицей. Таким образом, столбцы этой подматрицы соответствуют матрицам блока O_p, которые являются базисом подмодуля конечного ранга $k_i n_i^2$ и базисом $\mathbb{Q}$-алгебры $\mathbb{Q}[O_p]$. Разложение в этом базисе, в силу замечания из предыдущего параграфа, для каждой матрицы из $\mathbb{Q}[O_p]$ однозначно определяется матричными элементами первых

$\frac{k_i n_i^2}{k_i s_i n_i} = \frac{n_i}{s_i} = l_i$ строк подматрицы из $\mathbb{Q}$-алгебры первой клетки $\mathbb{Z}[T_i(G)]$ блока O_p. В частности, всякая матрица из блока O_p однозначно определяется по матричным элементам первых l_i строк подматрицы первой клетки $\mathbb{Z}[T_i(G)]$ блока O_p. Будем называть эти строки *определяющими*.

4. Несложно понять, что в линейной $\mathbb{Q}$-оболочке построенного базиса $\mathbb{Q}$-алгебры $\mathbb{Q}[O_p]$, то есть в самой $\mathbb{Q}$-алгебре $\mathbb{Q}[O_p]$, найдутся такие матрицы $\mathcal{E}_{lt}(\frac{1}{q}\xi^d)$, $1 \le l \le l_i, 1 \le t \le n_i, 0 \le d \le d_i$, у которых на месте (l,t) стоит алгебраическое число $\frac{1}{q}\xi^d$, а на всех оставшихся местах определяющих строк стоят нули. $\mathbb{Z}$-модуль порождённый этими матрицами обладает рангом равным $k_i n_i^2$, при этом он будет содержать и все матрицы блока O_p. Поскольку, как $\mathbb{Z}$-модуль, линейная $\mathbb{Z}$-оболочка построенного базиса $\mathbb{Q}$-алгебры $\mathbb{Q}[O_p]$, так же обладает рангом, равным $k_i n_i^2$, и лежит в блоке O_p, то он является подмодулем конечного индекса m. Следовательно, матрицы $m\mathcal{E}_{lt}(\frac{1}{q}\xi^d)$, $1 \le l \le l_i, 1 \le t \le n_i, 0 \le d < d_i$ лежат в линейной $\mathbb{Z}$-оболочке построенного базиса $\mathbb{Q}$-алгебры $\mathbb{Q}[O_p]$, в частности, в самом блоке O_p.

Лемма 1. *Пусть индекс Шура равен 1, то есть* $\mathbb{Q}(\chi_i) = \mathbb{Q}(T_i(G))$. *Если* $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(T_i(G)))$, *то* $\widehat{\tau}(\mathbb{Q}[O_p]) = \mathbb{Q}[O_p]$.

Доказательство. Во-первых, $\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}[O_p] = \dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}[T_i(G)] = k_i n_i^2$ [3]. Далее, из определения блока O_p и равенства полей $\mathbb{Q}(\chi_i) = \mathbb{Q}(T_i(G))$ имеем включение

$$\mathbb{Q}[O_p] \subseteq M_p = \{\mathrm{diag}(x, \widehat{\tau}_1(x), \ldots, \widehat{\tau}_{k_i-1}(x)) | x \in \mathrm{Mat}_{n_i}(\mathbb{Q}(\chi_i))\},$$

где $\tau_i \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i)), i = 1, \ldots, k_i - 1$, – все нетривиальные автоморфизмы. Так как группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i))$ –абелева (см. 2 Предварительные сведения) и $\widehat{\tau}(x) \in \mathrm{Mat}_{n_i}(\mathbb{Q}(\chi_i))$, для любого $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i))$, то $\widehat{\tau}(M_p) = M_p$, для любого $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i))$. Кроме того, $\dim_{\mathbb{Q}} M_p = k_i n_i^2$, и, следовательно, $\mathbb{Q}[O_p] = M_p$. Таким образом, выполняется равенство $\widehat{\tau}(\mathbb{Q}[O_p]) = \mathbb{Q}[O_p]$, для любого $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i))$. □

5. Пусть $\mathcal{I}_m$ – линейная $\mathbb{Z}$-оболочка матриц $m\mathcal{E}_{lt}(\frac{1}{q}\xi^d)$, $1 \le l \le l_i$, $1 \le t \le n_i$, $0 \le d < d_i$. Поскольку, для любых $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i))$, $0 \le d < d_i$, элементы $\tau(\xi^d)$, как целые алгебраические числа расширения $\mathbb{Q}(\chi_i) = \mathbb{Q}(T_i(G))$, являются целочисленными линейными комбинациями фундаментального базиса $\{\omega\}$ (см. п.1 выше), то соответствующие матрицы $\widehat{\tau}(m\mathcal{E}_{lt}(\frac{1}{q}\xi^d))$, в силу леммы 1, являются аналогичными целочисленными комбинациями матриц $m\mathcal{E}_{lt}(\frac{1}{q}\xi^d)$, $1 \le l \le l_i$, $1 \le t \le n_i$, $0 \le d < d_i$. Следовательно имеем равенство $\widehat{\tau}(\mathcal{I}_m) = \mathcal{I}_m$. Кроме того, не сложно понять, что выполнены включения $q\mathcal{I}_m O_p \subseteq \mathcal{I}_m \subseteq O_p$,

при этом, $mO_p, m\widehat{\tau}(O_p) \subseteq \mathcal{I}_m$ и $\mathcal{I}_m$ является подмодулем в линейной $\mathbb{Z}$-оболочке построенного базиса $\mathbb{Q}$-алгебры $\mathbb{Q}[O_p]$. В частности, любую матрицу $x \in O_p$, можно однозначно представить в виде суммы $x_0 + x_m$, где матричные элементы матрицы x_0, являясь целыми алгебраическими числами, в базисе $\{\omega'\}$ имеют коэффициенты разложения из множества $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, а у матрицы x_m кратны m, то есть $x_0 \in O_p, x_m \in \mathcal{I}_m$.

6. Поскольку для любой матрицы $x \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q}(\chi_i))$ найдется натуральное числю n_x, для которого все $n_x x_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$, являются целыми алгебраическими числами поля $\mathbb{Q}(\chi_i)$, то можно считать все элементы, сопрягающей матрицы $s \in \mathbb{Q}[O_p]$, целыми алгебраическими числами из поля $\mathbb{Q}(\chi_i)$. При этом, сопрягающую матрицу s ищем в виде $s = q(s_1 + ms_2)$, где коэффициенты матричных элементов матрицы $s_1 \in O_p$, в разложении по базису $\{\omega'\}$, принадлежат множеству $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, и $|s_1 + ms_2| \neq 0$.

