Novosibirsk State Technical University

Algebra and model theory *13*

Collection of papers
edited by A. G. Pinus, E. N. Poroshenko,
and S. V. Sudoplatov

Novosibirsk
2021

Algebra and model theory

UDC 512(06) **ISSN 2619-0486**
А 35 **2021**

Учредитель

ФГБОУ “Новосибирский государственный технический университет”

Редакционная коллегия

Адрес редакции, издателя: 630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, НГТУ,
Тел. (383) 346-11-66
E-mail: algebra@nstu.ru

UDC 512(06)

Introduction

Algebra and model theory 13

The 14th International Summer School-Conference "Problems Allied to Universal Algebra and Model Theory" was held on 23–29 of June 2021 at Novosibirsk State Technical University NETI. The School was organized by Algebra and Mathematical Logic Department of Novosibirsk State Technical University (NSTU NETI) and Sobolev Institute of Mathematics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (IM SB RAS). This school was dedicated to the 75th birthday of Professor Bruno Poizat . The School was supported by Grant of NSTU (C21-8). At the school-conference, there were participants from Russia, France, Kazakhstan, Uzbekistan, China, Greece, India, Nigeria, Poland, Turkey, United Kingdom, USA. They made 57 talks. Within the school-conference, the discussions on actual problems on Algebra, Model Theory and related subjects were held.

The Organizing Committee of the School-Conference

Programme of
the 14th International Summer School-Conference "Problems Allied to Universal Algebra and Model Theory"

<u>***June 23, Wednesday***</u>

8:55am–9:00am **Opening Ceremony**

Chairman S. Sudoplatov

9:00am–9:50am	S. Goncharov (Novosibirsk, Russia), "Semantic modeling and programming"
10:00am–10:50am	A. Stepanova (Vladivostok, Russia), "On axiomatizability of some classes of polygons over monoids"
11:00am–11:30am	A. Pinus (Novosibirsk, Russia), "On some non-traditional relations on spaces of functional clones"
11:40am–12:30pm	N. Peryazev (Saint-Petersburg, Russia), "Logic of multioperations"

Chairman A. Borovik

4:00pm–4:50pm	Ye. Baissalov (Nur-Sultan, Kazakhstan), Minimal algebras
5:00pm–5:20pm	V. Verbovskiy (Almaty, Kazakhstan) and J. Baldwin (Chicago, USA), "On definable closure in Hrushovski's strongly minimal generic structures"
6:00pm–6:20pm	A. Berkman (Istanbul, Turkey), "Groups of finite Morley rank with a generically multiply transitive action"

Chairman S. Sudoplatov

7:00pm–7:50pm A. Borovik (Manchester, UK), "Finite groups and groups of finite Morley rank: more connections"

8:00pm–8:50pm B. Poizat (Lyon, France) **Jubilee Talk:** "Positive Set Theory"

9:00pm **Congratulations**

June 24, Thursday

Chairwoman A. Stepanova

9:00am–9:50am B. Baizhanov (Almaty, Kazakhstan), "On the properties of 2-formulas on the set of all realizations of convex closure of 1-type in small ordered theories"

10:00am–10:50am B. Kulpeshov (Almaty, Kazakhstan; Novosibirsk, Russia), "Criterion for binarity of almost omega-categorical weakly o-minimal theories"

11:00am–11:50am N. Kasymov, R. Dadajanov, and S. Djavliyev (Tashkent, Uzbekistan), "Degrees of algorithmic representativity of linear orders"

12:30pm – 12:50pm P. Kolesnikov (Novosibirsk, Russia), "Derivative identities of differential algebras"

Chairman P. Kolesnikov

3:00pm–3:20pm S. Zhavliyev and N. Kasymov (Tashkent, Uzbekistan), "Negative enumerations of linear orders with endomorphisms"

3:30pm–3:50pm I. Khodzhamuratova and N. Kasymov (Tashkent, Uzbekistan), "On representativity of translation complete universal algebras over negative equivalences"

4:00pm–4:20pm D. Eremenko (Saint-Petersburg, Russia), "Minimal algebras of binary operations of rank 3"

4:30pm – 4:50pm S. Todikov (Saint-Petersburg, Russia), "Comparison of expressive capabilities of different languages of multioperations"

Chairman B. Poizat

7:00pm–7:50pm P. Koiran (Lyon, France), "The incredible shrinking algebraic computation model"

8:00pm–8:50pm G. Cherlin (New Brunswick, USA), "Metrically homogeneous graphs and distance semigroups"

June 25, Friday

Chairman E. Poroshenko

10:00am–10:50am V. Levchuk and O. Kravtsova (Krasnoyarsk, Russia), "Some questions of algebraic and geometric systems"

11:00am–11:50am E. I. Timoshenko (Novosibirsk, Russia), "Bases of partially commutative groups"

Noon–12:50pm A. Pozhidaev (Novosibirsk, Russia), "On simple right-symmetric (pre-Lie) algebras"

Chairman N. Peryazev

3:00pm–3:20pm M. Schwidefsky and Yu. Ershov (Novosibirsk, Russia), "On function spaces"

3:30pm–3:50pm A. Popova and O. Bryukhanov (Novosibirsk, Russia), "Some algorithmic questions of factorization of integer group rings"

4:00pm–4:20pm O. Bryukhanov and V. Bardakov, and M. Neshchadim (Novosibirsk, Russia), "On nilpotent approximability of some extensions"

4:30pm–4:50pm I. Zotov and V. Levchuk (Krasnoyarsk, Russia), "The Mal'tsev correspondence and local automorphisms of nil-triangular algebras"

5:00pm–5:50pm A. Iwanow (Gliwice, Poland), "Amenability and computable groups"

6:00pm–6:20pm	K. Duda (Wroclaw, Poland), "Computable paradoxical decompositions of computable groups"
6:30pm – 7:20pm	P. Stefaneas and D. Zafeirakopoulos, (Athens, Greece), "Remarks on Deontic Logic and Artificial Intelligence"

June 26, Saturday

Chairman N. Kasymov

10:00am—10:50am	A. Yeshkeyev (Karaganda, Kazakhstan), "Jonsson spectrum and its models
11:00am–11:50am	R. Sklinos (Beijing, China), "Fields interpretable in the free group"

Chairman Ye. Baissalov

3:00pm–3:20pm	N. Mussina, M. Kasymetova, and N. Popova (Karaganda, Kazakhstan), "Companions of hybrids of fragments of definable subsets"
3:30pm–3:50pm	M. Omarova, A. Yeshkeyev, and O. Ulbrikht (Karaganda, Kazakhstan), "The number of perfect fragments of the Jonsson spectrum of the class of existentially closed models of an arbitrary signature"
4:00pm–4:20pm	A. Isayeva and A. Yeshkeyev, and N. Shamatayeva (Karaganda, Kazakhstan), "Small models of fagments of Jonsson sets"
5:00pm–5:20pm	B. K. Gupta (Barabanki UP, India), "Big Data: Unstructured Information as Boon and Bane"
5:30pm–5:50pm	M. E. Ogiugo (Ibadan, Nigeria), "The number of subgroup chains in the cartesian product of $Z_p \times S_4$ (p is any prime)

June 27, Sunday

Chairman B. Kulpeshov

10:00am–10:50am S. Sudoplatov (Novosibirsk, Russia), "Characteristics for families of theories"

11:00am–11:30am N. Markhabatov (Novosibirsk, Russia; Taraz, Kazakhstan), "Model-theoretic and topological properties of families of theories"

11:40am–12:10pm D. Emelyanov (Novosibirsk, Russia), "Algebras of binary isolating formulas"

Chairman V. Verbovskiy

3:00pm–3:20pm D. Vlasov (Novosibirsk, Russia), "Semantic programming and unified semantics of algebraic, logical and functional operators"

3:30pm–3:50pm S. Gusev (Yekaterinburg, Russia) and E. W. H. Lee (Fort Lauderdale, USA), "Cancellable elements of the lattice of monoid varieties"

4:00pm–4:20pm O. Voronina (Petropavlovsk, Kazakhstan), "On simultaneous reduction of elements of abelian groups and vector spaces to positive form"

4:30pm–4:50pm S. Lutsak and O. Voronina, (Petropavlovsk, Kazakhstan), "On complexity of quasivariety lattices of Lukasiewicz algebras"

5:00pm–5:20pm A. Kasatova (Nur-Sultan, Kazakhstan), "Properties of quasivarieties of complete theories"

5:30pm–5:50pm A. Dauletiyarova and S. Sudoplatov (Novosibirsk, Russia), "On some expansions of dense orders"

June 28, Monday

Chairman E. I. Timoshenko

10:00am–10:20am	M. Zonov and E. A. Timoshenko (Tomsk, Russia), "On nilradicals of E-rings"
10:30am–10:50am	N. Galanova (Tomsk, Russia), "On some examples of real closed fields"
11:00am–11:20am	A. Zabarina and E. Fomina (Tomsk, Russia), "On some properties of the set K_p in finite groups"
11:30am–11:50am	F. Dudkin (Novosibirsk, Russia), "Finite index subgroups of non-large generalized Baumslag-Soliter groups"

Chairman A. Pozhidaev

3:00pm–3:20pm	E. Poroshenko (Novosibirsk, Russia), "Splitting partially commutative Lie algebras into direct sums"
3:30pm–3:50pm	A. Galt (Novosibirsk, Russia), "On Thompson's problem in primitive groups"
4:00pm–4:20pm	K. Tulenbayev and A. Dzhumadil'daev (Almaty, Kazakhstan), "Nagata Theorem for algebras close to Novikov"
4:30pm–4:50pm	V. Gubarev (Novosibirsk, Russia), "Rota—Baxter operators on the conformal loop algebra over sl$(2, C)$"
5:00pm–5:20pm	A. Staroletov (Novosibirsk, Russia), "On 3-generated algebras of monster type"
5:30pm–5:50pm	A. Petukhov (Moscow, Russia), "Primitive ideals and Nil-Dynkin Lie algebras"
6:00pm–6:20pm	A. Zenkov (Barnaul, Russia), "On idempotents of the semigroup of varieties of m-groups"
6:30pm	**Closing Ceremony**

К 75-летию профессора Б. Пуаза

13 марта 2021 г. исполнилось 75 лет почетному профессору университета Лион-1 Брюно Пуаза.

Брюно Жан Мари Пуаза родился 13 марта 1946 г. в г. Виши, Франция. В 1966 году он поступил в Парижскую Высшую нормальную школу (ENS) на улице Ульм по специальности математика, и одновременно на курсы арабского языка в Парижском Национальном институте восточных языков и культур (ENLOV, ныне INALCO), а затем по окончании этих высших учебных заведений в 1970 году изучал курсы сирийского, эфиопского и даже аккадского языков в Католическом университете

Парижа с 1970 по 1974 год. В 1977 году им была защищена Государственная докторская диссертация по математике "Déviation des types" в университете Париж-6 под руководством профессора Марка Краснера, а в 1982 году окончена докторантура 3-го цикла по современной литературе в университете Париж-3 под руководством профессора Дэвида Коэна.

В 1970 году Б. Пуаза был принят в университет Париж-6, в котором он проработал до 1992 года в должностях ассистента, а затем старшего преподавателя. С 1992 года по 2006 год он работал профессором университета Лион-1, а с 2006 года является почетным профессором этого университета. В 1986 году он был приглашенным профессором Нотр-Дамского университета (штат Индиана, США). С 2007 по 2011 год он преподавал в Парижском Национальном институте восточных языков и культур.

Начиная с 17 лет, он часто путешествует по Ближнему Востоку, Центральной Азии, Индии и Латинской Америке. Во всех этих странах он практикует изучение национальных языков. Он ненавидит любую спортивную деятельность, но любит танцевать танго.

Брюно Пуаза — крупный специалист в области теории моделей, теоретико-модельной алгебры и лингвистики. Им внесен определяющий вклад в развитие ряда направлений теории классификаций, находящихся на стыке алгебры и математической логики, а также в развитие изучения древних и современных восточных языков, таких как литературный арабский, современный арамейский, турецкий, казахский, персидский языки, урду, хинди, алтайский и другие. Он автор более 140 научных работ, опубликованных в ведущих издательствах. Среди них — 11 монографий, более 95 статей по теории моделей, а также 23 статьи по лингвистике. Б. Пуаза является автором классического "Курса теории моделей", написанного на французском языке и переведенного на русский и английский. Им была опубликована монография "Стабильные группы", переведенная затем с французского на английский. Б. Пуаза получил ряд важных, определяющих результатов по теории Галуа, теории стабильности, теории групп, теории полей, теории сложности вычислений, геометрии и конструкции Хрушовского, применений этой конструкции, по теории полигонов, позитивной логике и по многим другим направлениям.

Научные труды Б. Пуаза хорошо известны как во Франции, так и в других странах. Он многократно выступал с докладами на международных конференциях по алгебре и математической логике, а также по приглашениям в математических центрах России, Казахстана, США, Германии.

Б. Пуаза подготовил девять специалистов по теории моделей, защитивших PhD-диссертации.

Он сотрудничает со специалистами по теории моделей в рамках Российско-Французских и Французско-Казахстанских проектов. Б. Пуаза принимает активное участие в организации и проведении многих конференций по алгебре и математической логике. Являлся идеологом и соорганизатором Советско-Французского и Казахско-Французских коллоквиумов по теории моделей, членом программного комитета Эрлагольских летних школ-конференций по теории моделей и универсальной алгебре.

За выдающуюся научную, педагогическую и общественную деятельность в 1991 году Брюно Пуаза присвоено звание почетного профессора Карагандинского государственного университета (Караганда, Казахстан), а в 2005 году он был удостоен звания почетного профессора Евразийского национального университета им. Л. Н. Гумилева (Астана, Казахстан). В июне 2021 года на базе Новосибирского государственного технического университета — НЭТИ была проведена 14-я Международная летняя школа-конференция “Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры”, посвященная 75-летию профессора Брюно Пуаза. В ходе конференции он был награжден нагрудным знаком имени Л. Н. Гумилева Евразийского национального университета за научное сотрудничество и вклад в продвижение казахстанской науки в мировое научное пространство. Авторитет Брюно Пуаза в мировой теории моделей нашел свое отражение во многих докладах на школе-конференции, сделанных ведущими специалистами в этой области.

Желаем профессору Брюно Пуаза крепкого здоровья, дальнейшей успешной, плодотворной работы и творческого долголетия!

Б. С. Байжанов, Е. Р. Байсалов, А. Беркман, А. В. Боровик, А. В. Васильев, Е. В. Васильев, В. В. Вербовский, С. С. Гончаров, Д. Ю. Емельянов, Ю. Л. Ершов, А. Р. Ешкеев, А. А. Иванов, Д. Х. Козыбаев, П. С. Колесников, П. Куаран, Б. Ш. Кулпешов, В. Д. Мазуров, Н. Д. Мархабатов, А. С. Морозов, Ин. И. Павлюк, Н. А. Перязев, А. Г. Пинус, К. Н. Пономарев, Е. Н Порошенко, А. Н. Ряскин, Р. Склинос, С. В. Судоплатов, Е. И. Тимошенко, Д. А. Тусупов, У. У. Умирбаев, Н. Г. Хисамиев, Г. Черлин, З. Шатзидакис

75th birthday of professor B. Poizat

March 13, 2021 marks the 75th birthday of the Emeritus Professor of the University Lyon-1 Bruno Poizat.

Bruno Jean Marie Poizat was born on March 13, 1946 in Vichy, France. In 1966 he entered the Paris Higher Normal School (ENS) on rue Ulm with a speciality in mathematics, and at the same time took Arabic courses at the Paris National Institute of Oriental Languages and Cultures (ENLOV, now INALCO), and then after graduating from these higher educational institutions in 1970 studied courses in Syriac, Ethiopian and even Akkadian languages at the Catholic University of Paris from 1970 to 1974. In 1977 he defended his State doctoral dissertation in mathematics, "Déviation des types" at the University Paris-6 under the guidance of Professor Mark Krasner, and in 1982 completed his doctorate in the third cycle in modern literature at the University Paris-3 under the guidance of Professor David Cohen.

In 1970, B. Poizat was admitted to the University of Paris-6, where he worked until 1992 as an assistant, and then as a senior lecturer. From 1992 to 2006 he worked as a professor at the University Lyon-1, and since 2006 he is an emeritus professor of this university. In 1986 he was a visiting professor at the University of Notre Dame (Indiana, USA). From 2007 to 2011 he taught at the Paris National Institute of Oriental Languages and Cultures.

Starting at the age of 17, he frequently travels to the Middle East, Central Asia, India and Latin America. In all these countries, he practices the study of national languages. He abominate any sporting activity, but loves to dance tango.

Bruno Poizat is a prominent specialist in the field of model theory, model-theoretic algebra and linguistics. He introduced a defining contribution to the development of a series of areas of the classification theory at the junction of algebra and mathematical logic, as well as to the development of the study of ancient and modern oriental languages, such as literary Arabic, modern Aramaic, Turkish, Kazakh, Persian, Urdu, Hindi, Altai and others. He is the author of over 130 scientific papers published in leading publishing houses. Among them there are 11 monographs, more than 95 articles on model theory, as well as 23 articles on linguistics. B. Poizat is the author of the classic Course in Model Theory, written in French and translated into Russian and English. He published the monograph "Stable Groups", which was then translated from French into English. B. Poizat obtained a series of important, defining results in Galois theory, stability theory, group theory, field theory, computational complexity theory, Hrushovski geometry and construction, applications of this construction, in polygon theory, positive logic, and in many other areas.

The scientific works of B. Poizat are well known both in France and in other countries. He has made many reports at international conferences on algebra and mathematical logic, as well as by invitation in the mathematical centers of Russia, Kazakhstan, USA, Germany.

B. Poizat trained nine experts in model theory who defended their PhD theses.

He collaborates with specialists in model theory in the framework of Russian-French and French-Kazakhstan projects. B. Poizat takes an active part in organizing and conducting many conferences on algebra and mathematical logic. He was the ideologist and co-organizer of the Soviet-French and Kazakh-French colloquia on model theory, a member of the program committee of the Erlagol summer schools-conferences on model theory and universal algebra.

For outstanding scientific, pedagogical and social activities in 1991, Bruno Poizat was awarded the title of Honorary Professor of Karaganda State University (Karaganda, Kazakhstan), and in 2005 he was awarded the title of Honorary Professor of the Eurasian National University after L. N. Gumilyov (Astana, Kazakhstan). In June 2021 on the basis of the Novosibirsk State Technical University — NETI The 14th International Summer School-Conference "Problems Allied to Model Theory and Universal Algebra" was held, in occasion of the 75th birthday of Professor Bruno Poizat. During the conference, he was awarded the L. N. Gumilyov badge of the Eurasian National University for scientific cooperation and contribution to the promotion of Kazakhstan science in the world scientific space. The authority of Bruno Poizat in the world theory of models is reflected in many talks at the school-conference made by leading experts in this field.

We wish Professor Bruno Poizat good health, further successful, fruitful work and creative longevity!

75e anniversaire du professeur B. Poizat

Le 13 mars 2021 marque le 75e anniversaire du professeur émérite de l'Université Lyon-1 Bruno Poizat.

Bruno Jean Marie Poizat est né le 13 mars 1946 à Vichy en France. En 1966, il entre à l'École Normale Supérieure (ENS) de Paris rue d'Ulm avec une licence en mathématiques, et parallèlement aux cours d'arabe à l'Institut national des langues et cultures orientales de Paris (ENLOV, aujourd'hui INALCO), puis après avoir été diplômé de ces établissements d'enseignement supérieur en 1970 a étudié des cours de langues syriaque, éthiopienne et même akkadienne à l'Université catholique de Paris de 1970 à 1974. En 1977, il soutient sa thèse de doctorat d'État en mathématiques au sujet "Déviation des types" à l'Université Paris-6 sous la direction du professeur Mark Krasner, et a terminé en 1982 le 3e cycle d'études doctorales en littérature contemporaine à l'Université Paris-3 sous la direction du professeur David Cohen.

En 1970, B. Poizat est admis a l'Université Paris-6, où il travaille jusqu'en 1992 en tant qu'assistant puis maître de conférences. De 1992 a 2006, il a travaillé comme professeur à l'Université Lyon-1, et depuis 2006, il est professeur émérite à cette université. En 1986, il est professeur invité à l'Université de Notre Dame (Indiana, USA). De 2007 à 2011, il enseigne à l'Institut National des Langues et Cultures Orientales de Paris.

Dès l'âge de 17 ans, il voyage fréquemment au Moyen-Orient, en Asie centrale, en Inde et en Amerique latine. Dans tous ces pays, il pratique l'étude des langues nationales. Il abomine toute activité sportive, mais adore danser le tango.

Bruno Poizat est un éminent spécialiste dans le domaine de la théorie des modèles, de l'algèbre théorique des modèles et de la linguistique. Il a apporté une contribution décisive au développement d'un certain nombre de domaines de la théorie des classifications à la jonction de l'algèbre et de la logique mathématique, ainsi qu'au développement de l'étude des langues orientales anciennes et modernes, telles que l'arabe littéraire, l'araméen moderne , Turc, Kazakh, Persan, Ourdou, Hindi, Altaï et autres. Il est l'auteur de plus de 140 articles scientifiques publiés dans de grandes maisons d'édition. Parmi eux — 11 monographies, plus de 95 articles sur la theorie des modeles, ainsi que 23 articles sur la linguistique. B. Poizat est l'auteur du cours classique de théorie des modèles, écrit en français et traduit en russe et en anglais. Il a publié la monographie Groupes Stables, qui a ensuite été traduite du français vers l'anglais. B. Poizat a obtenu un certain nombre de résultats importants et déterminants dans la théorie de Galois, la théorie de la stabilité, la théorie des groupes, la théorie des corps, la théorie de la complexité computationnelle, la géométrie et la construction de Hrushovski, les applications de cette construction, la théorie des polygônes, la logique positive et dans bien d'autres domaines.

Les travaux scientifiques de B. Poizat sont bien connus tant en France qu'à l'étranger. Il a fait de nombreux rapports à conferences internationales sur l'algèbre et la logique mathématique, ainsi que sur invitation dans les centres mathématiques de Russie, Kazakhstan, USA, Allemagne.

B. Poizat a formé neuf experts en théorie des modèles qui ont soutenu leur thèse de doctorat.

Il collabore avec des spécialistes de la théorie des modèles dans le cadre de projets russo-français et franco-kazakhstanais. B. Poizat participe activement à l'organisation et à la conduite de nombreuses conférences sur l'algèbre et la logique mathématique. Il a été l'idéologue et co-organisateur des colloques franco-soviétique et kazakh-francais sur la théorie des modèles, membre du comité de programme des écoles-conférences d'Erlagol sur la théorie des modèles et l'algèbre universelle.

Pour ses activités scientifiques, pédagogiques et sociales exceptionnelles en 1991, Bruno Poizat a reçu le titre de professeur honoraire de l'Université de Qarağandy (Qarağandy, Kazakhstan), et en 2005, il a reçu le titre de professeur honoraire de l'Université nationale eurasienne de L. N. Gumilyov (Astana, Kazakhstan). En juin 2021, la 14e l'ecole-conférence internationale s'est tenue sur la base de l'Université technique de Novossibirsk — NETI "Problèmes aux limites de la théorie des modèles et de l'algèbre universelle", dédié au 75e anniversaire du professeur Bruno Poizat. Au cours de la conférence, il a reçu le badge de L. N. Gumilyov de l'Université nationale eurasienne pour la coopération scientifique et la contribution à la promotion de la science kazakhe dans l'espace scientifique mondial. L'autorité de Bruno Poizat dans la théorie mondiale des modèles se reflète dans de nombreux rapports à l'école-conférence rédigés par des experts de premier plan dans ce domaine.

Nous souhaitons au Professeur Bruno Poizat une bonne santé, de nouveaux travaux fructueux et une longevite creative!

Ye. R. Baissalov, B. S. Baizhanov, A. Berkman, A. V. Borovik,
Z. Chatzidakis, G. Cherlin, D. Yu. Emelyanov, Yu. L. Ershov,
S. S. Goncharov,A. A. Iwanow, N. G. Khisamiev, P. Koiran,
P. S. Kolesnikov, D. Kh. Kozybaev, B. Sh. Kulpeshov,N. D. Markhabatov,
V. D. Mazurov, A. S. Morozov, In. I. Pavlyuk, N. A. Peryazev,
A. G. Pinus, K. N. Ponomaryov, E. N. Poroshenko, A. N. Ryaskin,
R. Sklinos, S. V. Sudoplatov, E. I. Timoshenko, D. A. Tussupov,
U. U. Umirbaev, A. V. Vasil'ev, E. V. Vassiliev, V. V. Verbovskiy,
A. R. Yeshkeyev

Bruno POIZAT, publications

Livres

1. **Cours de Théorie des Modèles, une introduction à la Logique Mathématique contemporaine**, Villeurbanne, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, **1985**.

2. **Groupes Stables, une tentative de conciliation entre la Logique Mathématique et la Géométrie Algébrique**, Villeurbanne, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, **1987**.

3. **Les petits cailloux, une introduction modèle-théorique à l'algorithmie**, Nur al-mantiq wal-Ma'rifah n° 3, Lyon, Editions ALEAS, **1995**.

4. **A Course in Model Theory**, traduit par Moses KLEIN, Universitext, Springer, **2000**.

5. **Stable groups**, traduit par Moses KLEIN, American Mathematical Society, **2001**.

6. **Manuel de soureth** (avec la collaboration de Joseph ALICHORAN et de Yohanan BINOUISSA), Paris, Geuthner, **2008**.

7. **La versification en soureth**, CSCO, vol. 647, Subsidia 131, Leuven, **2013**.

8. **Parlons soureth**, araméen contemporain, Paris, l'Harmattan, **2016**.

9. **Livre de lecture en soureth pour les élèves des collèges** (avec Joseph ALICHORAN), Lyon, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, **2017**.

10. **Parlons ladakhi**, tibétain occidental, Paris, l'Harmattan, **2018**.

11. **Œuvres choisies de Marc Krasner** (avec Luc Bélair), Paris, l'Harmattan, **2019**.

Notes aux C.R. Acad. Sc. Paris

1. Théorie de Galois des relations, 272, A, 8 mars **1971**, 645–648.

2. Sur les extensions algébriques de degré infini, 276, A, 8 janvier **1973**, 101–103.

3. Groupes profinis et Théorie de Galois, 278, A, 14 janvier **1974**, 121–124.

4. Théorèmes globaux (de définissabilité), 280, A, 7 avril **1975**, 845–847.

5. Une relation particulièrement rigide, 282, A, 29 mars **1976**, 671–673.

6. Remarques sur le "forcing" en Théorie des Modèles, 283, A, 13 sept. **1976**, 131–134.

7. “Forcing” et relation générale sur une structure oméga-catégorique, A, 20 septembre **1976**, 223–224.

8. Une preuve par la théorie de la déviation d’un théorème de John Baldwin, 287, A, 9 octobre **1978**, 589–591.

9. Le forcing de Fraïssé dans un contexte arithmétique, 289, A, 8 octobre **1979**, 409–412.

10. Une preuve d’un théorème de James Ax sur les extensions algébriques de corps, 291, A, 29 septembre **1980**, 245.

11. Degrés de définissabilité arithmétique des génériques, 293, A, 12 oct. **1981**, 289–291.

Articles dans des journaux de mathématiques

1. Etude d’un forcing en Théorie des Modèles, **Zeitschrift für Math. Logik und Grundlagen d. Math.**, Bd. 24, **1978**, 347–356.

2. An introduction to forking (avec Daniel LASCAR), **The Journal of Symbolic Logic**, 44, nb. 3, **1979**, 178–198.

3. Sous-groupes définissables d’un groupe stable, **The Journal of Symbolic Logic**, 46, nb. 1, **1981**, 137–146.

4. Théorie de Galois des algèbres de Post infinitaires, **Zeitschrift für Math. Logik ..**, Bd. 27, **1981**, 31–44.

5. Théories instables, **The Journal of Symbolic Logic**, 46, nb. 3, **1981**, 513–522.

6. Deux ou trois choses que je sais de L_n, **The Journal of Symbolic Logic**, 47, nb 3, **1982**, 641–658.

7. Post-scriptum à “Théorie Instables”, **The Journal of Symbolic Logic**, 48, nb. 1, **1983**, 60–62.

8. Paires de structures stables, **The Journal of Symbolic Logic**, 48, nb. 2, **1983**, 239–249.

9. Groupes stables, avec types génériques réguliers, **The Journal of Symbolic Logic**, 48, nb. 2, **1983**, 339–355.

10. Une théorie de Galois imaginaire, **The Journal of Symbolic Logic**, 48, nb. 4, **1983**, 1151–1170.

11. Deux remarques à propos de la propriété de recouvrement fini, **The Journal of Symbolic Logic**, 49, nb. 3, **1984**, 803–807.

12. Chaînes alternées, **Order**, vol. 2, nb. 3, **1985**, 323–325.

13. Le Définitionisme, la Théorie de Galois Abstraite, **Elefteria**, n° 3, **1985**, 86–107.

14. Q = NQ ? **The Journal of Symbolic Logic**, 51, nb. 1, **1986**, 22–32.

15. Attention à la marche ! **The Journal of Symbolic Logic**, 51, nb. 3, **1986**, 570–585.

16. A l'Ouest d'Eden, **The Journal of Symbolic Logic**, 51, nb. 3, **1986**, 795–816.

17. Pas d'imaginaires dans l'infini ! (avec Anand PILLAY), **The Journal of Symbolic Logic**, 52, nb. 2, **1987**, 400–403.

18. MM. Borel, Iits, Zil'ber et le Général Nonsense, **The Journal of Symbolic Logic**, 53, nb. 1, **1988**, 124–131.

19. Missionary Mathematics, **The Journal of Symbolic Logic**, 53, nb. 1, **1988**, 132–145.

20. Des belles paires aux beaux uples (avec Elisabeth BOUSCAREN), **The Journal of Symbolic Logic**, 53, nb. 2, **1988**, 434–442.

21. Generix strikes again, **The Journal of Symbolic Logic**, 54, nb. 3, **1989**, 847–857.

22. Tores et p-groupes. (avec Aleksandr Vasil'evich BOROVIK), **The Journal of Symbolic Logic**, 55, nb. 2, **1990**, 478–491.

23. The last word on quantifier elimination in modules. (avec Hans B. GUTE et K. K. REUTER), **The Journal of Symbolic Logic**, 55, nb. 2, **1990**, 670–673.

24. Le groupe dans le groupe, (avec David EVANS et Anand PILLAY), **Algebra i Logika**, vol. 29, nb. 3, **1990**, 368–378.

25. An infinite superstable group has infinitely many classes of conjugacy. (avec Ivan AGUZAROV, R. E. FAREY et John B. GOODE), **The Journal of Symbolic Logic**, 56, nb. 2, **1991**, 618–623.

26. Some trivial considerations. (avec John B. GOODE), **The Journal of Symbolic Logic**, 56, nb. 2, **1991**, 624–631.

27. Groupes de rang de Morley fini sans sous-groupes résolubles non-nilpotents, (en russe, avec Aleksandr Vasilievich BOROVIK), **Sibirskii Matematiceskii Jurnal**, 32 (2), **1991**, p. 204 (résumé; mis en circulation par VINITI).

28. Sous-groupes périodiques d'un groupe stable (avec Frank Olaf WAGNER), **The Journal of Symbolic Logic**, 58, nb. 2, **1993**, 385–400.

29. Accessible telephone directories (avec John B. GOODE), **The Journal of Symbolic Logic**, 59, nb. 1, **1994**, 92–105.

30. Polygônes (avec Tolende MUSTAFIN), **Mathematical Logic Quarterly**, 41, **1995**, 93–110.

31. Corps et chirurgie (avec Anand PILLAY), **Journal of Symbolic Logic**, 60, nb. 2, **1995**, 528–533.

32. Les corps différentiellement clos, **Mathematica Japonica**, 42, nb. 3, **1995**, 575–585.

33. O cisle elementarix par nad mnojestvami (avec Türsünbek NURMAGAMBET), **Issledovanja v teorii algebraiceskix sistem**, Qaragandy, **1995**, 73–82.

34. Do mas'ale-ye algoritmi, **Nashr-e Riyadi**, Tehran, 14, **1996**, 15–24; version française: Le harem d'Ahiqar ou les deux problèmes de l'algorithmie, **Gazette des mathématiciens**, 72, avril 1997, 59–78.

35. Paires de structures *O*-minimales (avec Erjan BAISAL), **The Journal of Symbolic Logic**, 63, nb. 2, **1998**, 570–578.

36. Le carré de l'égalité, **The Journal of Symbolic Logic**, 64, nb. 3, **1999**, 1339–1355.

37. Liftez les sylows! (avec Frank O. WAGNER), **The Journal of Symbolic Logic**, 65, nb. 2, **2000**, 703–704.

38. Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner, **The Journal of Symbolic Logic**, 66, nb. 4, **2001**, 1637–1646.

39. L'égalité au cube, **The Journal of Symbolic Logic**, 66, nb. 4, **2001**, 1647–1676.

40. La limite des théories de courbes génériques, (avec Olivier CHAPUIS, Ehud HRUSHOVSKI & Pascal KOIRAN), **The Journal of Symbolic Logic**, 67, nb. 1, **2002**, 24–34.

41. Quelques mauvais corps de rang infini, **Quaderni di Matematica**, Napoli, vol. 11, **2005**, 349–365.

42. Liaisons linéaires entre racines de l'unité en caractéristique non nulle (avec François GRAMAIN), **Journal of Algebra**, 295, **2006**, 512–523.

43. Sous-groupes superstables de SL2 et de PSL2 (avec Erulan MUSTAFIN), **Journal of Algebra**, 297, **2006**, 155–167.

44. Univers positifs, **The Journal of Symbolic Logic**, 71, **2006**, 969–976.

45. Fondements de la Logique positive (avec Itaï BEN YAACOV), **The Journal of Symbolic Logic**, 72, **2007**, 1141–1162.

46. A la recherche de la définition de la complexité d'espace pour le calcul des polynômes à la manière de Valiant, **The Journal of Symbolic Logic**, 73, **2008**, 1179–1201.

47. Quelques effets pervers de la positivité, **Annals of Pure and Applied Logic**, 6, **2010**, 812–816.

48. An arithmetical view to first-order logic (avec Seyed Mohammad BAGHERI et Massoud POURMAHDIAN, **Annals of Pure and Applied Logic**, 6, **2010**, 745–755.

49. Quelques tentatives de définir une notion générale de groupes et de corps de dimension un et de déterminer leurs propriétés algébriques, **Confluentes Mathematici**, 1, **2009**, 111–122.

50. Groups of small Cantor rank, **The Journal of Symbolic Logic**, 75, **2010**, 346–354.

51. Une dualité entre fonctions booléennes, **Journal de l'Institut Mathématique de Jussieu**, 9, **2010**, 633–652.

52. Centralisateurs génériques, **The Journal of Symbolic Logic**, 78, 2013, 290–306.

53. Groupes linéaires de rang de Morley fini, **Annales des sciences mathématiques du Québec**, **2013**.

54. Supergénérix, **Journal of Algebra**, 404, **2014**, 240–270.

55. Supergeneric equations, **Algebra i Logica**, 55, **2016**, 412–418.

56. Indépendance et liberté, **Annales des sciences mathématiques du Québec**, **2016**.

57. Milieu et symétrie, une étude de la convexité dans les groupes sans involutions, **Journal of Algebra**, **2017**.

58. Positive Jonsson Theories (avec Aibat YESHKEYEV), **Logica Universalis**, vol. 12, **2018**, 101–127.

59. Symétries et transvexions, principalement dans les groupes de rang de Morley fini sans involutions, à paraître au **J.S.L**.

60. Théorie positive des ensembles, soumis.

Séminaires et congrès

1. **Groupe d'Etudes de Théorie Stables**, 1ère année (Suites d'indiscernables dans les théories stables. Rangs des types dans les corps

différentiels. Une théorie oméga-un-catégorique a alpha-T fini. Exercices en stabilité.), **Publications de l'Institut Henri Poincaré**, Paris, **1978**.

2. Les équations différentielles vues par un logicien, **Séminaire VAILLANT**, Université P. & M. Curie, **1980**.

3. **Groupe d'Etudes de Théories Stables**, 2ème année (Le rang U selon Lasacar. Modèles premiers d'une théorie totalement transcendante. Exercices en stabilité.), **Publications de l'Institut Henri Poincaré**, Paris, **1981**.

4. **Groupe d'Etudes de Théories Stables**, 3ème volume (Une théorie superstable finiment axiomatisable. C'est beau et chaud. Beaucoup de modèles à peu de frais. Travaux publiés par les membres du groupe.) **Publications de l'Institut Henri Poincaré**, Paris, **1983**.

5. Propriétés modèle-théoriques d'une théorie du premier ordre, **Seminarberichte 49, Humboldt Univ.**, Berlin, **1983**, 99–108.

6. Functions and Relations, **Proc. SMC International Conf.**, **1983**, Bombay, IEEE, 538–541.

7. La structure géométrique des groupes stables, **Seminarbericht 60, Humboldt Univ.**, Berlin, **1984**, 205–217.

8. Malaise et guérison, **Logic Colloquium'84**, North Holland, **1986**, 155–163.

9. A propos de groupes stables, **Logic Colloquium'85**, North Holland, **1987**, 245–265.

10. Oracles génériques, **Séminaire Général de Logique 1983–84**, Publications Mathématiques de l'Université de Paris-7, **1988**, 43–51.

11. Groups definable in an abelian group : an answer to a query from Wilfrid Augustine Hodges, **Seminarberichte 98, Humboldt Univ.**, Berlin, **1988**, 164–165.

12. Hrushovski's geometries (avec J. B. GOODE), **Seminarberichte 104, Humboldt Univ.**, Berlin, **1989**, 106–117.

13. Equations génériques, **Seminarberichte 110, Humboldt Univ.**, Berlin, **1990**, 131–138.

14. Le groupe libre est-il stable? **Seminarberichte 93-1, Humboldt Universität zu Berlin**, **1993**, 169–176.

15. HLM (Hrushovski-Lang-Mordell) (avec John B. GOODE), **Séminaire Bourbaki**, Astérisque 241, **1997**, 179–194.

16. Amalgames de Hrushovski, **Séminaire Bourbaki**, exposé n° 995, Astérisque, 326, 2010, 379–385.

17. Groupes équationnellement minimaux, **Qaragandy Universitetinin Khabarshysy**, Matematika seriasy, 1, **2013**, 86–89.

Ouvrages collectifs

1. An introduction to algebraically closed fields and varieties (in French), **The model theory of groups**, ed. Ali NESIN & Anand PILLAY, Notre Dame Mathematical Lectures, nb. 11, 1989, 41–67.

2. Autour du Théorème de Morley, **Mathematics 1950–2000**, édité par J.P. PIER, Birkhauser, 2000, 879–896.

3. Une tentative malheureuse de construire une structure éliminant rapidement les quanteurs, **CSL 2000** (éditeurs Peter CLOTE and Helmut SCHIWTZTENBERG), 61–70, Lecture Notes in Computer Science 1862, Springer.

4. Amalgames de Hrushovski, une tentative de classification, **Tits buildings and the Model Theory of groups** (ed. K. Tent), Cambridge university Press, 2002, 195–214.

5. A la recherche de la structure intrinsèque de l'univers, **Teoriia modelei v Kazaxstane**, Sbornik naucnyx rabot posviachshennyx pamiati A. D. Taimanova, Eco Study, Almaty, 2006, 339–388.

6. Galois et la symétrie, **In the steps of Galois** (Bertato, Cifuentes, Szczeciniarz ed.), p. 39–60, Paris, Hermann, 2014.

7. Malod and the Pascaline, **Perspectives in Computationnal Complexity** (Somenath Biswas Anniversary Volume), Birkhäuser, 2014, 147–157.

8. Back and Forth, à paraître dans **Contemporary Logic**, édité par Fitting, Pourmahdian, Rezus et Daghighi, College Publications, London.

9. Back and Forth in Positive Logic (avec Aibat YESHKEYEV), **Logic in Question: Talks from the Annual Sorbonne Logic Workshop (2011-2019)**, Springer, 2021.

10. Positive Set Theory. A short and English version, Ce Volume.

Recensions

1. Collaboration aux **Mathematical Reviews** de 1977 à 2004.

2. Recension de Solomon I. SARA, A description of Modern Chaldean, Janua Linguarum, Series Practica 213, 1974, **C.R. du G.L.E.C.S.**, 18–23, fasc. 1, **1981**, 193-194.

3. Recension de Saharon SHELAH, The number of non-isomorphic models of an unstable first-order theory, **The Journal of Symbolic Logic**, 47, nb. 2, 1982, 436–438.

4. Recension de Gregory A. MOORE, Zermelo's Axiom of Choice, **Ganita Bhärati**, vol. 6, 1984, 30–33.

5. Recension de Saharon SHELAH, The non-minimality of the differential closure, **The Journal of Symbolic Logic**, 52, nb. 3, 1987, 870–873.

6. Recension de John T. BALDWIN, Classification Theory, **The Journal of Symbolic Logic**, 55, nb. 2, 1990, 878–881.

7. Recension de Robert D. HOBERMAN, The syntax and semantics of verb in Modern Aramaic, American Oriental Society, 1989, **Journal of Semitic Studies**, vol. 36, n° 1, 1991, 125–128.

8. Recension de Alessandro MENGOZZI, Israel of Alqosh and Joseph of Telkepe, A Story in a Truthful Language, Religious Poems in Vernacular Syriac et Religious Poetry in Vernacular Syriac from Northern Iraq, **Le Muséon**, 124, 2011, 465–472.

Articles sur l'araméen contemporain et ses usagers

1. En Iraq, à la veille du recensement, des évêques prennent leurs responsabilités, **Lu Lugar, 1970**.

2. al-'arâmiyah, as-suryâniyah, as-sûrit (mis en arabe par Joseph HABBI), **Bet Nahrayn**, Mosul, 17, **1977** (5), 37–45.

3. Un traité sur le verbe néo-araméen: présentation et traduction partielle d'un ouvrage en soureth de Nimrod Simono, **C.R. du G.L.E.C.S.**, 18–23, fasc.1, **1981**, 169–192.

4. Une bibliographie commentée pour le néo-araméen, **C.R. du G.L.E.C.S.**, 18-23, fasc. 2, **1981**, 347–414.

5. Jacques l'Etranger, la vie et l'œuvre du Père Jacques Rhétoré, **Journal of the Iraqi Syriac Corporation**, Bagdad, vol. 6, **1982**, 524–536.

6. Article Littérature Néo-Syriaque dans le **Dictionnaire des Littératures**, t. 2, Larousse, Paris, 1986, 1123–1124.

7. The sureth-speaking villages in Eastern Turkey, **Journal of the Assyrian Academic Society**, nb. 1, Chicago, 1986, 17–23.

8. La complainte sur la peste de Pioz, **Studies in Neo-Aramaic**, ed. Wolfhart HEINRICHS, Harvard Semitics Studies, nb. 36, **1990**, 161–179 & 203–207.

9. La Peste de Pioz, suite et fin, **Semitica, Serta philologica Constantino Tsereteli dicata**, curaverunt R. CONTINI, F. PENNACCHIETTI, M. TOSCO, Silvio Zamorani, Torino, **1993**, 227–272.

10. Les dialectes morts et vivants de l'araméen ; Aramice'nin lehçeleri (trad. Antoine Yalap), **Hamurabi**, n° 20, Sarcelles, **1998**, 25–30 et 50–55.

11. Suret u yulpana (Le soureth et la science), **Nineveh** (Berkeley), **1999**, n° 1 & 2, 60–61.

12. Expression de l'appartenance en araméen moderne, **C.R. du G.L.E.C.S.**, XXXIII, **2000**, 33–38.

13. La complainte de Mar Hnanisho sur la pénitence, **Sprich doch mit deinen Knechten aramäisch, wir verstehen es**, Festschrift Otto Jastrow, Herausgegeben von W. Arnold und H. Bobzin, Harrassowitz, Wiesbaden, **2002**, 541–556.

14. Un manuscrit retrouvé du P. Jacques Rhétoré, **Studi Afroasiatici**, a cura di Alessandro Mengozzi, Francoangeli, Milano, **2005**, 413–423.

15. La terminologie verbale en soureth chez les grammairiens et les linguistes, **Loquentes linguis**, Studi linguistici e orientali in onore di Fabrizio A. Pennacchietti, a cura di P. G. Borbone, A. Mengozzi, M. Tosco, Harrassowitz, Wiesbaden, **2006**, 591–604.

16. Le soureth, néo-araméen oriental, et sa transmission, (avec Joseph ALICHORAN), **Peuples du Monde**, 416, **2007**, 42–43.

17. Lettres en soureth, **Aram**, vol. 21, **2009**, 15–47.

18. Les Roumis à Achitha, **Rivista di Storia e Letteratura Religiosa**, XLVIII, **2012**, 439–458.

19. Deux fragments de compositions poétiques en araméen vernaculaire, **Le Muséon**, 128, **2015**, 157–179.

20. L'imprimerie des Dominicains à Mossoul (119–121), Les Dominicains et le soureth (185–187), diverses notices, **Grandes Heures des Manuscrits Irakiens**, Paris, Editions du Net, **2015**.

21. L'inscription syriaque de Palai (Kérala), **Semitica et Classica**, Vol. XIII, **2020**, 335–336.

22. Persian Crosses of South India, à paraître à **The Harp**, Kottayam.

23. Mémoires d'un mâle, **La Salida**, n° 120, Paris, **2020**, 41–46.

LES GENS DE L'ALTAY

B. Poizat

Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard, 43,
boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne-cedex, France
e-mail: poizat@math.univ-lyon1.fr

Nous n'irons pas à Erlagol ce mois de juin.

Erlagol est un camp de vacances appartenant à l'Université Technique de Novosibirsk, qui y organise tous les deux ans un congrès d'Algèbre et de Théorie des Modèles, auxquels certains d'entre nous ont déjà participé. Il est situé dans la République de l'Altay, qui fait partie de la Fédération de Russie, dans une zone herbeuse, tiqueuse et forestière, assez loin des sommets des Monts Altaï (ce n'est pas à Erlagol qu'on verra des léopards, des ours et des yacks!), et des célèbres nécropoles excavées par les archéologues soviétiques du siècle passé. Le camp est à quelques 600 km au sud de Novosibirsk.

Cette région est massivement russifiée, et il faut être attentif pour y percevoir la présence de sa population pré-coloniale, les "Gens de l'Altaï", *Altay Kijiler* en turc, qui sont les premiers Turcs que l'on rencontre, quand on se dirige vers l'est, qui n'ont pas été touchés par l'Islam.

Si vous n'êtes pas un turcologue distingué, il faut que je vous précise que les Turcs apparaissent dans l'Histoire, quelque part au nord de la Grande Muraille de Chine, vers le 4° siècle de notre ère, et qu'ils se sont depuis déplacés vers l'ouest, en sautant par dessus les Mongols (Attila a été un initiateur précoce du mouvement). A vrai dire, certains d'entre eux se sont égarés vers le nord, en migrant en Yakoutie, l'endroit le plus froid du monde, et un petit groupe, les Dolgan, s'est même installé au bord de l'Océan Arctique. Tout cela veut dire qu'en se déplaçant vers l'est on va à la rencontre des Turcs.

En 1995, l'autocar de l'université s'est arrêté à Gorno Altaisk, la capitale de la république, où j'ai pu acheter des journaux, un livre de lecture pour enfant, et un dépliant touristique trilingue (turc, russe, anglais). Je n'ai pas pu renouveler l'exploit lors de mes visites suivantes, car on ne trouve pas de livres en turc à *Çamal (Tchamal)*, la petite ville voisine d'Erlagol, sauf à la bibliothèque municipale, dont la patronne est d'ailleurs une *Altay kiji*. Le turc de l'Altaï, comme beaucoup de langues dominées, n'apparaît guère que dans l'affichage administratif bilingue; il y a aussi en ville un petit musée consacré à la culture locale.

Les Gens de l'Altaï vous comprendront si vous vous adressez à eux dans un turc aussi central-asiatique qu'ils vous est possible, mais moins guttural que le qazaq. Attention, il faut éviter toutes les expressions polies d'origine arabe ou persane qui sont si communes chez les turcs musulmans! La prise de contact n'est pas *Salam alaykum*, mais *Jaksılar* (Bons souhaits!), le mot *yaqsı* signifiant "bon, bien" dans toutes les langues turques à l'exception du turc de Turquie. Je n'ai aucune idée de la façon dont on dit merci.

Naturellement, vos interlocuteurs seront très surpris de rencontrer un étranger à la région qui ignore complètement le russe, si c'est votre cas.

Une particularité linguistique qui vous amusera: les langues turques de Sibérie, si elles ont bien gardé l'ancien suffixe d'accompagnement *-lıq/-lik*, ont perdu le suffixe privatif *–sız/-siz*; dans l'Altaï, on dit bien sulu "avec eau", mais on ne dit pas *susız* "sans eau" comme les autres Turcs; à la place, on dit *suyı yoq* "son eau il n'y a pas" (ça ne vous rappelle pas un peu comment on dit ça en tibétain?).

Voici quelques photos de ce que vous pourrez observer quand la fin de la pandémie vous permettra de revoir Erlagol.

№1. En dessous du russe, *Kuba suyı*, Rivière de Kouba, au bord du camp.

№2 & 3. Un cavalier rencontré entre Erlagol et Tchamal.

№4. L'inévitable tente en feutre, où l'on offre du *qımız* (biàre de lait de jument) aux touristes.

№5. Le restaurant *Mürküt* (Aigle) à Tchamal.

№6. L'école moyenne.

№7. Le centre des impôts.

№8. Le conseil municipal.

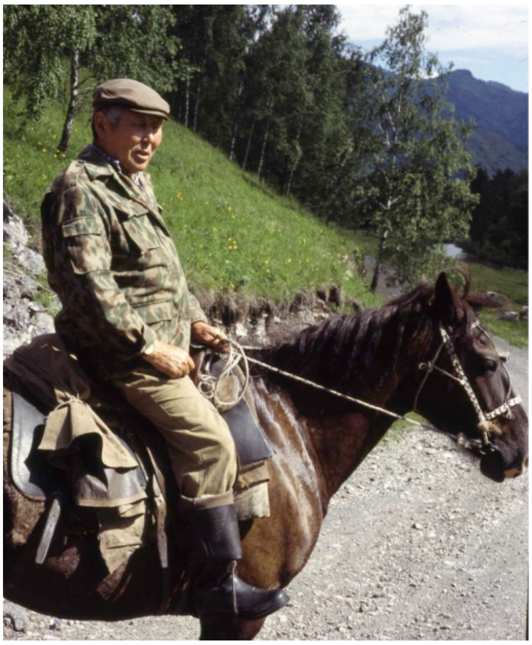
№9. Une plaque commémorative, comme on les adore en Union PostSoviétique; je ne suis pas très sûr de ma traduction.

№10. La gardienne du musée de Tchamal.

№11. A la différence des autres, cette personne n'est pas un *Altay kiji*, mais une autre sorte de turc: un ouzbek, né à Tachkent, photographié devant un bâtiment du camp d'Erlagol, en train de préparer sa communication.

№12. Journaux (*Altaydıŋ Çolmonı*, L'Etoile de l'Altaï) et livre de classe.
(Photos prises en 1995: №2, 3, 6, 7, 11; en 2019: №1, 4, 5, 8, 9, 10)

№1. *En dessous du russe, Kuba suyı, Rivière de Kouba, au bord du camp.*



№2 & 3. *Un cavalier rencontré entre Erlagol et Tchamal.*

№4. *L'inévitable tente en feutre, où l'on offre du qımız (biàre de lait de jument) aux touristes.*

№5. *Le restaurant Mürküt (Aigle) à Tchamal.*

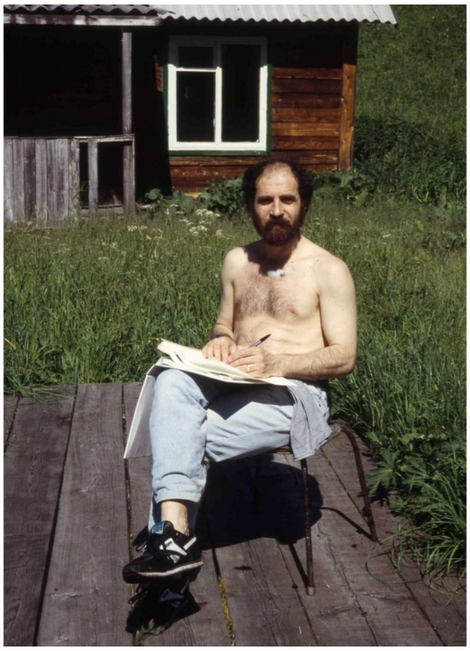
№6. *L'école moyenne. Çemal rayonnıŋ üredülzinıŋ bölügi. Çemaldıŋ orto üredülü şkolı. Division de l'enseignement de la région de Tchemal. Ecole d'enseignement moyen de Tchemal.*

№7. *Le centre des impôts. Rossya federatsyaniŋ kalan juur temiçizi; Çemal aymaktıŋ kalan juur inspektsyazı. Service des impôts nationaux de la Fédération de Russie; Inspection des impôts nationaux de la région de Tchemal.*

№8. *Le conseil municipal. Deputatar joby, Çamal aymaktıŋ. Rossya Federatsyazı, Altay Respublika, Çamal aymaktıŋ administratsyazı. Conseil des députés de la région de Tchamal. Fédération de Russie, République de l'Altaï, Administration de la région de Tchamal. Vous avez remarqué qu'entre 1995 et 2019 Çemal a été changé en Çamal, plus conforme à la phonétique turque.*

№9. *Mında 1985–2008 jıldarda adı-jolı jarlu jondık işçi le başkaraaçı, maymandardıŋ jayzaŋı la altay sööktördiŋ Aga-jayzaŋı Aleksandr Kindişeviç Bardin (00.08.1932–03.08.2008) jatkan. Ici, dans les années 1985–2008, le renommé travailleur social et leader, chef des Mayman et grand-chef des tribus de l'Altay, A.K.B. a vécu.*

№10. *La gardienne du musée de Tchamal.*



№11. *A la différence des autres, cette personne n'est pas un Altay kiji, mais une autre sorte de turc: un ouzbek, né à Tachkent, photographié devant un bâtiment du camp d'Erlagol, en train de préparer sa communication.*

№12. *Journaux (Altaydıŋ Çolmonı, L'Etoile de l'Altaï) et livre de classe. (Photos prises en 1995: №2, 3, 6, 7, 11; en 2019: №1, 4, 5, 8, 9, 10)*

People of Altay

In June, we shall not go to Erlagol.

Erlagol is a holiday camp belonging to the Technical University of Novosibirsk, which holds in it every two years a meeting of Algebra and Model Theory. It is located in the Altay Republic, which is a member of the Russian Federation, in a place abundant with high grasses, ticks and forests, at some distance of the top of the Altay Mountains which are famous for the graves excavated by the Sovietic archaelogists during the last century; the camp is about 600 km to the south of Novosibirsk.

This region is heavily russified, and some attention is needed to note the traces of its pre-colonial population, the "People of Altay", *Altay Kijiler* in Turkish, which are the first Turks that we meet, going eastward, which have not been touched by Islam.

Unless you are an eminent turkologist, I must remind you that the Turks appear in History around the fourth century of the Common Era, somewhere to the north of the Great Wall of China, and that since then they moved westward, jumping above the head of the Mongols. To say the truth, some of them lost their way to the North, in Yakutia (the coldess place in the World), and even a small group, the Dolgan, settled on the shore of the Arctic Ocean. All that to say that, when moving eastward, we go at the encounter of the Turks.

In 1995, the University bus made a stop at Gorno Altaisk, the headquarters of the Republic, where I managed to purchase some newpapers, a reading book for children and even a trilingual touristic tract, in Turkish, English and Russian. During my next visits, I was unable to find books in Turkish at Çamal (Tchamal), the small city in the vicinity of Erlagol, except at the public library. Altay Turkish, like many dominated languages, is discernible mainly in bilingual administrative posters. There is also a small museum at Tchamal, which is consecrated to the Altay culture.

Altay People will understand you if you speak to them in a variety of Turkish as Central-Asiatic as possible, but with less guttural sounds than Qazaq. You must care to avoid all the expressions of Arabic or Persian origin, which are so common among the Muslim Turks. Making contact is not by Salam alaykum, but by *Jaksılar* (Good wishes!), *yaqsı* meaning "good" in every turkish languages, except in the variety spoken in Turkey. I have no idea of how to say "Thank you!".

Naturally, they will be extremely surprised to meet a foreigner not knowing a word of Russian, if this is your case. Altay Turkish has an amusing peculiarity, that it shares with all the turkish languages of Siberia. It has preserved the matching suffix *-lıq/-lik*, but it has lost the privative suffix *–sız/-siz*; Altay kijiler say sulu (with water), but not *susız* (without water) like the other Turkish Peoples; instead they say *suyı yoq* (its water not exists). Don't this remind you Tibetan?

Here are some pictures of what you will observe when the end of the pandemia will allow you to see Erlagol again.

№1. Below the Russian, *Kuba suyı*, Kuba River, at the gate of the camp.

№2 & 3. An horseman met on the road between Erlagol and Tchamal.

№4. The unavoidable felt tent, where *qımız* (mare milk beer) is offered to the Stourists.

№5. *Mürküt* (Eagle) Restaurant, in Tchamal.

№6. Middle School.

№7. Tax Center.

№8. Region Council.

№9. A commemorative slab, of a kind so appreciated in Post-Soviet Union.

№10. Museum keeper in Tchamal.

№11. This person is not an *Altay kiji*, but another kind of Turk: an Uzbek, born in Tashkent.

№12. Three newspapers and a schoolbook.

(Shot in 1995: №2, 3, 6, 7, 11; in 2019: №1, 4, 5, 8, 9, 10)

Народ Алтая

В июне в Эрлагол не поедем.

Эрлагол — это база отдыха, принадлежащая Новосибирскому техническому университету, где каждые два года проводятся встречи по алгебре и теории моделей. Он расположен в Республике Алтай, которая входит в состав Российской Федерации, в месте, изобилующем высокой травой, клещами и лесами, на некотором удалении от вершин Горного Алтая, которые известны могилами, раскопанными советскими археологами в течение прошлого века; лагерь находится примерно в 600 км южнее Новосибирска.

Этот регион сильно русифицирован, и необходимо некоторое внимание, чтобы отметить следы его доколониального населения, "народа Алтая", *Altay Kijiler* на тюркском, первых тюрков, которых мы встречаем идущими на восток и не коснувшихся ислама.

Если вы не являетесь выдающимся тюркологом, я должен напомнить вам, что тюрки появляются в истории примерно в четвертом веке нашей эры, где-то к северу от Великой Китайской стены, и с тех пор они двинулись на запад, перепрыгивая через голову монголов. По правде говоря, некоторые из них заблудились на Севере, в Якутии (самое холодное место в мире), и даже небольшая группа долганов поселилась на берегу Северного Ледовитого океана. Все это говорит о том, что, двигаясь на восток, мы идем на встречу с тюрками.

В 1995 году университетский автобус сделал остановку в Горно-Алтайске, административном центре республики, где мне удалось приобрести несколько газет, книгу для чтения для детей и даже трехъязычную туристическую брошюру на тюркском, английском и русском языках. Во время моих следующих визитов мне не удалось найти книг на тюркском языке в Чемале, небольшом городке недалеко от Эрлагола, кроме как в публичной библиотеке. Алтайский тюркский, как и многие доминируемые языки, заметен в основном на двуязычных административных надписях. В Чемале также есть небольшой музей, посвященный алтайской культуре.

Алтайцы поймут вас, если вы будете говорить с ними на разнообразном тюркском языке, насколько это возможно, на центрально-азиатском, но с меньшим количеством гортанных звуков, чем у казахов. Вы должны избегать всех выражений арабского или персидского происхождения, которые так распространены среди тюрок-мусульман. Установление контакта осуществляется не *Саламом алейкумом*, а *Жаксыларом* (Добрые пожелания!), Жаксы означает "хороший" на всех тюркских языках, за исключением того, на котором говорят в Турции. Не знаю, как сказать "Спасибо!". Естественно, они будут крайне удивлены, если встретят иностранца, не знающего ни слова по-русски, как в нашем случае.

У алтайского тюркского есть забавная особенность, которую он разделяет со всеми тюркскими языками Сибири. Он сохранил сопровождающий суффикс -*лик*, но потерял частный суффикс –*сиз*; Алтайские люди говорят *сулу* (с водой), но не *сусиз* (без воды), как другие тюркские народы; вместо этого они говорят *суйи ёк* (воды нет). Разве это не напоминает вам тибетский? Вот несколько изображений того, что вы увидите, когда конец пандемии позволит вам снова увидеть Эрлагол.

№1. Ниже русской надписи, *Куба суйи*, река Куба, у ворот лагеря.

№2 и 3. На дороге между Эрлаголом и Чемалом встретился всадник.

№4. Традиционная юрта, где туристам предлагается *кумыс* (пиво из кобыльего молока).

№5. Ресторан *Mürküt* (Орёл) в Чемале.

№6. Средняя школа.

№7. Налоговая инспекция.

№8. Администрация Чемала.

№9. Памятная плита.

№10. Хранитель музея в Чемале.

№11. Этот человек не *Altay Kiji*, а другой вид тюрок: узбек, родившийся в Ташкенте.

№12. Три газеты и учебник.

(Снято в 1995 году: №2, 3, 6, 7, 11; в 2019 году: №1, 4, 5, 8, 9, 10)

ON RESIDUAL NILPOTENCE OF FREE-BY-CYCLIC GROUPS[1]

V. G. Bardakov

Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptyug avenue,
Novosibirsk, 630090, Russia
e-mail: bardakov@math.nsc.ru

O. V. Bryukhanov,

Novosibirsk State
Technicalv University
20 K. Marx ave, 64,
Novosibirsk, 630073, Russia
e-mail: bryuoleg@ngs.ru

M. V. Neschadim

Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Russia
e-mail: neshch@math.nsc.ru

1 Introduction

A group G is said to be a *residually nilpotent* if, for every non-identity element $x \in G$, there exists a normal subgroup N depending on x such that $x \notin N$ and the quotient group G/N is nilpotent (see, for example [18]). One of the first results on residually nilpotent groups belongs to Magnus who proved that a free group is residually nilpotent (a simple proof of this fact can be found in [14, Theorem 14.2]). Malcev [18] studied the conditions under which the free product of residually nilpotent groups is residually nilpotent. In particular, he established that the free product of nilpotent groups is residually nilpotent if and only if all these groups do not contain elements of infinite p-height for some prime p, or all these groups are groups without torsion. Recall that an element $g \in G$ is called an *element of infinite p-height*, if, given any two natural number i and j, there exist elements $x \in G$, $y \in \gamma_i(G)$ such that $x^{p^j} = gy$. From this result follows that the groups $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_{p^n} * \mathbb{Z}_{p^m}$ are residually nilpotent. On the other side, $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ is not residually nilpotent.

No general approaches are available by now even to solving the problem of residual nilpotency for one-relator groups: only partial results are available. Baumslag [9] studied in one special class of one-relator groups. Loginova

[1]The research is supported by Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2020-1479/1).

obtained in [16] a similar result for a larger class of groups. The paper [20] gives a characterization of residually nilpotent one-relator groups with non-trivial center. Mikhailov [24] constructed one-relator group with the lower central series of length ω^2. This answers a question of Baumslag. It is established in [22] that a central extension of one-relator groups is residually nilpotent if and only if so is the original group.

Malcev proved [19] (also see [21, Theorem 51.2.1]) that if G is a finitely generated subgroup of $\mathrm{GL}_n(F)$ where F is some field of characteristic 0, then G contains some subgroup of finite index which is residually p-finite for almost all prime p. In [4] a sufficient condition for the residual p-finiteness of finitely generated subgroups of $\mathrm{GL}_n(F)$ was established. As a corollary to this result was established the residual 2-finiteness of some link groups, including those of the Whitehead link and Borromean links. On the other side, there exists a 2-component 2-bridge link whose group is not residually nilpotent. Also in [4] it was proved that each link is a sublink of some link whose group is residually 2-finite. Residually nilpotence of groups of virtual knots is studied in [5]–[7]. Residually nilpotence of the fundamental groups of some 3-manifolds is studied in [11].

Linear properties of group extensions are studied in [3, 12]. Semi-direct product is a particular case of HNN-extension. Residually nilpotence of HNN-extensions is studied in [25] and in particular, for Baumslag—Soliter groups in [8, 26, 27].

Survey on residually nilpotent groups can be found in the book of Mikhailov—Passi [23].

The paper is organized as follows.

Section 2 collects some basic definitions: the lower central series, the lower p-series, root class. Also, we formulate some well known facts about commutator subgroups and their products, result of Gruenberg. We recall the result of Aschenbrenner and Friedl [1] on the residually nilpotence and residually p-nilpotence for groups of the form $\mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}, \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$.

In Section 3, we consider free-by-infinite cyclic group $G = F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$. Baumslag [10] proved that groups of this type are residually finite. The situation with residually nilpotence is more complicated. There exist finitely generated cyclic extensions of a free group which is not residually nilpotent. Moreover, Mikhailov [24], answering on a question of Baumslag, constructed a cyclic extension of the free 2-generated group which has the length of the lower central series equal to ω^2.

We define two families of groups:

$$\overline{G}_k = (F_n^{ab})^{\otimes k} \rtimes_{\overline{\varphi}_k} \mathbb{Z}$$

and

$$\widehat{G}_k = \gamma_i(F_n)/\gamma_{i+1}(F_n) \rtimes_{\widehat{\varphi}_i} \mathbb{Z},$$

$k = 1, 2, \ldots$, and prove that if $\overline{G}_k$ is residually nilpotent, then $\widehat{G}_k$ is residually nilpotent; if $\overline{G}_k$ is residually p-finite, then $\widehat{G}_k$ is residually p-finite.

We find conditions under which G has the short lower central series. In Proposition 3.3 we prove that $\gamma_2(G) = \gamma_\omega(G) = F_n$ if and only if the matrix $[\overline{\varphi}] - E$ lies in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. In particular, in this case, G is not residually nilpotent.

Further, we describe conditions under which G has the long lower central series and give a full prove of the following theorem (see Theorem 3.5): If G is not residually nilpotent and all groups $\overline{G}_k$, $k \geq 1$, are residually nilpotent, then the length of the lower central series of G is equal to ω^2.

This theorem was formulated in [24] without proof.

In Section 4, we study residually p-finiteness of group $G = F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$. The main result of this section is Theorem 4.3: If all groups $\widehat{G}_i, i \geq 1$, are residually p-finite, then G is residually p-finite.

As corollary of this theorem we get Corollary 4.4: Let $G = N_{n,c} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$, where $N_{n,c}$ be a free nilpotent group of rank n and class c. If all groups

$$\gamma_i(N_{n,c})/\gamma_{i+1}(N_{n,c}) \rtimes_{\widehat{\varphi}_i} \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i \leq c,$$

are residually p-finite, then G is residually p-finite. Here $\widehat{\varphi}_i$ is the automorphism of $\mathbb{Z}$-module $\gamma_i(N_{n,c})/\gamma_{i+1}(N_{n,c})$ that is induced by φ.

As was proved in [24], the residually nilpotence of $\overline{G}_k$, $k \geq 1$, does not imply the residually nilpotence of $G = F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$. Using Theorem 4.3 it is possible to prove that the residually p-finiteness of $\overline{G}_k$, $k \geq 1$, implies the residually p-finiteness of $G = F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$.

The following theorem (see Theorem 4.7) gives a simple way to prove the residually nilpotence of free-by-infinite cyclic groups. Let $G = F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathrm{Aut}(F_n)$, and $[\overline{\varphi}] \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. If all eigenvalues of $[\overline{\varphi}]$ are integers, then G is residually nilpotent.

Section 5 is dedicated to the groups of the form $G = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$. Using results of Sections 3 and 4 we prove a criteria of the residually nilpotence of G (see Theorem 5.1). Also, we prove in Theorem 5.2 that for the lower central series of $G = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathrm{Aut}(F_2)$, there exist only three possibilities:

a) $\gamma_\omega(G) = \gamma_2(G)$;

b) $\gamma_\omega(G) = 1$;

c) $\gamma_{\omega^2}(G) = 1$ and the length of the lower central series is equal to ω^2.

As we seen, not any group of the form $F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ is residually nilpotent. On the other side, Azarov [2] proved that any semi-direct products of a finitely generated residually p-finite group by a residually p-finite group is virtually residually p-finite and hence, contains residually nilpotent subgroups of finite index. From this result follows that any group of the form $F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ is virtually residually nilpotent. Also, we prove that $F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ contains residually nilpotent subgroup of index 2 or 4.

2 Preliminaries

The following definitions can be found in the paper of Malcev [17]. Let $\mathfrak{C}$ be some class of groups. A group G is said to be *residually* $\mathfrak{C}$*-group* or simply $\mathfrak{C}$*–residual*, if for any non-identity element $g \in G$ there exists a homomorphism φ of G to some group from $\mathfrak{C}$ such that $\varphi(g) \neq 1$. If $\mathfrak{C}$ is the class of all finite groups, then G is called *residually finite*. If $\mathfrak{C}$ is the class of finite p-groups, then G is said to be *residually p-finite*. If $\mathfrak{C}$ is the class of nilpotent groups, then G is said to be *residually nilpotent*. If $\mathfrak{C}$ is the class of torsion-free nilpotent groups, then G is said to be *torsion free residually nilpotent*. If $\mathfrak{C}$ is the class of nilpotent p–groups, then G is said to be *residually p-nilpotent*.

Let G be a group and let $x_1, x_2, \ldots$ be elements of G. A *simple commutator* $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ of weight $n \geq 1$ is defined inductively by setting

$$[x_1] = x_1, \ [x_1, x_2] = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2$$

and

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$$

for $n \geq 3$.

Let $A, B \subseteq G$ be two subsets of a group G, then by $[A, B]$ we shall denote the subgroup which is generated by all commutators $[a, b]$, $a \in A$, $b \in B$. Suppose that P and Q are subgroups of G. Denote by $[P, {}_k Q]$ the subgroup of G that is generated by left-normalized commutators $[p, q_1, \ldots, q_k]$, where $p \in P$, $q_1, \ldots, q_k \in Q$.

For a group G define its transfinite lower central series

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \ldots \geq \gamma_\omega(G) \geq \gamma_{\omega+1}(G) \geq \ldots,$$

where

$$\gamma_{\alpha+1}(G) = \langle [g_\alpha, g] \mid g_\alpha \in \gamma_\alpha(G), g \in G \rangle$$

and if α is a limit ordinal, then

$$\gamma_\alpha(G) = \bigcap_{\beta < \alpha} \gamma_\beta(G).$$

The group G is said to be *transfinitely nilpotent* if $\gamma_\alpha(G) = 1$ for some ordinal α, or simply *nilpotent* if α is a finite ordinal. In particular, G is residually nilpotent if and only if

$$\gamma_\omega(G) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_i(G) = 1.$$

The smallest ordinal α such that $\gamma_\alpha(G) = \gamma_{\alpha+1}(G)$ is called the *length of the lower central series* of G.

Also, we can use the following well known propositions (see, for example [15]).

Proposition 2.1. *Let G be a group, for $x \in G$ denote by $\overline{x}$ the image of x in the quotient $G^{ab} = G/\gamma_2(G)$. Then for any natural number n the map*

$$\theta : (\overline{x}_1 \otimes \overline{x}_2 \otimes \ldots \otimes \overline{x}_n) \mapsto [x_1, x_2, \ldots, x_n]\gamma_{n+1}(G)$$

induces a homomorphism

$$\underbrace{G^{ab} \otimes G^{ab} \otimes \ldots \otimes G^{ab}}_{n} = (G^{ab})^{\otimes n} \to \gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G).$$

Lemma 2.2 (Lemma 2.8.8 [15])**.** *If A, B are normal subgroups of some group G, then the following inclusion holds*

$$[A, \gamma_k(B)] \leq [A, \underbrace{B, \ldots, B}_{k}], \quad k \geq 1.$$

The next inclusions follow from this lemma.

$$[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \leq \gamma_{i+j}(G). \tag{1}$$

$$\gamma_i(\gamma_\omega(G)) \leq \gamma_{i\omega}(G). \tag{2}$$

We say that G is *virtually residually nilpotent*, if it contains a residually nilpotent subgroup of finite index.

The residual nilpotence of groups of the form $\mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$, are studied by Aschenbrenner and Friedl [1]. They have found a criteria series of residual nilpotence and residual p-finiteness for groups of this type. If $P_\varphi(x)$ is the characteristic polynomial of the matrix $[\varphi]$, $p_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $i = 1, \ldots, s$, are its non-reducible factors, then the following proposition holds.

Proposition 2.3.

a) $\mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ is residually nilpotent if and only if $p_i(1) \neq \pm 1$, $i = 1, \ldots, s$.

b) $\mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ *is residually* p*-finite if and only if* $p_i(1) \in p\mathbb{Z}$*,* $i = 1, \dots, s$*.*

Further we shall use the following claim.

Lemma 2.4. *If a group* $\mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ *is residually* p*-finite then for any non-trivial element* $g \in \mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ *there exists a nilpotent group* $G_p \rtimes_{\widehat{\varphi}} \mathbb{Z}$*, where* G_p *is a finite abelian* p*-group, which is a quotient of* $\mathbb{Z}^n$*,* $\widehat{\varphi} \in \mathrm{Aut}(G_p)$ *is induced by* φ *and the image of* g *under the homomorphism* $\mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z} \to G_p \rtimes_{\widehat{\varphi}} \mathbb{Z}$ *is non-trivial.*

Proof. By assumption, for any non-trivial element $g \in \mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ there exists a normal subgroup $N_g \lhd \mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ of finite p-index, such that $g \notin N_g$. It is clear, that N_g contains some $\gamma_{k+1}(\mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z})$. Let us consider the normal subgroup $\widetilde{N}_g = N_g \bigcap \mathbb{Z}^n$. It is evidently, that $g \notin \widetilde{N}_g$, $\widetilde{N}_g \geq \gamma_{k+1}(\mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z})$ and $|\widetilde{N}_g : \mathbb{Z}^n| = p^s$ for same $s \in \mathbb{N}$. Hence, the normal subgroup $\widetilde{N}_g$ is a kernel of the need homomorphism onto $G_p \rtimes_{\widehat{\varphi}} \mathbb{Z}$. Under this homomorphism the non-trivial element $g \in \mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ goes to a non-trivial element. Here $\widehat{\varphi}$ is the automorphism which is induced by φ since $\widetilde{N}_g$ is normal in $\mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$. $\square$

Lemma 2.5. *In the group* $\mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ *the following inclusions hold*

$$\mathbb{Z}^n \geq \gamma_k(\mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}) \geq P_\varphi^{k-1}(1)\mathbb{Z}^n, k \geq 2.$$

Proof. In $\mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ holds

$$\gamma_k(\mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}) = ([\varphi] - E)^{k-1}\mathbb{Z}^n \leq \mathbb{Z}^n, \quad k \geq 2.$$

The evident equalities

$$P_\varphi(x) = P_\varphi(1) + (x-1)f(x), f(x) \in \mathbb{Z}[x], \quad P_\varphi([\varphi]) = 0$$

imply

$$P_\varphi(1)\mathbb{Z}^n = ([\varphi] - E)f([\varphi])\mathbb{Z}^n \leq ([\varphi] - E)\mathbb{Z}^n.$$

Hence, we get

$$\mathbb{Z}^n \geq \gamma_k(\mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}) \geq P_\varphi^{k-1}(1)\mathbb{Z}^n, \quad k \geq 2.$$

$\square$

3 Free-by-cyclic groups

In this section, we consider the semi-direct product of the free group $F_n = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ and the infinite cyclic group $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$, where the conjugation by t is induced by automorphism $\varphi \in \mathrm{Aut}(F_n)$

$$F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n, t \,|\, t^{-1} x_i t = \varphi(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n \rangle.$$

The automorphism φ induces an automorphism of the abelianization $F_n^{ab} = F_n/\gamma_2(F_n)$ that is free $\mathbb{Z}$-module. We will denote this automorphism by $\overline{\varphi}$ and its matrix by $[\overline{\varphi}]$. Denote by $\overline{G}_k = (F_n^{ab})^{\otimes k} \rtimes_{\overline{\varphi}_k} \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, where the automorphism $\overline{\varphi}_k \in \mathrm{Aut}\left((F_n^{ab})^{\otimes k}\right)$ is induced by automorphism φ. Hence, $\overline{\varphi}_1 = \overline{\varphi}$.

Also, we will consider groups $\widehat{G}_k = \gamma_k(F_n)/\gamma_{k+1}(F_n) \rtimes_{\widehat{\varphi}_k} \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, where $\widehat{\varphi}_k$ is the automorphism of $\mathbb{Z}$-module $\gamma_k(F_n)/\gamma_{k+1}(F_n)$ that is induced by the automorphism φ.

For any $k \geq 1$, the pair of matrices $[\overline{\varphi}_k]$ and $[\widehat{\varphi}_k]$ have the following property.