Заметим, что в силу требуемого равенства $sO_p = \widehat{\tau}(O_p)s$, матрица s_1 удовлетворяет равенству $(qs_1 + qms_2)O_p = \widehat{\tau}(O_p)(qs_1 + qms_2)$, то есть

$$qs_1O_p - q\widehat{\tau}(O_p)s_1 = qm\widehat{\tau}(O_p)s_2 - qms_2O_p.$$

Отметим, что если у матриц $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q}(\xi))$, все элементы в разложении по базису $\{\omega'\}$ имеют только целые коэффициенты, то элементы матрицы произведения qXY обладают тем же свойством. Поэтому, так как матрицы, имеющие вид произведения $qm\widehat{\tau}(O_p)s_2$ или qms_2O_p, лежат в $\mathbb{Q}$-алгебре $\mathbb{Q}[O_p]$, а матричные элементы из их верхних клеток в разложении по базису $\{\omega'\}$ обладают только целыми коэффициентами, кратными m, то эти матрицы попадают в $\mathcal{I}_m$. Следовательно,

$$qs_1O_p - q\widehat{\tau}(O_p)s_1 \subseteq \mathcal{I}_m.$$

Пусть $B = \{b_1, \ldots, b_{k_i n_i^2}\}$ – аддитивный базис O_p. тогда для каждого $b \in B$ выполняется равенства:

$$(qs_1 + qms_2)(\sum_{i=1}^{k_i n_i^2} \alpha_{ij} b_i) = \widehat{\tau}(b_j)(qs_1 + qms_2),$$

$$(qs_1 + qms_2)b_j = (\sum_{i=1}^{k_i n_i^2} \beta_{ij} \widehat{\tau}(b_i))(qs_1 + qms_2),$$

где $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{Z}$. Или, как замечено выше, должны выполняться следующие включения:

$$qs_1(\sum_{i=1}^{k_i n_i^2} \alpha_{ij} b_i) - q\widehat{\tau}(b_j)s_1 \in \mathcal{I}_m,$$

$$qs_1b_j - q(\sum_{i=1}^{k_in_i^2} \beta_{ij}\widehat{\tau}(b_i))s_1 \in \mathcal{I}_m,$$

для некоторых $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{Z}$. Поскольку, $qms_1b, qm\widehat{\tau}(b)s_1 \in \mathcal{I}_m$ для всех $b \in B$ и $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i))$, то выписанные включения достаточно проверить на конечном наборе значений $s_1 \in O_p$, $b \in B$, $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Если, при фиксированной s_1, для любого $b \in B$, нашлись $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ такие, что у результирующей матрицы разложения всех ее матричных элементов в базисе $\{\omega'\}$ обладают только целыми коэффициентами кратными числу m, то она принадлежит $\mathcal{I}_m$, а матрица s_1 – слагаемое искомой сопрягающей матрицы $s = qs_1 + qms_2$. Отсюда следует полезное

З а м е ч а н и е. Если среди конечного набора, из которого выбирается матрица s_1, не нашлось матрицы, удовлетворяющей приведённым выше условиям, то сопрягающей матрицы s не существует.

Если $|s_1| \neq 0$, то проверим выполнение включения $\mathcal{I}_m \subseteq qs_1O_p$. Для этого надо проверить наличие целых решений у всех систем с целыми коэффициентами

$$\left\{ \; x_{11}qs_1b_1 + ... + x_{t1}qs_1b_t = m\mathcal{E}_{11}(\tfrac{1}{q}\xi^0) \right.$$

$$\vdots$$

$$\left\{ \; x_{1t}qs_1b_1 + ... + x_{tt}qs_1b_t = m\mathcal{E}_{n_in_i}(\tfrac{1}{q}\xi^{d_i-1}) \right.$$

где $t = k_in_i^2$.Так как $|s_1| \neq 0$, данные система является определенными. Поэтому, если их единственные решения являются целыми, получаем, что

$$O_p - (qs_1)^{-1}\widehat{\tau}(O_p)qs_1 \subseteq (qs_1)^{-1}\mathcal{I}_m \subseteq O_p,$$

то есть $(qs_1)^{-1}\widehat{\tau}(O_p)qs_1 \subseteq O_p$. Остается только выяснить выполнение равенства $\widehat{\tau}(O_p)qs_1 = qs_1O_p$. Для этого надо проверить наличие целых решений у всех следующих систем с единственным решением

$$\left\{ \; x_{11}\widehat{\tau}(b_1)qs_1 + ... + x_{t1}\widehat{\tau}(b_t)qs_1 = qs_1b_1 \right.$$

$$\vdots$$

$$\left\{ \; x_{1t}\widehat{\tau}(b_1)qs_1 + ... + x_{tt}\widehat{\tau}(b_t)qs_1 = qs_1b_t \right.$$

В этом случае получаем требуемое равенство $(qs_1)^{-1}\widehat{\tau}(O_p)qs_1 = O_p$. Если последние системы не обладают целочисленными решениями, то эту матрицу будем называть квазисопрягающей. А именно, матрицу s будем называть *квазисопрягающей матрицей* автоморфизма $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i))$,

если для неё выполняется включение $\widehat{\tau}(O_p)s \subseteq sO_p$. Ясно, что сопрягающая матрица является так же и квазисопрягающей.

Если $|s_1| = 0$, то проверим включение $\widehat{\tau}(O_p)qs_1 \subseteq qs_1O_p$. Для этого убедимся в наличии целочисленных решениях у всех следующих систем линейных уравнений.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11}qs_1b_1 + ... + x_{t1}qs_1b_t = \widehat{\tau}(b_1)qs_1 \end{array} \right.$$

$$\vdots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1t}qs_1b_1 + ... + x_{tt}qs_1b_t = \widehat{\tau}(b_t)qs_1 \end{array} \right.$$

Если целые решения нашлись у каждой линейной системы, а они уже не являются определёнными, то матрица qs_1 является квазисопрягающей для автоморфизма $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i))$. Тогда, любая-ли матрица $s = qs_1 + qms_2$ так же будет квазисопрягающей для автоморфизма $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i))$?