Proposition 3.1. *Let $P_{\overline{\varphi}_k}(x)$ and $P_{\widehat{\varphi}_k}(x) \in \mathbb{Z}[x]$ be characteristic polynomials of $[\overline{\varphi}_k]$ and $[\widehat{\varphi}_k]$, respectively. Then the set of irreducible over $\mathbb{Z}$ factors of $P_{\widehat{\varphi}_k}(x)$ is a subset of the irreducible over $\mathbb{Z}$ factors of $P_{\overline{\varphi}_k}(x)$.*

Proof. Let us prove that for the automorphisms $\overline{\varphi}_k$ and $\widehat{\varphi}_k$ and a polynomial $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, the equality $f(\overline{\varphi}_k) = 0$ implies $f(\widehat{\varphi}_k) = 0$. It is enough to prove that for any vectors $\overline{w} \in (F_n^{ab})^{\otimes k}$ and $\widehat{w} \in \gamma_k(F_n)/\gamma_{k+1}(F_n)$ the equality $f(\overline{\varphi}_k)\overline{w} = 0$ implies the equality $f(\widehat{\varphi}_k)\widehat{w} = 0$.

By Proposition 2.1 there exists the homomorphism of $\mathbb{Z}$-modules:

$$\gamma : (F_n^{ab})^{\otimes k} \to \gamma_k(F_n)/\gamma_{k+1}(F_n),$$

that induced by map

$$\overline{g}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{g}_k \mapsto [g_1, \ldots, g_k]\gamma_{k+1}(F_n), \quad \overline{g}_i \in F_n^{ab}, \quad i = 1, \ldots k.$$

Let

$$W = \langle \overline{u} \otimes \overline{u} \otimes \overline{v}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{v}_{k-2} \,|\, \overline{u}, \overline{v}_i \in F_n^{ab} \rangle_{\mathbb{Z}} < (F_n^{ab})^{\otimes k}.$$

Then $W^\gamma = 0 \in \gamma_k(F_n)/\gamma_{k+1}(F_n)$ and $W^{\overline{\psi}} \leq W$, for any endomorphism $\overline{\psi} \in \mathrm{End}\left((F_n^{ab})^{\otimes k}\right)$ which is induced by the endomorphism $\psi \in \mathrm{End}(F_n)$.

If a non-trivial element $\widehat{w} \in \gamma_k(F_n)/\gamma_{k+1}(F_n)$ is a linear combination of the elementary commutators $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}]$, then some its preimage $\overline{w}$ under the action of γ is the similar linear combination of the elements $\overline{x}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \overline{x}_{i_k}$ of $(F_n^{ab})^{\otimes k}$, which does not lie in W. The endomorphisms

$f(\widehat{\varphi}_k)$ and $f(\overline{\varphi}_k)$, which are induced by the endomorphism $f(\varphi)$, send these linear combinations to linear combinations which are equal under γ i.e. $(f(\overline{\varphi}_k)\overline{w})^\gamma = f(\widehat{\varphi}_k)\overline{w}^\gamma$. More exactly, if $f(\widehat{\varphi}_k)\widehat{w} = \sum m_{i_1,\ldots,i_k}[x_{i_1},\ldots,x_{i_k}]$, then $f(\overline{\varphi}_k)\overline{w} \in \sum m_{i_1,\ldots,i_k}\overline{x}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \overline{x}_{i_k} + W$. By assumption, the endomorphism $f(\overline{\varphi}_k)$ sends any non-trivial vector of $(F_n^{ab})^{\otimes k}$ into 0 i.e. $\sum m_{i_1,\ldots,i_k}\overline{x}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \overline{x}_{i_k} \in W$, and so, the endomorphism $f(\widehat{\varphi}_k)$ sends any non-trivial element of the module $\gamma_k(F_n)/\gamma_{k+1}(F_n)$ into 0. Hence $f(\widehat{\varphi}_k) = 0$.

So if $P_{\overline{\varphi}_k}(x)$ is the characteristic polynomial of the matrix $[\overline{\varphi}_k]$, then $P_{\overline{\varphi}_k}(\widehat{\varphi}_k) = 0$. Hence, the minimal polynomial $p_{\widehat{\varphi}_k}(x)$ of $[\widehat{\varphi}_k]$ divides $P_{\overline{\varphi}_k}(x)$. It means, that any irreducible factor of the characteristic polynomial of $[\widehat{\varphi}_k]$ is an irreducible factor of the characteristic polynomial of $[\overline{\varphi}_k]$. □

Using Proposition 2.3, we get

Corollary 3.2. *For any $k \geq 1$ hold.*

a) If $\overline{G}_k$ is residually nilpotent then $\widehat{G}_k$ is residually nilpotent.

b) If $\overline{G}_k$ is residually p-finite then $\widehat{G}_k$ is residually p-finite.

3.1 Non-residually nilpotent groups

In [?] was proved that if $G = F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ and the matrix $[\overline{\varphi}] - E$ lies in $GL_n(\mathbb{Z})$, then $\gamma_2(G) = \gamma_3(G)$ and

$$\gamma_\omega(G) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_i(G) = F_n.$$

In particular, G is not residually nilpotent.

The next proposition generalizes this result.

Proposition 3.3. *Let $G = F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ and $\overline{G} = F_n^{ab} \rtimes_{\overline{\varphi}} \mathbb{Z}$. The following statements are equivalent*

a) $\gamma_\omega(G) = F_n$.

b) $\gamma_\omega(\overline{G}) = F_n^{ab}$.

c) The matrix $[\overline{\varphi}] - E$ lies in $GL_n(\mathbb{Z})$ that is equivalent $\Delta_{\langle t\rangle} F_n^{ab} = F_n^{ab}$.

Proof. a) ⇒ c). Suppose that $\gamma_\omega(G) = F_n$, then $\gamma_\omega(\overline{G}) = F_n^{ab}$. Since

$$F_n^{ab} \geq \gamma_2(\overline{G}) \geq \cdots \geq \gamma_\omega(\overline{G}),$$

we get

$$F_n^{ab} = \gamma_2(\overline{G}) = \cdots = \gamma_\omega(\overline{G}).$$

Since in $\overline{G}$ holds

$$([\overline{\varphi}] - E)F_n^{ab} = \gamma_2(\overline{G}),$$

we have $[\overline{\varphi}] - E \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

c) $\Rightarrow$ a) Let $f \in F_n$. The map $f \mapsto [f, t]$, induces on the free $\mathbb{Z}$-module F_n^{ab} the linear transformation $[\overline{\varphi}] - E$, which is an automorphism of $\mathbb{Z}$-module. So, there exist elements $x_1^{k_{1i}} \cdots x_n^{k_{ni}}$, $i = 1, \ldots, n$, such that $[x_1^{k_{1i}} \cdots x_n^{k_{ni}}, t] = x_i w_i$, where $w_i \in \gamma_2(F_n)$. Hence, $F_n \leq \gamma_2(G)$ and since $G/F_n = \mathbb{Z}$ is an abelian group, we get $F_n = \gamma_2(G)$. Using induction one can see that $x_1, \ldots, x_n \in \gamma_s(G), s \geq 2$, i.e. $F_n \leq \gamma_\omega(G)$. Hence, we have the inclusion

$$F_n \leq \gamma_\omega(G) \leq \gamma_2(G) = F_n,$$

from which follows the needed equality $F_n = \gamma_\omega(G)$.

c) $\Leftrightarrow$ b) Follows from the equality

$$([\overline{\varphi}] - E)^s F_n^{ab} = \gamma_{s+1}(\overline{G}), s \geq 1.$$

□

3.2 Groups with long lower central series

Mikhailov [24] constructed a group with one defining relation that has the lower central series of length ω^2.

Example 3.4 ([24])**.** The group $G_M = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$, where

$$\varphi : \begin{cases} a \to b, \\ b \to ab^3. \end{cases}$$

has the lower central series of length ω^2. At the same time, $\overline{G} = F_2^{ab} \rtimes_{\overline{\varphi}} \mathbb{Z}$ is residually nilpotent.

In [24] for groups of the form $F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ was formulated without prove the following theorem.

Theorem 3.5 ([24])**.** *Let $G = F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$. If all groups $\overline{G}_k = (F_n^{ab})^{\otimes k} \rtimes_{\overline{\varphi}_k} \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, are residually nilpotent, then $\gamma_{\omega^2}(G) = 1$. Wherein if G is not residually nilpotent then the length of its lower central series is equal to ω^2.*

We give the full proof of this theorem. To do it let us prove the following claim.

Lemma 3.6. *If all groups* $\widehat{G}_i = \gamma_i(F_n)/\gamma_{i+1}(F_n) \rtimes_{\widehat{\varphi}_i} \mathbb{Z}$ *are residually nilpotent then* $\gamma_{\omega^2}(G) = 1$. *Wherein if* G *is not residually nilpotent, then the length of its lower central series is equal to* ω^2.

Proof. It is well known that any quotient $\gamma_i(F_n)/\gamma_{i+1}(F_n)$, $i \geq 1$, is a free $\mathbb{Z}$-module of finite rank. If we are considering an extension $\mathbb{Z}^k \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ for some $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^k)$, then

$$(\varphi - id)^i \mathbb{Z}^k = \gamma_{i+1}(\mathbb{Z}^k \rtimes_\varphi \mathbb{Z}), \quad i \geq 1.$$

Hence, by the assumption

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} (\widehat{\varphi}_i - id)^m \gamma_i(F_n)/\gamma_{i+1}(F_n) = 0, \quad i \geq 1.$$

So the following inclusion holds

$$\gamma_{i\omega}(F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}) \leq \gamma_{i+1}(F_n), \quad i \geq 1.$$

Hence $\gamma_{\omega^2}(G) = 1$.

Further, if $\gamma_\omega(G) \neq 1$ then it is a free non-abelian group, which is normal in F_n. So $\gamma_i(\gamma_\omega(G)) \neq 1$, for $i \geq 1$. On the other side, (2) implies $\gamma_i(\gamma_\omega(G)) \leq \gamma_{i\omega}(G), i \geq 1$. Using the fact that $\gamma_i(\gamma_\omega(G))$ is non-trivial for all $i \geq 1$, we get that the length of the lower central series of G is equal to ω^2. □

Let us prove Theorem 3.5.

Proof. Corollary 3.2 implies that from the residual nilpotence of groups $\overline{G}_k$, $k \geq 1$, follows the residual nilpotence of groups $\widehat{G}_k$, $k \geq 1$. By Lemma 3.6 $\gamma_{\omega^2}(G) = 1$, and if G is not residually nilpotent, then the length of its lower central series is equal to ω^2. This completes the proof of Theorem 3.5. □

4 Residual p-finiteness of groups $F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$

In this section, we give some sufficient conditions under which $G = F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ is residually p-finite.

We shall use the following statements.

Lemma 4.1. *Let* G *be* l*-step nilpotent group. If* $[G,G]^r = 1$ *for some natural* r, *then* $[G^{r^{l-1}}, G] = 1$.

Proof. If $l = 1$, then G is abelian and $[G, G] = 1$.

Let $\gamma_{l+1}(G) = 1$, by induction assumption $[G^{r^{l-2}}, G] \in \gamma_l(G)$, then from the commutator identity

$$[ab, c] = [a, c][a, c, b][b, c]$$

follows

$$[G^{r^{l-1}}, G] = [(G^{r^{l-2}})^r, G] = [G^{r^{l-2}}, G]^r = 1.$$

□

Lemma 4.2. *Let $M, N \leq \mathbb{Z}^d$ be submodules of finite p-indexes, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d$ be some basis of N. If all non-trivial sums of the form $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i \mathbf{v}_i$, where $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, do not lie in M, then $M < N$.*

Proof. Since M and N are submodules of p-indexes, there is a natural number s such that $p^s N < M$. Moreover, M and N have consistent bases $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_d \in M$ and $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_d \in N$ such that

$$p^{r_i} \mathbf{m}_i = p^s \mathbf{n}_i,$$

where $i = 1, \dots, d$, $0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_d$. Submodule N contains all $\mathbf{m}_i$ for which $r_i \leq s$, since $\mathbf{m}_i = p^{s-r_i} \mathbf{n}_i$. If $r_i > s$, then $p^{r_i - s} \mathbf{m}_i = \mathbf{n}_i \in M$.

By assumption any non-trivial sum of the form $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i \mathbf{v}_i$, where $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ does not lie in M. Hence, there is an epimorphism of the abelian group $(N+M)/M$ to the elementary abelian group $\mathbb{Z}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p$ that is the direct sum of d summands. So, the rank of the quotient $(N+M)/M \leq \mathbb{Z}^d/M$ is equal to d. Hence, the case $r_i > s$, i.e. $p^{r_i - s} \mathbf{m}_i = \mathbf{n}_i \in M$ is not possible, since in this case the rank of $(N+M)/M$ less than d. Hence, we get inclusion $M < N$. □

Now we are ready to formulate the main result of the present section.

Theorem 4.3. *Let $G = F_n \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$. If all groups $\widehat{G}_i = \gamma_i(F_n)/\gamma_{i+1}(F_n) \rtimes_{\widehat{\varphi}_i} \mathbb{Z}, i \geq 1$, are residually p-finite, then G is residually p-finite.*

Proof. Let gt^m be some element of G, where $g \in F_n$ is non-trivial. Let us construct a finite p-group which is a homomorphic image of G and the image of gt^m is non-trivial.

Since F_n is residually p-finite for any prime p, it contains a normal subgroup of finite p-index, which does not contains g. This subgroup contains a characteristic (verbal) subgroup P such that the quotient $\mathbf{P} = F_n/P$ is also finite p-group ([14, Exercise 15.2.3]). Then $\mathbf{P} \rtimes_{\widetilde{\varphi}} \mathbb{Z}$ is the quotient of G by P. Here $\widetilde{\varphi}$ is the automorphism of the quotient $\mathbf{P}$

which is induced by φ. Let us show that $\mathbf{P} \rtimes_{\widetilde{\varphi}} \mathbb{Z}$ is a nilpotent group. Since $\gamma_2(\mathbf{P} \rtimes_{\widetilde{\varphi}} \mathbb{Z}) \leq \mathbf{P}$ and $\mathbf{P}$ is nilpotent, it is enough to prove that $[\mathbf{P}, t^{n_1}, \ldots, t^{n_r}] = 1$ for some fixed r.

Find a minimal s such that $\gamma_{s+1}(F_n) \leq P < F_n$. For $1 \leq i \leq s$ put $P_i = P \cap \gamma_i(F_n)$. Then $\mathbf{P}_i = P_i/P_{i+1}$ is a submodule of finite p-index of the free $\mathbb{Z}$-module $\gamma_i(F_n)/\gamma_{i+1}(F_n)$, and hence, is a free submodule of the same finite rank. For $g_i \in \gamma_i(F_n)\backslash P$ denote by $\overline{g}_i$ its image in the quotient $\gamma_i(F_n)/\gamma_{i+1}(F_n)$.

By assumption all groups $\widehat{G}_i$ are residually p-finite. By Lemma 2.4 they are residually nilpotent groups of the form $G_p \rtimes_{\widehat{\varphi}} \mathbb{Z}$, where G_p is a finite abelian p-group. Hence, in any $\mathbb{Z}$-module $\gamma_i(F_n)/\gamma_{i+1}(F_n)$ there exists a submodule $\overline{M}_i$ of finite p-index, which does not contains non-trivial linear combinations of generators of $\mathbf{P}_i$ with coefficients from the set $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. By Lemma 4.2 we have inclusion $\overline{M}_i < \mathbf{P}_i$. Since the quotients $G_p \rtimes_{\widehat{\varphi}} \mathbb{Z}$ of groups $\gamma_i(F_n)/\gamma_{i+1}(F_n) \rtimes_{\widehat{\varphi}_i} \mathbb{Z}$ are nilpotent, we get that for any $\overline{g}_i$, the commutator $[\overline{g}_i, t^{n_1}, \ldots, t^{n_{r_i}}] \in \overline{M}_i < \mathbf{P}_i$ for some fixed r_i. Hence,

$$[g_i, t^{n_1}, \ldots, t^{n_{r_i}}] \in P_i\gamma_{i+1}(F_n) \leq P\gamma_{i+1}(F_n),$$

for any $g_i \in \gamma_i(F_n)\backslash P$, and fixed r_i.

Further, if $[g_i, t^{n_1}, \ldots, t^{n_{r_i}}] = pg_{i+1}$, where $p \in P$, then from the commutator identity

$$[ab, c] = [a, c][a, c, b][b, c]$$

and the fact that P is a characteristic subgroup, we get

$$[pg_{i+1}, t^{n_1}, \ldots, t^{n_r}] \in P[g_{i+1}, t^{n_1}, \ldots, t^{n_r}].$$

Since $[g_{i+1}, t^{n_1}, \ldots, t^{n_{r_{i+1}}}] \in P\gamma_{i+2}(F_n)$, we have

$$[pg_{i+1}, t^{n_1}, \ldots, t^{n_{r_{i+1}}}] \in P\gamma_{i+2}(F_n).$$

By induction we get that for any element $g \in F_n\backslash P$ the commutator $[g, t^{n_1}, \ldots, t^{n_r}]$, where $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_s$ lies in $P\gamma_{s+1}(F_n) = P \leqslant F_n$. It means that $[\mathbf{P}, t^{n_1}, \ldots, t^{n_r}] = 1$, i.e. $\mathbf{P} \rtimes_{\widetilde{\varphi}} \mathbb{Z}$ is a nilpotent group.

Further, since p-group $\mathbf{P}$ is finite, we can take a minimal natural number k_0 such that $\mathbf{P}^{p^{k_0}} = 1$. Moreover, $\mathbf{P}$ contains the commutator subgroup of $\mathbf{P} \rtimes_{\widetilde{\varphi}} \mathbb{Z}$. By Lemma 4.1, using identity $[t, \mathbf{P}]^{p^{k_0}} = 1$ we get the identity $[t^{p^{k_0(l-1)}}, \mathbf{P}] = 1$, where l is the nilpotency class of $\mathbf{P} \rtimes_{\widetilde{\varphi}} \mathbb{Z}$. Hence,

$$\mathbf{P} \rtimes_{\widetilde{\varphi}} \mathbb{Z} = \left(\mathbf{P} \rtimes_{\widetilde{\varphi}} \mathbb{Z}_{p^{k_0(l-1)}}\right) \times \mathbb{Z}$$

and there exists a homomorphism of $\mathbf{P} \rtimes_{\widetilde{\varphi}} \mathbb{Z}$ to a finite p-group $\mathbf{P} \rtimes_{\widetilde{\varphi}} \mathbb{Z}_{p^k}$, where $k \geq k_0(l-1)$.

Finally, for any non-trivial $g \in F_n$ we constructed a homomorphism of G to a finite p-group $\mathbf{P} \rtimes_{\widetilde{\varphi}} \mathbb{Z}_{p^k}$ such that the image of g is non-trivial. It is evident that the images of all elements gt^m for all m are non-trivial. On the other side, for any element of the form $t^m, m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ there exists a homomorphism of G to a finite p-group $\mathbb{Z}_{p^k}, p^k > m$, such that the image of t^m is non-trivial. Hence, we proved that G is residually p-finite. □

As corollary we get

Corollary 4.4. *Let $N_{n,c}$ be a free nilpotent group of rank n and class c, $G = N_{n,c} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$. If all groups*

$$\gamma_i(N_{n,c})/\gamma_{i+1}(N_{n,c}) \rtimes_{\widehat{\varphi}_i} \mathbb{Z},\ 1 \leq i \leq c,$$

are residually p-finite, then G is residually p-finite. Here $\widehat{\varphi}_i$ is the automorphism of $\mathbb{Z}$-module $\gamma_i(N_{n,c})/\gamma_{i+1}(N_{n,c})$ that is induced by φ.

As was proved in [24] the residually nilpotence of $\overline{G}_k$, $k \geq 1$ does not imply the residually nilpotence of $G = F_n \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$. Using Theorem 4.3 it is possible to prove that the residually p-finiteness of $\overline{G}_k$, $k \geq 1$, implies the residually p-finiteness of $G = F_n \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$.

Theorem 4.5. *Let $G = F_n \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$. If all groups $\overline{G}_k = (F_n^{ab})^{\otimes k} \rtimes_{\overline{\varphi}_k} \mathbb{Z}, k \geq 1$, are residually p-finite, then G is residually p-finite. In particular, the length of the lower central series of G is equal to ω.*

Proof. Corollary 3.2 implies that from the residual p-finiteness of groups $\overline{G}_k$, $k \geq 1$, follows the residual p-finiteness of all groups $\widehat{G}_k = \gamma_k(F_n)/\gamma_{k+1}(F_n) \rtimes_{\widehat{\varphi}_k} \mathbb{Z}$, $k \geq 1$. By Theorem 4.3 the group G is residually p-finite. In particular, the length of its lower central series is equal to ω. □

The same way we get the next statement.

Corollary 4.6. *Let $N_{n,c}$ be a free nilpotent group of rank n and class c, $G = N_{n,c} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$, $N_{n,c}^{ab} = N_{n,c}/\gamma_2(N_{n,c})$. If all groups*

$$(N_{n,c}^{ab})^{\otimes k} \rtimes_{\overline{\varphi}_k} \mathbb{Z}, \quad 1 \leq k \leq c,$$

are residually p-finite, then G is residually p-finite. Here $\overline{\varphi}_k$ is the automorphism of $\mathbb{Z}$-module $(N_{n,c}^{ab})^{\otimes k}$ that is induced by φ.

The following theorem gives a simple way to prove the residually nilpotence.

Theorem 4.7. *Let $G = F_n \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathrm{Aut}(F_n)$ and $[\overline{\varphi}] \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. If all eigenvalues of $[\overline{\varphi}]$ are integers then G is residually nilpotent. Wherein,* *a) if all the eigenvalues are equal to* 1*, then G is residually p-finite for any prime p;*

b) if there is at least one eigenvalue equal to -1*, then G is residually* 2*-finite.*

Proof. a) By assumption, the characteristic polynomial of the automorphism $\overline{\varphi}$ is $P_{\overline{\varphi}}(x) = (x-1)^n$. Since $[\overline{\varphi}] \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, then $[\overline{\varphi}]$ is conjugated to some unitriangular matrix $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Hence, the tensor product $[\overline{\varphi}_k] = [\overline{\varphi}]\otimes\cdots\otimes[\overline{\varphi}]$ is conjugated to the unitriangular matrix $U\otimes\cdots\otimes U \in \mathrm{GL}_{n^k}(\mathbb{Z})$. Hence, $\overline{\varphi}_k \in \mathrm{Aut}\left((F_n^{ab})^{\otimes k}\right)$ has the characteristic polynomial $P_{\overline{\varphi}_k}(x) = (x-1)^{n^k}$, with one irreducible factor $p_1(x) = x-1$. Since $p_1(1) = 0 \in p\mathbb{Z}$ for any prime p any group $\overline{G}_k,\ k \geq 1$, is residually p-finite by Proposition 2.3. By Theorem 4.5 G is residually p-finite for any p.

b) By assumption the characteristic polynomial of the automorphism $\overline{\varphi}$ is

$$P_{\overline{\varphi}}(x) = (x-1)^{m_1}(x+1)^{m_2}, \quad m_1 + m_2 = n.$$

The matrix $[\overline{\varphi}] \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ is conjugated to some triangular matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ in which m_1 elements on the diagonal are equal to 1 and m_2 elements on the diagonal are equal to -1. Hence, the tensor product $[\overline{\varphi}_k] = [\overline{\varphi}] \otimes \cdots \otimes [\overline{\varphi}]$ is conjugated to the triangular matrix $T \otimes \cdots \otimes T \in \mathrm{GL}_{n^k}(\mathbb{Z})$ with diagonal elements 1 and -1. Hence, the characteristic polynomial of $\overline{\varphi}_k$, is $P_{\overline{\varphi}_k}(x) = (x-1)^{m_{1k}}(x+1)^{m_{2k}}$, where $m_{1k}m_{2k} \neq 0$ and $m_{1k} + m_{2k} = n^k$. This characteristic polynomial has two irreducible factors $p_1(x) = x-1$ and $p_2(x) = x+1$. Since $p_1(1) = 0$ and $p_2(1) = 2$, then $p_1(1), p_2(1) \in 2\mathbb{Z}$. By Proposition 2.3 any group $\overline{G}_k,\ k \geq 1$, is residually 2-finite. Theorem 4.5 implies that G is residually 2-finite. □

5 Groups $F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$

In this section we are considering groups $G = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ that are semi-direct product of free group $F_2 = \langle x, y \rangle$ of rank 2 and the infinite cyclic group $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$:

$$G = \left\langle\, x, y, t \,|\, t^{-1}xt = \varphi(x),\ t^{-1}yt = \varphi(y) \right\rangle,$$

where φ is an automorphism of F_2. The automorphism φ induces the automorphism $\overline{\varphi}$ of the abelianization $F_2^{ab} = F_2/\gamma_2(F_2)$. In the present section, using results of Sections 3 and 4 we prove the following criteria of the residual nilpotence.

Theorem 5.1. *The group $G = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ is residually nilpotent if and only if* $\det[\overline{\varphi}] = 1$ *and* $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] \notin \{1, 3\}$*, or* $\det[\overline{\varphi}] = -1$ *and* $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] \equiv 0 (\mathrm{mod} 2)$*. At the same time, if* $\det[\overline{\varphi}] = 1$*, then G is residually p-finite for any prime divisor of* $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] - 2$*, and if* $\det[\overline{\varphi}] = -1$*, then G is residually 2-finite.*

Also, for any group of this type we find the length of its lower central series.

Theorem 5.2. *For the lower central series of $G = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ there exist only three possibilities:*

a) $\gamma_\omega(G) = \gamma_2(G)$*;*

b) $\gamma_\omega(G) = 1$*;*

c) $\gamma_{\omega^2}(G) = 1$ *and the length of the lower central series is equal to ω^2.*

Problem 1. *Is this theorem true if we take F_n, $n > 2$, instead F_2?*

5.1 Groups with the lower central series of length 2

At first, let us describe groups for which the length of the lower central series is equal 2.

Proposition 5.3. *For the group $G = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ holds $\gamma_\omega(G) = F_2$ if and only if* $\det[\overline{\varphi}] = 1$*,* $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] \in \{1, 3\}$*, or* $\det[\overline{\varphi}] = -1$*,* $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] = \pm 1$*.*

Proof. By Proposition 3.3 the equality $\gamma_\omega(G) = F_2$ is equivalent to the condition $[\overline{\varphi}] - E \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. This is equivalent to the fact that the characteristic polynomial $P_{[\overline{\varphi}]}(x) = x^2 - \mathrm{tr}[\overline{\varphi}]x + \det[\overline{\varphi}]$ for $x = 1$ is equal to ± 1. Hence, if $\det[\overline{\varphi}] = 1$, then $1 - \mathrm{tr}[\overline{\varphi}] + 1 = \pm 1$; if $\det[\overline{\varphi}] = -1$, then $1 - \mathrm{tr}[\overline{\varphi}] - 1 = \pm 1$. These give the need values. If $\det[\overline{\varphi}] = 1$, then $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] \in \{1, 3\}$. If $\det[\overline{\varphi}] = -1$, then $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] = \pm 1$. □

From this Proposition it follows that the braid group B_3 has the short lower central series. This fact was proved by Gorin and Lin [13].

Example 5.4 ([13])**.** The braid group on 3 strands $B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \rangle$ is the semi-direct product

$$B_3 = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z},$$

where $F_2 = \left\langle u = \sigma_2\sigma_1^{-1}, v = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-2} \right\rangle = B_3'$ and $\mathbb{Z} = \langle \sigma_1 \rangle$ acts on F_2 by the formulas

$$\varphi(u) = u^{\sigma_1} = uv^{-1}, \quad \varphi(v) = v^{\sigma_1} = u.$$

We see that $\det[\overline{\varphi}] = 1$, $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] = 1$ and by Proposition 5.3 $\gamma_2 B_3 = \gamma_\omega B_3 = F_2$.

5.2 Groups with the lower central series of length ω

Note that if $G = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ is residually nilpotent, then $\gamma_\omega(G) = 1$. On the other hand, G contains F_2 and so $\gamma_i(G)$ is non-trivial for all $i \geq 1$, hence, in this case G has the length of the lower central series equal to ω.

The eigenvalues of any matrix in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ either both lie in $\mathbb{Z}$ and are equal to ± 1, or both do not lie in $\mathbb{Z}$.

Hence, the set of all groups of the form $F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ is the disjoint union of two subsets. For groups from the first subset Theorem 4.7 implies

Proposition 5.5. *Let $G = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ and $[\overline{\varphi}]$ has only integer eigenvalues. Then G is residually nilpotent and in this case*

a) if both eigenvalues are equal to 1 then G is residually p-finite for any prime p;

b) if at least one eigenvalue is equal to -1, then G is residually 2-finite.

For groups from the second subset (without integer eigenvalues) holds

Proposition 5.6. *Let $G = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ the determinant $\det[\overline{\varphi}] = 1$ and the eigenvalues of $[\overline{\varphi}]$ are not integers. If $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] \notin \{1, 3\}$, then G is residually p-finite for any prime p which divides $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] - 2$.*

Proof. The characteristic polynomial of $[\overline{\varphi}]$ is the irreducible polynomial $f(x) = x^2 - \mathrm{tr}[\overline{\varphi}]x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$. By the assumption $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] - 2 = -f(1) = pl$ for some integer l and so

$$f(x) = x^2 - (2 + pl)x + 1 \in \mathbb{Z}[x].$$

The matrix $[\overline{\varphi}]$ has two different eigenvalues $r, r^{-1} \in \mathbb{C}$ and is conjugated to the diagonal matrix $\mathrm{diag}(r, r^{-1})$, where $r + r^{-1} = 2 + pl \in 2 + p\mathbb{Z}$. Since $2 + pl = \mathrm{tr}[\overline{\varphi}] \notin \{1, 3\}$, then $p \notin \{\pm 1\}$.

From the equality

$$(r^{n-1} + r^{-(n-1)})(r + r^{-1}) = r^n + r^{-n} + r^{n-2} + r^{-(n-2)} \in 4 + p\mathbb{Z}$$

follows that all pairs $r^n, r^{-n}, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, are roots of irreducible over $\mathbb{Z}$ polynomials of the form

$$f(x) = x^2 - (2 + pl)x + 1, \quad l \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Using induction by $k \geq 1$ it is not difficult to prove that $[\overline{\varphi}_k] = [\overline{\varphi}]^{\otimes k}$ is conjugated to the diagonal matrix $(\mathrm{diag}(r, r^{-1}))^{\otimes k}$ in which the diagonal elements $r^n, r^{-n}, n \in \mathbb{Z}$, arrive in pairs. Hence, all irreducible factors of the characteristic polynomial of this matrix have the form

$$f(x) = x^2 - (2 + pl)x + 1, \quad l \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \text{ or } f(x) = x - 1.$$

So, $f(1) \in p\mathbb{Z}$. By Proposition 2.3 all groups $(F^{ab})^{\otimes k} \rtimes_{\overline{\varphi}_k} \mathbb{Z}$ are residually p-finite for any prime p that is a divisor of $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] - 2$. Theorem 4.5 implies that G is residually p-finite for the same prime p. $\square$

Corollary 5.7. *If the matrix $[\overline{\varphi}]$ lies in the congruence-subgroup $\Gamma_2(m) \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, then $F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ is residually p-finite for any prime p which divides m.*

From the previous results follows criterion of residually nilpotence of $G = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ with $\det[\overline{\varphi}] = 1$.

Theorem 5.8. *Suppose that for the group $G = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ the determinant $\det[\overline{\varphi}] = 1$. Then G is residually nilpotent if and only if $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] \notin \{1, 3\}$.*

Proof. As we noted above, both eigenvalues of $[\overline{\varphi}] \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ either lie in $\mathbb{Z}$ and are equal to ± 1, or do not lie in $\mathbb{Z}$.

Let $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] \notin \{1, 3\}$. If the eigenvalues of $[\overline{\varphi}]$ are integers, then by Lemma 5.5 the group G is residually nilpotent. If the eigenvalues of $[\overline{\varphi}]$ are not integers, then by Lemma 5.6 the group G is residually nilpotent.

If $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] \in \{1, 3\}$, then the need assertion follows from Lemma 5.3. $\square$

For the studying of the case $\det[\overline{\varphi}] = -1$, recall the definition. A group is said to be *virtually residually nilpotent* if it contains a subgroup of finite index which is residually nilpotent. We know that not any group of the form $F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ is residually nilpotent. On the other side, Azarov [2] proved that any semi-direct product of a finitely generated residually p-finite group by a residually p-finite group is virtually residually p-finite and hence, contains residually nilpotent subgroups of finite index. From this result follows

Proposition 5.9. *Any group $F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ is virtually residually nilpotent.*

Further we find a subgroup of finite index in $F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ which is residually nilpotent.

Lemma 5.10. *The group $G = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ contains a residually nilpotent subgroup of index 2 that is isomorphic to $F_2 \rtimes_{\varphi^2} \mathbb{Z}$ in all cases except $\det[\overline{\varphi}] = -1$, $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] = \pm 1$. In the cases $\det[\overline{\varphi}] = -1$, $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] = \pm 1$ it contains a residually nilpotent subgroup of index 4 that is isomorphic to $F_2 \rtimes_{\varphi^4} \mathbb{Z}$.*

Proof. It is well known that any matrix $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ satisfies to the characteristic equation

$$x^2 - \mathrm{tr}M \cdot x + \mathrm{det}M = 0.$$

So, $M^2 = (\mathrm{tr}M)M \pm E$ and $\mathrm{tr}(M^2) = (\mathrm{tr}M)^2 - 2$ for $\mathrm{det}M = 1$, and $\mathrm{tr}(M^2) = (\mathrm{tr}M)^2 + 2$ for $\mathrm{det}M = -1$.

In our group

$$G = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z} = \langle x, y, t \,|\, t^{-1}xt = \varphi(x), \quad t^{-1}yt = \varphi(y)\rangle,$$

the subgroup that is generated by elements x, y, t^2 has index 2 and is isomorphic to $F_2 \rtimes_{\varphi^2} \mathbb{Z}$. If $\det[\overline{\varphi}] \neq -1$ or $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] \neq \pm 1$, then $\mathrm{tr}([\overline{\varphi}]^2) = (\mathrm{tr}[\overline{\varphi}])^2 \pm 2 \notin \{1, 3\}$. So, by Theorem 5.8 the group $F_2 \rtimes_{\varphi^2} \mathbb{Z}$ is residually nilpotent.

In the case $\det[\overline{\varphi}] = -1$, $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] = \pm 1$, the subgroup that is generated by x, y, t^4 has index 4, and is isomorphic to $F_2 \rtimes_{\varphi^4} \mathbb{Z}$. Since $[\overline{\varphi^4}] = [\overline{\varphi}]^4$ and $\mathrm{tr}([\overline{\varphi}]^2) = (\mathrm{tr}[\overline{\varphi}])^2 + 2 = 3$, in this case $\det([\overline{\varphi}]^4) = 1$ and $\mathrm{tr}([\overline{\varphi}]^4) = 3^2 - 2 = 7$. By Theorem 5.8 $F_2 \rtimes_{\varphi^4} \mathbb{Z}$ is residually nilpotent. □

Corollary 5.11. *The Mikhailov group $G_M = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$, where $\varphi(x) = y$, $\varphi(y) = xy^3$, contains residually nilpotent group of index 2, which is generated by x, y, t^2. This subgroup is isomorphic to $F_2 \rtimes_{\varphi^2} \mathbb{Z}$, and is residually 3-finite.*

Now we are ready to prove conditions under which groups with $\det[\overline{\varphi}] = -1$ are residually nilpotent.

Theorem 5.12. *If $\det[\overline{\varphi}] = -1$ and $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] \equiv 0 (\mathrm{mod} 2)$, then $G = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ is residually 2-finite.*

Proof. By Lemmas 5.10 and 5.12, G contains a residually nilpotent subgroup $H = \langle x, y, t^2\rangle$ of index 2. Since $[\overline{\varphi^2}] = [\overline{\varphi}]^2$, $\det([\overline{\varphi}]^2) = 1$ and $\mathrm{tr}([\overline{\varphi}]^2) = (\mathrm{tr}[\overline{\varphi}])^2 + 2$, by Lemma 5.6 H is residually 2-finite. Hence, H has decreasing central series of normal subgroups of finite 2-indexes with trivial intersection:

$$H \geq H_1 \geq H_2 \geq \ldots, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i = 1.$$

Since H is finitely generated and $|H : H_i| = 2^{n_i}$ for some $n_i \in \mathbb{N}$, by [14, Exercise 15.2.3] H_i contains some verbal subgroup V_i of H which has finite 2-index in H. It is easy to see that H is normal in G. Hence, we have

$$G \rhd H \rhd H_i \rhd V_i, \quad i \geq 1.$$

Using the fact that V_i is a verbal subgroup of H and $H \lhd G$ we get V_i is normal in G and $|G/V_i| = 2^{n_i+1}$. Further, the series of groups

$$W_k = \bigcap_{i=1}^{k} V_i$$

is a normal series with trivial intersection and G/W_k are finite 2-groups. Hence, G is residually 2-finite. □

5.3 Groups with the length of the lower central series ω^2

In this subsection we prove that in all remaining cases for $\det[\overline{\varphi}]$ and $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}]$ group $F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ has the length of the lower central series equal to ω^2.

Theorem 5.13. *Let $G = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$. Suppose that* $\det[\overline{\varphi}] = -1$ *and* $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}]$ *is an odd number,* $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] \neq \pm 1$ *then* $\gamma_{\omega^2}(G) = 1$.

Proof. In these cases the characteristic polynomial of $[\overline{\varphi}]$ has the real roots r and $-r^{-1}$, such that $r - r^{-1} \in \mathbb{Z}\backslash\{0, \pm 1\}$. Also, $[\overline{\varphi}]$ is conjugated to the diagonal matrix $\mathrm{diag}(r, -r^{-1})$.

Using induction by k, it is possible to prove that $[\overline{\varphi}_k] = [\overline{\varphi}]^{\otimes k}$ is conjugated to the diagonal matrix with diagonal elements $\pm r^i, i \in \mathbb{Z}$. If $k = 2n+1, n \geq 0$ then all i are equal to all odd numbers such that $|i| \leq k$. The set of diagonal elements is divided on the pairs $\{r^i, -r^{-i}\}$ or $\{-r^i, r^{-i}\}$. If $k = 2n, n \geq 1$ then all i are equal to all even numbers such that $|i| \leq k$. In this case the set of diagonal elements is divided into the pairs of the form $\{r^i, r^{-i}\}$ or $\{-r^i, -r^{-i}\}$. Furthermore, in the diagonal matrix which is conjugated to $[\overline{\varphi}]^{\otimes k}$ there exists only one pair $\{r^k, -r^{-k}\}$ for $k = 2n+1$ and only one pair $\{r^k, r^{-k}\}$ for $k = 2n$.

It is evident that our pairs of roots for $i \neq 0$ are the roots of polynomials of degree 2:

$$f_\rho(x) = x^2 + \rho x - 1 \text{ or } f_\delta(x) = x^2 + \delta x + 1,$$

where $\rho = \pm(r^i - r^{-i}), i = 2n+1, n \geq 0$, and $\delta = \pm(r^i + r^{-i}), i = 2n, n \geq 1$. Let us prove that in these polynomials the coefficients ρ, δ are integers and $\rho \neq \pm 1, \delta \notin \{-3, -1\}$. Indeed, the diagonal matrices are conjugated to matrices $[\overline{\varphi}]^{\otimes k}, k \geq 1$, with integers coefficients, their traces are integers. Hence, for the diagonal matrices

$$\mathrm{diag}(r, -r^{-1}) \text{ and } \mathrm{diag}(r^2, -1, -1, r^{-2}),$$

which are conjugated to $[\overline{\varphi}]$ and $[\overline{\varphi}]^{\otimes 2}$, respectively, we get that the sums $r - r^{-1}$ and $r^2 + r^{-2}$ are integers. Further, in the diagonal matrix which is conjugated to $[\overline{\varphi}]^{\otimes k}, k \geq 1$, the pair $r^k, -r^{-k}$ or r^k, r^{-k}, in depending on the parity of k, occurs only once. By induction hypothesis all other pairs with $i < k$ give the integer sums. Hence, the last unique pair for $i = k$ gives the integer sum. Hence, all ρ, δ are integers.

Let us prove that the coefficients satisfy the need restrictions, i.e. $\rho \neq \pm 1, \delta \notin \{-3, -1\}$. By assumption $|r - r^{-1}| > 1$. At first consider the coefficient ρ. Without loss of generality, we can assume that $|r| > 1$. This implies the inequalities

$$|r|^i > \frac{(1+|r|)^i}{|r|^i} > \frac{1+|r|^i}{|r|^i}.$$

So, $r^i - r^{-i} > 1$ if $r > 1$. In these cases i are odd, hence the inequality $r < -1$ implies $r^i - r^{-i} < -1$. So $\rho = \pm(r^i - r^{-i}) \neq \pm 1$. For $\delta = \pm(r^i + r^{-i})$ the numbers i are even. We proved that $\rho = \pm(r^i - r^{-i}) = \pm 2, \pm 3, \ldots$, $i = 2n+1, n \geq 0$. Since

$$r^{\pm 1} = \frac{-\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4}}{2},$$

we have

$$r^{2n} \geq \left(\frac{2 + \sqrt{2^2+4}}{2}\right)^{2n} = (1+\sqrt{2})^{2n} > 3^n.$$

Hence, $\delta = \pm(r^i + r^{-i}) \notin \{-3, -1\}$, for $i = 2n, n \geq 1$.

To prove residually nilpotence of $\overline{G}_k = (F_2^{ab})^{\otimes k} \rtimes_{\overline{\varphi}_k} \mathbb{Z}, k \geq 1$ we can use Proposition 2.3. Irreducible polynomials of the characteristic polynomials $P_{\overline{\varphi}_k}(x)$ are polynomials of the form $f_\rho(x) = x^2 + \rho x - 1$ or $f_\delta(x) = x^2 + \delta x + 1$, where ρ, δ are integers and $\rho \neq \pm 1, \delta \notin \{-3, -1\}$, or $p(x) = x \pm 1$. It is clear that $f_\rho(1) = \rho \neq \pm 1$, $f_\delta(1) = 2 + \delta \neq \pm 1$ and $p(1) \neq \pm 1$.

By Proposition 2.3 all groups $\overline{G}_k$, $k \geq 1$, are residually nilpotent. By Theorem 3.5 we get $\gamma_{\omega^2}(G) = 1$. □

We shall use the following claim.

Lemma 5.14. *Let $G = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$, $w \in \gamma_i(F_2)$ and $w^n \in [\gamma_i(F_2), G]$, then*

$$[w, g_1, \ldots, g_s]^n \in [\gamma_i(F_2), _{s+1} G],$$

for all $s \geq 1$ and $g_i \in G, i = 1, \ldots, s$.

Proof. We can assume that for $s = 0$ the commutator $[w, g_1, \dots, g_s]$ is equal to w. Then by assumption $w^n \in [\gamma_i(F_2), G]$, i.e. for $s = 0$ the lemma is true.

Let

$$[w, g_1, \dots, g_s]^n \in [\gamma_i(F_2),_{s+1} G].$$

We will prove that

$$[w, g_1, \dots, g_s, g_{s+1}]^n \in [\gamma_i(F_2),_{s+2} G].$$

In this case

$$[[w, g_1, \dots, g_s]^n, g_{s+1}] \in [\gamma_{i_0}(F_2),_{s+2} G].$$

Further, from the commutator identity $[uv, w] = [u, w][u, w, v][v, w]$ follows

$$\begin{aligned}
&[[w, g_1, \dots, g_s]^n, g_{s+1}] = \\
&\quad =[w, g_1, \dots, g_s, g_{s+1}][w, g_1, \dots, g_s, g_{s+1}, [w, g_1, \dots, g_s]^{n-1}]\cdot \\
&\quad\quad \cdot[w, g_1, \dots, g_s, g_{s+1}][w, g_1, \dots, g_s, g_{s+1}, [w, g_1, \dots, g_s]^{n-2}]\cdots \\
&\quad \cdots[w, g_1, \dots, g_s, g_{s+1}][w, g_1, \dots, g_s, g_{s+1}, [w, g_1, \dots, g_s]]\cdot \\
&\quad\quad \cdot[w, g_1, \dots, g_s, g_{s+1}],
\end{aligned}$$

that is

$$[[w, g_1, \dots, g_s]^n, g_{s+1}] \equiv [w, g_1, \dots, g_s, g_{s+1}]^n \mod [\gamma_i(F_2),_{s+2} G].$$

Hence $[w, g_1, \dots, g_s, g_{s+1}]^n \in [\gamma_i(F_2),_{s+2} G]$ and the induction hypothesis implies the required claim. □

It is well known that if a group G is generated by a set M, then its terms of the lower central series $\gamma_i(G), i \geq 1$, are generated by the simple commutators of weight i on elements of M and the next term of the lower central series $\gamma_{i+1}(G)$ [14, Section 17]. For example, in $F_2 = \langle x, y \rangle$ the term $\gamma_i(F_2), i \geq 2$, is generated by simple commutators $[x, y, g_3, \dots, g_i]$ and $[y, x, g_3, \dots, g_i]$, where $g_3, \dots, g_i \in \{x, y\}$, and by the next term $\gamma_{i+1}(F_2)$. These observations implies the following lemma.

Lemma 5.15. *Let $G = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$, $F_2 = \langle x, y \rangle$ and $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$, then the subgroup*

$$[\gamma_i(F_2),_s G], \quad i \geq 2, s \geq 1,$$

is generated by the simple commutators

$$[x, y, g_3, \dots, g_{i+1}, \dots, g_{+s}] \text{ and } [y, x, g_3, \dots, g_{i+1}, \dots, g_{i+s}],$$

where $g_j \in \{x, y\}$, for $j \leq i$, $g_j \in \{x, y, t\}$, for $j > i$, and the subgroup $[\gamma_i(F_2),_{s+1} G]$.

Now we are able to fined the length of the lower central series for groups from Theorem 5.13.

Theorem 5.16. *Let $G = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$. If $\det[\overline{\varphi}] = -1$ and $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}]$ is an odd number, $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] \neq \pm 1$, then the length of the lower central series of G is equal to ω^2.*

Proof. By Theorem 5.13 we have $\gamma_{\omega^2}(G) = 1$. Also, from the same theorem follows that all extensions $\gamma_i(F_2)/\gamma_{i+1}(F_2) \rtimes_{\widehat{\varphi}_i} \mathbb{Z}$, $i \geq 1$, where $\widehat{\varphi}_i$ is the automorphism of $\mathbb{Z}$-module $\gamma_i(F_2)/\gamma_{i+1}(F_2)$ that is induced by the automorphism φ, is residually nilpotent.

Hence, by Lemma 3.6 it is enough to prove that $\gamma_\omega(G)$ is non-trivial.

The quotient $\gamma_2(F_2)/\gamma_3(F_2) \simeq \mathbb{Z}$ is generated by the image of the commutator $[x, y]$. Since $\det[\overline{\varphi}] = -1$, the induced automorphism $\widehat{\varphi}_2 = -id$. Hence

$$[[x, y], t] = [x, y]^{-1}[x, y]^t \equiv [x, y]^{-2} \mod \gamma_3(F_2).$$

So,

$$[x, y]^2 \equiv [[x, y], t]^{-1} \mod \gamma_3(F_2)$$

and $[x, y]^2 \in [\gamma_2(F_2), G] < \gamma_3(G)$. By Lemma 5.14 we have inclusions

$$[x, y, g_1, \ldots, g_s]^2, \quad [y, x, g_1, \ldots, g_s]^2 \in [\gamma_2(F_2),_{s+1} G], \quad s \geq 1,$$

where $g_i \in \{x, y, t\}$. Further, by Lemma 5.15 the simple commutators

$$[x, y, g_1, \ldots, g_s], \quad [y, x, g_1, \ldots, g_s], \quad s \geq 1,$$

where $g_i \in \{x, y, t\}$, generate by modulo of the subgroup $[\gamma_2(F_2),\ _{s+1}G]$ a finitely generated abelian group with identity $g^2 = 1$. Using induction by $k \in \mathbb{N}$, it is easy to check that $[x, y]^{2^k} \in [\gamma_2(F_2),\ _kG] \leq \gamma_{k+2}(G)$.

By theorem assumption the characteristic polynomial $P_{\overline{\varphi}}(x)$ is irreducible over $\mathbb{Z}$ and $P_{\overline{\varphi}}(1) = -\mathrm{tr}[\overline{\varphi}] \neq 0$. By Proposition 2.3 the group $F_2^{ab} \rtimes_{\overline{\varphi}} \mathbb{Z}$ is residually p-finite for any prime divisor of $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}]$. Lemma 2.5 implies

$$F_2^{ab} \geq \gamma_k(F_2^{ab} \rtimes_{\overline{\varphi}} \mathbb{Z}) \geq P_{\overline{\varphi}}^{k-1}(1) F_2^{ab}.$$

Hence, the index

$$|F_2^{ab} : \gamma_k(F_2^{ab} \rtimes_{\overline{\varphi}} \mathbb{Z})|$$

divides $P_{\overline{\varphi}}^{2(k-1)}(1)$. More precisely, the images of x, y in F_2^{ab} under multiplication on m^l lie in $\gamma_{l+1}(F_2^{ab} \rtimes_{\overline{\varphi}} \mathbb{Z})$. Hence, we have inclusions

$$x^m, y^m \in [F_2, t]\gamma_2(F_2) \leq [F_2, G] \leq \gamma_2(G).$$

Lemma 5.14 implies

$$[x, g_1, \ldots, g_s]^m, \quad [y, g_1, \ldots, g_s]^m \in [F_2,\ {}_{s+1}G], \quad s \geq 1.$$

In particular, $[x, y]^m \in [F_2, G, G] \leq \gamma_3(G)$. By Lemma 5.15 the simple commutators $[x, g_1, \ldots, g_s]$, $[y, g_1, \ldots, g_s]$, $s \geq 1$, where $g_i \in \{x, y, t\}$, generate by modulo $[F_2, {}_{s+1} G]$ a finitely generated abelian group with identity $g^m = 1$. By induction $[x, y]^{m^k} \in \gamma_{k+2}(G), k \in \mathbb{N}$.

Since m and 2 are mutually prime, we have $[x, y] \in \gamma_\omega(G)$. Hence $\gamma_2(F_2) \leq \gamma_\omega(G)$. The theorem is proved. □

Proof of Theorem 5.1. The proof follows from Theorems 5.8, 5.12, and 5.16 □

Proof of Theorem 5.2. To prove this theorem let us remark that the proved results imply that for the lower central series of $G = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ there exist only three possibilities: $\gamma_\omega(G) = \gamma_2(G) = F_2$ (see Proposition 5.3); or $\gamma_\omega(G) = 1$ (see Proposition 5.6 and Theorem 5.12); or the length of the lower central series is equal to ω^2 (see Theorems 5.13, 5.16). □

Acknowledgements:

Authors are grateful to participants of the seminar “Évariste Galois” at Novosibirsk State University and personally to Yu. I. Sosnovsky for fruitful discussions.

References

[1] M. Aschenbrenner, S. Friedl, Residual properties of graph manifold groups (English summary), Topology Appl., **158**, 10 (2011), 1179–1191.

[2] D. N. Azarov, On the virtually p-residual finiteness, Chebyshevskii Sb.,**11**, 3 (2010), 11–20 (Russian).

[3] V. G. Bardakov, O. V. Bryukhanov, On linear representations of some extensions, Vestnik Novosibirsk Univ. Ser. Mat. Mekh. Inf., **7** (2007), 45–58 (Russian).

[4] V. G. Bardakov, R. V. Mikhailov, On the residual properties of link groups, Sibirsk. Mat. Zh., **48**, 3 (2007), 485–495 (Russian); translation in Siberian Math. J. **48**, 3 (2007), 387–394.

[5] V. G. Bardakov, Yu. A. Mikhalchishina, and M. V. Neshchadim, Virtual link groups, Siberian Mathematical Journal, 58, no. 5 (2017), 765–777.

[6] V. G. Bardakov, M. V. Neshchadim, Knot Groups and Residual Nilpotence, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **304**, 1 (2019), 23–30.

[7] V. G. Bardakov, N. Nanda, and M. V. Neshchadim, On the lower central series of some virtual knot groups, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, **29**, 9 (2020).

[8] V. G. Bardakov, M. V. Neshchadim, On the lower central series of Baumslag—Solitar groups, to appear in Algebra and Logic, available at arXiv:`2009.01150`.

[9] G. Baumslag, On the residual nilpotence of certain one-relator groups, Comm. Pure Appl. Math., **21**, 5 (1968), 491–506.

[10] G. Baumslag, Finitely generated cyclic extensions of free groups are residually finite, Bull. Austral. Math. Soc., **5**, 1 (1971), 87–94.

[11] O. V. Bryukhanov, Nilpotent approximability of fundamental groups of compact three-dimensional Sol-manifolds, Sibirsk. Mat. Zh., **57**, 2 (2016), 247–258 (Russian); translation in Sib. Math. J., **57**, 2 (2016), 190–199.

[12] O. V. Bryukhanov, Approximation properties and linearity of groups, J. Math. Sci. (N.Y.) 188, no. 4 (2013), 354–358.

[13] E. A. Gorin, V. Ja. Lin, Algebraic equations with continuous coefficients and certain questions of the algebraic theory of braids, Mat. Sb. (N.S.), **78 (120)**, 1969, 579–610.

[14] M. I. Kargapolov, Yu. I. Merzlyakov, Fundamentals of the Theory of Groups, Springer-Verlag, New York; Heidelberg; Berlin (1979).

[15] E. I. Khukhro, Nilpotent Groups and Their Automorphisms, Walter de Gruyter, 1993.

[16] E. D. Loginova, Residual finiteness of the free product of two groups with commuting subgroups, Siberian Math. J., **40**, 2 (1999), 341–350.

[17] A. I. Malcev, On homomorphisms onto finite groups, Uchen. Zapiski Ivanovsk. ped. instituta, **18**, 5 (1958), 49–60 (also in Selected papers, Algebra, 1 1976, 450–462) (Russian).

[18] A. I. Malcev, Generalized nilpotent algebras and their associated groups, Mat. Sbornik N.S.,**25**, 3 (1949), 347–366.

[19] A. I. Malcev, Isomorphic representation of infinite groups by matrices, Mat. Sb., **8**, 3 (1940), 405–422.

[20] J. McCarron, Residually nilpotent one-relator groups with nontrivial centre, Proc. Amer. Math. Soc.,**124**, 1 (1996), 1–5.

[21] Yu. I. Merzlyakov, Rational Groups, Nauka, Moscow, 1987 (Russian).

[22] R. Mikhailov, On nilpotent and solvable residual finiteness of groups, Mat. Sb., **196**, 11 (2005), 109–126.

[23] R. Mikhailov and I. B. S. Passi, Lower Central and Dimension Series of Groups, Lecture Notes in Mathematics, 1952, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.

[24] R. Mikhailov, A one-relator group with long lower central series, Forum Math., **28**, 2 (2016), 327–331.

[25] D. I. Moldavanskii, On p-residually finiteness of HNN-extensions, Vestnik Ivanov. Gos. Univ., 3 (2000), 129–140 (Russian).

[26] D. I. Moldavanskii, On the intersection of subgroups of finite index in the Baumslag—Solitar groups, Mat. Zametki **87**, 1 (2010), 92–100 (Russian); translation in Math. Notes, **87**, 1–2 (2010), 88–95.

[27] D. Moldavanskii, On the residual properties of Baumslag-Solitar groups, Comm. Algebra, **46**, 9 (2018), 3766–3778.

SOME EXPANSIONS OF THEORIES WITH DENSE ORDERS AND GIVEN NUMBERS OF COUNTABLE MODELS[1]

A. B. Dauletiyarova

Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptyug avenue,
Novosibirsk, 630090, Russia;
Kazakh-British Technical University,
59, Tole bi street,
Suleyman Demirel University,
Almaty, 050000, Kazakhstan;
1/1, Abylaikhan street,
Kaskelen, 040900, Kazakhstan
e-mail: d_aigera95@mail.ru

S. V. Sudoplatov

Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptyug avenue,
Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State Technical University,
20, K. Marx avenue,
Novosibirsk, 630073, Russia;
Novosibirsk State University,
1, Pirogova street,
Novosibirsk, 630090, Russia
e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

We consider some possibilities of expansions T of a theory $T_{\rm fdpo}$ of a dense partial order with finitely many maximal chains and of the theory $T_{\rm dmt}$ of a dense meet-tree $\langle M, <\rangle$ [1, 2]. Some expansions of these theories produce classical examples of Ehrenfeucht theories [3, 11], [1, Examples 1.1.1.3, 1.1.1.4].

Recall that a *dense meet-tree* $\mathcal{M} = \langle M; \leq\rangle$ be a lower semilattice without least and greatest elements such that:

(a) for each pair of incomparable elements, their join does not exist;

(b) for each pair of distinct comparable elements, there is an element between them;

(c) for each element a there exist infinitely many pairwise incomparable elements greater than a, whose infimum is equal to a.

The number of pairwise non-isomorphic models of a theory T, having a cardinality λ, is denoted by $I(T, \lambda)$.

Definition. [5]. A theory T is called *Ehrenfeucht* if $1 < I(T, \omega) < \omega$.

[1] This research was partially supported by the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002, and Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855544).

Definition. [6]. A type $p(\overline{x}) \in S(T)$ is said to be *powerful* in a theory T if every model $\mathcal{M}$ of T realizing p also realizes every type $q \in S(T)$, i.e., $\mathcal{M} \models S(T)$.

The powerful types*, that always are represented in Ehrenfeucht theories [6], play an important role for the finding of number of countable models. If a complete theory is not of a powerful type, then it has infinitely many models. Indeed, we take the type p_0, since it is not powerful, there is a type p_1 and a model $\mathcal{M}_0$ that realizes the type p_0 and omits the type p_1, since the types p_0, p_1 are not powerful, again there is a type p_2 and a model $\mathcal{M}_1$ that realizes the types p_0, p_1 and omits the type p_2 and etc. Thus, any Ehrenfeucht theory has a powerful type.

Interrelations of types in theories are defined, in many aspects, by the Rudin—Keisler preorders.

The next series of definitions and notations is taken from [1].

Let $\mathcal{M}_p$ denote the class of isomorphic models that are prime over realizing of type p.

Definition. Let p and q be types in $S(T)$. We say that the type p *is dominated by a type* q, or p *does not exceed* q *under the Rudin—Keisler preorder* (written $p \leq_{\mathrm{RK}} q$), if $\mathcal{M}_q \models p$, that is, $\mathcal{M}_p$ is an elementary submodel of $\mathcal{M}_q$ (written $\mathcal{M}_p \preceq \mathcal{M}_q$). Besides, we say that a model $\mathcal{M}_p$ *is dominated by a model* $\mathcal{M}_q$, or $\mathcal{M}_p$ *does not exceed* $\mathcal{M}_q$ *under the Rudin—Keisler preorder*, and write $\mathcal{M}_p \leq_{\mathrm{RK}} \mathcal{M}_q$.

Definition. Types p and q are said to be *domination-equivalent*, *realization-equivalent*, *Rudin—Keisler equivalent*, or RK-*equivalent* (written $p \sim_{\mathrm{RK}} q$) if $p \leq_{\mathrm{RK}} q$ and $q \leq_{\mathrm{RK}} p$. Models $\mathcal{M}_p$ and $\mathcal{M}_q$ are said to be *domination-equivalent, Rudin—Keisler equivalent*, or RK-*equivalent* (written $\mathcal{M}_p \sim_{\mathrm{RK}} \mathcal{M}_q$).

If $\mathcal{M}_p$ and $\mathcal{M}_q$ are not domination-equivalent then they are non-isomorphic. Moreover, non-isomorphic models may be found among domination-equivalent ones.

Definition. Denote by $\mathrm{RK}(T)$ the set $\mathbf{PM}$ of isomorphism types of models $\mathcal{M}_p$, $p \in S(T)$, on which the relation of domination is induced by $\leq_{\mathrm{RK}}$, a relation deciding domination among $\mathcal{M}_p$, that is, $\mathrm{RK}(T) = \langle \mathbf{PM}; \leq_{\mathrm{RK}} \rangle$. We say that isomorphism types $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \mathbf{PM}$ are domination-equivalent (written $\mathbf{M}_1 \sim \mathbf{M}_2$) if so are their representatives.

A model $\mathcal{M}$ of a theory T is called *limit* if $\mathcal{M}$ is not prime over tuples and $\mathcal{M} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{M}_n$ for some elementary chain $(\mathcal{M})_{n\in\omega}$ of prime models of T over tuples. In this case the model $\mathcal{M}$ is said to be *limit over a sequence*

$\mathbf{q}$ *of types* or $\mathbf{q}$-*limit*, where $\mathbf{q} = (q_n)_{n\in\omega}$, $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{q_n}, n \in \omega$. If the sequence $\mathbf{q}$ consists of unique type q then the $\mathbf{q}$-limit model is called *limit over the type* q.

Definition. [7]. A theory T is said to be Δ-*based*, where Δ is some set of formulae without parameters, if any formula of T is equivalent in T to a Boolean combination of formulae in Δ.

For Δ-based theories T, it is also said that T has *quantifier elimination* or *quantifier reduction* up to Δ.

Definition. [1, 7]. Let Δ be a set of formulae of a theory T, and $p(\bar{x})$ a type of T lying in $S(T)$. The type $p(\bar{x})$ is said to be Δ-*based* if $p(\bar{x})$ is isolated by a set of formulas $\varphi^\delta \in p$, where $\varphi \in \Delta$, $\delta \in \{0, 1\}$.

The following lemma, being a corollary of Compactness Theorem, noticed in [7].

Lemma. *A theory T is Δ-based if and only if, for any tuple $\bar{a}$ of any* (*some*) *weakly saturated model of T, the type* $\mathrm{tp}(\bar{a})$ *is Δ-based.*

The following fact is well-known using Lemma.

Fact. Theories $T_{\rm fdpo}$ and $T_{\rm dmt}$ are based by the set of quantifier-free formulae and formulae describing non/existence of least/greatest elements and in/comparability of elements.

Theorem 1. *Let T be an expansion of $T_{\rm fdpo}$ or $T_{\rm dmt}$ by countably many disjoint convex nonempty unary predicates P_n, $n \in \omega$. The following conditions are equivalent:*

(1) *T is Ehrenfeucht;*

(2) *T has finitely many nonisolated* 1*-types.*

Proof. At first we notice that by the Fact and the condition on unary predicates P_n the theory T is based by the set of quantifier-free formulae and formulae describing non/existence of least/greatest elements and of the formulae $P_n(x)$, $n \in \omega$.

It T has finitely many non-isolated 1-types $p_1(x), \ldots, p_k(x)$, then the sets of realizations of these 1-types in a model $\mathcal{M} \models T$ are formed by accumulation points with respect to definable sets $P_n(\mathcal{M})$ such that each $p_i(\mathcal{M})$ has 3 or 6 possibilities for countable models up to isomorphism, as in [8, 9, 10]. Collecting these independent finite possibilities we obtain $3^l \cdot 6^m$ countable models, for $l, m \in \omega$, $l + m \geq 1$, as in [8, 9, 10, 11], implying that T is Ehrenfeucht.

Conversely, if T has infinitely many non-isolated 1-types, then by the described basedness we can independently realize and omit these 1-types producing 2^ω countable models. $\square$

Applying the arguments for the proof of Theorem 1, we obtain:

Theorem 2. *Let T be an expansion of $T_{\rm fdpo}$ or $T_{\rm dmt}$ by countably many disjoint convex nonempty unary predicates P_n, $n \in \omega$. The following conditions are equivalent:*

(1) $I(T, \omega) = 2^\omega$;

(2) *T has infinitely many non-isolated 1-types.*

Replacing predicates P_n by constants c_n we obtain the following theorems characterizing Ehrenfeuchtness and the maximal number of countable models for a theory in both in topological an syntactic terms.

Theorem 3. *Let T be an expansion of $T_{\rm fdpo}$ or $T_{\rm dmt}$ by countably many distinct constants c_n, $n \in \omega$. The following conditions are equivalent:*

(1) *T is Ehrenfeucht;*

(2) *the set $C = \{c_n \mid n \in \omega\}$ has finitely many accumulation points, being non-isolated 1-types, in a saturated model of T;*

(3) *T has finitely many non-isolated 1-types.*

Theorem 4. *Let T be an expansion of $T_{\rm fdpo}$ or $T_{\rm dmt}$ by countably many distinct constants c_n, $n \in \omega$. The following conditions are equivalent:*

(1) $I(T, \omega) = 2^\omega$;

(2) *the set $C = \{c_n \mid n \in \omega\}$ has infinitely many accumulation points, being non-isolated 1-types, in a saturated model of T;*

(3) *T has infinitely many non-isolated 1-types.*

Theorems 1–4 confirm the Vaught conjecture for special expansions of $T_{\rm fdpo}$ and $T_{\rm dmt}$.

Corollary. *Let T be an expansion of $T_{\rm fpdo}$ or $T_{\rm dmt}$ by countably many disjoint convex unary predicates or by countably many constants. Then either T is Ehrenfeucht or $I(T, \omega) = 2^\omega$.*

Remark. For expansions of dense linear orders and their finite disjoint unions the results above hold by [9, 12, 10, 11]. Using [9, 12] they can be spread for partial ordering analogues of quite o-minimal and weakly o-minimal theories admitting the description of distributions of countable models similar to [1, 10, 11].

Example. We set $T^1 \rightleftharpoons {\rm Th}((\mathcal{T}; <, c_n, c'_n)_{n\in\omega})$, where $<$ is an ordinary strict order on the set $\mathcal{T}$ of infinite dense branching tree forming a lower semilattice, constants c_n form a strictly increasing sequence, and constants c'_n form a strictly decreasing sequence, $c_n < c'_n, n \in \omega$. The theory T^1 has six pairwise nonisomorphic countable models:

• a prime model with empty set of realizations of type $p(x)$ isolated by the set $\{c_n < x \mid n \in \omega\} \cup \{x < c'_n \mid n \in \omega\}$;

• a prime model over a realization of $p(x)$, with a unique realization of this type;

• a prime model over a realization of type $q(x, y)$ isolated by the set $p(x) \cup p(y) \cup \{x < y\}$; here the set of realizations of $q(x, y)$ forms a closed interval $[a, b]$;

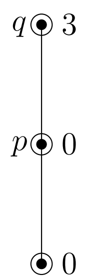
• three limit models over the type $q(x, y)$, in which the sets of realizations of $q(x, y)$ are intervals of forms $(a, b], [a, b), (a, b)$ respectively.

In Figure 1, we represent the Hasse diagram of Rudin-Keisler preorder $\leq_{\mathrm{RK}}$ and values of distribution functions IL of numbers of limit models on $\sim_{\mathrm{RK}}$-equivalence classes for the theory T^1.

Having three sequences $(c_n)_{n\in\omega}$, $(c'_n)_{n\in\omega}$, $(c''_n)_{n\in\omega}$ of constants, where the first one strictly increases, and two others strictly decrease with respect to $<$ on the tree $\mathcal{T}$, $c_n < c'_n$, $c_n < c''_n$, $n \in \omega$, c'_i and c''_j are incomparable, $i, j \in \omega$, the theory T^2 has 7 prime models over tuples and 27 limit models, that is, $I(T^2, \omega)$=34.

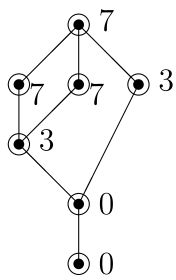
Figure 2 represents the Hasse diagram for Rudin-Keisler preorder $\leq_{\mathrm{RK}}$ and values for the function IL of distribution for numbers of limit models on $\sim_{\mathrm{RK}}$-classes of theory T^2; we also pointed out types over which models are prime or limit.

Note that additional expansions by strictly decreasing sequences of constants preserve the Ehrenfeuchtness of theory. In this case, the number of possibilities is defined, as above, by links between limits of sequences.



$I(T^1, \omega) = 6$

Figure 1



$I(T^2, \omega) = 34$

Figure 2

Examples above illustrate possibilities for complications of characterizing pair (Rudin-Keisler preorder, distribution function for numbers of limit models) and quite rapid increase of number of limit model relative to constant expansions in the class of Ehrenfeucht theories.

References

[1] S. V. Sudoplatov, Classification of Countable Models of Complete Theories, Novosibirsk: NSTU, 2018.

[2] R. Mennuni, Weakly binary expansions of dense meet-trees, `arXiv:2006.13004v1 [math.LO]`, 2020, 20 pp.

[3] R. Vaught, Denumerable models of complete theories, Infinistic Methods, London: Pergamon, 1961, 303–321.

[4] M. G. Peretyat'kin, On complete theories with a finite number of denumerable models, Algebra and Logic, **12**, 5 (1973), 310–326.

[5] T. S. Millar, Decidable Ehrenfeucht theories, Proc. Sympos. Pure Math., **42** (1985), 311–321.

[6] M. Benda, Remarks on countable models, Fund. Math, **81**, 2 (1974), 107–119.

[7] E. A. Palyutin, J. Saffe, S. S. Starchenko, Models of superstable Horn theories, Algebra and Logic, **24**, 3 (1985), 171–210.

[8] L. L. Mayer, Vaught's conjecture for *o*-minimal theories, J. Symbolic Logic, **53**, 1 (1988), 146–159.

[9] B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, Vaught's conjecture for quite *o*-minimal theories, Ann. Pure and Appl. Logic, **168**, 1 (2017), 129–149.

[10] B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, Distributions of countable models of quite *o*-minimal Ehrenfeucht theories, Eurasian Math. J., **11**, 3 (2020), 66–78.

[11] S. V. Sudoplatov, Distributions of countable models of disjoint unions of Ehrenfeucht theories, Lobachevskii J. Math., **42**, 1 (2021), 195–205.

[12] A. Alibek, B. S. Baizhanov, B. Sh. Kulpeshov, T. S. Zambarnaya, Vaught's conjecture for weakly *o*-minimal theories of convexity rank 1, Ann. Pure and Appl. Logic, **169**, 11 (2018), 1190–1209.

ALGEBRAS OF BINARY FORMULAS FOR SOME PARTIALLY ORDERED THEORIES[1]

D. Yu. Emelyanov

Novosibirsk State Technical University,
20, K. Marx avenue,
Novosibirsk, 630073, Russia;
e-mail: dima-pavlyk@mail.ru

B. Sh. Kulpeshov

Novosibirsk State Technical University
20 K. Marx ave, 64,
Novosibirsk, 630073, Russia;
Kazakh-British Technical University,
59, Tole bi st.,
Almaty, 050000, Kazakhstan;
e-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

S. V. Sudoplatov

Novosibirsk State Technical University,
20, K. Marx ave., Novosibirsk, 630073, Russia;
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
1, Pirogova st., Novosibirsk, 630090, Russia;
e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

We consider a generalization, for some partially ordered theories, of descriptions for algebras of binary isolating formulas [1, 2] for a series of linearly ordered theories [3, 4, 5].

Recall some necessary definitions. A subset A of a linearly ordered structure M is *convex* if for all $a, b \in A$ and $c \in M$ whenever $a < c < b$ we have $c \in A$. This paper concerns the notion of *weak o-minimality* which was initially deeply studied by D. Macpherson, D. Marker and C. Steinhorn in [13]. A *weakly o-minimal structure* is a linearly ordered structure $M =$

[1]This research was partially supported by RFBR (Project No. 20-31-90004), Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855544), and the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002.

$\langle M, =, <, \ldots \rangle$ such that any definable (with parameters) subset of M is a union of finitely many convex sets in M. Real closed fields with a proper convex valuation ring provide an important example of weakly o-minimal structures.

Let T be a weakly o-minimal theory, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ be non-algebraic. We say that p is not *weakly orthogonal* to q (denoting this by $p \not\perp^w q$) if there exist an A-definable formula $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ and $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ such that $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ and $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$. In other words, p is *weakly orthogonal* to q (denoting this by $p \perp^w q$) if $p(x) \cup q(y)$ has a unique extension to a complete 2-type over A.

We say that p is *quite orthogonal* to q ($p \perp^q q$) ([7]) if there is no A-definable bijection $f : p(M) \to q(M)$. We say that a weakly o-minimal theory is *quite o-minimal* if the notions of weak and quite orthogonality coincide for 1-types over arbitrary sets of models of the given theory.

Let M be a weakly o-minimal structure, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ be non-algebraic. We say p is *quasirational to the right (left)* ([8]) if there is an A-definable convex formula $U_p(x) \in p$ such that for any sufficiently saturated model $N \succ M$, $U_p(N)^+ = p(N)^+$ ($U_p(N)^- = p(N)^-$). A non-isolated 1-type is called *quasirational* if it either quasirational to the right or quasirational to the left. A non-quasirational non-isolated 1-type is called *irrational.*

Obviously an 1-type being simultaneously quasirational to the right and quasirational to the left is *isolated.*

We extend the definition of the rank of convexity of a formula [9] on arbitrary (non-necessarily definable) sets:

Definition. [9]. Let T be a weakly o-minimal theory, $M \models T$, $A \subseteq M$. *The rank of convexity of the set* A ($RC(A)$) is defined as follows:

1) $RC(A) = -1$ if $A = \emptyset$.

2) $RC(A) = 0$ if A is finite and non-empty.

3) $RC(A) \geq 1$ if A is infinite.

4) $RC(A) \geq \alpha + 1$ if there exist a parametrically definable equivalence relation $E(x, y)$ and an infinite sequence of elements $b_i \in A, i \in \omega$, such that:

- For every $i, j \in \omega$ whenever $i \neq j$ we have $M \models \neg E(b_i, b_j)$;
- For every $i \in \omega$, $RC(E(x, b_i)) \geq \alpha$ and $E(M, b_i)$ is a convex subset of A.

5) $RC(A) \geq \delta$ if $RC(A) \geq \alpha$ for all $\alpha \leq \delta$, where δ is a limit ordinal.

If $RC(A) = \alpha$ for some α, we say that $RC(A)$ is defined. Otherwise (i.e. if $RC(A) \geq \alpha$ for all α), we put $RC(A) = \infty$.

The rank of convexity of a formula $\phi(x, \bar{a})$, where $\bar{a} \in M$, is defined as the rank of convexity of the set $\phi(M, \bar{a})$, i.e. $RC(\phi(x, \bar{a})) := RC(\phi(M, \bar{a}))$.

The rank of convexity of an 1-type p is defined as the rank of convexity of the set $p(M)$, i.e. $RC(p) := RC(p(M))$.

A structure of the form $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$, where $\langle M, < \rangle$ is a partially ordered set, is said to be a *partially ordered structure*. In every partially ordered structure that is not linearly ordered the notion of incomparability of elements $\diamond$ appears, i.e.

$$x \diamond y := \neg(x = y) \wedge \neg(x < y) \wedge \neg(x > y).$$

For arbitrary subsets A, B of a structure M we write $A \diamond B$ if $a \diamond b$ whenever $a \in A$ and $b \in B$. Any family of pairwise incomparable elements of a partially ordered structure is said to be an *antichain*. We say that a partially ordered structure has *width* $\leq \lambda$ if any its antichain contains at most λ elements.

Remark 1. Notice that by Compactness if a theory T has a model with an infinite antichain then T has models with unboundedly large antichains.

So each partially ordered theory T either has a *finite width*, i.e. a fixed natural width for each maximal antichain in a model of T, or the width of T equals ∞, if some model of T has an infinite antichain.

The notion of weak o-minimality was generalized on partially ordered structures by K. Zh. Kudaibergenov in [10]. A *weakly partially o-minimal structure* or *weakly p.o-minimal structure* is a partially ordered structure $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ such that any definable (with parameters) subset of M is an union of finitely many convex sets in M. A theory T is said to be *weakly partially o-minimal* if so is every its model.

Using Cayley tables for countably categorical weakly o-minimal theories [3] and quite o-minimal theories [4] we explicitly define the classes of commutative monoids $\mathfrak{A}_n$, respectively, $\mathfrak{A}_n^{\rm QR}$, $\mathfrak{A}_n^{\rm QL}$, $\mathfrak{A}_n^{I}$, of isolating formulas for isolated, respectively, quasirational to the right, quasirational to the left, irrational, 1-types p of quite partially o-minimal theories with few countable models, with convexity rank $\mathrm{RC}(p) = n$.

Recall that the algebra $\mathfrak{A}_n$, being a $(P, \aleph_0, n)$-wom-monoid [3], is defined by induction as follows.