Далее, по найденной матрице s_1 и соответствующих ей целым числам $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ можно нати матрицу s_2 из следующей системы

$$\left\{ \begin{array}{c} qm\widehat{\tau}(\overline{b}_j)s_2 - (qs_1 + qms_2)(\sum_{i=1}^{k_in_i^2} \overline{\alpha}_{ij}b_i) = qs_1(\sum_{i=1}^{k_in_i^2} \alpha_{ij}b_i) - q\widehat{\tau}(b_j)_0s_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ qm(\sum_{i=1}^{k_in_i^2} \overline{\beta}_{ij}\widehat{\tau}(b_i))s_2 - qms_2O_p = qs_1b_j - q(\sum_{i=1}^{k_in_i^2} \beta_{ij}\widehat{\tau}(b_i))s_1 \\ \overline{x}_1s_1g_1 + ... + \overline{x}_ts_1g_t \equiv b_1s_1 \mod \mathcal{I}_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{y}_1s_1g_1 + ... + \overline{y}_ts_1g_t \equiv b_ts_1 \mod \mathcal{I}_m \end{array} \right. \quad (1)$$

Заметим, что в силу равенства $s\mathbb{Z}[T_i(G)] = \mathbb{Z}[\widehat{\tau}(T_i(G))]s$, матрица s_1 удовлетворяет системе сравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1b_1s_1 + ... + x_tb_ts_1 \equiv s_1g_1 \mod \mathcal{I}_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1b_1s_1 + ... + y_tb_ts_1 \equiv s_1g_t \mod \mathcal{I}_m \\ \overline{x}_1s_1g_1 + ... + \overline{x}_ts_1g_t \equiv b_1s_1 \mod \mathcal{I}_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{y}_1s_1g_1 + ... + \overline{y}_ts_1g_t \equiv b_ts_1 \mod \mathcal{I}_m \end{array} \right. \quad (2)$$

где $g_1, \ldots, g_t$ — аддитивный базис кольца $\mathbb{Z}[T_i(G)]$, $h_1, \ldots, h_t$ — аддитивный базис кольца $\mathbb{Z}[\hat{\tau}(T_i(G))]$, коэффициенты $x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_t, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_t$, $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_t \in \{0, \ldots, m-1\}$.

Матрица s_1 удовлетворяющая системе сравнений (1), вместе с соответствующими ей из данной системы коэффициентами

$$x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_t, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_t, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_t \in \{0, \ldots, m-1\}$$

задают множество элементов $h_1, \ldots, h_t, \overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_t \in \mathcal{I}_m \subseteq \bigcap_{r=i}^{i+k-1} \mathbb{Z}[T_r(G)]$:

$$\begin{cases} x_1 b_1 s_1 + ... + x_t b_t s_1 - s_1 g_1 = h_1 \\ \quad ..... \\ y_1 b_1 s_1 + ... + y_t b_t s_1 - s_1 g_t = h_t \\ \overline{x}_1 s_1 g_1 + ... + \overline{x}_t s_1 g_t - b_1 s_1 = \overline{h}_1 \\ \quad ..... \\ \overline{y}_1 s_1 g_1 + ... + \overline{y}_t s_1 g_t - b_t s_1 = \overline{h}_t \end{cases} \tag{3}$$

Найденные матрицы $h_1, \ldots, h_t, \overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_t \in \mathcal{I}_m$ вместе с используемыми коэффициентами $x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_t, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_t, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_t \in \{0, \ldots, m-1\}$ задают систему матричных линейных уравнений для нахождения неизвестной матрицы s_2:

$$\begin{cases} -(x_1 b_1 + ... + x_t b_t) m s_2 + m s_2 g_1 = h_1 \\ \quad ..... \\ -(y_1 b_1 + ... + y_t b_t) m s_2 + m s_2 g_t = h_t \\ -m s_2 \overline{x}_1 g_1 + ... + \overline{x}_t g_t) + b_1 m s_2 = \overline{h}_1 \\ \quad ..... \\ -m s_2 (\overline{y}_1 g_1 + ... + \overline{y}_t g_t) + b_t m s_2 = \overline{h}_t \end{cases} \tag{4}$$

Для матрицы $s = s_1 + m s_2$ выполняется равенство

$$s\mathbb{Z}[T_i(G)] = \mathbb{Z}[\widehat{\tau}(T_i(G))]s.$$

Если $|s| \neq 0$, то $s = s_1 + m s_2$ — искомая сопрягающая матрица

$$\mathbb{Z}[T_i(G)] = s^{-1}\mathbb{Z}[\widehat{\tau}(T_i(G))]s.$$

7. Алгоритм нахождения сопрягающей матрицы.

1) Вычисляем аддитивные базисы колец $\mathbb{Z}[T_i(G)]$ и $\mathbb{Z}[\hat{\tau}(T_i(G))]$ (см. [3]).

2) Вычисляем m (см. [3]).

3) Для каждой матрицы s_1 из их конечного набора проверяем выполнимость системы сравнений (1).

4) Для найденной матрицы s_1, из системы (2) вычисляем матрицы

$$h_1, \ldots, h_t, \overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_t \in \mathcal{I}_m \subseteq \bigcap_{r=i}^{i+k-1} \mathbb{Z}[T_r(G)].$$

5) Для нахождения матрицы s_2, по найденным матрицам $h_1, \ldots, h_t$, $\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_t$ составляем и решаем систему линейных уравнений (3).

6) Если $|s_1 + ms_2| \neq 0$, то $s = s_1 + ms_2$ — сопрягающая матрица.

8. Примеры вычислений.

В случае индекса Шура > 1, имеется пример группы $\mathrm{SL}_2(3)$, у которой $\widehat{\tau}(\mathbb{Q}(O_p)) \neq \mathbb{Q}(O_p)$, при некотором $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(T_i(G)))$. Точнее, как показано в [3, с.66-68], группа $\mathrm{SL}_2(3)$ обладает блоком O_3 состоящим из одной клетки $\mathbb{Z}[T_4(\mathrm{SL}_2(3))]$ с полем разложения $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1})$. Так как блок состоит из одной клетки, то характеры матриц из этого блока будут целочисленными [3, Лемма1.2.3], то есть поле характеров $\mathbb{Q}(\chi_4) = \mathbb{Q}$, и индекс Шура представления $T_4(\mathrm{SL}_2(3))$ равен $|\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1}) : \mathbb{Q}| = 2$. Пусть матрица