The monoid $\mathfrak{A}_1$ is defined by the following table:

$\cdot$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0,1,2\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{2\}$

The monoid $\mathfrak{A}_2$ is defined by the following table:

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$
3	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$
4	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{4\}$

If the monoid $\mathfrak{A}_n$ is already constructed then its extension $\mathfrak{A}_{n+1}$ is defined by adding the labels $2n+1$ and $2n+2$, with the operation $\cdot$ on the set $\mathcal{P}(\{0,1,2,3,4,\ldots,2n+2\})\setminus\{\emptyset\}$, with the following table:

$\cdot$	0	1	2	3	4	$\ldots$	$2n+1$	$2n+2$
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n+1\}$	$\{2n+2\}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n+1\}$	$\{2n+2\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n+1\}$	$\{2n+2\}$
3	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\ldots$	$\{2n+1\}$	$\{2n+2\}$
4	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n+1\}$	$\{2n+2\}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$2n+1$	$\{2n+1\}$	$\{2n+1\}$	$\{2n+1\}$	$\{2n+1\}$	$\{2n+1\}$	$\ldots$	$\{2n+1\}$	$\{0,1,\ldots,2n+2\}$
$2n+2$	$\{2n+2\}$	$\{2n+2\}$	$\{2n+2\}$	$\{2n+2\}$	$\{2n+2\}$	$\ldots$	$\{0,1,\ldots,2n+2\}$	$\{2n+2\}$

Thus we have a chain of sequentially embedded monoids: $\mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{A}_{n+1}$, $n\in\omega$.

The (P,QR,n)-wom-monoid $\mathfrak{A}_n^{QR}$ for a quasirational to the right 1-type p and the (P,QL,n)-wom-monoid $\mathfrak{A}_n^{QL}$ for a quasirational to the left 1-type p', with $\mathrm{RC}(p)=\mathrm{RC}(p')=n$, are defined by the following table with $2n$ labels:

$\cdot$	0	1	2	3	4	$\ldots$	$2n-3$	$2n-2$	-1
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$	$\{-1\}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$	$\{-1\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$	$\{-1\}$
3	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$	$\{-1\}$
4	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$	$\{-1\}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\{-1\}$
$2n-3$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{0,1,\ldots 2n-2\}$	$\{-1\}$
$2n-2$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\ldots$	$\{0,1,\ldots 2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{-1\}$
-1	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\ldots$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$

Any irrational 1-type p with $\mathrm{RC}(p)=n$ has an algebra $\mathfrak{A}_n^I$ with $2n-1$ labels and the following table:

$\cdot$	0	1	2	3	4	$\ldots$	$2n-3$	$2n-2$
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$
3	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$
4	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$2n-3$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{0,1,\ldots,2n-2\}$
$2n-2$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\ldots$	$\{0,1,\ldots,2n-2\}$	$\{2n-2\}$

Clearly the algebra $\mathfrak{A}_n^I$ is isomorphic to the $(P, \aleph_0, n)$-wom-monoid $\mathfrak{A}_{n-1}$.

Notice that if a chain in a quite partially o-minimal theory is marked by a unary predicate P then the results of [3, 4] can be applied for 1-types $p(x)$ containing $P(x)$. Thus, for an algebra $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ of binary isolating formulas of 1-type p we have the following theorem.

Theorem. *Let T be a quite partially o-minimal theory of finite width with few countable models and with finitely many unary predicates marking all maximal chains, $p \in S_1(\emptyset)$ be a non-algebraic type. Then there exists $n < \omega$ such that:*

(1) *if p is isolated then $\mathfrak{P}_{\nu(p)} \simeq \mathfrak{A}_n$;*

(2) *if p is quasirational to the right (left) then $\mathfrak{P}_{\nu(p)} \simeq \mathfrak{A}_n^{\mathrm{QR}}$ ($\mathfrak{P}_{\nu(p)} \simeq \mathfrak{A}_n^{\mathrm{QL}}$);*

(3) *if p is irrational then $\mathfrak{P}_{\nu(p)} \simeq \mathfrak{A}_n^I$.*

Corollary. *Let T be a quite partially o-minimal theory of finite width with few countable models and with finitely many unary predicates marking all maximal chains, $p, q \in S_1(\emptyset)$ be non-algebraic types. Then $\mathfrak{P}_{\nu(p)} \simeq \mathfrak{P}_{\nu(q)}$ if and only if $\mathrm{RC}(p) = \mathrm{RC}(q)$ and the types p and q are simultaneously either isolated, or quasirational, or irrational.*

Remark 2. If chains are not marked by unary predicates algebras of binary formulas for quite partially o-minimal theory of finite width can be more broad than described in Theorem, being extended by the following links for elements of antichains: if 0 marks the formula $x = y$ and 1^* for the formula $\neg x \le y \wedge \neg y \le x$ then we have $0 \cdot 0 = \{0\}$, $1^* \cdot 0 = 0 \cdot 1^* = \{1^*\}$, $1^* \cdot 1^* = \{0\}$ for two-element antichains and $1^* \cdot 1^* = \{0, 1^*\}$ for antichains of a cardinality > 2.

The following example illustrates a possibility for algebras of binary isolating formulas for a partial order.

Example. [2, 11]. Let $\mathcal{M} = \langle M; \le \rangle$ be a lower semilattice without least and greatest elements such that:

(a) for each pair of incomparable elements, their join does not exist;

(b) for each pair of distinct comparable elements, there is an element between them;

(c) for each element a there exist infinitely many pairwise incomparable elements greater than a, whose infimum is equal to a.

Expand the structure $\mathcal{M}$ and its theory T_0 by constants c_n, $n \in \omega$, such that $c_n < c_{n+1}$, $n \in \omega$. The theory T_1 of this expansion has exactly three countable models: the prime model; the saturated model; the prime model over the realization of the powerful type $p_\infty(x)$, isolated by the set $\{c_n < x \mid n \in \omega\}$ of formulas.

The unique 1-type $p(x)$ of the theory T_0 has the following binary isolating formulas:

$$\theta_0(x,y) := x = y,$$

$$\theta_1(x,y) := x < y,$$

$$\theta_2(x,y) := y < x,$$

$$\theta_3(x,y) := \exists z(z < x \wedge z < y) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(x < y) \wedge \neg(y < x).$$

The algebra $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ of binary isolating formulas for the type $p(x)$ is defined by the following table:

$\cdot$	0	1	2	3
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{1,3\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
3	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$

For the algebra $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ of binary isolating formulas for the type $p_\infty(x)$ we have two isolating formulas:

$$\theta_0(x,y) := x = y,$$

$$\theta_{-1}(x,y) := x < y.$$

This algebra is defined by the following table:

$\cdot$	0	-1
0	$\{0\}$	$\{-1\}$
-1	$\{-1\}$	$\{-1\}$

References

[1] I. V. Shulepov, S. V. Sudoplatov, Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory, Siberian Electronic Mathematical Reports, **11** (2014), 362–389.

[2] S. V. Sudoplatov, Classification of countable models of complete theories, Novosibirsk: Edition of NSTU, 2018.

[3] D. Yu. Emelyanov, B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, Algebras of distributions for binary formulas in countably categorical weakly o-minimal structures, Algebra and Logic, **56**, 1 (2017), 13–36.

[4] D. Yu. Emelyanov, B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, On algebras of distributions for binary formulas for quite *o*-minimal theories, Algebra and Logic, **57**, 6 (2018), 429–444.

[5] D. Yu. Emelyanov, B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, Algebras of binary formulas for compositions of theories, Algebra and Logic, **59**, 4 (2020), 295–312.

[6] H. D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, Weakly *o*-minimal structures and real closed fields, Transactions of The American Mathematical Society, **352**, 12 (2000), 5435–5483.

[7] B. Sh. Kulpeshov, Convexity rank and orthogonality in weakly *o*-minimal theories News of National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, series physics-mathematics, **227** (2003), 26–31.

[8] B. S. Baizhanov, Expansion of a model of a weakly *o*-minimal theory by a family of unary predicates, The Journal of Symbolic Logic, **66** (2001), 1382–1414.

[9] B. Sh. Kulpeshov, Weakly *o*-minimal structures and some of their properties, The Journal of Symbolic Logic, **63**, 4 (1998), 1511–1528.

[10] K. Zh. Kudaibergenov, Generalized *o*-minimality for partial orders, Siberian Advances in Mathematics, **23**, 1 (2013), 47–60.

[11] V. G. Peretyat'kin, On complete theories with a finite number of denumerable models, Algebra and Logic, **12**, 5 (1973), 310–326.

КЛАССИФИКАЦИЯ МИНИМАЛЬНЫХ АЛГЕБР БИНАРНЫХ ОПЕРАЦИЙ РАНГА 3

Д. А. Еременко

Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет
"ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина),
ул. Профессора Попова, 2, Санкт-Петербург, 197376, Россия
e-mail: er_92@list.ru

1 Вводимые понятия и определения

Под *n-местной операцией* на множестве A понимают отображение из A^n в A. Множество всех n-местных операций на A обозначим через P_A^n.

Под рангом операции понимается мощность множества A ($k = |A|$).

Операции $f \in P_A^n$, где $A = \{a_0, \ldots, a_{k-1}\}$ можно представить как отображения

$$f : \{2^0, \ldots, 2^{k-1}\}^n \mapsto \{1, \ldots, 2^{k-1}\},$$

получаемых из f при кодировке $a_i \mapsto 2^i$. При этом операцию f зададим векторной формой $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{k^n-1}\}$, где $\alpha_i \in \{2^0, \ldots, 2^{k-1}\}, \alpha_i = f(2^{j_1}, \ldots, 2^{j_n})$, где $(j_1 \ldots j_n)$ есть представление i в системе исчисления по основанию k n-разрядным числом.

Определим n-местную операцию проектирования по i-ому аргументу следущим образом:

$$e_i^n(a_1, ...a_n) = a_i$$

Бинарная операция проектирования ранга 3 по первому аргументу в векторной форме записывается следующим образом: $e_1^2 = (111222444)$

Определим следующую метаоперацию на множестве операций — суперпозицию операций $f \in P_A^n$ и P_A^m

$$(f * f_1, \ldots, f_n)(a_1, \ldots, a_m) = f(f_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, f_n(a_1, \ldots, a_m))$$

Алгеброй n–местных операций над множеством A называют любое подмножество $K \subseteq P_A^n$, замкнутое относительно суперпозиций и содержащее все n–местные операции проектирования.

Назовем *наименьшей (тривиальной) алгеброй* алгебру, содержащую только операции проектирования.

Минимальной алгеброй назовем алгебру, не содержащую в себе подалгебр, кроме наименьшей (тривиальной).

Пусть K минимальная алгебра. Тогда *надминимальной алгеброй* U над K называется алгебра, не содержащая в себе подалгебр, которые содержат K.

Порождающим множеством для алгебры K будем называть такое множество операций, алгебраическое замыкание которых совпадает с K.

Базисом для алгебры K будем называть минимальное порождающее множество, алгебраическое замыкание которого (вместе с операциями проектирования) порождает алгебру K. При этом в перечислении порождающего базиса будем опускать операции проектирования, т.к. они всегда присутствуют в алгебре по определению [1]. Алгебру K будем обозначать через порождающий базис следующим образом: $K = [f_1, \ldots, f_m]$

Под *объединением алгебр* принято понимать алгебраическое замыкание объединения элементов, входящих в эти алгебры.

Неразложимой алгеброй будем называть алгебру, которая не представима в виде объединения собственных подалгебр. Из определения очевидно, что любой базис такой алгебры содержит только одну операцию.

Разложимой алгеброй будем называть алгебру, которая представима в виде объединения собственных подалгебр.

Неразложимая надминимальная алгебра над минимальной K не может быть надминимальной над другой минимальной алгеброй.

Разложимая надминимальная алгебра над минимальной алгеброй K содержит еще хотя бы одну другую минимальную алгебру.

2 Исследования решетки алгебр бинарных операций ранга 3

Ранее в работе Лау Д. [2] были получены все 699 алгебр унарных операций ранга 3, из них 5 максимальных и 13 минимальных. В работах [3, 4] были получены и описаны базисы 18 предполных классов решётки клонов ранга 3. Эти классы имеют конечные базисы и состоят из операций, зависящих не более чем от двух переменных. Таким образом, предполные классы в решётке клонов будут совпадать с предполными классами решётки бинарных операций ранга 3.

В работе [5] были найдены все минимальные алгебры в решётке бинарных операций ранга 3, но не удалось получить их классификацию. Для решения данной задачи потребовалось найти все надминимальные алгебры над всеми минимальными алгебрами. Для этого надминимальные алгебры были разбиты на два множества: разложимые и неразложимые.

3 Неразложимые надминимальные алгебры

$A = \{1, 2, 4\}$. Пусть K — минимальная алгебра бинарных операций над A. Тогда неразложимые надминимальные алгебры G над K могут быть порождены только операциями $[g] = G$ вида: $(x\alpha_1\alpha_2\alpha_3 y\alpha_4\alpha_5\alpha_6 z)$, где $x = f(1,1), y = f(2,2), z = f(4,4), f \in K \mid [f] = K$.

Приведенное выше свойство операций, порождающих неразложимые надминимальные алгебры, позволило наложить ограничения на множество рассматриваемых операций и найти все неразложимые надминимальные алгебры. Всего таких алгебр было найдено 87.

4 Разложимые надминимальные алгебры

Рассмотрим минимальную алгебру $[K] = f_{min}$. Базис, порождающий надминимальную алгебру над минимальной алгеброй $[K]$, может состоять только из f_{min} и других операций, порождающих минимальные алгебры. При нахождении надминимальных разложимых алгебр использовалось разложение замыкания:

$$[f_1, f_2, f_3 \dots, f_k] = [[f_1, f_2], \dots, [f_1, f_k], [f_2, f_3], \dots, [f_2, f_k], \dots, [f_{k-1}, f_k]].$$

Рассмотрим алгебры над $[K]$. Любая надминимальная алгебра над $[K]$ в своем разложении имеет пары $[f_{min}, f'_{min}]$, где f'_{min} порождает другую минимальную алгебру. Причем если какая-либо из пар $[f_{min}, f'_{min}]$ в разложении является надминимальной, то замыкание всего разложения либо совпадёт с замыканием этой пары, либо не будет порождать надминимальную алгебру. Если пара $[f_{min}, f'_{min}]$ в разложении не является надминимальной, то и замыкание всего разложения не будет порождать надминимальную алгебру. Таким образом, для нахождения надминимальных разложимых алгебр над K достаточно рассмотреть все возможные алгебры, базис которых состоит из пар $[f_{min}, f'_{min}]$. Всего было найдено 474 надминимальных разложимых алгебр.

5 Полученные результаты

Теорема 1. *Число различных надминимальных алгебр над всеми минимальными алгебрами равно 561, из них 474 разложимых и 87 неразложимых алгебр. Для каждой из 64 минимальных алгебр в таблице 1 приведено число надминимальных алгебр над ней, где в столбцах T 1 и T 2 указано количество неразложимых и разложимых алгебр соответственно. Эти алгебры полностью описаны.*

Таблица 1: Количество надминимальных алгебр над всеми минимальными алгебрами.

Cls	Alg	T 1	T 2	Cls	Alg	T 1	T 2
1	[111111111] [222222222] [444444444]	3	20	9	[114222144] [111224424] [121122444]	0	16
2	[142142142] [214214214] [421421421]	0	10	10	[114122424] [121224144]	0	10
3	[241241241]	0	3	11	[142421214]	0	8
4	[114114114] [122122122] [121121121] [144144144] [224224224] [424424424]	6	6	12	[122222444] [144222444] [111424444] [111222114] [111222224] [111121444]	1	9
5	[111422244] [141222414] [112221444]	0	11	13	[141222444] [111222244] [111222414] [111221444] [112222444] [111422444]	1	16
6	[114222424] [121222144] [114122444] [121224444] [111122424] [111224144]	0	7	13’	[121222124] [124222424] [114124444] [124224444] [111122124] [111124144]	1	16
7	[112222244] [141422444]	0	6	14	[111224444] [121222444] [111122444] [111222144]	2	16

	[111221414]				[114222444] [111222424]		
8	[121222424] [114224444] [111122144]	0	15	15	[122222224] [144424444] [111121114]	2	9
				16	[111124444] [111222124] [124222444]	2	10

Тут и далее $A = \{1, 2, 4\}$. Введем следующие множества унарных операций:

- $O_1 = \{f_a \mid f_a(1) = f_a(2) = f_a(4) = a, \text{где } a \in A\}$.
- $O_2 = \{f_a \mid f_a(a) = a, f_a(b) = c, f_a(c) = b, \text{где } a \neq b, a \neq c, b \neq c\ a, b, c \in A\}$.
- $O_3 = \{f \mid f(1) = 2, f(2) = 4, f(4) = 1\}$.
- $O_4 = \{f_{c,d} \mid f_{c,d}(a) = a, f_{c,d}(b) = b, f_{c,d}(c) = d,$ где $a \neq b, a \neq c, b \neq c, c \neq d\ a, b, c, d \in A\}$.
- $O_5 = \{f_{a,b} \mid f_{a,b}(a) = b, f_{a,b}(b) = b, f_{a,b}(c) = a,$ где $a \neq b, a \neq c, b \neq c,\ a, b, c \in A\}$.

Теорема 2. *Множество минимальных алгебр бинарных операций ранга 3 разбивается на следующие попарно непересекающиеся классы:*

- $K_1 = \{[g_{c_1}] \mid c_1 \in A\}$
$$g_{c_1}(y, x) = \begin{cases} f_{c_1}(x) \text{ для } y = 1, & \text{где } f_{c_1} \in O_1 \\ f_{c_1}(x) \text{ для } y = 2, & \text{где } f_{c_1} \in O_1 \\ f_{c_1}(x) \text{ для } y = 4, & \text{где } f_{c_1} \in O_1 \end{cases}$$
- $K_2 = \{[g_{c_1}] \mid c_1 \in A\}$
$$g_{c_1}(y, x) = \begin{cases} f_{c_1}(x) \text{ для } y = 1, & \text{где } f_{c_1} \in O_2 \\ f_{c_1}(x) \text{ для } y = 2, & \text{где } f_{c_1} \in O_2 \\ f_{c_1}(x) \text{ для } y = 4, & \text{где } f_{c_1} \in O_2 \end{cases}$$
- $K_3 = \{[g]\}$
$$g(y, x) = \begin{cases} f(x) \text{ для } y = 1, & \text{где } f_{c_1} \in O_3 \\ f(x) \text{ для } y = 2, & \text{где } f_{c_1} \in O_3 \\ f(x) \text{ для } y = 4, & \text{где } f_{c_1} \in O_3 \end{cases}$$

- $K_4 = \{[g_{c_1,c_2}] \mid c_1, c_2 \in A, c_1 \neq c_2\}$
  $g_{c_1,c_2}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = 1, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4 \\ f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = 2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4 \\ f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = 4 & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4 \end{cases}$

- $K_5 = \{[g_a] \mid a \in A\}$
  $g_a(y,x) = \begin{cases} f_a(x) \text{ для } y = a, & \text{где } f_a \in O_2 \\ e(x) \text{ для остальных } y \end{cases}$

- $K_6 = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A, c_i \neq c_j\}$
  $g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4 \\ f_{c_3,c_1}(x) \text{ для } y = c_1, & \text{где } f_{c_3,c_1} \in O_4 \\ e(x) \text{ для остальных } y \end{cases}$

- $K_7 = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A, c_i \neq c_j\}$
  $g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_3, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4 \\ f_{c_3,c_2}(x) \text{ для } y = c_1, & \text{где } f_{c_3,c_2} \in O_4 \\ e(x) \text{ для остальных } y \end{cases}$

- $K_8 = \{[g_a] \mid a \in A,\}$
  $g_a(y,x) = \begin{cases} f_a(x) \text{ для } y = a, & \text{где } f_a \in O_1 \\ e(x) \text{ для остальных } y \end{cases}$

- $K_9 = \{[g_{c_1,c_2}] \mid c_1, c_2 \in A, c_i \neq c_j\}$
  $g_{c_1,c_2}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4 \\ f_{c_2,c_1}(x) \text{ для } y = c_1, & \text{где } f_{c_2,c_1} \in O_4 \\ e(x) \text{ для остальных } y \end{cases}$

- $K_{10} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A, c_i \neq c_j\}$
  $g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4 \\ f_{c_3,c_1}(x) \text{ для } y = c_1, & \text{где } f_{c_3,c_2} \in O_4 \\ f_{c_2,c_3}(x) \text{ для } y = c_3, & \text{где } f_{c_2,c_3} \in O_4 \end{cases}$

- $K_{11} = [g]$
  $g_(y,x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ для } y = 1, & \text{где } [f_1] \in O_2 \\ f_2(x) \text{ для } y = 2, & \text{где } [f_2] \in O_2 \\ f_4(x) \text{ для } y = 4, & \text{где } [f_4] \in O_2 \end{cases}$

- $K_{12} = \{[g_{c_1,c_2}] \mid c_1, c_2 \in A, c_1 \neq c_2\}$
  $g_{c_1,c_2}(y,x) = \begin{cases} e(x) \text{ для } y = c_1 \\ f_{c_1,c_2}(x) \text{ для остальных } y, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4 \end{cases}$

- $K_{13} = \{[g_{c_1,c_2}] \mid c_1, c_2 \in A, c_1 \neq c_2\}$
  $g_{c_1,c_2}(y,x) = \begin{cases} e(x) \text{ для } y = c_1 \\ e(x) \text{ для } y = c_2 \\ f_{c_1,c_2}(x) \text{ для остальных } y, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4 \end{cases}$

- $K_{13'} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A, c_i \neq c_j\}$
$g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4 \\ f_{c_3}(x) \text{ для } y = c_3 & \text{где } f_{c_3} \in O_1 \\ e(x) \text{ для } y = c_1 \end{cases}$

- $K_{14} = \{[g_{c_1,c_2}] \mid c_1, c_2 \in A, c_1 \neq c_2\}$
$g_{c_1,c_2}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4 \\ e(x) \text{ для остальных } y \end{cases}$

- $K_{15} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A, c_i \neq c_j\}$
$g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_3, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4 \\ f_{c_3,c_2}(x) \text{для } y = c_1, & \text{где } f_{c_3,c_2} \in O_4 \\ f_{c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_2} \in O_1 \end{cases}$

- $K_{16} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A, c_i \neq c_j\}$
$g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4 \\ f_{c_1,c_3}(x) \text{ для } y = c_3, & \text{где } f_{c_1,c_3} \in O_4 \\ e(x) \text{ для остальных } y \end{cases}$

Список литературы

[1] N. A. Peryazev, Algebras of n-ary operations and multioperations. Materials of XVI International Conference “Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: modern problems and applications” (May 28–31, 2018, TSPU of Leo Tolstoy, Tula), 2018, 113–116 (Russian).

[2] D. Lau, Function Algebras on Finite Sets, Springer-Verlag, Berlin YeideWater Resourses. Research, 2006.

[3] S. V. Yablonskii, Functional constructions in a k-valued logic. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematic, **51** (1958) (Russian).

[4] V. M. Gnidenko, Determination of the orders of precomplete classes in three-valued logic, sb. Problemy Kibernetiki, Moscow, 8 (1962), 341–346 (Russian).

[5] D. A. Eremenko, Minimal Algebras of Binary Operations of Rank 3, Computer Tools in Education, 2020, (1), 38–48 (Russian, abstract in English).

E-КОМБИНАЦИИ ПОЧТИ ОМЕГА-КАТЕГОРИЧНЫХ СЛАБО o-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ[1]

Б. Ш. Кулпешов

Novosibirsk State
Technical University,
20, K. Marx ave., Novosibirsk,
630073, Russia;
Kazakh-British Technical University,
59, Tole bi st.,
Almaty, 050000, Kazakhstan

e-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

С. В. Судоплатов

Novosibirsk State
Technical University,
20, K. Marx ave., Novosibirsk,
630073, Russia;
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptyug ave., Novosibirsk,
630090, Russia;
Novosibirsk State University,
1, Pirogova street, Novosibirsk,
630090, Russia
e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

Ранее в работах [1]–[12] рассматривались различные комбинации теорий. В настоящей работе мы продолжаем исследование комбинаций, а именно, будем рассматривать E-комбинации почти ω-категоричных слабо o-минимальных теорий.

Введем необходимые определения.

Понятие *слабой o-минимальности* было первоначально исследовано Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стайнхорном в [13]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз, когда $a < c < b$, мы имеем $c \in A$. *Слабо o-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

Определение. [14, 15] Пусть T — полная теория, $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$. Тип $q(x_1, \ldots, x_n) \in S_n(\emptyset)$ называется $(p_1, \ldots, p_n)$-*типом*, если $q(x_1, \ldots, x_n) \supseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} p_i(x_i)$. Множество всех $(p_1, \ldots, p_n)$-типов теории T обозначается через $S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$. Счетная теория T называется *почти*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (AP08855544).

ω-категоричной, если для любых типов $p_1(x_1), \dots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$ существует лишь конечное число типов $q(x_1, \dots, x_n) \in S_{p_1,\dots,p_n}(T)$.

Почти ω-категоричность тесно связана с понятием эренфойхтовости теории. Так, в работе [14] доказано, что если T — почти ω-категоричная теория с условием $I(T, \omega) = 3$, то в теории T интерпретируется плотный линейный порядок.

Всюду в этой статье мы будем рассматривать линейно упорядоченные структуры, т.е. структуры языка, содержащего бинарный символ $<$, который удовлетворяет аксиомам линейного порядка.

Пусть M_i — линейно упорядоченная структура сигнатуры $\{<, \Sigma_i\}$ для каждого $i < \omega$, где Σ_i не содержит выделенных констант. Будем обозначать через $dcl^{<}_{M_i}(\emptyset)$ множество элементов структуры M_i, являющихся $\emptyset$-определимыми отношением порядка $<_{M_i}$.

Будем говорить что $M^+ := \langle \bigcup_{i\in\omega} M_i; <, \Sigma, E^2, c^i_k\rangle_{k<\lambda_i, i\in\omega}$ — *линейно упорядоченная непересекающаяся E-комбинация* (или просто *E-комбинация*) структур M_i, если $\Sigma := \cup_{i\in\omega}\Sigma_i$, $\{c^i_k \mid k < \lambda_i\} \subseteq dcl^{<}_{M_i}(\emptyset)$ для некоторого ординала λ_i; либо $M_l < M_m$, либо $M_m < M_l$ для любых $l, m \in \omega$, и E — отношение эквивалентности, разбивающее M^+ на выпуклые классы, так что для любого $a \in M^+$ $E(a, M^+) = M_i$ для некоторого $i < \omega$.

Таким образом, мы включаем в сигнатуру произвольной E-комбинации структур M_i, $i \in \omega$, все элементы, лежащие в $dcl^{<}_{M_i}(\emptyset)$ для каждого $i \in \omega$, т.е. если M_1 и M_2 — изоморфные копии одной и той же структуры M, которая имеет λ элементов, лежащих в $dcl^{<}_{M}(\emptyset)$ для некоторого ординала λ, то в сигнатуру E-комбинации от структур M_1 и M_2 будут включены 2λ элементов.

Здесь мы интересуемся вопросами сохранения тех или иных свойств первоначальных структур в их E-комбинации. Например, если все M_i являются почти ω-категоричными, то при каких условиях элементарная теория произвольной E-комбинации этих структур будет также почти ω-категоричной? Или когда она будет иметь максимальный счетный спектр?

Факт. Пусть T_i — почти ω-категоричная слабо o-минимальная теория для каждого $i \in \omega$, $M_i \models T_i$, M^+ — линейно упорядоченная непересекающаяся E-комбинация конечного числа таких моделей. Тогда $\mathrm{Th}(M^+)$ — почти ω-категоричная слабо -минимальная теория.

Мы говорим, что $\bar{a} := \langle a_1, \dots, a_n\rangle \in M^n$ образует *конечный линейный порядок* или *$F(n)$-порядок*, если $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, a_1 не имеет непосредственного предшественника в M, a_n не имеет непосредственного последователя в M, и a_{i+1} является непосредственным последователем элемента a_i для каждого $1 \le i \le n-1$.

Пример. Пусть $M := \langle \mathbb{Q}, <, P_i^1 \rangle_{i\in\omega}$ — линейно упорядоченная структура, $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, $P_i(M) = \{b \in \mathbb{Q} \mid b < \sqrt{2} + i\}$ для каждого $i \in \omega$. Тогда очевидно, что $P_i(M)$ выпукло для каждого $i \in \omega$ и

$$P_0(M) \subset P_1(M) \subset P_2(M) \subset \ldots \subset P_n(M) \subset \ldots$$

Замечаем, что поскольку структура $M_0 := \langle \mathbb{Q}, < \rangle$ является o-минимальной, то в силу теоремы 63 [16], $\mathrm{Th}(M)$ — слабо o-минимальная теория. Рассмотрим следующее множество формул: $\{\forall y[P_i(y) \to y < x] \mid i \in \omega\}$. Оно локально совместно и определяет полный тип над $\emptyset$. Обозначим его через $p(x)$. Этот тип является неизолированным; множество реализаций типа p может быть пустым, иметь порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Таким образом, $\mathrm{Th}(M)$ имеет ровно 3 счетные попарно неизоморфные модели, т.е. является эренфойхтовой. Следовательно, в силу теоремы 3.7 [17], $\mathrm{Th}(M)$ — почти ω-категоричная теория.

Пусть M^+ — линейно упорядоченная непересекающаяся E-комбинация счетного числа копий модели M. Очевидно, что M^+ не является слабо o-минимальной, поскольку $P_0(M^+)$ есть объединение бесконечного числа выпуклых множеств.

Утверждаем, что независимо от того как упорядочены E-классы в M^+ теория $\mathrm{Th}(M^+)$ имеет 2^ω счетных моделей.

Случай 1. E-классы плотно упорядочены без концевых точек.

Пусть $p^+(x) := \{\forall y[P_i(y) \to y < x \wedge E(y, x)] \mid i \in \omega\}$. Это множество формул совместно и определяет полный тип над $\emptyset$ в $\mathrm{Th}(M^+)$. Тип p^+ в каждом конкретном классе эквивалентности может не реализовываться, т.е. множество реализаций типа p может быть пустым, может иметь порядковый тип $[0, 1)\cap\mathbb{Q}$ или $(0, 1)\cap\mathbb{Q}$. Выделим произвольные ω классов эквивалентности с наименьшим левым классом: $E_0, E_1, E_2, \ldots$, т.е. существуют $a_0, a_1, a_2, \ldots$ такие, что $E_0 = E(a_0, M^+), E_1 = E(a_1, M^+), E_2 = E(a_2, M^+), \ldots$ и $E_0 < E_1 < E_2 < \ldots$. Будем рассматривать только счетные модели теории $\mathrm{Th}(M^+)$, в которых $p^+(E_i) \neq \emptyset$ для любого $i \in \omega$, а в остальных классах эквивалентности множество реализаций типа p^+ пустое. Определим следующую кодировку: если какой-то из этих классов реализуется множеством реализаций с наименьшим элементом, то кодируем его через 1, если же он реализуется множеством реализаций без наименьшего элемента, то кодируем его через 2. Поскольку всевозможных ω-последовательностей из 1 и 2 континуум, мы заключаем что $\mathrm{Th}(M^+)$ имеет 2^ω счетных моделей.

Также утверждаем, что в этом случае $\mathrm{Th}(M^+)$ является почти ω-категоричной.

Случай 2. E-классы упорядочены по типу ω.

Рассмотрим следующие формулы:

$$\phi_1(x) := \forall y[\neg E(x,y) \to x < y],$$

$$\phi_n(x) := \forall y[y < x \wedge \neg E(x,y) \to \vee_{i=1}^{n-1}\phi_i(y)], n \geq 2.$$

Очевидно, что $\phi_1(x)$ выделяет самый левый класс эквивалентности, $\phi_2(x)$ выделяет второй класс, $\phi_n(x)$ — n-тый класс эквивалентности для каждого $n < \omega$.

Рассмотрим следующее множество формул:

$$p_0(x) := \{\forall y[\phi_n(y) \to y < x] \mid n \in \omega\}.$$

Оно локально совместно. Следовательно, существует $M_1^+ \succ M^+$, в котором $p_0(x)$ реализуется счетным числом E-классов, упорядоченных по типу $\omega + \omega^*$.

Рассмотрим следующие формулы:

$$s_{1,E}(x,y) := x < y \wedge \neg E(x,y) \wedge \forall z(x \leq z \leq y \to E(x,z) \vee E(z,y)),$$

$$\begin{gathered} s_{n,E}(x,y) := x < y \wedge \neg E(x,y) \wedge \\ \exists t_1 \ldots \exists t_{n-1}[\neg E(x,t_1) \wedge \wedge_{i=1}^{n-2}\neg E(t_i,t_{i+1}) \wedge \neg E(t_{n-1},y) \\ \wedge x < t_1 < \ldots < t_{n-1} < y \wedge \forall t(x \leq t \leq y \to \\ (E(x,t) \vee \vee_{i=1}^{n-1}E(t,t_i) \vee E(t,y))], n \geq 2. \end{gathered}$$

Пусть $p(x) := p_0(x) \cup \{P_0(x)\}$. Оно определяет полный тип над $\emptyset$. Тогда, рассматривая для каждого натурального $k \geq 1$ следующее множество формул:

$$p(x) \cup p(y) \cup \{s_{k,E}(x,y)\},$$

мы получаем, что число (p_1,p_2)-типов бесконечно, где $p_i(x) := p(x), i = 1,2$, и следовательно $\mathrm{Th}(M^+)$ не является почти ω-категоричной.

Пусть $\mathbb{ZE}$ обозначает множество E-классов, упорядоченных по типу $\omega^* + \omega$. Тогда обозначим через $F(k)^{\mathbb{ZE}}$ ($\omega^{\mathbb{ZE}}$ и $\mathbb{Q}^{\mathbb{ZE}}$) множество $\mathbb{ZE}$-копий, упорядоченных по типу $F(k)$ (ω и $\mathbb{Q}$ соответственно). Тогда мы утверждаем, что $p_0(x)$ может быть реализован следующим множеством:

$$F_1(k_1)^{\mathbb{ZE}} + \mathbb{Q}^{\mathbb{ZE}} + F_2(k_2)^{\mathbb{ZE}} + \mathbb{Q}^{\mathbb{ZE}} + \ldots + F_n(k_n)^{\mathbb{ZE}} + \mathbb{Q}^{\mathbb{ZE}}$$

для любых $0 \leq n, k_i \leq \omega$, где для каждого $2 \leq i \leq n-1$ если $k_i \neq 0$, то $k_i \geq 2$; и если $k_i = \omega$, то $F_i(k_i)^{\mathbb{ZE}} \equiv \omega^{\mathbb{ZE}}$, откуда получаем, что теория $\mathrm{Th}(M^+)$ имеет 2^ω счетных моделей.

Теорема. *Пусть T — почти ω-категоричная слабо o-минимальная теория языка, не содержащего выделенных констант, $M \models T$, M^+ — линейно упорядоченная непересекающаяся E-комбинация счетного числа копий структуры M. Предположим, что теория $\mathrm{Th}(M^+)$ слабо o-минимальна. Тогда имеет место следующее:*

(1) *множество M^+/E разбивается на конечное число выпуклых множеств, на каждом из которых либо все элементы имеют как непосредственного предшественника, так и непосредственного последователя, либо все элементы не имеют ни непосредственного предшественника, ни непосредственного последователя;*

(2) *M — плотная структура.*

(3) *M — 1-неразличимая структура.*

Доказательство. Доказательство теоремы. Рассмотрим следующую формулу:

$$\theta(x) := \exists t \exists y [t < x < y \wedge \neg E(t, x) \wedge \neg E(x, y) \wedge$$

$$\forall u \forall z (t < u < x < z < y \to (E(t, u) \vee E(u, x)) \wedge (E(x, z) \vee E(z, y))].$$

Поскольку теория $\mathrm{Th}(M^+)$ слабо o-минимальна, то $\theta(M^+)$ является объединением конечного числа выпуклых множеств, и поэтому (1) выполняется.

Докажем теперь, что M — плотная структура. Если M не является плотной, то существуют элементы в M, имеющие непосредственного предшественника или непосредственного последователя. В силу почти ω-категоричности и слабой o-минимальности теории T существует лишь конечное число элементов в M, имеющих непосредственного предшественника или непосредственного последователя. Рассмотрим следующую формулу:

$$\phi(x) := \exists y [x < y \wedge \forall z (x < z \to y \leq z)].$$

Очевидно, что $\phi(M^+)$ есть объединение бесконечного числа $\neg\phi(M^+)$-отделимых выпуклых множеств, откуда структура M^+ не является слабо o-минимальной, противореча условиям теоремы.

Докажем теперь, что M — 1-неразличимая структура. Если это не так, то существуют $a, b \in M$ такие, что $a \neq b$ и $tp(a/\emptyset) \neq tp(b/\emptyset)$. Следовательно, существует L-формула $\psi(x)$ такая, что $M \models \psi(a) \wedge \neg\psi(b)$, т.е. $\psi(M) \neq M$. В силу слабой o-минимальности можем считать что $\psi(M)$ выпукло. Но тогда $\psi(M^+)$ есть объединение бесконечного числа $\neg\psi(M^+)$-отделимых выпуклых множеств, противореча слабой o-минимальности структуры M^+. $\square$

Следствие. *Пусть T_i — почти ω-категоричная слабо о-минимальная теория языка, не содержащего выделенных констант, для каждого $i \in \omega$, $M_i \models T_i$, M^+ — линейно упорядоченная непересекающаяся E-комбинация структур M_i. Предположим, что теория* $\mathrm{Th}(M^+)$ *слабо о-минимальна. Тогда имеет место следующее:*

(1) *M^+/E разбивается на конечное число выпуклых множеств, на каждом из которых либо все элементы имеют как непосредственного предшественника, так и непосредственного последователя, либо все элементы не имеют ни непосредственного предшественника ни непосредственного последователя.*

(2) *M_i — плотная структура почти для всех $i \in \omega$.*

(3) *M_i — 1-неразличимая структура почти для всех $i \in \omega$.*

Список литературы

[1] S. V. Sudoplatov, Combinations of structures, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **24** (2018), 82–101.

[2] S. V. Sudoplatov, Closures and generating sets related to combinations of structures, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **16** (2016), 131–144.

[3] S. V. Sudoplatov, Families of language uniform theories and their generating sets, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **17** (2017), 62–76.

[4] S. V. Sudoplatov, On semilattices and lattices for families of theories, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 980–985.

[5] S. V. Sudoplatov, Combinations related to classes of finite and countably categorical structures and their theories, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 135–150.

[6] S. V. Sudoplatov, Relative e-spectra, relative closures, and semilattices for families of theories, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 296–307.

[7] In. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov, Families of theories of Abelian groups and their closures, Bulletin of Karaganda University. Mathematics, **92**, 4 (2018), 72–78.

[8] B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, On P-combinations of ordered theories, Traditional International April scientific conference in honor

of the Science Day of the Republic of Kazakhstan. Abstracts, Almaty: Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 2019, 30–31.

[9] B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, On Ehrenfeuchtness of a P-combination of ordered theories, Materials of the conference "Algebra and Mathematical Logic: Theory and Applications, (Kazan, June 24–28, 2019), Kazan: Edition of Kazan Federal University, 2019, 131–133.

[10] B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, P-combinations of ordered theories, International Conference "Mal'tsev Meeting", August 19–23, 2019, Collection of Abstracts, Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, 2019, p. 190.

[11] B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, P-combinations of ordered theories, Lobachevskii Journal of Mathematics. **41**, 2 (2020), 227–237.

[12] B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, P^*-combinations of almost ω-categorical weakly o-minimal theories, Lobachevskii Journal of Mathematics, **42**, 4 (2021), 743–750.

[13] H. D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields, Transactions of The American Mathematical Society, **352**, 12 (2000), 5435–5483.

[14] K. Ikeda, A. Pillay, A. Tsuboi, On theories having three countable models, Mathematical Logic Quarterly, **44**, 2 (1998), 161–166.

[15] S. V. Sudoplatov, Classification of countable models of complete theories. Part 1, Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University Publishing House, 2018, ISBN 978-5-7782-3527-4, 326 p.

[16] B. S. Baizhanov, Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, The Journal of Symbolic Logic, **66** (2001), 1382–1414.

[17] B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, Linearly ordered theories which are nearly countably categorical, Mathematical Notes, **101**, 3 (2017), 475–483.

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ КУБИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

С. Б. Малышев

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: sergey2-mal1@yandex.ru

Определение. [1] *Предгеометрией* называется множество S вместе с определённой операцией замыкания $\mathrm{cl} : P(S) \to P(S)$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) для любого $X \subseteq S$ выполняется $X \subseteq \mathrm{cl}(X)$;

2) для любого $X \subseteq S$ выполняется $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$;

3) для любого $X \subseteq S$ и любых $a, b \in S$ если $a \in \mathrm{cl}(X \cup \{b\}) - \mathrm{cl}(X)$, то $b \in \mathrm{cl}(X \cup \{a\})$;

4) для любого $X \subseteq S$ если $a \in \mathrm{cl}(X)$, то $a \in \mathrm{cl}(Y)$ для некоторого конечного $Y \subseteq X$.

При наличии предгеометрии $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ каждое подмножество $X \subseteq S$ имеет минимальное множество $X' \subseteq X$ такое, что $\mathrm{cl}(X) = \mathrm{cl}(X')$. Это минимальное множество X' называется *базисом* множества X. При этом мощность $|X'|$ не зависит от выбора базиса в X, и эта мощность называется *размерностью* множества X в предгеометрии $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$, обозначается $\dim(X)$.

По определению имеем $\dim(X) = \dim(\mathrm{cl}(X))$, т.е. размерность сохраняется при переходе к замыканию множества X в предгеометрии $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$.

Если $\dim(X) \in \omega$, то множество X называется *конечномерным.*

Определение. [1]. Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется *тривиальной* или *вырожденной*, если для любого $X \subseteq S, \mathrm{cl}(X) = \bigcup\{\mathrm{cl}(\{a\}) \mid a \in X\}$.

Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется *модулярной*, если для любых замкнутых множеств $X_0, Y_0 \subseteq S$, X_0 независимо от Y_0 относительно $X_0 \cap Y_0$, т.е. для любых конечномерных замкнутых множеств $X \subseteq X_0$, $Y \subseteq Y_0$ верно

$$\dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y) = \dim(X \cup Y).$$

Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется *локальной модулярной*, если для любого $a \in S$, предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}_{\{a\}}\rangle$ модулярна, где $\mathrm{cl}_{\{a\}}(X) = \mathrm{cl}(X \cup \{a\})$.

Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется *проективной*, если она модулярная и не тривиальная, и *локально проективной*, если она локально модулярная и не тривиальная.

Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется *локально конечной*, если для любого конечного подмножества $A \subseteq S$, множество $\mathrm{cl}(A)$ конечно.

Определение. Пусть S — модель теории T. Тогда оператором *алгебраического замыкания* для модели M называется оператор $\mathrm{acl} : P(M) \to P(M)$ такой, что для любого подмножества $X \subseteq S$, $\mathrm{acl}(X) = \{a \in S \mid S \models \exists^{<\omega} x\phi(x, \bar{b}) \wedge \phi(a, \bar{b})$ для некоторой формулы $\phi(x, \bar{y})$ и $\bar{b} \in X\}$.

В дальнейшем будут рассматриваться предгеометрии вида $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$.

Определение. [2, 3]. Назовём *n-мерным кубом* или *n-кубом* всякий граф, изоморфный графу с носителем $\{0, 1\}^n$, в котором две вершины $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ и $(\delta'_1, \ldots, \delta'_n)$ смежны тогда и только тогда, когда они различаются ровно одной координатой. При этом описанный граф Q_n с носителем $\{0, 1\}^n$ называется *каноническим представителем* класса *n-кубов.*

Определение. [2, 3]. Пусть λ — некоторый бесконечный кардинал. Назовём *λ-мерным кубом*, или *λ-кубом*, всякий граф, изоморфный графу $\mathrm{Q} = \langle X; R\rangle$, удовлетворяющему следующим условиям:

1) носитель $X \subseteq \{0, 1\}^\lambda$ порожден из произвольной функции $f \in X$ оператором $\langle f\rangle$, который к множеству $\{f\}$ присоединяет результат замены любого конечного набора значений $(f(i_1), \ldots, f(i_m))$ на набор значений $(1 - f(i_1), \ldots, 1 - f(i_m))$;

2) отношение R состоит из рёбер, связывающих функции, различающиеся ровно одной координатой.

Определение. [2, 3]. *Кубической системой* называется граф $\Gamma = \langle X; R\rangle$, у которого каждая компонента связности является кубом. Теория T графовой сигнатуры $\{R^{(2)}\}$ называется *кубической*, если $T = \mathrm{Th}(M)$ для некоторой кубической системы M. При этом система M называется *кубической моделью* теории T.

Определение. [2, 3] *Инвариантом* кубической теории T называется функция

$$Inv_T : \omega \cup \{\infty\} \to \omega \cup \{\infty\},$$

удовлетворяющая следующим условиям:

1) каждому натуральному числу n ставится в соответствие число $Inv_T(n)$ компонент связности всякой модели теории T, являющихся n-кубами, если это число конечно, и символ ∞, если это число бесконечно;

2) символу ∞ ставится в соответствие значение 0, если в моделях теории T нет бесконечномерных кубов (или, что то же самое, размерности кубов ограничены в совокупности), и значение 1 — в противном случае.

Определение. [2, 3] *Диаметром* $d(T)$ кубической теории T называется максимальное расстояние между элементами моделей теории T, если эти расстояния ограничены, и полагается $d(T) \rightleftharpoons \infty$ в противном случае. *Носителем* (соответственно ∞-*носителем*) $\mathrm{Supp}(T)$ $(\mathrm{Supp}_\infty(T))$ теории T называется множество $\{n \in \omega \cup \{\infty\} \mid Inv_T(n) \neq 0\}$ $(\{n \in \omega \cup \{\infty\} \mid Inv_T(n) = \infty\})$.

Замечание 1. Для систем $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ в кубических теориях T выполняется свойство замены тогда и только тогда, когда модели S теории T не содержат бесконечных кубов, в частности, когда нет конечных кубов неограниченной размерности.

Действительно, для конечных кубов имеем вырожденную предгеометрию, для которой замена элемента алгебраического замыкания на любой другой элемент из этого замыкания будет означать либо замену элемента из $\mathrm{acl}(\emptyset)$ на другой элемент из этого множества, либо замену одного элемента конечного куба C на другой с захватом всех элементов из C. А если рассмотреть три различных элемента a, b, c некоторого бесконечного куба C', для которых $d(a, c) > 1$ и b принадлежит некоторому кратчайшему (a, c)-маршруту, то $b \in \mathrm{acl}(\{c, a\}) \setminus \mathrm{acl}(\{c\})$, но $a \notin \mathrm{acl}(\{c, b\})$.

В силу замечания 1 для систем $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ в качестве размерности следует рассматривать размерность кубов и говорить о c-модулярности предгеометрий, т.е. о связи размерностей кубов, не опираясь на свойство замены. При этом системы $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$, удовлетворяющие условиям 1), 2), 4) определения предгеометрии будут называться *c-предгеометриями.*

Определение. Для кубических теорий T в качестве*c-размерности* $\dim_c(A)$, где $A \subseteq M \models T$, рассматривается значение $\mu_A + \sum\limits_{C'} \nu_{A\cap C'}$, где μ_A — число конечных кубов $C \subseteq M$ с условием $C \cap A \neq \emptyset$, а $\nu_{A\cap C'}$ — размерности наименьших подкубов K бесконечных кубов $C' \subseteq M$ с условием $(A \cap C') \subseteq K$.

Определение. c-Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется *c-модулярной*, если для любых acl-замкнутых множеств $X_0, Y_0 \subseteq S$, X_0 независимо от Y_0

относительно $X_0 \cap Y_0$, т.е. для любых конечномерных acl-замкнутых множеств $X \subseteq X_0$, $Y \subseteq Y_0$ верно:

1) если существует бесконечномерный куб C, для которого $X \cap Y \cap C = \emptyset$, $X \cap C \neq \emptyset$, $Y \cap C \neq \emptyset$, то выполняется равенство:

$$\dim_c(X \cap C) + \dim_c(Y \cap C) + \rho(X \cap C, Y \cap C) = \dim_c((X \cup Y) \cap C), \quad (1)$$

где $\rho(X \cap C, Y \cap C)$ — кратчайшее расстояние между вершинами $x \in X \cap C$ и $y \in Y \cap C$;

2) в остальных случаях для компонент связности C выполняется равенство:

$$\dim_c(X \cap C) + \dim_c(Y \cap C) - \dim_c(X \cap Y \cap C) = \dim_c((X \cup Y) \cap C). \quad (2)$$

Замечание 2. Согласно определениям c-размерности и c-модулярности при суммировании соотношений (**??**) и (2) по всем связным компонентам C получается некоторый обобщенный аналог формулы модулярности в предгеометриях для c-предгеометрий:

$$\begin{aligned}\sum_C \dim_c(X \cap C) + &\sum_C \dim_c(Y \cap C) - \\ &- \sum_C \dim_c(X \cap Y \cap C) + \sum_C \rho(X \cap C, Y \cap C) = \\ &= \sum_C \dim_c((X \cup Y) \cap C).\end{aligned} \quad (3)$$

При этом за исключением первого случая в определении c-модулярности выполняется равенство:

$$\dim_c(X) + \dim_c(Y) - \dim_c(X \cap Y) = \dim_c(X \cup Y). \quad (4)$$

Заметим, что в соответствии с определением c-размерности формулу (3)) можно переписать в следующем виде:

$$\mu_X + \mu_Y - \mu_{X \cap Y} = \mu_{X \cup Y},$$

$$\sum_C \nu_{X \cap C} + \sum_C \nu_{Y \cap C} - \sum_C \nu_{X \cap Y \cap C} + \sum_C \rho(X \cap C, Y \cap C) = \\ = \sum_C \nu_{(X \cap C) \cup (Y \cap C)}.$$

Действительно, пусть существует бесконечномерный куб C: $X \cap Y \cap C = \emptyset$, $X \cap C \neq \emptyset$, $Y \cap C \neq \emptyset$. В данном случае $\nu_{X \cap Y} = 0$, а $\nu_{(X \cap C) \cup (Y \cap C)}$ равно размерности двух кубов $X \cap C$, $Y \cap C$ и размерности куба между ними, та в свою очередь совпадает с кратчайшим расстоянием между вершинами $x \in X \cap C$ и $y \in Y \cap C$ — $\rho(X, Y)$. Если множества X и Y пересекаются в бесконечномерном кубе C, то есть $X \cap Y \cap C \neq \emptyset$, то $\rho(X, Y) = 0$ и выполняется равенство

$$\nu_{X \cap C} + \nu_{Y \cap C} - \nu_{X \cap Y \cap C} = \nu_{(X \cap C) \cup (Y \cap C)}.$$

Определение. c-предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl} \rangle$ называется *c-проективной*, если она c-модулярна и не тривиальная.

Теорема. *Пусть T — кубическая теория. Тогда для некоторой (любой) модели $M = \langle S, R \rangle$ теории T выполняется одно из следующих двух условий:*

1) *все компоненты связности модели M конечны и имеют ограниченную мощность, а предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl} \rangle$ вырожденная;*

2) *модель M имеет бесконечную компоненту связности, которая является λ-кубом для некоторого кардинала λ, а c-предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl} \rangle$ является c-модулярной.*

Доказательство. 1. Докажем, что предгеометрия, удовлетворяющая условиям пункта 1, вырождена.

При взятии алгебраического замыкания будем рассматривать формулы $\exists^{<\omega} x \phi_n(x, \bar{b})$, где ϕ_n — формулы, не зависящие от $\bar{b}$ и принимающие значение истины, если вершина x инцидентна n рёбрам и таких вершин конечное число, $n \in \mathbb{N}$, или кортеж $\bar{b}$ состоит из одного элемента, если имеется бесконечно много вершин степени n. В первом случае решения формул $\phi_n(x, \bar{b})$ будут составлять множество $\mathrm{acl}(\emptyset)$, а во втором случае множество кубов, содержащих элементы b и составляющих замыкание $\mathrm{acl}(X)$ множества $X \subseteq S$, элементы которого лежат в конечномерных кубах.

Пусть имеется бесконечное число кубов одной и той же конечной размерности. Множество всех их вершин обозначим S'. Благодаря формулам $\exists^{<\omega} x \phi_n(x, \bar{b})$ замыкание любого подмножества S будет содержать $S'' = S \backslash S'$, то есть для любого $X \subseteq S$ верно $S'' \subseteq \mathrm{acl}(X)$, в частности, $S'' \subseteq \mathrm{acl}(\emptyset)$.

Заметим, что для любого множества вершин X из куба $C \subseteq S'$ верно $\mathrm{a}cl(X) = S'' \cup C$. Если же множество X содержит элементы из нескольких кубов $C_1, \ldots, C_m$ таких, что $C_1, \ldots, C_m \subseteq S'$, то верно $\mathrm{acl}(X) = S'' \cup C_1 \cup \ldots \cup C_m$.

Получается, что для любого множества X, некоторые элементы которого содержатся в S', то есть $X \cap S' \neq \emptyset$, верно $\bigcup \{\mathrm{acl}(\{a\}) | \ a \in X\} = S'' \cup C_1 \cup \ldots \cup C_1 \cup \ldots \cup C_m \cup \ldots \cup C_m = S'' \cup C_1 \cup \ldots \cup C_m = \mathrm{acl}(X)$.

Если же количество кубов, любой конечной размерности, конечно, то есть $S' = \emptyset$, то замыкание любого подмножества носителя модели, $X \subseteq S$, будет совпадать со всем носителем S. Значит верно следующее равенство $\mathrm{acl}(X) = S = S \cup S \ldots \cup S = \bigcup\{\mathrm{acl}(\{a\}) \,|\, a \in X\}$.

Получается для любого $X \subseteq S$, $\mathrm{acl}(X) = \bigcup\{\mathrm{acl}(\{a\}) \mid a \in X\}$. Значит по определению предгеометрия вырожденная.

Предположим, что модель M содержит бесконечную компоненту связности. Докажем, что в этом случае предгеометрия невырождена. Замыкание любого множества из двух и более вершин этой компоненты связности является наименьшим по количеству инцидентных ребер вершинам и содержащий все вершины из данного множества. А замыкание любого одноэлементного множества $\{a\}$, для любого $a \in S$, переводит его в себя. Следовательно, по определению предгеометрия невырождена.

2. В силу того, что любое непустое пересечение кубов в модели кубической теории снова является кубом, замечаем, что за исключением первого случая в определении c-модулярности в условиях второго пункта теоремы выполняется равенство (4)), задающее c-модулярность.

В силу замечания 2 выполняются равенства:

$$\mu_X + \mu_Y - \mu_{X\cap Y} = \mu_{X\cup Y},$$

$$\nu_{X\cap C} + \nu_{Y\cap C} - \nu_{X\cap Y\cap C} + \rho(X\cap C, Y\cap C) = \nu_{(X\cap C)\cup(Y\cap C)}.$$

Таким образом, c-предгеометрия является c-модулярной. □

Следствие. *Пусть T — кубическая теория, а модель $M = \langle S, R\rangle$ теории T имеет бесконечную компоненту связности, которая является λ-кубом для некоторого кардинала λ. Тогда c-предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ является c-проективной.*

Список литературы

[1] A. Pillay, Geometric Stability Theory, Oxford: Clarendon Press, 1996, 361 pp.

[2] S. V. Sudoplatov, Group polygonometries, Novosibirsk: NSTU, 2013, 302 pp.

[3] S. V. Sudoplatov, Models of cubic theories, Bulletin of the Section of Logic, **43**, 1–2 (2014), 19–34.

SOME CLOSURES FOR PARTIALLY ORDERED FAMILIES OF THEORIES[1]

N. D. Markhabatov

Novosibirsk State Technical University,
20, K. Marx ave., Novosibirsk, 630073, Russia

e-mail: nur_24.08.93@mail.ru

S. V. Sudoplatov

Novosibirsk State Technical University,
20, K. Marx ave., Novosibirsk, 630073, Russia;
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptyug ave., Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
1, Pirogova st., Novosibirsk, 630090, Russia

e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

We continue to study model-theoretic [1, 7] and topological [3] properties of families of elementary theories applying a general approach for closures of families of theories [4, 5] for some special cases of partially ordered families.

It is shown that for any partially ordered family $\mathcal{T}$ with finitely many maximal chains, $Cl_1(\mathcal{T})$ consists of unions for unions of chains of $\mathcal{T}$ and for intersections of countable chains of $\mathcal{T}$ which are ordered by the type ω^*.

Definition. [5]. For a family $\mathcal{T}$ of theories in a language Σ, the set $\mathrm{Sent}(\Sigma)$ of all sentences in the language Σ, and a theory T we put $T \in Cl_1(\mathcal{T})$ if $T \in \mathcal{T}$, or T is nonempty and

$$T = \{\varphi \in \mathrm{Sent}(\Sigma) \mid |(\mathcal{T}')_\varphi| \geq \omega\} \tag{1}$$

for some $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, where $(\mathcal{T}')_\varphi$ is a neighbourhood consisting of all theories in $\mathcal{T}'$ containing the sentence φ.

If $\mathcal{T}'$ is fixed then we say that T *belongs to the* Cl_1*-closure of* $\mathcal{T}$ *with respect to* $\mathcal{T}'$ and T is an *accumulation point* of $\mathcal{T}$ with respect to $\mathcal{T}'$.

The following theorems describe Cl_1-closures for $\subseteq$-ordered families of theories and confirm the transitivity of the operator Cl_1.

[1]This research was partially supported by RFBR (project No. 20-31-90003), the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002, and Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855497).

Theorem 1. [5] *For any linearly $\subseteq$-ordered family $\mathcal{T}$, $\mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})$ consists of unions for subfamilies of $\mathcal{T}$, and of intersections for countable subfamilies of $\mathcal{T}$ ordered by the type ω^*.*

Theorem 2. [5] *For any linearly $\subseteq$-ordered family $\mathcal{T}$, $\mathrm{Cl}_1(\mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})) = \mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})$.*

Theorem 1 admits the following generalization for partially $\subseteq$-ordered families of theories with finitely many maximal $\subseteq$-chains.

Theorem 3. *For any partially $\subseteq$-ordered family $\mathcal{T}$ with finitely many maximal chains, $\mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})$ consists of unions T_1 of chains in $\mathcal{T}$, of intersections T_2 of countable chains in $\mathcal{T}$ which are ordered by the type ω^*, and of unions of theories having the forms T_1 and T_2 being accumulation points for theories in $\mathcal{T}$ in distinct maximal chains.*

Proof. The proof is a modification and an application of the proof of Theorem 1. Since both $\mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})$ and the set of unions for subfamilies of $\mathcal{T}$ contain all theories in $\mathcal{T}$ without loss of generality we assume that $\mathcal{T}$ is formed by finitely many maximal infinite $\subseteq$-chains $C_1, \ldots, C_n$.

It suffices to show that

1) for each theory T belonging to $\mathrm{Cl}_1(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{T}$ with respect to a subfamily $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ $T = \bigcup \mathcal{T}''$ for some infinite $\mathcal{T}'' \subseteq \mathcal{T}'$, or $T = \bigcap \mathcal{T}'''$ for some countable $\mathcal{T}''' \subseteq \mathcal{T}'$ ordered by the type ω^*, or T is a union of these unions and intersections such that these unions and intersections are accumulation points for theories in $\mathcal{T}$;

2) for each subfamily $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ with infinite $\mathcal{T}' \cap C_i$, $T_i^1 = \bigcup(\mathcal{T}' \cap C_i)$ belongs to $\mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})$, $T_i^2 = \bigcap(\mathcal{T}' \cap C_i)$ belongs to $\mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})$ if $\mathcal{T}' \cap C_i$ is ordered by the type ω^*, and unions of some T_i^1 and T_j^2 being accumulation points for theories in $\mathcal{T}$.

If $\mathcal{T}' \subseteq C_i$ for some $i \leq n$, then the items 1) and 2) hold by Theorem 1.

Now the general case is defined for $\mathcal{T}'$ having infinite intersections with several C_i. Considering the equation (1) we observe that if T is an accumulation point of $\mathcal{T}$ with respect to $\mathcal{T}'$ then T collects sentences φ of theories with infinite $(\mathcal{T}' \cap C_i)_\varphi$, where again there are two possibilities: either we take the unions $\cup(\mathcal{T}' \cap C_i)$, or intersections $\cap(\mathcal{T}' \cap C_i)$ if $\mathcal{T}' \cap C_i$ is ordered by the type ω^*. Now we take unions of these cases obtaining T as a collected accumulation point for $\mathcal{T}' = \bigcup\limits_i(\mathcal{T}' \cap C_i)$.

Thus each accumulation point for $\mathcal{T}$ is reduced to the unions and intersections above. □

Remark. Theorem 3 can fail for the case of infinitely many maximal chains. Indeed, taking an infinite family $\mathcal{T}$ of theories with disjoint nonempty languages we obtain only one-element maximal chains and accumulation points T in $\mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})$ having the empty language. All these accumulation points are not represented in the form of Theorem 3. In fact we have a general property for families of theories with trivial chains, say, for instance, for families of complete theories in a given language: accumulation points for these families are not represented in the form of Theorem 3.

Corollary 4. *For any countable family $\mathcal{T}$ with finitely many maximal $\subseteq$-chains, $\mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})$ consists of unions T_1 of chains in $\mathcal{T}$, of intersections T_2 of countable chains in $\mathcal{T}$, and of unions of theories having the forms T_1 and T_2 being accumulation points for theories in $\mathcal{T}$ in distinct maximal chains.*

Proof. By Theorem 3 it suffices to show that intersections $\bigcap\mathcal{T}' \notin \mathcal{T}$, for $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ forming chains, are reduced to intersections of subfamilies ordered by the type ω^*. Now we consider arbitrary $\mathcal{T}'$ as above and repeat the arguments for [5, Corollary 3.12]:

Since $\bigcap\mathcal{T}' \notin \mathcal{T}$ and $\mathcal{T}$ is countable, $\mathcal{T}'$ is also countable: $\mathcal{T}' = \{T_i \mid i \in \omega\}$, and $\mathcal{T}'$ does not have the least element. We construct by induction the required subfamily $\mathcal{T}'' \subseteq \mathcal{T}'$ ordered by the type ω^* and with $\bigcap\mathcal{T}'' = \bigcap\mathcal{T}'$ as follows. At the initial step $n = 0$ we include T_0 with $k_0 = 0$ into $\mathcal{T}''$. If theories $T_{k_0} \supsetneqq \ldots \supsetneqq T_{k_n}$ are already included into $\mathcal{T}''$ on some step n then on the next step $n + 1$ we include into $\mathcal{T}''$ a theory $T_{k_{n+1}} \in \mathcal{T}'$ such that $T_{k_{n+1}} \subsetneqq T_{k_n} \cap T_0 \cap T_1 \cap \ldots \cap T_n$. By the construction the family $\mathcal{T}'' = \{T_{k_n} \mid n \in \omega\}$ is ordered by the type ω^* and satisfies $\bigcap\mathcal{T}'' = \bigcap\mathcal{T}'$. □

Corollary 5. *For any countable family $\mathcal{T}$ with finitely many maximal $\subseteq$-chains, $\mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})$ consists of unions T_1 of chains of $\mathcal{T}$ ordered by the type ω, of intersections T_2 of countable chains of $\mathcal{T}$ ordered by the type ω^*, and of unions of theories of forms T_1 and T_2 being accumulation points for theories in $\mathcal{T}$ in distinct maximal chains.*

Proof. By Theorem 3 it suffices to notice that unions $\bigcup\mathcal{T}' \notin \mathcal{T}$ for subfamilies $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ are reduced to unions ordered by the type ω. It is implied replacing $\supsetneqq$ by $\subsetneqq$, and vice versa, in the arguments for Corollary 4. □

Theorem 2 admits the following generalization for partially $\subseteq$-ordered families of theories with finitely many maximal $\subseteq$-chains.

Theorem 6. *For any family $\mathcal{T}$ with finitely many maximal $\subseteq$-chains, $\mathrm{Cl}_1(\mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})) = \mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})$.*

Proof. Since $\mathrm{Cl}_1(\mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})) \supseteq \mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})$ it suffices to show that each theory $T \in \mathrm{Cl}_1(\mathrm{Cl}_1(\mathcal{T}))$ belongs to $\mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})$. By the definition we can assume that $T \notin \mathcal{T}$

and there is an infinite subfamily $\mathcal{T}' \subseteq \mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})$ such that T belongs to $\mathrm{Cl}_1(\mathrm{Cl}_1(\mathcal{T}))$ with respect to $\mathcal{T}'$. Since $\mathcal{T}$ and by Theorem 3 $\mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})$ have finitely many maximal $\subseteq$-chains, in view of Theorem 3 we can suppose that T is a finite union of theories $T'' = \bigcup \mathcal{T}''$ for strictly increasing chains $\mathcal{T}'' \subseteq \mathcal{T}'$ and of theories $T''' = \bigcap \mathcal{T}'''$ for strictly decreasing $\mathcal{T}''' \subseteq \mathcal{T}'$ ordered by the type ω^*.

By Theorems 1 and 2 each T'' equals $\bigcup \mathcal{T}^*$ for $\mathcal{T}^* = \{T^* \in \mathcal{T} \mid T^* \subset T''\}$ and each T''' equals $\bigcap \mathcal{T}^{**}$ for strictly decreasing $\mathcal{T}^{**} \subseteq \mathcal{T}$ ordered by the type ω^*. Collecting the arguments above and the structure of Cl_1-closure in Theorem 3 we obtain T is represented as a finite union of some accumulation points of forms T'' and T''' for $\mathcal{T}$, i.e., $T \in \mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})$. □

References

[1] Handbook of mathematical logic, ed. J. Barwise, Moscow: Nauka, 1982, Vol. 1, Model Theory,392 p. (Russian)

[2] Yu. L. Ershov, E. A. Palyutin Mathematical logic, Moscow: Fizmatlit, 2011, 356 p. (Russian)

[3] R. Engelking, General topology, Berlin: Heldermann Verlag, 1989,529 p.

[4] N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov, Topologies, ranks and closures for families of theories. I, Algebra and Logic, **59**, 6 (2020), 649–979.

[5] N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov, Topologies, ranks and closures for families of theories. II, Algebra and Logic, **60**, 1 (2021), 38–52.

ON LEAST GENERATING SETS FOR FAMILIES OF THEORIES OF ABELIAN GROUPS[1]

In. I. Pavlyuk

Novosibirsk State
Technical University,
20 K. Marx ave., Novosibirsk,
630073, Russia

e-mail: inessa7772@mail.ru

S. V. Sudoplatov

Novosibirsk State
Technical University,
20 K. Marx ave., Novosibirsk,
630073, Russia;
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug ave., Novosibirsk,
630090, Russia;
Novosibirsk State University,
1 Pirogova st., Novosibirsk,
630090, Russia
e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

Using a characterization of existence of least/minimal generating set for a family of theories [1, Theorem 5], [2, Theorem 6.2], [3, Theorem 2.2] and approximations of theories of abelian groups in terms of Szmielew invariants [4, 5, 6] we adapt this characterization for an arbitrary family of theories of abelian groups.

Definition. [1] Let $\mathcal{T}_0$ be a closed set in a topological space $(\mathcal{T}, \mathcal{O}_E(\mathcal{T}))$. A subset $\mathcal{T}_0' \subseteq \mathcal{T}_0$ is said to be *generating* if $\mathcal{T}_0 = \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_0')$. The generating set $\mathcal{T}_0'$ (for $\mathcal{T}_0$) is *minimal* if $\mathcal{T}_0'$ does not contain proper generating subsets. A minimal generating set $\mathcal{T}_0'$ is *least* if $\mathcal{T}_0'$ is contained in each generating set for $\mathcal{T}_0$.

Remark 1. [1]. Each set $\mathcal{T}_0$ has a generating subset $\mathcal{T}_0'$ with a cardinality $\leq \max\{|\Sigma|, \omega\}$, where Σ is the union of the languages for the theories in $\mathcal{T}_0$. Indeed, the theory $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$, whose E-classes are models for theories in $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_0)$, has a model $\mathcal{M}$ with $|M| \leq \max\{|\Sigma|, \omega\}$. The E-classes of $\mathcal{M}$ are models of theories in $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_0)$ and the set of these theories is the required generating set.

[1] This research was partially supported by the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002, and Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855544).

Theorem 1. [1]. *If $\mathcal{T}_0'$ is a generating set for a E-closed set $\mathcal{T}_0$ then the following conditions are equivalent:*

(1) *$\mathcal{T}_0'$ is the least generating set for $\mathcal{T}_0$;*

(2) *$\mathcal{T}_0'$ is a minimal generating set for $\mathcal{T}_0$;*

(3) *any theory in $\mathcal{T}_0'$ is isolated by some set $(\mathcal{T}_0')_\varphi$, i.e., for any $T \in \mathcal{T}_0'$ there is $\varphi \in T$ such that $(\mathcal{T}_0')_\varphi = \{T\}$;*

(4) *any theory in $\mathcal{T}_0'$ is isolated by some set $(\mathcal{T}_0)_\varphi$, i.e., for any $T \in \mathcal{T}_0'$ there is $\varphi \in T$ such that $(\mathcal{T}_0)_\varphi = \{T\}$.*

Recall the definition of Szmielew invariants and their links.

Definition. Let $\mathcal{A}$ be an abelian group in the language $\Sigma = \langle +^{(2)}, -^{(1)}, 0^{(0)} \rangle$. Then $k\mathcal{A}$ denotes its subgroup $\{ka \mid a \in A\}$ and $\mathcal{A}[k]$ denotes the subgroup $\{a \in A \mid ka = 0\}$. Let P be the set of all prime numbers. If $p \in P$ and $pA = \{0\}$ then $\dim \mathcal{A}$ denotes the dimension of the group $\mathcal{A}$, considered as a vector space over a field with p elements. The following numbers, for arbitrary $p \in P$ and $n \in \omega \setminus \{0\}$ are called the *Szmielew invariants* for the group A [7, 8]:

$$\alpha_{p,n}(\mathcal{A}) = \min\{\dim((p^n\mathcal{A})[p]/(p^{n+1}\mathcal{A})[p]), \omega\},$$

$$\beta_p(\mathcal{A}) = \min\{\inf\{\dim((p^n\mathcal{A})[p] \mid n \in \omega\}, \omega\},$$

$$\gamma_p(\mathcal{A}) = \min\{\inf\{\dim((\mathcal{A}/\mathcal{A}[p^n])/p(\mathcal{A}/\mathcal{A}[p^n])) \mid n \in \omega\}, \omega\},$$

$$\varepsilon(\mathcal{A}) \in \{0, 1\},$$

$$\text{and } \varepsilon(\mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow (n\mathcal{A} = \{0\} \text{ for some } n \in \omega, n \neq 0).$$

It is known [7, Theorem 8.4.10] that two abelian groups are elementary equivalent if and only if they have same Szmielew invariants. Besides, the following proposition holds.

Proposition 2. *[7, Proposition 8.4.12]. Let for any p and n the cardinals $\alpha_{p,n}$, β_p, $\gamma_p \leq \omega$, and $\varepsilon \in \{0, 1\}$ be given. Then there is an abelian group $\mathcal{A}$ such that the Szmielew invariants $\alpha_{p,n}(\mathcal{A})$, $\beta_p(\mathcal{A})$, $\gamma_p(\mathcal{A})$, and $\varepsilon(\mathcal{A})$ are equal to $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p, and ε, respectively, if and only if the following conditions hold:*

(1) *if for prime p the set $\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ is infinite then $\beta_p = \gamma_p = \omega$;*

(2) *if $\varepsilon = 0$ then for any prime p, $\beta_p = \gamma_p = 0$ and the set $\{\langle p, n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ is finite.*

We denote by $\mathbf{Q}$ the additive group of rational numbers, $\mathbf{Z}_{p^n}$ — the cyclic group of the order p^n, $\mathbf{Z}_{p^\infty}$ — the quasi-cyclic group of all complex roots of 1 of degrees p^n for all $n \geq 1$, R_p — the group of irreducible fractions with denominators which are mutually prime with p. The groups $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_{p^n}$, R_p, $\mathbf{Z}_{p^\infty}$ are called *basic*. Below the notations of these groups will be identified with their universes.

Since abelian groups with same Szmielew invariants have same theories, any abelian group $\mathcal{A}$ is elementary equivalent to a group

$$\oplus_{p,n}\mathbf{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus \oplus_p \mathbf{Z}_{p^\infty}^{(\beta_p)} \oplus \oplus_p R_p^{(\gamma_p)} \oplus \mathbf{Q}^{(\varepsilon)}, \tag{1}$$

where $\mathcal{B}^{(k)}$ denotes the direct sum of k subgroups isomorphic to a group $\mathcal{B}$. Thus, any theory of an abelian group has a model being a direct sum of based groups. The groups of form (1) are called *standard*.

Recall that any complete theory of an abelian group is based by the set of positive primitive formulas [7, Lemma 8.4.5], reduced to the set of the following formulas:

$$\exists y(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n \approx p^k y), \tag{2}$$

$$m_1x_1 + \ldots + m_nx_n \approx 0, \tag{3}$$

where $m_i \in \mathbf{Z}$, $k \in \omega$, p is a prime number [9], [7, Lemma 8.4.7]. Formulas (2)) and (3)) allow to witness that Szmielew invariants defines theories of abelian groups modulo Proposition 2.

In view of Proposition 2 and equations (2) and (3)) we have the following remark.

Remark. [4]. Theories of abelian groups are forced by sentences implied by formulas of form (2)) and (3)) and describing dimensions with respect to $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p, ε as well as bounds for orders p^k of elements and possibilities for divisions of elements by p^k. Moreover, distinct values of Szmielew invariants are separated by some sentences modulo Proposition 2.

By Proposition we notice that all dependencies between values of Szmielew invariants in a given theory of an abelian group are exhausted by ones given by infinite $\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ implying $\beta_p = \gamma_p = \omega$ as well as by infinite $\{\langle p,n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ implying $\varepsilon = 1$. It means that Szmielew invariants, for a fixed theory and for a family, can not force positive values $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p using positive values for different prime p' and/or ε. Besides, all values $\alpha_{p,n}$ and natural values β_p, γ_p do not forced by other Szmielew invariants. Moreover, finite values $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p, for theories in $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$, can not be forced by other finite or infinite values of these invariants. Thus, as noticed in [4], all dependencies between distinct Szmielew invariants $\alpha^T_{p,n}$, β^T_p, γ^T_p, ε^T, for theories $T \in \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{T}$, are exhausted by the following ones for sequences $(T_k)_{k\in\omega}$ of theories in $\mathcal{T}$:

1) $\alpha^T_{p,n} = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha^{T_k}_{p,n}$,

2) $\beta_p^T = \lim\limits_{k\to\infty} \beta_p^{T_k}$,
3) $\gamma_p^T = \lim\limits_{k\to\infty} \gamma_p^{T_k}$,
3) $\varepsilon^T = \lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon^{T_k}$,
4) $\beta_p^T = \gamma_p^T = \omega = \lim\limits_{n} \alpha_{p,n}^{T_k}$,
5) $\varepsilon^T = 1 = \lim\limits_{p,n} \alpha_{p,n}^{T_k}$.

The items 1)–5) show that limit values for Szmielew invariants are independent modulo $\alpha_{p,n}^{T_k}$, i.e., the limits of $\beta_p^{T_k}$, $\gamma_p^{T_k}$, ε^{T_k} can produce only β_p^T, γ_p^T, ε^T, respectively, whereas $\alpha_{p,n}^{T_k}$ can generate both $\alpha_{p,n}^T$, $\beta_p^T = \gamma_p^T = \omega$ and $\varepsilon^T = 1$.

Using Theorem 1 and Szmielew invariants $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p, ε for theories of abelian groups we obtain the following result.

Theorem 3. *If $\mathcal{T}_0'$ is a generating set for a E-closed set $\mathcal{T}_0$ of theories of abelian groups then the following conditions are equivalent:*

(1) *$\mathcal{T}_0'$ is the least generating set for $\mathcal{T}_0$;*

(2) *$\mathcal{T}_0'$ is a minimal generating set for $\mathcal{T}_0$;*

(3) *any theory in $\mathcal{T}_0'$ is isolated by some set $(\mathcal{T}_0')_\varphi$, i.e., for any $T \in \mathcal{T}_0'$ there is $\varphi \in T$ such that $(\mathcal{T}_0')_\varphi = \{T\}$;*

(4) *any theory in $\mathcal{T}_0'$ is isolated by some set $(\mathcal{T}_0)_\varphi$, i.e., for any $T \in \mathcal{T}_0'$ there is $\varphi \in T$ such that $(\mathcal{T}_0)_\varphi = \{T\}$;*

(5) *for any theory $T \in \mathcal{T}_0'$ there is a finite set of Szmielew invariants ξ such that there are no infinitely many theories $T_k \in \mathcal{T}_0'$, $k \in \omega$, for which each ξ either coincides for all T_k and for T or ξ for T is a limit of correspondent Szmielew invariants for T_k (either of same name ξ or as a limit for $\alpha_{p,n}^{T_k}$).*

Proof. Since the conditions (1)–(4) are pairwise equivalent in view of Theorem 1, it suffices to show that the condition (5) is equivalent to the isolation of theories $T \in \mathcal{T}_0'$ by neighbourhoods $(\mathcal{T}_0)_\varphi$, with $(\mathcal{T}_0)_\varphi = \{T\}$.