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

– слой специальной матрицы аддитивного базиса группового кольца $\mathbb{Z}[\mathrm{SL}_2(3)]$ соответствующий блоку O_3 [3, с.68]. Здесь каждому столбцу соответствует матрица из блока O_3, чьи элементы разложены в базисе $\{z, \bar{z}\}$, $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. При этом все представленные матрицы аддитивно порождают блок O_3. Рассмотрим автоморфизм комплексного сопряжения. Ясно, что он является автоморфизмом поля $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1})$ и на $\mathbb{Z}$-модуле M порождённым базисом $\{z, \bar{z}\}$ индуцирует линейное преобразование с матрицей $m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Рассмотрим матрицу $H = \mathrm{diag}(m, m, m, m)$. Как $\mathbb{Z}$-модуль блок O_3 содержится в $\mathbb{Z}$-модуле M $\times$ M $\times$ M $\times$ M. Следовательно, комплексное сопряжение индуцирует на блоке O_3 линейное преобразование с матрицей H. Пусть $X = (x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8)^T$ – столбец из восьми неизвестных, а b – некоторый столбец матрицы B. Решая линейные системы $BX = Hb$, для всех b, убеждаемся, что для последних пяти столбцов данная система не совместна. Поэтому, образ блока O_3 при изоморфизме, индуцированном комплексным сопряжением матричных элементов, не содержится в $\mathbb{Q}$-алгебре блока O_3. Следовательно, не существует сопрягающей единицы (матрицы) из $\mathbb{Q}$-алгебры блока O_3, которая возвращает образ данного блока O_3 обратно в блок O_3.

Список литературы

[1] Hertweek M. *Integral group ring automorphisms without Zassenhaus factorization.* Illinois Jornal of Mathematics (2002) Vol.46, N 1, p. 233–245.

[2] Roggenkamp K.W., Scott L. *On a conjecture of Zassenhaus for finite group rings*: manuscript.– November, 1988.– 60 p.

[3] Ivleva A.M., Bryukhanov O.V., Grachev E.V. *Units of Integral Group Rings.* Novosibirsk: NSTU Publisher, 2018.– 190 pp.("NSTU Monographs" series)(in Russian).

[4] Боревич З. И., Шафаревич И. Р. *Теория чисел.* М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы.– 1985. – 504 с.

[5] Ch. W. Curtis, I. Reiner. *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras.* Interscience Publishers, New York–London, 1962, 685 pp. [Nauka, Moscow, 1969, 668 pp.].

[6] А. М. Попова, О. В. Брюханов. *Вычисление сопрягающей матрицы автоморфизмов целочисленных групповых колец.* Algebra and model theory 14. Collection of papers edited by A. G/ Pinus, E. N. Poroshenko and S. V. Sudoplatov. Novosibirsk: NSTU Pablisher, 2023, p. 113.

ON SIMPLE NOVIKOV BIMODULES

A.P. Pozhidaev, V.N. Zhelyabin*

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
4, Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Russia
e-mail: app@math.nsc.ru, vicnic@math.nsc.ru

This article is a version of a presentation given at the XVIII International Conference "*Problems Allied to Universal Algebra and Model Theory*" (Erlagol-2026), which has been expanded to include new results on representations of Novikov algebras and condensed in its review part. Proofs of the main cited results can be found in [1], where the history of the problem can also be found. We note only that Novikov algebras appeared in [2] during the study of Hamiltonian operators. These algebras play a key role in the classification of linear Poisson brackets of hydrodynamic type [3].

Let $\mathcal{A}$ be an algebra over a field F. A linear map $d : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$ is called a *derivation* of the algebra $\mathcal{A}$ if $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ for all $x, y \in \mathcal{A}$. Let $\mathcal{D}$ be the set of derivations of the algebra $\mathcal{A}$. A $\mathcal{D}$-*ideal* $I \lhd_{\mathcal{D}} \mathcal{A}$ is an ideal I of the algebra $\mathcal{A}$ invariant under all derivations from $\mathcal{D}$. The algebra $\mathcal{A}$ is called $\mathcal{D}$-*simple* if $\mathcal{A}^2 \neq 0$ and $\mathcal{A}$ has no $\mathcal{D}$-ideals. The term "differentially simple" means $\mathcal{D}$-simplicity with respect to some set of derivations $\mathcal{D}$.

A *Novikov algebra* is an algebra satisfying the following identities:

$$(x, y, z) = (y, x, z), \quad (xy)z = (xz)y.$$

The main construction of Novikov algebras is the following *Gelfand – Dorfman construction*. Let $(\mathcal{A}; \cdot)$ be an associative commutative algebra with a derivation d. Fix $\alpha \in \mathcal{A}$ and define a new product $\circ$ on $\mathcal{A}$ by setting

$$a \circ b = a \cdot d(b) + \alpha \cdot a \cdot b$$

for all $a, b \in \mathcal{A}$. Then $(\mathcal{A}; \circ)$ is a Novikov algebra, and $(\mathcal{A}; \cdot, \circ)$ is a Novikov – Poisson algebra. The constructed Novikov algebra is denoted by $(\mathcal{A}, d, \alpha)$.

*The research was carried out within the framework of the Sobolev Institute of Mathematics state contract (project FWNF-2026-0017).

Theorem. [4] *Every non-associative finite-dimensional simple Novikov algebra $\mathcal{N}$ over a field F of characteristic $p > 0$ is obtained via the Gelfand – Dorfman construction from the algebra $S \otimes_F B_{n,p}(F)$ and its simple derivation, where S is a field and $B_{n,p}(F)$ is the algebra of truncated polynomials in n variables.*

Novikov bimodules over associative algebras. Let $(\mathcal{N}; \circ)$ be a Novikov algebra and V a vector space over F. The pair $\lambda, \rho : \mathcal{N} \mapsto \operatorname{End} V$ is a *representation* of the algebra $\mathcal{N}$ in V if $(\forall x, y \in \mathcal{N})$:

$$[x^\lambda, y^\rho] = (x \circ y)^\rho - y^\rho x^\rho, \quad [x^\lambda, y^\lambda] = [x, y]^\lambda,$$

$$y^\rho x^\lambda = (x \circ y)^\lambda, \qquad x^\rho y^\rho = y^\rho x^\rho,$$

where $[\,,]$ denotes the commutator: $[x, y] = xy - yx$. The pair of maps (λ, ρ) defines an $\mathcal{N}$-bimodule structure on V:

$$a \circ v = a^\lambda(v), \ v \circ a = a^\rho(v).$$

Consider the direct sum of vector spaces $\mathcal{A} = \mathcal{N} \oplus V$. Define a multiplication $\circ$ on $\mathcal{A}$ by setting

$$(a_1 + v_1) \circ (a_2 + v_2) = a_1 \circ a_2 + a_1^\lambda(v_2) + a_2^\rho(v_1).$$

The algebra $\mathcal{A}$ is called the *split null extension* of the algebra $\mathcal{N}$.