Using the reduction of approximations of theories of abelian groups to the dynamics of Szmielew invariants above and the reduction of $(\mathcal{T}_0)_\varphi$ to that dynamics for finitely many Szmielew invariants ξ we deduce that an appropriate sentence φ and its neighbourhood $(\mathcal{T}_0)_\varphi$ forbids approximations of T by a sequence $T_k \in \mathcal{T}_0'$ with respect to chosen ξ, $k \in \omega$. It means that there are no infinitely many theories $T_k \in \mathcal{T}_0'$, $k \in \omega$, such that each ξ either coincides for all T_k and for T or ξ for T is a limit of correspondent Szmielew invariants for T_k (either of same name ξ or as a limit for $\alpha_{p,n}^{T_k}$) confirming the implication (4) $\Rightarrow$ (5).

Conversely, let for any theory $T \in \mathcal{T}_0'$ there is a finite set of Szmielew invariants ξ such that there are no infinitely many theories $T_k \in \mathcal{T}_0'$, $k \in \omega$, for which each ξ either coincides for all T_k and for T or ξ for T is a limit of correspondent Szmielew invariants for T_k (either of same name ξ or as a limit for $\alpha^{T_k}_{p,n}$). Then T is isolated in $\mathcal{T}_0$ by an appropriate sentence φ, forbidding approximations of T with respect to ξ and implying $(\mathcal{T}_0)_\varphi = \{T\}$, that confirms the implication (5) $\Rightarrow$ (4). □

Since there are countably many independent Szmielew invariants, Theorem 3 immediately implies the following assertion.

Corollary 4. *There are continuum many E-closed families of theories of abelian groups with (out) least generating sets.*

As theories of finite abelian groups are isolated by sentences describing orders of elements in these groups, Theorem 3 also implies the following fact.

Corollary 5. *Any E-closed set of theories of abelian groups generated by theories of finite abelian groups has the least generating set consisting of these groups.*

Again by Theorem 3 having a family $\mathcal{T}$ of theories of abelian groups such that for each prime p there are only finitely many theories with positive Szmielew invariants $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p, these theories are separated by sentences describing possibilities of these invariants. Thus the E-closure of $\mathcal{T}$ has the least generating set consisting of theories in $\mathcal{T}$.

Corollary 6. *Let $\mathcal{T}$ be a set of theories of abelian groups such that for each prime p there are only finitely many theories with positive Szmielew invariants $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p. Then $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ has the least generating set.*

Example. If T_k be theories of abelian groups with unique positive $\alpha_{p,n} = k$ (respectively, $\beta_p = k$, $\gamma_p = k$ with $\varepsilon = 1$), $k \in \omega$, then the family $\mathcal{T} = \{T_k \mid k \in \omega\}$ is the least generating set for the E-closed family $\mathcal{T} \cup \{T_\omega\}$, T_ω is unique accumulation point for $\mathcal{T}$, where the corresponding Szmielew invariant equals ω.

References

[1] S. V. Sudoplatov, Closures and generating sets related to combinations of structures, The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”, **16** 2016, 131–144.

[2] S. V. Sudoplatov, Combinations of structures and of their theories (an informative survey), Algebra and model theory 12. Collection of papers, Novosibirsk: NSTU, 2019, 86–127.

[3] N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov, Topologies, ranks, and losures for families of theories. II, Algebra and Logic, **60**, 1 (2021), 38–52.

[4] I. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov, Ranks for families of theories of abelian groups, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **28** (2019), 95–112.

[5] I. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov, Approximations for theories of abelian groups, Mathematics and Statistics, **8**, 2 (2020), 220–224.

[6] I. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov, Formulas and properties for families of theories of Abelian groups, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **36** (2021), 95–109.

[7] Yu. L. Ershov, E. A. Palyutin, Mathematical logic, Moscow: Fizmatlit, 2011, 356 p. (Russian)

[8] W. Szmielew, Elementary properties of Abelian groups, Fundamenta Mathematicae, **41** (1955), 203–271.

[9] P. C. Eklof, E. R. Fischer, The elementary theory of abelian groups, Annals of Mathematical Logic, **4**, 1972, 115–171.

ЛОГИКА МУЛЬТИОПЕРАЦИЙ

Н. А. Перязев

Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет
"ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина),
ул. Профессора Попова, 2, Санкт-Петербург, 197376, Россия

e-mail: nikolai.baikal@gmail.com

1 Введение

Наиболее используемыми формальными языками являются языки первого порядка. В приложениях часто применяются как фрагменты языка предикатов, так и исчисления с многозначным или нечетким выводом: дескриптивные, нечеткие, вероятностные, многозначные, релевантные, модальные, логики аргументации и другие [1]–[6]. Язык мультиопераций также является языком первого порядка.

Различные логики мультиопераций образуют обширный класс логик. Наибольший интерес эти логики представляют для приложений, так как естественным образом допускают различные семантики. При определенных ограничениях некоторые логики мультиопераций можно отнести к дескрипционным логикам (дескриптивные, логика описаний, логика концептов) или к вероятностным логикам или к многозначным логикам. Логики мультиопераций являются функциональными по форме и предикатными по содержанию.

Целью данной работы является разработка логического исчисления, относящегося к классу логик мультиопераций. Мультиоперапции это функции определенные на множестве A, и принимающие в качестве своих значений подмножества множества A, в том числе пустое, применяющиеся для обработки неопределенных и неполных данных. При этом значение мультиоперации отражает степень неопределенности, в частности, пустое множество определяет запретность данных, а одноэлементное однозначность. Логические исчисления, относящиеся к логикам мультиопераций первого порядка, по своей сути близки к дескриптивным логикам [7, 8], которые в последнее время интенсивно исследуются, и отличаются прикладной направленностью. Но если дескриптивные логики, как правило, основаны на бинарных отношениях [9], то в логиках мультиопераций могут использоваться мультиоперации большей местности, и, что особенно важно, в сигнатуру логик мультиопераций не входят символы предикатов (есть только один не сигнатурный бинарный предикат).

В работе предложена логика мультиопераций с вероятностной семантикой. Особенности разработанного языка позволяют его использовать при разработке интеллектуальных систем в условиях неопределенности и противоречивости, что является одной из актуальных проблем обработки информации.

2 Логика мультиопераций с вероятностной семантикой

2.1 Язык мультиопераций

Пусть A — конечное множество и $B(A)$ — множество всех подмножеств A. Отображение f декартовой степени A^n в $B(A)$ называется n-местной мультиоперацией на A [10]. Обозначим за M_A — множество всех мультиопераций на A.

Пусть F — функциональная сигнатура с выделенными нульместными символами c_i. Мультиинтерпретация сигнатуры F в универсум A определяется как отображение $\gamma : F \to M_A$, при котором сохраняется местность функционального символа и мультиоперации. Выделенные символы c_i интерпретируются как одноэлементные множества.

Определим термы в языке мультиопераций стандартным образом:

- любой нольместный символ сигнатуры F является термом;
- $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ — терм, если $f^n \in F$ и $t_1, \ldots, t_n$ термы.

Заметим, что понятие терма допускает различные обобщения.

Формулы в языке мультиопераций так же определяются по индукции:

- $(t_1 \subseteq t_2)$ — формула, где t_1, t_2 термы;
- $(\Phi \& \Psi), (\Phi \vee \Psi), \neg\Phi$ — формулы, где Φ, Ψ формулы;
- $\forall x_i \Phi(x_i), \exists x_i \Phi(x_i)$ — формулы, где $\Phi(f^0)$ формула такая, что $f^0 \in F$ и в $\Phi(f^0)$ не входит x_i.

Внешние скобки в формулах часто будем опускать.

2.2 Вероятностная семантика языка мультиопераций

В настоящей статье будем рассматривать семантику вероятностного типа, которая определяется следующим образом.

Значение терма t при мультиинтерпретации γ определяется так:

- если $t \equiv f^0$, то $\gamma[t] = \gamma(f^0)$;
- если $t \equiv f^n(t_1, ..., t_n)$, то $\gamma[t] = \bigcup\limits_{a_i \in \gamma[t_i]} \{a \mid a \in \gamma(f^n)(a_1, \dots, a_n)\}$.

Истинностное значение формулы Φ при мультиинтерпретации γ определяется так (ниже через $|C|$ обозначается мощность множества C):

- если $\Phi \equiv t_1 \subseteq t_2$, то $\gamma[\Phi] = \begin{cases} \dfrac{|\gamma[t_1] \cap \gamma[t_2]|}{|\gamma[t_1]|}, \text{ при } |\gamma[t_1]| > 0, \\ 1, \text{ при } |\gamma[t_1]| = 0; \end{cases}$
- если $\Phi \equiv \neg\Psi$, то $\gamma[\Phi] = 1 - \gamma[\Psi]$;
- если $\Phi \equiv \Psi_1 \vee \Psi_2$, то $\gamma[\Phi] = \max\{\gamma[\Psi_1], \gamma[\Psi_2]\}$;
- если $\Phi \equiv \Psi_1 \ \& \ \Psi_2$, то $\gamma[\Phi] = \min\{\gamma[\Psi_1], \gamma[\Psi_2]\}$;
- если $\Phi = \exists x \Psi(x)$, то $\gamma[\Phi] = \max\{\gamma[\Psi(c_i)] \mid \gamma(c_i) \in A\}$;
- если $\Phi = \forall x \Psi(x)$, то $\gamma[\Phi] = \min\{\gamma[\Psi(c_i)] \mid \gamma(c_i) \in A\}$.

2.3 Исчисление мультиопераций табличного типа

Отмеченными формулами будем называть выражения вида $\Phi \leq \alpha$, $\Phi < \alpha$, $\Phi \geq \alpha$, $\Phi > \alpha$, где Φ — формула языка мультиопераций, а α — рациональное число от 0 до 1.

Для компактности изложения введем следующие обозначения: $\lesssim$ — общее обозначение для $\leq$ и $<$; $\gtrsim$ — общее обозначение для $\geq$ и $>$.

Определим следующие правила построения таблиц (слева от правила в круглых скобках приведено наименование правила).

$(\neg\gtrsim)\ \dfrac{\neg\Phi \gtrsim \alpha}{\Phi \lesssim 1 - \alpha}$ $\qquad$ $(\neg\lesssim)\ \dfrac{\neg\Phi \lesssim \alpha}{\Phi \gtrsim 1 - \alpha}$

$(\&\gtrsim)\ \dfrac{\Phi \ \& \ \Psi \gtrsim \alpha}{\begin{array}{c}\Phi \gtrsim \alpha \\ \Psi \gtrsim \alpha\end{array}}$ $\qquad$ $(\&\lesssim)\ \dfrac{\Phi \ \& \ \Psi \lesssim \alpha}{\Phi \lesssim \alpha \mid \Psi \lesssim \alpha}$

$$(\vee\gtrsim)\ \frac{\Phi\vee\Psi\gtrsim\alpha}{\Phi\gtrsim\alpha\mid\Psi\gtrsim\alpha}\qquad(\vee\lesssim)\ \frac{\Phi\vee\Psi\lesssim\alpha}{\begin{array}{c}\Phi\lesssim\alpha\\ \Psi\lesssim\alpha\end{array}}$$

$$(\exists\gtrsim)\ \frac{\exists x\Phi(x)\gtrsim\alpha}{\Phi(c_i)\gtrsim\alpha}\qquad(\exists\lesssim)\ \frac{\exists x\Phi(x)\lesssim\alpha}{\Phi(t)\lesssim\alpha}$$

$$(\forall\gtrsim)\ \frac{\forall x\Phi(x)\gtrsim\alpha}{\Phi(t)\gtrsim\alpha}\qquad(\forall\lesssim)\ \frac{\forall x\Phi(x)\lesssim\alpha}{\Phi(c_i)\lesssim\alpha}$$

$$(\gtrsim)\ \frac{t_1\subseteq t_2\gtrsim\alpha}{t_1\subseteq t_2>\beta}\ \text{при } \alpha>\beta\qquad(\lesssim)\ \frac{t_1\subseteq t_2\lesssim\alpha}{t_1\subseteq t_2<\beta}\ \text{при } \alpha<\beta$$

$$(>0)\ \frac{t_1\subseteq t_2>0}{t_2\subseteq t_1>0}\qquad(\leq 0)\ \frac{t_1\subseteq t_2\leq 0}{t_2\subseteq t_1\leq 0}$$

$$(\subseteq\gtrsim)\ \frac{\begin{array}{c}t_i\subseteq s_i\geq 1\\ t\subseteq f(t_1,\dots,t_i,\dots,t_n)\gtrsim\alpha\end{array}}{t\subseteq f(t_1,\dots,s_i,\dots,t_n)\gtrsim\alpha}\qquad(\subseteq\lesssim)\ \frac{\begin{array}{c}s_i\subseteq t_i\geq 1\\ t\subseteq f(t_1,\dots,t_i,\dots,t_n)\lesssim\alpha\end{array}}{t\subseteq f(t_1,\dots,s_i,\dots,t_n)\lesssim\alpha}$$

Разобьем все введенные правила на пять групп: 1) $(\gtrsim)$, $(\lesssim)$; 2) $(\vee\gtrsim)$, $(\&\lesssim)$; 3) $(\exists\gtrsim)$, $(\forall\lesssim)$; 4) $(\forall\gtrsim)$, $(\exists\lesssim)$; 5) все остальные правила.

Для конечного множества отмеченных формул Σ построение таблицы (нумерованного дерева) определяется по индукции:

1) Φ_0 — корень дерева, где $\Phi_0\in\Sigma$.

2) D — дерево, $\Phi_0,\dots,\Phi_i,\dots,\Phi_n$ — ветка дерева

- если Ψ_i из Σ, то к ветке добавляется одна последовательная вершина, нумерованная этой формулой;

- если к Φ_i применяется правило из первой группы, то к ветке добавляется одна последовательная вершина, нумерованная отмеченной формулой согласно примененному правилу, где β уже встречалась в качестве отметки в формулах этой ветки;

- если к Φ_i применяется правило из пятой группы, то к ветке добавляется одна или две последовательные вершины, нумерованные согласно примененному правилу;

- если к Φ_i применяется правило из второй группы, то к ветке добавляется две вершины одного уровня, нумерованные согласно примененному правилу;

- если к Φ_i применяется правило из третьей группы, то к ветке добавляется одна вершина, нумерованная согласно примененному правилу, где символ c_i, такой, что не входит во все формулы этой ветки;

- если к Φ_i применяется правило из четвертой группы, то к ветке добавляется одна вершина, нумерованная согласно примененному правилу, где t любой терм, все нульместные функциональные символы которого принадлежат формулам этой ветки.

Введем ряд необходимых понятий.

Ветка *замкнутая*, если содержит либо $\Phi \lesssim \alpha$ и $\Phi > \alpha$, либо $\Phi < \alpha$ и $\Phi \gtrsim \alpha$, либо $\Phi > 1$, либо $\Phi < 0$ хоть для одной формулы Φ, либо $t \subseteq t < 1$, хоть для одного терма t.

Применение правила является *избыточным*, если хоть в одной из полученных веток либо нет новых формул, либо при применении к $\Phi \gtrsim \alpha$ ($\Phi \lesssim \alpha$) правила второй группы получаем $\Phi(f^0) \gtrsim \alpha$ ($\Phi(f^0) \lesssim \alpha$), а в этой ветке уже есть формула $\Phi(t) \gtrsim \alpha$ ($\Phi(t) \lesssim \alpha$).

Ветка *финальная*, если она либо замкнута, либо применение правил ко всем ее формулам избыточно.

Если все ветки таблицы финальные, то таблица *финальная*, а если замкнутые, то таблица *замкнутая*.

Множество отмеченных формул Σ является *опровержимым* в исчислении мультиопераций табличного типа, если существует замкнутая таблица для множества Σ.

Отмеченная формула $\Phi \leq \alpha$ *выводима* из множества формул Σ в исчислении мультиопераций, если множество $\Sigma \cup \{\Phi > \alpha\}$ является опровержимым. Аналогично определяется выводимость для формул $\Phi < \alpha$, $\Phi \geq \alpha$, $\Phi > \alpha$.

Несложно показать, что построенное исчисление табличного типа является корректным относительно определенной выше семантики языка мультиопераций. Полнота этого исчисления требует дополнительных рассуждений и в данной статье не рассматривается.

3 Логика мультиопераций с вероятностной семантикой: демонстрационный пример

Пусть база знаний состоит из следующих утверждений.

1. Не менее чем на 80% верно то, что любой человек симпатичный или он себя не считает умным.

2. Существует умный человек, который всех симпатичных людей представляет симпатичными, а всех умных считает умными.

К этой базе сделаны два запроса:
A. Следует ли то, что существует человек, который представляет себя симпатичным, верно более чем на 80%.
B. Следует ли то, что существует человек, который представляет себя симпатичным, верно не менее чем на 75%.

Формализуем эти утверждения на на языке мультиопераций. Для этого введем сигнатурные символы и определим мультиинтерпретацию во множество всех людей:
$\gamma(f^0)$ — множество симпатичных людей;
$\gamma(g^0)$ — множество умных людей;
$\gamma(f)$ — унарная мультиоперация такая, что $\gamma(f)(a)$ это множество людей, которых a представляет симпатичными.
$\gamma(g)$ — унарная мультиоперация такая, что $\gamma(g)(a)$ это множество людей, которых a считает умными.

При построении таблицы будем нумеровать строки (вершины дерева), а в конце строк после знака % делать комментарии, указывая какое правило и к каким строкам применялось.

Обработка запроса A.

1. $\forall x((x \subseteq f^0) \vee \neg(x \subseteq g(x))) \geq 0,8$ % условие
2. $\exists x((x \subseteq g^0)\&(f^0 \subseteq f(x))\&(g^0 \subseteq g(x))) \geq 1$ % условие
3. $\exists x(x \subseteq f(x)) \leq 0,8$ % от противного
4. $(c_1 \subseteq g^0)\&(f^0 \subseteq f(c_1))\&(g^0 \subseteq g(c_1)) \geq 1$ %$(\exists \gtrsim) : 2$
5. $c_1 \subseteq g^0 \geq 1$ %$(\& \gtrsim) : 4$
6. $f^0 \subseteq f(c_1) \geq 1$
7. $g^0 \subseteq g(c_1) \geq 1$
8. $(c_1 \subseteq f^0) \vee \neg(c_1 \subseteq g(c_1)) \geq 0,8$ %$(\forall \gtrsim) : 1$

9. $c_1 \subseteq f^0 \geq 0,8$	10. $\neg(c_1 \subseteq g(c_1)) \geq 0,8$ %$(\vee \gtrsim) : 8$
11. $c_1 \subseteq f(c_1) \leq 0,8$ $(\exists \lesssim) : 3$	
12. $c_1 \subseteq f(c_1) \geq 0,8$ %$(\subseteq\gtrsim) : 6,9$	
13. $c_1 \subseteq g_0 > 0,8$ %$(\gtrsim) : 5$	
14. $f^0 \subseteq f(c_1) > 0,8$ %$(\gtrsim) : 6$	
15. $g^0 \subseteq g(c_1) > 0,8$ %$(\gtrsim) : 7$	
16. $c_1 \subseteq f(c_1) < 1$ %$(\lesssim) : 11$	
....	
% открытая финальная ветка	

Ответ на запрос A: Нет, не следует.

Обработка запроса B.

1. $\forall x((x \subseteq f^0) \vee \neg(x \subseteq g(x))) \geq 0,8$ % условие
2. $\exists x((x \subseteq g^0)\&(f^0 \subseteq f(x))\&(g^0 \subseteq g(x))) \geq 1$ % условие

3. $\exists x(x \subseteq f(x)) < 0,75$ % от противного
4. $(c_1 \subseteq g^0)\&(f^0 \subseteq f(c_1))\&(g^0 \subseteq g(c_1)) \geq 1$ $\%(\exists \gtrsim) : 2$
5. $c_1 \subseteq g^0 \geq 1$ $\%(\& \gtrsim) : 4$
6. $f^0 \subseteq f(c_1) \geq 1$
7. $g^0 \subseteq g(c_1) \geq 1$
8. $(c_1 \subseteq f^0) \vee \neg(c_1 \subseteq g(c_1)) \geq 0,8$ $\%(\forall \gtrsim) : 1$

9. $c_1 \subseteq f^0 \geq 0,8$	10. $\neg(c_1 \subseteq g(c_1)) \geq 0,8$ $\%(\vee \gtrsim) : 8$
11. $c_1 \subseteq f(c_1) < 0,75$ $\%(\exists \lesssim) : 3$	14. $c_1 \subseteq g(c_1) \leq 0,2$ $\%(\neg \gtrsim) : 10$
12. $c_1 \subseteq f(c_1) \geq 0,8$ $\%(\subseteq \gtrsim) : 6,9$	15. $c_1 \subseteq g^0 \leq 0,2$ $\%(\subseteq \lesssim) : 7,14$
13. $\underline{\underline{c_1 \subseteq f(c_1) < 0,8 \quad \%(\lesssim) : 11}}$	16. $\underline{\underline{c_1 \subseteq g^0 < 1 \quad \%(\lesssim) : 15}}$
% условие замкнутости для 12,13	% условие замкнутости для 5,16

Ответ на запрос B: Да, следует.

Отметим, что рассмотрен достаточно простой пример, так как применение в реальных базах знаний требует дополнительных исследований по сложности построения табличных выводов в подобных логических исчислениях.

Список литературы

[1] L. A. Zadeh Fuzzy sets, Information and Control, **8**, 3 (1965), 338–353.

[2] N. Rescher and A. Urquhart, Temporal Logic, Springer-Verlag, 1971.

[3] V. R. Pratt, Semantical considerations on Floyd-Hoare logic, In Proceedings of the 17th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE Computer Society Press, 1976, 109–121.

[4] J. Hintikka, Knowledge and Belief, New York: Cornell University Press, Itchaca, 1962.

[5] F. Baader, D. Calvanese, D. L. McGuinness, D. Nardi, ed. The Description Logic Handbook, New York: Cambridge University Press, 2003.

[6] A. S. Baliuk, A. I. Gaidukov, N. A. Peryazev, and Yu. V. Peryazeva, Mathematical logic models for decision support systems in the case of incomplete information, Soft Computing and Measurements (SCM), XVIII International Conference, IEEE Conference Publications, 2015, 217–218.

[7] M. Schmidt-Schau and G. Smolka Attributive concept descriptions with complements, Artificial Intelligence, **48**, 1991, 1–26.

[8] F. Baader, I. Horrocks, C. Lutz, and U. Sattler, An Introduction to Description Logic. Cambridge University Press, 2017.

[9] J. Riguet, Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois, Bull. Soc. math. France, **1–4**, 76 (1948), 114–155.

[10] M. Pouzet and I. G. Rosenberg, Small clones and the projection property, Algebra Universalis, **63** 2010, 37–44.

О НЕКОТОРЫХ НЕТРАДИЦИОННЫХ СТРУКТУРАХ НА СОВОКУПНОСТЯХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛОНОВ НА МНОЖЕСТВАХ

А. Г. Пинус

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия

e-mail: ag.pinus@gmail.com

Понятие функционального клона — одно из тех понятий которые связывают различные области дискретной математики с универсальной алгеброй. Прежде всего напомним, что функциональный клон на множестве A — это произвольная совокупность функций на A, замкнутая относительно суперпозиций и включающая в себя все селекторные функции $e^i_n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ (для $n \in \omega$, $i \leqslant n$).

Упомянутая выше связь состоит в том, что для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ с основным множеством A совокупность $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ всех термальных функций алгебры $\mathfrak{A}$ является функциональным клоном на A, а с другой стороны, для любого функционального клона F на множестве A существуют алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ такие, что $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}) = F$ (в частности, таковой будет алгебра $\mathfrak{A}_F = \langle A; F \rangle$, где в ее сигнатуру включены все функции из клона F).

Совокупность F_A всех функциональных клонов на множестве A частично упорядочена отношением теоретико-множественного включения $\subseteq$. Более того, она является полной решеткой относительно этого порядка, обозначаемой далее как L_A.

Традиционно эта решетка L_A и представляла собой основную структуру при изучении совокупности F_A всех функциональных клонов на A. В ряде работ автора предложен ряд иных естественных структур на совокупности F_A, представляющих интерес для алгебро-логических исследований: топология и абстрактные отношения на F_A.

Напомним основные фундаментальные факты относительно решеток L_A. Прежде всего отметим результат Е. Поста.

Теорема 1. [1]. *Для двухэлементного множества A решетка L_A счетна.*

Более того, получено исчерпывающее описание этой решетки и всех клонов ее образующих, включая нахождение базисов этих клонов.

Ситуация резко меняется для не менее чем трехэлементных A. Ю. Яновым и А. Мучником доказана

Теорема 2. [2]. *Для любого не менее чем трехэлементного множества A решетка L_A не менее чем континуальна.*

О сложности строения решеток L_A при $|A| \geqslant 3$ говорит и доказанный ими же факт.

Теорема 3. [2] *При $|A| \geqslant 3$ в L_A существуют клоны, не имеющие никаких базисов.*

Сложность и нерегулярность строения решеток L_A при больших A подчеркивают и следующие результаты А. Булатова

Теорема 4. [3] *При условии $|A| \geqslant 3$ на решетке L_A не выполнено ни одно решеточное тождество.*

Теорема 5. [4] *При условии $|A| \geqslant 4$ в решетку L_A вложима свободная счетно порожденная решетка и, в частности, в L_A вложима любая конечная решетка, а сама L_A, в этом случае, не является локально конечной.*

В этой ситуации представляет интерес нахождение решеток в том или ином смысле "аппроксимирующих" те или иные свойства решеток L_A, но устроенных, в некотором смысле, более просто чем L_A при больших A.

Один из подобных путей основан на понятии ограниченно порожденного клона, введенном в работе автора [5]. Клон F называется *ограниченно порожденным*, если он порождается некоторым множеством входящих в него функций ограниченной в совокупности арности. Для конечных множеств A ограниченная порожденность клона на A равносильна его конечной порожденности, а для произвольного A любой конечно порожденный клон является ограниченно порожденным.

При этом совокупность L_A^{rg} ограниченно порожденных клонов на A является подрешеткой решетки L_A.

Ключом же к изучению строения решеток L_A^{rg} служит понятие фрагмента клона, введенное в работе [5]. Для любого клона F и любого натурального n через F^n обозначим *n-фрагмент клона F*, т.е. совокупность функций из F, арность которых не превышает n. Совокупность n-фрагментов всех клонов из L_A образует решетку L_A^n относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$. При этом для $n < m$ решетка L_A^n является ретрактом решетки L_A^m и имеет место

Теорема 6. [5]. *Решетка L_A является обратным пределом ретрактивного спектра решеток L_A^n ($n \in \omega$), а решетка L_A^{rg} — прямым пределом этого спектра. При этом и сама L_A^{rg} является ретрактом решетки L_A.*

Из этого результата и результатов А. Булатова [3, 4] вытекает ряд следствий.

Следствие 7. [5]. *Если $|A| \geqslant 3$, то на решетке L_A^{rg} не выполнено никакое решеточное тождество.*

Следствие 8. [5]. *Для любого множества A решетки L_A^{rg} и L_A $\forall\exists$-эквивалентны.*

Однако, в отличии от решеток L_A имеет место

Следствие 9. [5]. *Для любого конечного A решетка L_A^{rg} локально конечна.*

Дальнейшие исследования решеток L_A были сосредоточены на описании их экстремальных элементов, каких-либо интервалов этих решеток и тому подобное.

Так в работах [7, 8] И. Розенбергом описаны атомы и коатомы решеток L_A в терминах функций сохраняющих те или иные отношения на A. Естественным представляется вопрос описания для традиционно рассматриваемых в теории решеток так называемых специальных элементов: дистрибутивных, кодистрибутивных, модулярных и иных.

Описание ряда интервалов в решетках L_A получено А. Крохиным [9].

С понятием фрагментов клонов связано понятие размерности клона F [10], наименьшего натурального n такого, что клон F однозначно определим своим фрагментом F^n (если таковое n существует). Это же понятие лежит в определении некоторой естественной топологии на F_A. Так как для любого клона F имеют место равенства $F = \bigcup_{n\in\omega} F^n$ и включения $F^n \subseteq F^m$ для $n \leqslant m$, то возможно введение на F_A следующей *метрики* ρ: для $F, F' \in F_A$ положим

$$\rho(F,F') = \begin{cases} (\min\{n \in \omega' \mid F^n \neq (F')^n\})^{-1}, & \text{если } F \neq F' \\ 0, & \text{в случае когда } F = F' \end{cases}.$$

(здесь $\omega' = \omega \backslash \{0\}$). С помощью этой метрики и определяем *топологию* τ на F_A. Изолированными точками пространства $J_A = \langle F_A; \tau \rangle$ являются клоны конечной размерности на множестве A и только они, а операции $\wedge, \vee$ из определения решетки L_A являются непрерывными на пространстве J_A.

Имеет место так же

Теорема 10. [5]. *Все пространства J_A полны. Для любого неодноэлементного A в пространстве J_A есть предельные точки (клоны бесконечной размености). В случае $|A| = 2$ таких точек в J_A восемь для $|A| \geqslant 3$ таковых точек в J_A бесконечно много.*

Свойства пространства J_A во многом характеризуют само множество A. К примеру в работах автора доказаны

Теорема 11. [10, 11]. *Пространство J_A компактно тогда и только тогда, когда A конечно.*

Теорема 12. [10]. *Для решетки L_A существует подрешетка образующая совершенное подмножество в пространстве J_A тогда и только тогда, когда $|A| \geqslant 3$.*

Естественным представляется вопрос о том как расположены в пространствах J_A изолированные точки. В частности, не будет ли совокупность подобных точек всюду плотной в J_A. Другими словами, верно ли утверждение, что для любого клона F из F_A и любого $n \in \omega$ найдется клон F' такой, что $F^n = (F')^n$ и клон F' однозначно определим некоторым своим фрагментом. Ответ на этот вопрос остается открытым. В работе [12] автора получен лишь частичный ответ на этот вопрос. Напомним, что клон на множестве A называется дискриминаторным, если он включает в себя дискриминаторную функцию на A. Имеет место.

Теорема 13. [12]. *Для любого множества A в любой окрестности любого дискриминаторного клона на A лежит некоторый клон однозначно определимый некоторым своим фрагментом (т.е. изолированная точка пространства J_A).*

Указанная в начале работы возможность трактовать функциональные клоны на множестве A как совокупности $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ термальных функций универсальных алгебр с основным множеством A приводит к рассмотрению на F_A ряда отношений индуцированных такими отношениями между универсальными алгебрами как “рациональная эквивалентность”, “быть обогащением (обеднением) алгебры”, “алгебраическая, логическая эквивалентности алгебр”.

Прежде всего напомним, что понятие “рациональной эквивалентности” алгебр $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma_2 \rangle$ введено А. Мальцевым [14] и сводится к сопряжению функциональных клонов $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ и $\mathrm{Tr}(\mathfrak{B})$ какой-либо биекцией множества A на B. Под “абстрактной эквивалентностью” $\sim$ клонов F_1 и F_2 из F_A будем понимать рациональную эквивалентность алгебр $\mathfrak{A}_{F_1} = \langle A; F_1 \rangle$ и $\mathfrak{A}_{F_2} = \langle A; F_2 \rangle$, т.е. $F_1 \sim F_2$ тогда и только тогда, когда существует перестановка π на A, сопрягающая совокупности функций, входящих, соответственно, в F_1 и F_2. На F_A определим так же отношение $\leqslant$, являющееся производным от отношения между универсальными алгебрами, когда одна алгебра есть “обогащение” другой. Для $F_1, F_2 \in F_A$ положим $F_1 \leqslant F_2$ тогда и только тогда, когда существует перестановка π на A такая, что $\pi(F_1)\pi^{-1} \subseteq F_2$. Очевидно, что отношение $\leqslant$ является отношением квазипорядка на F_A и через $\approx$ обозначим отношение эквивалентности на F_A, порожденное этим квазипорядком. Очевидно, что эквивалентность $\approx$ больше чем эквивалентность $\sim$.

Имеет место

Теорема 14. [15, 16]. *Отношения $\sim$ и $\approx$ совпадают на F_A тогда и только тогда, когда A конечно.*

Отметим одно из следствий этой теоремы.

Следствие 15. [16]. *Для бесконечных A существуют клоны F на A такие, что класс $F/\approx$ содержит континуум попарно не $\sim$-эквивалентных клонов на A.*

Отметим так же еще один результат связанный с отношением $\sim$ на F_A.

Теорема 16. [16]. *Конъюнкция отношений $F' \subseteq F''$ и $F' \sim F''$ для клонов F' и F'' из F_A влекут равенство этих клонов тогда и только тогда, когда множество A конечно.*

Помимо отношений $\sim, \approx, \leqslant$ на F_A естественным образом определяется еще целый ряд отношений, инспирированных различными “алгебраически значимыми” отношениями между универсальными алгебрами с основным множеством A. Укажем на некоторые из них (идущие от алгебраической, логической геометрий универсальных алгебр) и на ряд результатов с ними связанных.

Напомним, что алгебраическим множеством для алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ называется совокупность решений в $\mathfrak{A}$ некоторой системы (возможно бесконечной) термальных для $\mathfrak{A}$ уравнений. Через $\mathrm{Alg}\,\mathfrak{A}$ обозначим совокупность всех алгебраических множеств алгебры $\mathfrak{A}$. Алгебры $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1 \rangle$ и $\mathfrak{A}_2 = \langle A; \sigma_2 \rangle$ называются алгебраически эквивалентными, если имеет место равенство $\mathrm{Alg}\,\mathfrak{A}_1 = \mathrm{Alg}\,\mathfrak{A}_2$. Клоны F_1, F_2 из F_A назовем алгебраически эквивалентными ($F_1 \sim_{alg} F_2$), если алгебраически эквивалентны алгебры $\mathfrak{A}_{F_1}$ и $\mathfrak{A}_{F_2}$, т.е. совпадают множества, определяемые как решения совокупностей уравнений между функциями из F_1 и F_2 соответственно. Аналогичным образом определяется отношение $\sim_{log_0}$ на F_A: клоны $F_1, F_2 \in F_A$ логически эквивалентны, если совпадают совокупности подмножеств множеств A^n, определимых бескванторными формулами логики первого порядка в алгебрах $\mathfrak{A}_{F_1}$ и $\mathfrak{A}_{F_2}$. В работе [12] автора получен ряд результатов, связанных с числом классов $\sim_{alg}$- и $\sim_{log_0}$-эквивалентностей на совокупности F_A и со строением этих классов для $\sim_{alg}$ и $\sim_{log_0}$ в терминах решетки L_A.

Наконец, остановимся на взаимосвязи структур на F_B и F_A для различных множеств B и A. Имеет место

Теорема 17. [12]. *Для любых множеств $B \subseteq A$ решетка L_B является ретрактом решетки L_A, а пространство J_B — ретрактом пространства J_A.*

Список литературы

[1] E. L. Post, Introduction to a general theory of elementary proposition, Amer. J, Math., **56**, 3 (1921), 81–103; The two-valued iterative systems of math. Logic, Annals of Math. Studies, 5 (1941).

[2] Yu. I. Yanov, A. F. Muchnik, On the existence of k-valued closed classes that do no have a finite basis.—Sovjet Mathematics, Doklady, **127**, 1 (1954), 144–146. (Russian).

[3] A. A. Bulatov, Identities in the lattices of closed classes, Discrete Math. Appl, **3**, 6 (1993), 601–610.

[4] A. A. Bulatov. Finite sublattices in the lattices of clones, Algebra and Logic, **33**, 5 (1994), 265–286.

[5] A. G. Pinus, Fragments of functional clones.—Algebra and Logic, **56**, 4 (2017), 302–317.

[6] A. G. Pinus, On direct and inverse limits of retractive spectra once again, Journal of Math. Sciences, **253**, 3 (2021), 444–447.

[7] I. Rosenberg, Über die functional Vollstandikkeit in dem mehrvertigen Logiken von mehreren Verbandlichen auf endlichen Mengen, Rozpravy Ls. Akademie Ved. m Ser. Math. Nat. Sci., **80** (1973), 3–93.

[8] I. Rosenberg, Minimal clones I: The five types—Colloq, Math. Soc. J. Boleai, **43** (1981), 635–652.

[9] A. A. Krokhin, Monoid intervals in lattices of clones, Algebra and Logic, **34**, 3 (1995), 155–168.

[10] A. G. Pinus, Dimension of functional clones, metric on its collection, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 366–374 (Russian).

[11] A. G. Pinus. On the spaces of functional clones, Siberian Electronic Mathematical Reports, **18**, 2 (2021), 901–904 (Russian).

[12] A. G. Pinus, Fragments of functional clones as the method of the study of the latter, Algebra and Model Theory. **11** (2017), Novosibirsk, NSTU-Publ., 112–117 (Russian).

[13] A. G. Pinus, Neigborhoods and isolated points in spaces of functional clones on sets, Algebra and Logic, **59**, 3 (2020), 230–236.

[14] A. I. Mal'tsev, The structural characteristic of some classes of algebras, Doklady. Akademii. Nauk SSSR, **120**, 1 (1958), 29–32.

[15] A. G. Pinus, Universal algebras and functional clones (on the scales of universal algebras of fixed power), Algebra and Model Theory **12** (2019), Novosibirsk, NSTU-Publ., 55–65 (Russian).

[16] A. G. Pinus. On abstract relations between functional clones, Algebra and Logic (to appear) (Russian).

POSITIVE SET THEORY.

A SHORT AND ENGLISH VERSION

B. Poizat

Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard, 43,
boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne-cedex, France

e-mail: poizat@math.univ-lyon1.fr

הוא צלמא ראשה די דהב טב חדוהי ודרעוהי די כסף
מעוהי וירכתה די נחש שקוהי די פרזל רגלוהי מנהון
די פרזל ומנהון די חסף

This short paper is an abstract of an article which is in the process of edition, where complete proofs will be found in place of the sketches presented here; the theorems bear the same number in the abstract and in the article.

1 The final trinary model

Every participant to the Erlagol meeting knows that $\{x \mid x \notin x\}$ cannot exist, or in other words that the *collection axiom* associated to the formula $x \notin x, (\exists y)(\forall x) x \in y \Leftrightarrow x \notin x$ is inconsistent.

Nothing more can be said of a non-existent object, but what about the empty set $a = \{x | x \neq x\}$, the full set $c = \{x | x = x\}$ and the self-belongers' set $b = \{x | x \in x\}$?