Theorem 1. *The pair of maps $\lambda, \rho : \mathcal{N} \mapsto \operatorname{End} V$ defines a representation of the Novikov algebra $\mathcal{N}$ if and only if $(\mathcal{N} \oplus V; \circ)$ is a Novikov algebra.*

Denote by $M(\mathcal{N}), \mathcal{R}(\mathcal{N})$ and $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ the multiplication algebra, right multiplication algebra, and left multiplication algebra of the algebra $\mathcal{N}$, respectively. The underlying vector space of the Novikov algebra $\mathcal{N}$ with respect to the algebra multiplication is a Novikov $\mathcal{N}$-module (*regular module*). Denote by R_x and L_x the operators of right and left multiplication by $x \in \mathcal{N}$. The maps $\lambda : x \mapsto L_x$, $\rho : x \mapsto R_x$ define the *regular* representation of the algebra $\mathcal{N}$.

Let $(\mathcal{A}; \cdot, d_\mathcal{A})_F$ be an associative commutative algebra, and let $(V; d_V)$ be an associative $\mathcal{A}$-module, i. e., an F-map d_V: $d_V(av) = d_\mathcal{A}(a)v + ad_V(v)$ is defined on V. Then $d : \mathcal{A} \oplus V \mapsto \mathcal{A} \oplus V$:

$$d(a + v) = d_\mathcal{A}(a) + d_V(v),$$

is a derivation of $\mathcal{A} \oplus V$. We denote by $(\mathcal{A} \oplus V, d, \alpha)$ the Gelfand – Dorfman construction of the associative commutative algebra $\mathcal{A} \oplus V$ with respect to $d = d_\mathcal{A} + d_V$.

Example 1. Let V be a vector space over F, and let ϕ be a nonzero linear map on V. Define a new product on $\mathcal{A} = F \oplus V$ by $(a+v)\cdot(b+u) = ab+au+bv$. Then $(\mathcal{A};\cdot)$ is an associative commutative algebra. Extend ϕ to $\mathcal{A}$ by the rule $\phi(a+v) = \phi(v)$. Then $\phi \in Der(\mathcal{A};\cdot)$, and $(\mathcal{A},\phi,\alpha)$ is a Novikov algebra. Assume $\alpha \neq 0$. Note that the Novikov algebra $\mathcal{N} = (F,\phi,\alpha)$ is a field. As one can easily see, V is a module over the Novikov algebra $\mathcal{N}$. Denote it by $\mathcal{N}(V,\phi,\alpha)$.

Let (λ,ρ) be a representation of an algebra $\mathcal{N}$. The subalgebra $M = M(\mathcal{N},V)$ in $\operatorname{End} V$ generated by a^λ and a^ρ is called the *multiplication algebra* of the $\mathcal{N}$-module V. The left $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{N},V)$ and right multiplication algebras $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{N},V)$ are subalgebras of M generated by a^λ and a^ρ.

The representation $\lambda,\rho : \mathcal{N} \mapsto \operatorname{End} V$ of the algebra $\mathcal{N}$ is called *irreducible* if $\lambda \neq 0$ or $\rho \neq 0$ and V contains no proper $\mathcal{N}^\lambda$ and $\mathcal{N}^\rho$-invariant subspaces.

Lemma 1. *Let $(\mathcal{N};\circ)$ be an associative commutative Novikov algebra over F, and let $(V;\circ)$ be a Novikov $\mathcal{N}$-module such that $(V,\mathcal{N},\mathcal{N}) = 0$. Define an operation $\cdot$ on $\mathcal{A} = \mathcal{N} \oplus V$ by the rule*

$$a\cdot b = a\circ b, \quad a\cdot v = v\circ a, \quad v\cdot a = v\circ a, \quad v\cdot u = 0.$$

Then V is an associative commutative $(\mathcal{A};\cdot)$-module. Moreover, $(\mathcal{A};\cdot,\circ)$ is a Novikov – Poisson algebra.

Theorem 2. *Let $(\mathcal{N};\circ)$ be a unital associative commutative algebra with 1, and let V be an irreducible non-associative Novikov $\mathcal{N}$-module. Then the Novikov algebra $\mathcal{A} = \mathcal{N} \oplus V$ admits a structure of a unital associative commutative algebra $(\mathcal{A};\cdot)$, and V is a unital associative right $\mathcal{N}$-module. Moreover, $\mathcal{A} = (\mathcal{A},d,e)$, where e is the unit of the algebra $(\mathcal{A};\cdot)$ and $d(x) = e\circ x - x\circ e$. The statement of the theorem holds also for simple associative Novikov algebras.*

Example 2. Let V be a vector space over a field F and $\phi \in \operatorname{End} V$. Consider $\mathcal{N} = (F,\phi,\alpha)$ and the $\mathcal{N}$-module $\mathcal{N}(V,\phi,\alpha)$. Let U be an $\mathcal{N}$-submodule of $\mathcal{N}(V,\phi,\alpha)$. Then $\phi(U) \subseteq U$. Therefore, if V has no ϕ-invariant subspaces, then V is an irreducible $\mathcal{N}$-module; V is an associative right $\mathcal{N}$-module. If $\phi \neq -\alpha\cdot 1$, then V is not an associative left $\mathcal{N}$-module.

Example 3. Let $F_\lambda := \langle v\rangle$ be a one-dimensional module over an arbitrary field F. It is an irreducible non-associative Novikov module over the Novikov algebra F if we define $1\circ v = \lambda v$ and $v\circ 1 = v$ for some $\lambda \in F$ such that $\lambda \neq 0,1$.

Example 4. Let $F_{\alpha,\beta} := \langle u, v\rangle_{\mathbb{R}}$ be a two-dimensional irreducible non-associative Novikov module over the Novikov algebra $F = \mathbb{R}$:

$$1 \circ u = \alpha u + \beta v,\ 1 \circ v = -\beta u + \alpha v,\ u \circ 1 = u,$$

$v \circ 1 = v$ for some $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

Proposition 1. *Let F be a field of characteristic 0, and let $(V; \circ)$ be an irreducible finite-dimensional non-associative Novikov module over the Novikov algebra F. If F is algebraically closed then $V \cong F_\lambda$. If $F = \mathbb{R}$ then either $V \cong F_\lambda$ or $V \cong F_{\alpha,\beta}$.*

Novikov bimodules over non-associative algebras.

Theorem 3. *Let $\mathcal{N}$ be a non-associative finite-dimensional simple Novikov algebra, and let V be a finite-dimensional irreducible Novikov $\mathcal{N}$-module. Then V is obtained via the Gelfand – Dorfman construction from an associative commutative d-simple algebra $\mathcal{A}$ and a differentially simple associative commutative $\mathcal{A}$-module U.*

Lemma 2. *Let $(\mathcal{A}; \cdot)$ be an associative commutative d-simple algebra, $d \neq 0$; $\overline{\mathcal{A}}$ be an isomorphic copy of $\mathcal{A}$. Define an action of $\mathcal{A}$ on $\overline{\mathcal{A}}$:*

$$x \circ \overline{y} = \overline{x \cdot d(y)},\ \overline{y} \circ x = \overline{y \cdot d(x) + \alpha \cdot y \cdot x}$$

for all $x, y \in \mathcal{A}$ and some $\alpha \in \mathcal{A}$. Then $\overline{\mathcal{A}}$ is a Novikov $(\mathcal{A}, d, \alpha)$-module. The module $\overline{\mathcal{A}}$ contains a proper submodule $\iff$ $d^2 = -\alpha d$.

Theorem 4. *Let $(\mathcal{A}; \cdot)$ be an associative commutative d-simple algebra, $d \neq 0$, and let V be a d-simple associative commutative unital $(\mathcal{A}; \cdot)$-module. Let $\mathcal{N} = (\mathcal{A}, d, \alpha)$. Then either $V \cong \overline{\mathcal{A}}$, or V is an irreducible Novikov $\mathcal{N}$-module with respect to $a \circ v = a \cdot d(v) + \alpha \cdot a \cdot v,\ v \circ a = v \cdot d(a) + \alpha \cdot v \cdot a$.*

Theorem 5. *Let $\mathcal{A}$ be a unital associative commutative differentially simple algebra $\mathcal{A}$ and V a d-simple unital $\mathcal{A}$-module. Suppose that either $\mathcal{N} = (\mathcal{A}, d, \alpha)$ is a non-associative Novikov algebra, or the characteristic of the field F is not 2. Then V is an irreducible $\mathcal{N}$-module and $\mathcal{N}$ is a simple algebra.*

Structure of the multiplication algebra for representations.

Theorem 6. *Let $\lambda, \rho : \mathcal{N} \mapsto \operatorname{End} V$ be an irreducible finite-dimensional representation of the Novikov algebra $\mathcal{N}$ and $\mathcal{R} \neq 0$. Then $\mathcal{R}$ is a field and V is an associative right $\mathcal{N}$-module if the characteristic of the field F is zero. If the characteristic of the field F is $p > 0$, then $\mathcal{R}$ is a differentially simple algebra, its quasi-regular radical $J = \{u \in \mathcal{R} : u^p = 0\}$, $\mathcal{R}$ contains the unit*

of the algebra M and the quotient algebra $\mathcal{R}/J$ is a field. If $\mathcal{R} = 0$ then $\mathcal{L}$ is a field and $M = \mathcal{L}$.

Corollary. *Let $\mathcal{N}$ be a simple Novikov algebra, and let $\lambda, \rho : \mathcal{N} \mapsto \operatorname{End} V$ be an irreducible finite-dimensional representation of the Novikov algebra $\mathcal{N}$. Then either $\mathcal{N}^\lambda = 0$ and $\mathcal{N}$ is a field, or $\mathcal{N}^\lambda$ is a faithful unital irreducible differential associative left $\mathcal{R}$-module. In this case, the algebra $\mathcal{N}$ is finite-dimensional over F.*

References

[1] V. Zhelyabin, A. Pozhidaev, Irreducible representations of simple Novikov algebras, accepted for publication, Mat. Sb.

[2] I. M. Gel'fand, I. Ya. Dorfman, Hamiltonian operators and algebraic structures related to them, Funct. Anal. Appl. **13** 4 (1979), 248–262.

[3] A. A. Balinskii, S. P. Novikov, Poisson brackets of hydrodynamic type, Frobenius algebras and Lie algebras, Soviet Math. Dokl. **32** 1 (1985), 228–231.

[4] A. Pozhidaev, V. Zhelyabin, On simple and semisimple finite-dimensional Novikov algebras and their automorphisms, J. Algebra **689** (2026), 1–26.

ON THE UNIVERSALITY OF CS$\mathfrak{X}$ AND $\mathfrak{X}$T-GROUPS

M. Shahryari

Sultan Qaboos University,
Department of Mathematics, College of Science, Sultan Qaboos University, Muscat, Oman
e-mail: m.ghalehlar@squ.edu.om

A subgroup H of a given group G is called *malnormal* if for every element $x \in G \setminus H$, we have $H \cap H^x = \{1\}$. A group G is called *conjugately separated abelian* (CSA) if all maximal abelian subgroups of G are malnormal. The class of CSA-groups is broad and plays a significant role in the study of residually free groups, the universal theory of non-abelian free groups, limit groups, exponential groups and equational domains in algebraic geometry over groups (see [1], [2], [10] , and [11]). Another class of groups with very close connections to CSA-groups is the class of CT-groups (*commutative transitive groups*). A group is CT if commutativity is a transitive relation on the set of its non-identity elements. Despite this simple definition, the class of CT groups is also central to the study of residually free groups. Every CSA-group is CT but the converse is not true. B. Baumslag proved that in the presence of residual freeness, both properties are equivalent.

In recent decades, considerable effort has been devoted to the study of these classes and their generalizations. A generalization of CT-groups is introduced in [3] to extend the above mentioned theorem of B. Baumslag. Many interesting relations between CSA- and CT-groups are presented in [5], along with an extensive review of the existing literature.

I proposed an idea in [14] for generalizing the notions of CSA- and CT-groups: Suppose that $\mathfrak{X}$ is a class of groups. A group G is an $\mathfrak{X}$T-group if and only if, for any two $\mathfrak{X}$-subgroups A and B of G, the assumption $A \cap B \neq \{1\}$ implies that $\langle A, B\rangle$ is also an $\mathfrak{X}$-subgroup of G. Similarly, a group G is a CS$\mathfrak{X}$-group if all of its maximal $\mathfrak{X}$-subgroups are malnormal. In [14], I examined the special case where $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_k$, the variety of nilpotent groups of nilpotency class not exceeding k, which contains CSA- and CT-groups as particular instances. Hence, [14] addresses the study of general relations among the classes of CS$\mathfrak{X}$- and $\mathfrak{X}$T-groups, their characterizations, constructions, and universal axiomatization, as well as their connections to

residual A-free groups, in the case when $\mathfrak{X}$ is the variety of nilpotent groups of class at most k. Furthermore, many previous results are shown to remain valid for CS$\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{X}$T-groups when $\mathfrak{X}$ is the variety $\mathfrak{N}_k$. As an application, the ideas of [14] are used in [12] to introduce a large class of groups that are *equational domain* in the sense of algebraic geometry over groups (see [1] for definitions).

Recently, with my student, Omar Al-Raisi, we developed the theory of CS$\mathfrak{X}$- and $\mathfrak{X}$T-groups for arbitrary varieties of groups in [13] and we showed that many results from [14] remain true in this general framework, while some fail. For example, it remains unclear whether these classes are universal in general. In this paper, I consider a situation where both classes can be axiomatized by a set of universal axioms. Here is a review of our main results:

The classes CT and CSA are universal; they can be axiomatized by universal sentences in the first order language of groups (see [5]). The same is true for the classes $\mathfrak{X}$T and CS$\mathfrak{X}$ when $\mathfrak{X}$ is the variety of nilpotent groups of class at most k (see [14]). We generalize this to a large class of varieties; finitely based varieties $\mathfrak{X}$ such that the 2-generator relatively free group of $\mathfrak{X}$ is finitely presented. Note that this includes every finitely based locally finite variety as well as every virtually nilpotent variety. For every variety $\mathfrak{X}$, the 2-generator relatively free groups of $\mathfrak{X}$ will be denoted by $F_2(\mathfrak{X})$.

Theorem. Suppose $\mathfrak{X}$ is a finitely based variety such that $F_2(\mathfrak{X})$ is finitely presented. Then, the class $\mathfrak{X}$T is universal. Further, if CS$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$T, then CS$\mathfrak{X}$ is universal as well.

There are many examples of varieties satisfying the assumptions of the above theorem among which are the varieties of nilpotent groups of class at most k, every finitely based locally finite variety (equivalently, every locally finite variety with finite axiomatic rank) and in general, every virtually nilpotent variety. However, we are not sure about the existence of any more non-trivial examples. An old question of A. Olshanskii about the existence of a non-trivial example of finitely presented relatively free group which is not virtually nilpotent is still unsolved (see Problem 11.73 in [7]). One can use the above theorem to produce infinitely many examples of $\mathfrak{X}$T- and CS$\mathfrak{X}$-groups.

Corollary. Suppose $\mathfrak{X}$ is a finitely based variety such that the relatively free element $F_2(\mathfrak{X})$ is finitely presented. Then, any ultraproduct of $\mathfrak{X}$T-groups is $\mathfrak{X}$T. If further, CS$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$T, then every ultraproduct of CS$\mathfrak{X}$-

groups is CS$\mathfrak{X}$.

As an example, if we have two CS$\mathfrak{X}$-groups A and B without involutions, then for any set I and any ultrafilter $\mathcal{U}$ over I, the ultrapower $(A * B)^I/\mathcal{U}$ is a new CS$\mathfrak{X}$-group. Consequently, we have an infinite supply of new CS$\mathfrak{X}$-groups (and hence, equational domains).

References

[1] Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V. *Algebraic geometry over groups: I. Algebraic sets and ideal theory.* J. Algebra, **219**(1), 1999, pp. 16–79.

[2] Champetier C., Guirardel V. *Limit groups as limits of free groups.* Israel J. of Mathematics, **146**, 2005, pp. 1–75.

[3] Ciobanu L., Fine B., Rosenberger G. *Classes of groups generalizing a theorem of Benjamin Baumslag.* Comm. Algebra, **44**(2), 2016, pp. 656–667.

[4] Daniyarova E., Myasnikov A., Remeslennikov V. *Algebraic geometry over algebraic structures, II: Foundations.* J. Math. Sci., 2012, **185**(3), pp. 389–416.

[5] Fine B., Gaglione A., Rosenberger G., Spellman D. *On* CT *and* CSA *groups and related ideas.* J. Group Theory, 2016, **19**, pp. 923–940.

[6] Houcine A. O. *On superstable* CSA*-groups.* Annals of Pure and Applied Logic, 2008, **154**(1), pp. 1–7.

[7] Khukhro E. I., Mazurov V. D. *Unsolved problems in group theory.* Sobolev Institute of Mathematics, 2022, **20**.

[8] Marin I. *Strongly indecomposable finite groups.* Expositiones Mathematicae, 2008, **26**(3), pp. 261–267.

[9] Markowsky G. C. *Chain-complete posets and directed sets with applications.* Algebra Universalis, 1976, **6**, pp. 53–68.

[10] Myasnikov A., Remeslennikov V. *Degree groups I. Fundamentals of the theory and tensor completions.* Siberian Math. J., **35**(5), 1994, pp. 986–996.

[11] Myasnikov A., Remeslennikov V. *Exponential groups II: Extensions of centralizers and tensor completions of* CSA*-groups*. Internat. J. Algebra Comput., **6**(6), 1996, pp. 678–711.

[12] Al-Raisi O., Shahryari M. *New classes of groups which are equational domains*. Bull. Iran. Math. Soc. **51**, Article no. 43, 2025.

[13] Al-Raisi O., Shahryari M. *On* $\mathfrak{X}$*-transitive groups and conjugate separable* $\mathfrak{X}$*-subgroups*. 2026. https://doi.org/10.48550/arXiv.2601.00746

[14] Shahryari M. *On conjugate separability of nilpotent subgroups*. Journal of Group Theory, **27**(6), 2024, pp. 1171–1185.

Abstracts

A.V. Chekhonadskikh, *Adjacency in graphs of root configurations of real polynomials.*

For LTI control systems, many requirements regarding transient response are determined by mutual location of system poles (i.e. characteristic polynomial roots). For low order systems, it is not possible to specify pole locations a priori; therefore, one must seek its optimal location by tuning of controller parameters. The optimality of a control system pole location depends on two factors: the system's behavior while a disturbance is present, and the efficiency of stabilization while the disturbance has vanished. The turnpeak or splash effect at the disturbance front is caused by the leftmost poles, while a rate of disturbance suppressing is determined by the rightmost poles. This paper continues the development of graph structures that constitute mutual location of real polynomial roots. Vertices of root graphs were defined and enumerated in the author's previous article. Mutual root location of polynomial with variable coefficients is preordered and encoded using matrices, which elements represent multiplicities of real and complex pair roots. Multi-row matrix encoding allows to represent multiple complex pairs, which play an important role in system stability providing. Here, we consider the establishment of vertices adjacency. There are two types of root simplex graphs: digraphs, which represent all possible mutual root locations and specify the connections between k-dimensional segments and their $(k-1)$-dimensional boundaries - and undirected graphs that represent the adjacency of k-dimensional segments sharing a common $(k-1)$-dimensional boundary. Matrix-based adjacency criteria allow efficient verification of vertex adjacency for both types of root simplex graphs.

G. Czédli, *Bounds on the numbers of possible values of* $|\mathrm{Con}(L)|$ *and* $|\mathrm{Sub}(L)|$ *for* n*-element lattices* L*.*

For a positive integer n, let $\mathrm{Snc}(n) := \{|\mathrm{Con}(L)| : L \text{ is an } n\text{-element lattice}\}$ be the set of the numbers of congruences of n-element lattices, and let $\mathrm{Sns}(n) := \{|\mathrm{Sub}(L)| : L \text{ is an } n\text{-element lattice}\}$ be the analogous set for sublattices. Several papers have been devoted to the study of these sets. For example, D. Ahmed and E. K. Horváth determined the fifth largest element of $\mathrm{Sns}(n)$, and D. Ahmed with other coauthors obtained the sixth and the seventh. This paper establishes lower and upper bounds on $|\mathrm{Snc}(n)|$ and $|\mathrm{Sns}(n)|$, the numbers of elements of $\mathrm{Snc}(n)$ and $\mathrm{Sns}(n)$, respectively.

D.Yu. Emelyanov, *Algebras of binary formulas for conormal disjunctive products of graphs.*

The paper describes algebras of binary formulas for theories of conormal, or disjunctive, products of graphs. It is shown that for graphs without isolated vertices these products have diameter at most two. If the factors contain edges, then the product contains a simplex. Cayley tables are given, and the corresponding algebras for products of regular polygons are described by algebras of simplexes.

Z.G. Fazyl, B.Sh. Kulpeshov, N.D. Markhabatov, In.I. Pavlyuk, S.V. Sudoplatov, *On Szmielew invariants for pseudofinite abelian groups.*

We describe Szmielew invariants for a series of pseudofinite abelian groups, including (pseudo-)countably categorical (pseudo-)strongly minimal, (pseudo-)uncountably categorical, and (pseudo-)ω-stable ones.

S.B. Malyshev, *On closures defined by algebras of isolating formulas.*

On the set of realizations of a fixed self-conjugate complete 1-type p of a complete theory T, we introduce an iterated closure operator $\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}$ generated by the distribution algebra of binary isolating formulas $\mathfrak{B}(T,p)$. It is shown that $\langle p(\mathfrak{M}), \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}\rangle$ is a pregeometry. The principal structural result is the *degeneracy theorem*: every pregeometry arising in this way is trivial. This result exhibits an intrinsic limitation of the purely binary approach: no combinatorial richness of the Cayley table of $\mathfrak{B}(T,p)$ can produce a nontrivial geometric type. Developing this observation, we obtain: a criterion for local finiteness in terms of finiteness of the set of reachable labels; a dimension formula via the number of orbits of the algebra; monotonicity of the induced pregeometries under inclusions of self-conjugate subalgebras; invariance under labeled isomorphism that respects the sizes of realization classes. The results are applied to the algebras $\mathfrak{Hp}_e$ and $\mathfrak{Hp}_o$ of homomorphic product theories of graphs: the induced pregeometries are degenerate and locally finite, while their dimension is determined by the number of reachability orbits.

In.I. Pavlyuk, S.V. Sudoplatov, *On rigidity degrees of abelian groups with unary predicates.*

Possibilities of rigidity degrees for abelian groups with unary predicates are studied.

N.L. Polyakov, *On aggregation rules with a nontrivial symmetric class of invariant domains.*

For a finite set of alternatives A of cardinality $|A| \geq 5$, we describe all local aggregation rules for individual choices on two-element sets that have

a nontrivial symmetric class of invariants. It turns out that this condition for aggregation rules is equivalent to the condition of their neutrality, and each of the rules satisfying it is invariantly equivalent to one of four special rules defined in the paper.

A.M. Popova, O.V. Bryukhanov, D.V. Korenevskyi, *Calculation of the conjugation matrix of automorphisms of integer group rings 2.*

This paper investigates the compositions of two arbitrary automorphisms of the rational group algebra of a finite group: the first is induced by an automorphism of the representation field of the given finite group, while the second is an inner automorphism of the rational group algebra. An algorithm is described that determines whether such a composition of two automorphisms is an automorphism of the integral group ring of the finite group. Sufficient conditions are provided, along with an example of a case where no such compositions exist.

A.P. Pozhidaev, V.N. Zhelyabin, *On Simple Novikov Bimodules.*

New results on representations of Novikov algebras are presented, and the structures of simple Novikov bimodules are investigated.

M. Shahryari, *On the universality of* CS$\mathfrak{X}$ *and* $\mathfrak{X}$T*-groups.*

The universality of CS$\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{X}$T-groups is obtained.

Contents

Introduction 3

School Programme 4

A.V. Chekhonadskikh, *Adjacency in graphs of root configurations of real polynomials* 8

G. Czédli, *Bounds on the numbers of possible values of* $|\mathrm{Con}(L)|$ *and* $|\mathrm{Sub}(L)|$ *for* n*-element lattices* L 22

D.Yu. Emelyanov, *Algebras of binary formulas for conormal disjunctive products of graphs* 42

Z.G. Fazyl, B.Sh. Kulpeshov, N.D. Markhabatov, In.I. Pavlyuk, S.V. Sudoplatov, *On Szmielew invariants for pseudofinite abelian groups* 50

S.B. Malyshev, *On closures defined by algebras of isolating formulas* 59

In.I. Pavlyuk, S.V. Sudoplatov, *On rigidity degrees of abelian groups with unary predicates* 75

N.L. Polyakov, *On aggregation rules with a nontrivial symmetric class of invariant domains* 84

A.M. Popova, O.V. Bryukhanov, D.V. Korenevskyi, *Calculation of the conjugation matrix of automorphisms of integer group rings 2* 90

A.P. Pozhidaev, V.N. Zhelyabin, *On Simple Novikov Bimodules* 101

M. Shahryari, *On the universality of* $\mathrm{CS}\mathfrak{X}$ *and* $\mathfrak{X}\mathrm{T}$*-groups* 106

Abstracts 110

MODEL THEORY AND ALGEBRA 2026

Collection of papers

Edited by *M. Shahryari, S.V. Sudoplatov*

Technical editor *S.V. Sudoplatov*

Подписано в печать 10.11.2026
Формат 70 × 108 1/16. Бумага офсетная
Уч.-изд. л 10,15. Печ. л. 7,25. Тираж 50 экз.
Изд. № 172. Заказ № 210

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 58.11.1 (ОКПД2)

Издательство Новосибирского государственного
технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20
Тел. (383) 346-31-87
E-mail: office@publish.nstu.ru

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20