There is not doubt that $a \notin a, b \notin a, c \notin a, a \in c, b \in c, c \in c, a \notin b, c \in b$ and that a, b, c are distinct ($a \neq b$ and $a \neq c$ because $c \in b$ and $c \in c$; $b \neq c$ because $a \in c$ and $a \notin b$)[1]. What remains unclear is whether $b \in b$ or $b \notin b$. Do we have good reasons to prefer one branch of the alternative? Indeed, we have.

[1]This assumes the existence of c; remark that $a = b$ is a consequence of Zermelo-Fraenkel Set Theory with the Foundation Axiom.

Let us consider the theory, in the language of three constants a, b, c, equality, plus a binary relation $x \in y$ for which we use the set-theoric vocabulary, declaring that nobody belongs to a, that everybody belongs to c, and that x belongs to x if and only if x belongs to b. This theory has many models, but only two models based on three points: the initial model $\{a, b, c\}^i$ where $b \notin b$, and the final model $\{a, b, c\}^f$ where $b \in b$. For any model M of the theory, the initial model has an homomorphic image in M (in a unique way), and the final model is an homomorphic image of M (one of the many ways to do that is to send on c every point of M distinct from a and b).

From the very beginning, Set Theory appears to be more complex than Group Theory, where the one-point group is both initial and final!

2 Axioms of collection for positive formulae

We say that a formula $\varphi(x)$ in one variable is *collectant* if the sentence $(\exists y)(\forall x)\varphi(x) \Leftrightarrow x \in y$ is consistent; we denote this sentence by $Col(\varphi)$ and call it the *collection axiom* for the formula $\varphi(x)$; a y satisfying the sentence will be called a witness for φ. We say that a set Φ of formulae is simultaneously collectant when the corresponding set $Col(\Phi)$ of collection axioms is consistent.

The Founding Fathers of the Theory of Sets were left voiceless when they discovered that not all formulae were collectant. Later they devised various theories, where collection axioms play a big role, that they expected to be free from contradiction. In most of the cases, they introduced a kind of dissymetry between the variable x and y in the formulae under consideration, with the hope to obtain consistency: in all the examples known to me, the set $\{x|x \in x\}$ receives no higher consideration than the inexistent $\{x \mid x \notin x\}$.

We shall follow a different path, after observing that the formula causing the contradiction is brutally negative: we shall use the ressources of Positive Logic to obtain, in a canonical way, structures of an attractive set-theoric fragrance; our constructions are model-theoric, since we are building structures, not lists of axioms.

Let us remind in a few words the principles of Positive Logic. Our language $\mathfrak{L}$ contains (at least) equality $u = v$, membership $u \in v$, and antilogy $\perp$, which is a propositional symbol positively defining the empty set (it is dispensable to introduce a specific symbol $\top$ for the tautology, which can be positively defined as $(\exists\ x)\ x = x$).

An application σ from the $\mathfrak{L}$-structure M to the $\mathfrak{L}$-structure N is an *homomorphism* if, for each $\bar{a}$ from M, every atomic formula satisfied by $\bar{a}$ in M is satisfied by $\sigma(\bar{a})$ in N; this property extends automatically to the formulae written $(\exists \bar{y})\psi(\bar{x}, \bar{y})$, where ψ is a positive boolean combination (using only $\vee$ and $\wedge$) of atomic formulae, that we call positive formulae. We begin by an easy but promizing result:

Theorem 0. *The set of positive formulae (in one variable) is simultaneously collectant.*

Proof. When we write the boolean part of a positive formula $\varphi(x)$ in disjunctive form, we obtain a disjunction of formulae $(\exists\ \bar{y})\ \psi_i(x, \bar{y})$ where each ψ_i is a conjunction of atomic formulae; if each ψ_i contains the antilogy, $\varphi(x)$ is contradictory; if not, $\varphi(x)$ is satisfied by all the x belonging to themselves, since we can then interpret all the y's by x.

Therefore, in the final trinary model $\{a, b, c\}^f$, $\varphi(x)$ is contradictory, or is satisfied by b and c only, being equivalent to $x \in x$, or is tautological, being moreover satisfied by a. According to the case, a, b or c is a witness for $\varphi(x)$. $\square$

Remark. The initial trinary model cannot serve as an illustration for this theorem, since it has no witness for $\{x|(\exists\ y)\ y \in x\}$.

3 Positively closed models of Positive Set Theory

Logicians familiar with the First Order Predicate Calculus [2] call sentence any formula without free variables. But in Positive Model Theory, positive sentences in this sense are not sufficient: one needs to consider all the h-inductive sentences, which by definition are the sentences crossing the inductive limit of homomorphisms; in fact, they are equivalent to a conjunction of sentences of the form $(\forall \bar{x})\varphi(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{x})$, where φ and ψ are positive; we see that they have the shape of positive sequents.

A special case is formed by the h-universal sentences $(\forall \bar{x})\varphi(\bar{x}) \Rightarrow \bot$, otherwise written $(\forall \bar{x})\neg\varphi(\bar{x})$, or $\neg(\exists\ \bar{x})\ \varphi(\bar{x})$; equally h-inductive are the $(\forall\ \bar{x})\ (\exists\ \bar{y})\ \psi(\bar{x}, \bar{y})$, where ψ is boolean positive, since they can be written $(\forall\ \bar{x})\top\ \Rightarrow (\exists\ \bar{y})\psi(\bar{x}, \bar{y})$.

Every model of an h-inductive theory Θ can be continued by homomorphism into a *positively closed* model M of this theory, meaning that, for every $\bar{a}$ of M and every homomorphism σ from M to a model N of Θ, $\bar{a}$ in M and $\sigma(\bar{a})$ in N satisfy the same positive formulae. Positively closed models are characterized by the following property: if $\bar{a}$ in M does not satisfy a positive formula $\varphi(\bar{x})$, then it satisfies another positive formula

[2]More exactly: First Order Relation Calculus.

$\psi(\bar{x})$ which is contradictory to the first in the sense of Θ; this means that the h-universal sentence $\neg(\exists\ \bar{x})\ \varphi(\bar{x}) \wedge \psi(\bar{x})$ is a consequence of Θ.

Collection axioms, even in the simplest cases, are not h-inductive. By contrast, when we add to the language of the positive formula φ a new constant a_φ, we can form $(\forall x)\varphi(x) \Leftrightarrow x \in a_\varphi$ which is equiconsistent to $Col(\varphi)$, and is h-inductive; we name it $Colw(\varphi)$ (axiom of witnessed collection). When Φ is a set of positive formulae, we denote $Colw(\Phi)$ the h-inductive theory equiconsistent to $Col(\Phi)$, involving a bijective assignation of witnesses a_φ foreign to the language of Φ (in a model of this theory, the different symbols a_φ are not necessarily interpreted by distinct points).

There is only one way to transform $\{a, b, c\}^f$ in a model of the witnessed collection for the set of all positive formulae, because we have no choice for the witnesses: when φ is antilogical a_φ must be a, when φ is tautological a_φ must be c, and when φ is equivalent to $x \in x$ a_φ must be b.

This being said we can improve our first theorem:

Theorem 1. *The final trinary model is the unique positively closed model of the theory of witnessed collection of positive formulae in the language* $\{\perp, =, \in\}$.

Proof. We divide a model M of the theory into three parts: A composed of its empty sets, C formed by its points to which belongs at least one point in A, and B composed of what remains. We observe that the witness a_φ of the formula φ is in A when φ is satisfied by nobody; that it is in C when φ is satisfied by a void point; and that it is in B in the other cases, when φ is not contradictory, but satisfied by no empty point.

When $x \in y$ is an occurrence of the membership relation in M, x and y being witnesses or not, then x and y are in $B \cup C$, or x is in A and y is in C; therefore the mapping from M to $\{a, b, c\}^f$ sending A on a, B on b and C on c is a homomorphism for the membership relation respecting the assignations of witnesses.

In conclusion, when M is positively closed, each of its points x satisfies $x = a\ \vee\ x = b \vee x = c$; reciprocally we have seen that the theory forces a, b, and c to be distinct; and moreover $b \in b$ must be true in M. $\square$

4 Positive Logic and East Coast Model Theory

We remark that $\{a, b, c\}^f$ is extensional, i.e. satisfies the axiom

$$(\forall\ x, y)(\exists\ z)\ x = y \vee (z \in x \wedge z \notin y) \vee (z \in y \wedge z \notin x)$$

(which is inductive but not h-inductive). Since homomorphisms are not necessarily injective, two formulae which have different witnesses in a model

M may have the same witness in some of its homomorphic images N (in which case they are equivalent on N). Since two elements of a positively closed model are different only when they have a good reason to be so, we expect that positively closed models will have an inclination towards extensionality.

This is the place to mention an imperfect version of Positive Model Theory which has been introduced by Abraham Robinson in the fifties, and is known under the name of East Coast Model Theory. This classical object is certainly well known to the majority of the participants of this meeting, especially if they are born in Qaragandy, and can serve them as a guide to approach the fully developped Positive Logic.

In East Coast Model Theory, we consider embeddings in place of homomorphisms, existential formulae in place of positive formulae, and inductive axioms in place of h-inductive axioms. We see that the negation is not totally absent, but that its use is restricted, since in forming the existential formulae we need to negate only the atomic formulae. We observe also that the inductive sentences are the ones which cross the inductive limits of *embeddings*.

In this context, since embeddings are injective, different witnesses cannot be later identified, even when the associated formulae become equivalent in an extension of the structure. This rigidity explains why East Coast Model Theory is not a convincing device for Set Theory, no more than it is for General Model Theory (see [1]).

5 A too general consistency lemma

Our trinary final model possesses many positive qualities, but also some deficiencies. I suppose that a majority of Set Theorists will disagree with the assumption that their favourite discipline can prove the existence of only three objects. More technically, it has no singletons; since the singleton $\{a\}$ of the empty set witnesses $x = a$, the big idea is to add the three constants a, b and c to the language, and try to repeat the process. We shall encounter some difficulties in this program, and before that we shall see how positivity makes our life easy as far as consistency is concerned.

Theorem 2. *Let T be an h-inductive theory with infinite models, in a language $\mathfrak{L}$ excluding the symbol $\in$; then the theory $T \cup Col(\Pi)$, where Π is the set of positive formulae in one variable in the language $\mathfrak{L} \cup \{u \in v\}$, is consistent.*

Proof. We start with M_0, a model of T with a cardinal bigger than the cardinal of Π. We associate injectively to each formula φ of Π a point a_φ

of M. We define inductively a sequence M_n of structures whose $\mathfrak{L}$-reduct is M_0, with increasing membership relations; the membership relation on M_0 is empty; the interpretation of $\in$ of M_{n+1} is formed by the pairs $x \in a_\varphi$ where $\varphi(x)$ is satisfied in M_n. Using positivity, one sees that the identity map is an homomorphism from M_n to M_{n+1}, and that the inductive limit of the M_n is a model of the theory. $\square$

In the proof of this theorem, with its liberal creation of a profusion of witnesses, we can foresee the difficulties that we shall meet when trying to describe the positively closed models of the corresponding witnessed collection theory.

6 Extensionality: a laborious start

For each set Φ of positive formulae in one variable x, Theorem 2 gives us models of $Col(\Phi)$ in which each point is a witness for a formula of Φ; let us call $Loc(\Phi)$ this last property. We shall describe situations where to each formula of Φ is associated a canonical form which is equivalent to it in each model of $Loc(\Phi)$, such that no pair of distinct canonical formulae are equivalent in any model of $Col(\Phi)$. If we repeat the proof of Theorem 2 introducing witnesses only for canonical formulae, we obtain a structure which is extensional and model of $Col(\Phi)$, for the only reason that it is a model of $Loc(\Phi)$! In all the cases where we can apply this strategy with success, Φ will be composed of positive boolean formulae (pbf), without existential quantifications.

The language of our first example is membership and the three constants a, b, and c; the basic theory Θ_1 declares that they are the respective witnesses of $\perp$, $x \in x$, and $\top$, and that $b \in b$. The set Φ is formed by the pbf with parameters a, b, or c, which form a finite set (up to logical equivalence). According to Theorem 2, $\Theta_1 \wedge Col(\Phi) \wedge Loc(\Phi)$ is a consistent theory.

We increase the language introducing a new constant a_φ for each formula of Φ, and consider the associated h-inductive theory $\Theta_1 \wedge Colw(\Phi)$. We obtain the following results, whose proofs are too long to be included in this abstract.

Lemma 2. *In a positively closed model of* $\Theta_1 \wedge Colw(\Phi)$*, each point has the form* a, b, c *or* a_φ*; therefore this model satisfies* $Loc(\Phi)$.

Lemma 3. *A positively closed model of* $\Theta_1 \wedge Colw(\Phi)$ *is finite and extensional.*

Lemma 4. *To each pbf with parameters in* $\{a, b, c\}^f$ *can be associated a canonical form which is equivalent to it in each extensional model of*

$\Theta_1 \wedge Loc(\Phi)$*, in such a way that two distinct canonical formulae are never equivalent in any model of* $\Theta_1 \wedge Col(\Phi)$*. The cardinal of a positively closed model of* $\Theta_1 \wedge Colw(\Phi)$ *is the number of canonical formulae.*

At this point we reach the following situation: we obtain a family of models of $\Theta_1 \wedge Colw(\Phi)$ in which each point is the witness of a canonical formula. This family has a unique initial structure M_0, and its other members are obtained by expanding the membership relation of M_0. The positively closed models of $\Theta_1 \wedge Colw(\Phi)$ are precisely the maximal such expansions. And finally:

Theorem 3. *The h-inductive theory* $\Theta_1 \wedge Colw(\Phi)$ *has up to isomorphy only one positively closed model, which is the unique maximal expansion of* M_0 *which is a model of* $Col(\Phi)$*.*

7 Inductive limits of finite extensional models

The final trinary model $\{a, b, c\}^f$ gives the same witness to the formulae $x \in x$ and $(\exists y) y \in x$, a condition incompatible with the existence of a singleton for the empty set. This is the reason why we must abandon the existential quantifiers when we want to repeat the construction with a, b, and, c as parameters, and obtain the model N given by Theorem 3.

But this model N presents some obstructions to the repetition of the construction even for quantifiers-free positive formulae with parameters in itself. On one way, it gives the same witness b to $x \in x$ and $x \in x \wedge (a \in x \vee b \in x)$, on the other $x = a \vee a \in x \vee b \in x \vee c \in x$ is a tautology on N. The second condition forbids the existence of $\{\{a\}\}$, and the first forbids the existence of a witness for $x = \{a\} \vee \{a\} \in x$ (a witness of $x = \alpha \vee \alpha \in x$ must belong to itself).

Therefore, when we expect to obtain a final model which is a limit of a sequence of finite extensional structures, M_{n+1} being the unique positively closed model of the witnessed collection of formulae in Φ with parameters in M_n, we must put some further restrictions on the class Φ.

When Φ is the family of positive non-tautological formulae in the language of equality (no membership), the final model is a familiar object: it is composed of the hereditarily finite sets, obtained by the iteration of the power set operation, starting from the empty set.

When we put in Φ all the positive equalitarian formulae, we obtain a kind of completion of the previous model by the addition of a total set.

When on the contrary Φ is composed of the pbf in the only language of membership (no equality), we obtain a strange linear structure that may be of some interest in itself.

The strongest result of the kind that we obtain is when the formulae in Φ do not mention selfmembership $x \in x$ and avoid to mix equality and membership. More precisely:

Theorem 4. *There exists a sequence M_n of finite and extensional structures, in the language of membership, satisfying the following conditions:*
(i) $M_0 = \{a, c\}$, where a is a witness of $\bot$ and c is a witness of $\top$;
(ii)let Φ_n be the set of pbf with parameters in M_n which are either of the form $x = \beta_1 \vee \ldots \vee x = \beta_n$, or positive boolean combinations of $\alpha_i \in x$; M_{n+1} is the unique extensional extension of M_n satisfying $Col(\Phi_n) \wedge Loc(\Phi_n)$;
(iii) M_{n+1} is also the unique positively closed model, for the only possible choice of witnesses, of the theory $Colw(\Phi_n)$.

The inductive limit M of the M_n has no witness for $x \in x$. Like the models constructed in the next section, it is a kind of clothing for the hereditarily finite sets; it is interpretable in Arithmetic, and we can define in it by first order formulae (using negation !) its finite subsets, with equicardinality, its ordinals, which are the finite numbers (forming a definable subset of M with no witness). Its power of expression in terms of combinatoric and complexity is the same as Arithmetic.

It is impossible to do the same construction including in Φ_n all the pbf not mentionning $x \in x$, because a mixture of membership and equality blocks the recurrence; indeed, every non-void point of M_{n+1} possesses a point in M_n, so that the formulae $\top$ and $a_1 \in x \vee \ldots \vee a_k \in x \vee x = a$, where $a_1, \ldots a_k$ is an enumeration of M_n, have the same interpretation on M_{n+1}, but must be distinguished further.

For more general constructions we must adopt a global strategy, renouncing to the obtention of our final models as limit of finite structures.

8 Extensionality: renouncing to the local character

In a first step, we use all the positive boolean formulae omitting $x \in x$; we introduce a cascade of witnesses, $\mu_0 = \{a, c\}$ for parameters-free formulae, $\ldots \mu_{n+1}$ for formulae with parameters in $\mu_n, \ldots$

We give the same witness to obviously synonymous formulae, so that each μ_n is finite. We obtain, thanks to Theorem 2, structures that we call *slim* with the following property: M is the union of a sequence M_n of finite substructures; each point in M_{n+1} witnesses a pbf with parameters in M_n, and each pbf with parameters in M_n has a witness in M_{n+1}.

After a rather long analysis of slimness we obtain:

Theorem 5. *There exists one and only one extensional slim model associated to the pbf not mentioning selfmembership.*

Then we reintroduce selfmembership, and adapt a similar construction to the case of all the pbf. We finally obtain a Theorem 6 of uniqueness of the extensional slim model satisfying moreover a technical condition of maximality appearing implicitely in the Theorem 3 of this abstract. This shows the uniqueness of the positively closed model of the corresponding h-inductive theory of collection with witnesses.

This structure is the most elaborate that can be obtained with the techniques used in the paper, where it is important to consider only quantifier-free formulae. For the reason that each of its point is a witness, it satisfies $(\forall\ x_1,\ \dots x_n)(\exists! y)(\forall x)\varphi(x_1, \dots x_n, x) \Leftrightarrow x \in y$ for each positive boolean formula φ. But since in it no formula except the tautology defines a cofinite set, it has no witness for $(\exists y) y \in x$, which is a positive equivalent of $x \neq a$.

As I have said above, if we allow the use of negation, we can define by a first order formula its Von Neumann's ordinals, which are the finite numbers.

9 What to do beyond?

The reasons why I have written the paper was to argue that the consideration of selfmembership does not provoque a collapse of Logic, and also to shake a little bit the basis on which is built contemporary Set Theory[3]. I am conscious that more convincing positive set constructions would confirm my attempt.

The first thing would be to increase the combinatorial power of the models, a minimum being the introduction of a set for the natural number, so that the Axiom of Infinity be satisfied; I suppose that this can be done only by an expansion of the language. We have the same problem with a pairing function, so necessary in combinatorics, that seems difficult to define with a positive formula; also, the definition of the power set would certainly necessitate a positive introduction (by Morleysation) of the inclusion relation.

All our positively closed models satisfy extensionality, which is quite an essential property as far as sets are concerned! By a kind of accident, they satisfy collection axioms for positive boolean formulae in several variables, of the form $(\forall\ x_1,\ \dots, x_n)(\exists y)(\forall x)\varphi(x_1, \dots, x_n, x) \Leftrightarrow x \in y$. To express witnessed collection, we must introduce not only constant witnesses as in the

[3] The true question is whether the results of the Set Theorists describe only properties of systems of axioms, or if they have some relevancy with what we may call the real world; it is not clear that Mathematics can bring an answer to it.

case of formulae with one variable, but Skolem functions, denoted at choice $sk\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \{x \mid \varphi(x_1, \ldots x_n, x)\} = \lambda x.\varphi(x_1, \ldots, x_n, x)$, and for each positive φ the h-inductive axiom $(\forall\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x)\varphi(x_1, \ldots, x_n, x) \Leftrightarrow x \in sk\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

After introducing a cascade of Skolem functions one obtains an h-inductive theory whose consistency is not problematic; I suggest the study of its positively closed models as a direction of research.

Note 1. The quotation in Aramaic opening this abstract is taken from the Book of Daniel 2.32–33; I quote the Stuttgart Bible without the Massorah apparatus (voyels, diacritics, qere) that was introduced more than a thousand years after that the text was written.

References

[1] Itaï Ben Yaacov and Bruno Poizat, Fondements de la Logique Positive, The Journal of Symbolic Logic, **72** (2007), 1141–1162.

[2] Bruno Poizat, Théorie positive des ensembles, (2021), submitted.

[3] Bruno Poizat and Aibat Yeshkeyev, Positive Jonsson Theories, Logica Universalis, **12** (2018), 101–127.

[4] Bruno Poizat and Aibat Yeshkeyev, Back and Forth in Positive Logic, Logic in Question, (2021), Birkhäuser.

July 25, 2021

НОРМЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ГРУППЫ ПОЛЯ

К. Н. Пономарев

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия

e-mail: ponomaryov@ngs.ru

Изучаем строение мультипликативной группы поля *алгебраических чисел*, полученного добавлением к полю рациональных чисел алгебраических элементов. Изучаем поле K конечной степени над полем рациональных чисел.

Для представления мультипликативной группы поля используем все его неархимедовы нормирования. Эти нормирования поля алгебраических чисел K аппроксимируют мультипликативную группу K^* по модулю группы единиц $U(R)$ кольца целых R поля K. Строим точное представление фактора $K^*/U(R)$ в прямой сумме значений неархимедовых нормирований поля K.

В течение статьи любое поле предполагается полем алгебраических чисел, а все нормирования считаются неархимедовыми. Все необходимые для понимания статьи понятия и факты изложены в [1].

1 Нормирования и характеры поля

Рассмотрим поле алгебраических чисел K. Оно представляет расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, получается присоединением алгебраических элементов.

Рассматриваем неархимедовы аддитивные нормирования поля K, которые получаются продолжениями нормализованных p-адических нормирований поля рациональных чисел. Множество всех таких нормирований поля K обозначаем $V(K)$. В этих соглашениях нулевое нормирование считаем тривиальным. Поскольку рассматриваем только продолжения, то два нормирования w_1 и w_2 поля K эквивалентны тогда и только тогда, когда они совпадают $w_1 = w_2$.

Обозначим через V множество аддитивных p-адических нормирований поля рациональных чисел: $V = V(\mathbb{Q}) = \{v_p,\ p - \text{простое}\}$, для которых при любом простом p выполняется $v_p(p) = 1$. Через $V_p(K)$ обозначим подмножество нормирований из $V(K)$, которые продолжают p-адическое нормирование v_p. Семейство нормирований $V(K)$ разбивается в дизъюнктное объединение продолжений p-адических нормирований:

$$V(K) = \coprod_p V_p(K).$$

Каждое нормирование w поля K представляем аддитивным образом в виде характера мультипликативной группы поля — гомоморфизма этой группы в некоторую аддитивную абелеву (упорядоченную) группу его значений $w(K^*)$:

$$w : K^* \to w(K^*), \quad w \in \mathrm{Hom}(K^*, w(K^*)) = \widehat{K^*_{w(K^*)}}.$$

Отметим, что порядок на группе $w(K^*)$ вполне определяется по ее групповой структуре. Действительно, поскольку нормирование неархимедово, группа значений $w(K^*)$ образует абелеву группу без кручения унитарного ранга. Она изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы рациональных чисел, $w(K^*) \rightleftharpoons Q \subseteq \mathbb{Q}^+$. Хорошо известно, что на такой группе можно определить лишь два линейных порядка, взаимно противоположных друг другу (см. [?]).

На группе значений $w(K^*)$ из этих двух порядков выбирается тот, для которого $w(\mathbb{Z}) \geqslant 0$. Порядок используется для выделения нормирований w как таких характеров поля K, которые удовлетворяют метрическому неравенству:

$$(\forall x, y)\ w(x + y) \geqslant \min\{w(x), w(y)\}.$$

Группы значений нормирований будем выбирать вложенными в подходящую общую аддитивную абелеву упорядоченную группу $w(K^*) \subseteq R$. Рассматриваем нормирования в виде характеров со значениями в этой группе:

$$w : K^* \to R, \quad w \in \widehat{K^*_R} = \mathrm{Hom}(K^*, R).$$

Используем аддитивную структуру группы характеров. Значит сумма, линейная комбинация конечного числа нормирований с целыми коэффициентами приводит к новым характерам этой группы.

Если W некоторое семейство нормирований поля K, то через $\langle W \rangle_R$ обозначаем группу, порожденную нормированиями из W в группе характеров $\widehat{K^*} = \widehat{K^*_R}$.

Предложение 1 (Независимость нормирований). *Рассмотрим поле алгебраических чисел K произвольной, возможно бесконечной степени.*

Выберем некоторое множество W различных нетривиальных нормирований этого поля, значения которых выбираются в общей упорядоченной группе R.

Утверждается, что в группе характеров $\widehat{K_R^*}$ это множество порождает свободную абелеву группу $\langle W\rangle_R$, базисом которой является само множество нормирований W.

В самом деле, группа характеров $\widehat{K^*}$ — абелева группа без кручения, а ее подгруппа $\langle W\rangle$ не имеет кручения и порождается нормированиями из W. Покажем, что множество нормирований W образует независимое семейство в группе характеров. Тогда оно порождает подгруппу $\langle W\rangle$, изоморфную прямой сумме циклических групп (см. лемму 16.1 [2]). Отсюда будет следовать утверждение.

Предположим, что имеется соотношение зависимости между различными нормированиями $w_1, \ldots, w_n \in W$ с ненулевыми целыми коэффициентами. Выберем такое соотношение, представим его в виде

$$a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n = 0, \text{ где } a_1, \ldots, \ a_n \in \mathbb{Z}.$$

Поле алгебраических чисел K представляется объединением башни расширений конечной степени. Поэтому можно подобрать такое подполе $F \subseteq K$ конечной степени, которое различает все эти нормирования: ограничения $w_i|_F$ определяют различные неархимедовы нормирования поля F. Эти ограничения определяют дискретные нормирования. Будем считать, что группа значений каждого такого $w_i|_F(F^*)$ порождается элементом $e_i \in R$.

Применим теорему об аппроксимации Артина — Ваплса к полю F и этим ограничениям. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ определим элементы $x_i \in F$, для которых выполняются равенства с символом Кронекера $w_j(x_i) = \delta_{j,i} e_j, \ j = 1, \ldots, n$.

Подставляем в соотношение значения $x_1, \ldots, x_n$ и заключаем $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Отношение зависимости может быть только тривиальным. **Это доказывает предложение**. $\square$

В статье общую группу R будем выбирать прямым произведением $R = \prod w(K^*)$, или прямой суммой $R = \bigoplus w(K^*)$ групп значений $w(K^*)$ подходящего семейства нормирований w. Применим лемму Цорна, вполне упорядочим компоненты разложения. Произведение будем предполагать упорядоченной группой относительно соответствующего лексикографического порядка.

В группе характеров $\widehat{K_R^*}$ базис свободной группы $\langle W\rangle_R$ можно выбирать разными способами. Взамен базиса из нормирований $w \in W$ будем выбирать базис из подходящих характеров группы $\langle W\rangle_R \subseteq \widehat{K_R^*}$.

Используем разбиение в дизъюнктное объединение $W = \coprod_p W_p$. Утверждение предложения позволяет градуировать свободную группу $\langle W \rangle$ — разложить ее в прямую сумму *p-компонент*, в прямую сумму свободных групп $\langle W_p \rangle$: $\langle W \rangle = \bigoplus_{p\text{ — простое}} \langle W_p \rangle$.

Определение 2. Будем называть эту градуированную группу характеров *норменной группой семейства* W.

Если $W = V(K)$, то градуированную группу характеров $\langle V(K) \rangle = \bigoplus \langle V_p(K) \rangle$ называем *норменной группой поля* K.

В силу предложения норменная группа всегда образует некоторую свободную абелеву группу.

2 Норменное представление

Рассмотрим произвольное семейство W нормирований или характеров поля K. Это семейство аппроксимирует K^* по модулю $\ker W = \bigcap_{w \in W} \ker w$.

Определим *норменное представление* π_W — вложение фактора $K^*/\ker W$ в прямое произведение по формуле $\pi_W(x) = \prod_{w \in W} w(x),\ x \in L^*$. В целом получается вложение в прямое произведение групп значений нормирований семейства W:

$$\pi_W : K^*/\ker W \hookrightarrow \prod_{w \in W} w(K^*). \tag{1}$$

Когда семейство W конечное, это прямое произведение является прямой суммой. А вот если число сомножителей бесконечное, то образ K^* может не включаться в ограниченное прямое произведение, в прямую сумму даже если нормирования в W различные. В семействе может оказаться бесконечное число характеров, ограничения которых на какое-нибудь подполе $F \subset K$ одинаковые. Тогда образы элементов этого поля F имеют бесконечный носитель в прямом произведении.

Вложение π_W осуществляется в прямую сумму, в ограниченное прямое произведение тогда и только тогда, когда семейство характеров *почти тривиальное*: для любого элемента $x \in K^*$ и почти всех характеров из W (за исключением конечного количества) выполняется равенство $w(x) = 0$. Для такого семейства характеров W норменное представление (1) сводится к вложению в прямую сумму:

$$\pi_W : K^*/\ker W \hookrightarrow \bigoplus_{w \in W} w(K^*). \tag{2}$$

В остальной части раздела изучим норменное представление в случае поля K конечной степени.

Лемма 3 (Ограниченность семейств нормирований)**.** *Пусть поле K представляет расширение поля рациональных $\mathbb{Q}$ конечной степени. Тогда произвольное семейство W различных неархимедовых нормирований поля K оказывается почти тривиальным и норменное представление приводит к вложению* (2)*.*

В самом деле, хорошо известно, что $\ker V(K) = U(R)$(см. гл. 3 § 6 следствие 6.2 [1]). По лемме 3 отображение $\pi_{V(K)}$ является вложением.

В самом деле, в этом случае поле K образует поле частных некоторой области Дедекинда R — целого замыкания кольца целых $\mathbb{Z}$ в этом поле. Неархимедовы нормирования поля K отвечают простым идеалам этой области R. Свойство следует из разложения дробных идеалов дедекиндовой области R в произведение простых идеалов. **Это доказывает лемму.**

□

Предложение 4 (Норменное представление)**.** *Пусть поле K представляет расширение поля рациональных $\mathbb{Q}$ конечной степени, а $V(K)$ — семейство всех его различных неархимедовых нормирований. Тогда норменное представление* (2) *определяет изоморфизм:*

$$\pi_{V(K)} : K^*/U(R) \rightleftharpoons \bigoplus_{w \in V(K)} w(K^*). \tag{3}$$

В самом деле, хорошо известно, что $\ker V(K) = U(R)$(см. гл.3 §6 следствие 6.2 [1]). По лемме 3 отображение $\pi_{V(K)}$ является вложением.

Неархимедовы нормирования поля конечной степени являются дискретными. Поэтому по аппроксимационной теореме Артина — Вэплса отображение $\pi_{V(K)}$ сюръективно. **Это доказывает предложение.** □

Используем разбиение семейства нормирований $V(K)$ в дизъюнктное объединение продолжений p-адических нормирований v_p: $V(K) = \coprod_p V_p(K)$. Согласно этому разбиению группируем слагаемые в норменном представлении (3), представим его в следующем *градуированном* виде:

$$\pi_{V(K)} : K^*/U(R) \rightleftharpoons \bigoplus_{p\text{ — простое}} \bigoplus_{w \in V_p(K)} w(K^*).$$

Обратим внимание, что поле K предполагается конечной степени, поэтому число продолжений каждого p-адического нормирования v_p на поле K — конечное число. В силу предложения 1 в группе характеров нормирования $V(K)$ определяют свободную группу $\langle V(K)\rangle$. Она представляется прямой суммой свободных групп конечного ранга $V_p(K)$, порожденных продолжениями p-адических нормирований:

$$\langle V(K)\rangle = \bigoplus_{p\text{ — простое}} \langle V_p(K)\rangle.$$

Определение 5. Базис A норменной группы $\langle V(K)\rangle$, составленный из базисов ее компонент, называем *градуированным базисом норменной группы*: $A = \coprod_{p\text{ — простое}} A_p$,, где A_p — базис группы характеров $\langle V_p(K)\rangle$.

Proposition 1 (Обобщенное норменное представление)**.** *Пусть поле K представляет расширение поля рациональных $\mathbb{Q}$ конечной степени. Рассмотрим градуированный базис A норменной группы $\langle V(K)\rangle$.*

Утверждается: норменное представление π_A (2)*), определенное этой системой характеров A, определяет изоморфизм:*

$$\pi_A : K^*/U(R) \rightleftharpoons \bigoplus_{p\ —\ \textit{простое}} \ \bigoplus_{a\in A_p} a(K^*). \tag{4}$$

Докажем предложение. Для каждого простого p условимся все продолжения p-адического нормирования v_p на поле K обозначать w_i^p, $i = 1, \dots n_p$. Это — элементы базиса свободной группы $\langle V(K)_p\rangle$ ранга n_p. А через a_i^p обозначаем элементы базиса A_p.

Эти множества элементов в количестве ранга группы $n_p = r\langle V(K)_p\rangle$ составляют два базиса одной и той же свободной группы. Значит, элементы одного базиса выражаются через элементы другого базиса через унимодулярную матрицу перехода N^p с целыми коэффициентами n_{ij}^p, и наоборот через обратную к ней матрицу M^p.

Для каждого простого p представим

$$a_i^p = \sum_1^{n_p} n_{ij}^p w_j^p,\ i = 1, \dots, n_p,\ n_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

Также выражаем:

$$w_i^p = \sum_1^{n_p} m_{ij}^p a_j^p,\ i = 1, \dots, n_p,\ m_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

Вначале проверим, что семейство всех характеров $A = \cup A_p$ почти тривиальное, тогда норменное представление (2) для $W = A$ определяет вложение $K^*/\ker A$ в прямую сумму.

В самом деле, в силу леммы 3 множество нормирований w_i^p, $i = 1, \ldots n_p$, p — разные простые числа, образует почти тривиальное семейство. В силу выражений выше множество характеров a_i^p, p — разные простые числа, также образует почти тривиальное семейство.

Далее, из соотношений также следует, что $\ker A \subseteq \ker V(K)$. По симметрии выполняет обратное включение, значит $\ker A = \ker V(K) = U(R)$. Норменное представление π_A действительно определяет вложение фактора $K^*/U(R)$ в прямую сумму.

Сюръективность π_A вытекает из вторых соотношений и сюръективности гомоморфизма $\pi_{V(K)}$: каждый набор почти тривиальных значений характеров из A равносилен набору почти тривиальных значений нормирований из $V(K)$. В силу предложения 4 такой набор реализуется на некотором $x \in K$. **Это доказывает предложение.** $\square$

Список литературы

[1] G. Karpilovsky, Field theory. Classical foundations and multiplicative groups, N.-Y.: Marcel Dekker Inc., 1988.

[2] L. Fuchs, Infinite abelian groups. Volume 1, Academic Press: N.Y. and London, 1970.

[3] L. Fuchs, Partially Ordered Algebraic systems, Dover publ.Inc.: Mineola, N.Y., 1963, 1965.

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ФАКТОРИЗАЦИИ АВТОМОРФИЗМОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ

А. М. Попова, О. В. Брюханов

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса 20, Новосибирск, 630073, Россия

e-mail: ampopova@ngs.ru, bryuoleg@ngs.ru

1 Введение

Пусть G — группа, R — кольцо с единицей. *Групповое кольцо* RG – это множество формальных сумм вида $\sum\limits_{g\in G} \alpha_g g$ $\alpha_g \in R$ с естественно определенными операциями:

$$\sum \alpha_g g + \sum \beta_g g = \sum (\alpha_g + \beta_g) g,$$
$$(\sum \alpha_g g)(\sum \beta_g g) = \sum_{g\in G} \Big(\sum_{\substack{f,h\in G\\ f\cdot h = g}} \alpha_f \beta_h \Big) g,$$
$$\alpha(\sum \alpha_g g) = \sum \alpha\alpha_g g.$$

При этом если $R = \mathbb{Z}$, то говорят о *целочисленном* групповом кольце группы G. В случае, когда R — поле, говорят о *групповой алгебре* RG.

Пусть $h = \sum \alpha_g g \in \mathbb{Z}G$. Обозначим $\varepsilon(h) = \sum \alpha_g$. Автоморфизм $\theta \in \mathrm{Aut}\mathbb{Z}G$ называется *нормализованным*, еслио факторизации автоморфизмов $\varepsilon(\theta(g)) = 1$, для любого $g \in G$. Нормализованные автоморфизмы составляют нормальную подгруппу в группе всех автоморфизмов целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}G$.

Цассенхаузом была выдвинута следующая гипотеза.

Гипотеза (о факторизации автоморфизмов). *Для любого нормализованного автоморфизма $\theta \in \operatorname{Aut}\mathbb{Z}G$ существует единица $s \in \mathbb{Q}G$ и групповой автоморфизм $\sigma \in \operatorname{Aut}G$ такие, что $\theta(g) = s^{-1}\sigma(g)s$, для любого $g \in G$.*

Другими словами, определена *факторизация* нормализованного автоморфизма $\theta = \sigma \circ \varphi_s$, где $\sigma \in \mathrm{Aut}G$ и φ_s — сопряжение единицей s алгебры $\mathbb{Q}G$

Как известно, гипотеза Цассенхауза о факторизации автоморфизмов целочисленных групповых колец не подтвердилась. Известны контрпримеры Хертвека [1], Роггенкампа [2].

2 Предварительные сведения

Мы предложили другую факторизацию, основанную на теории представлений конечных групп [3].

Пусть $G = \{e, g_2, \ldots, g_n\}$ — конечная группа, $T_1(G), \ldots, T_s(G)$ — все ее неприводимые неэквивалентные представления степеней $n_1, ..., n_s$,

$$D(G) = \{\mathrm{diag}(T_1(g), ..., T_s(g)), g \in G\}.$$

Очевидно, что $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}[D(G)]$. Условимся кольца $\mathbb{Z}[T_i(G)]$ называть *клетками* кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$. Рассмотрим отображения

$$\mu_{ij} : \sum \alpha_g T_i(g) \to \sum \alpha_g T_j(g), \alpha_g \in \mathbb{Z},$$

которые либо являются изоморфизмами, либо не являются. Если клетки $\mathbb{Z}[T_p(G)], \ldots, \mathbb{Z}[T_{p+k-1}(G)]$, $k \geq 2$, μ_{ij}-изоморфны, обозначим

$$D_p(G) = \{\mathrm{diag}(T_p(g), ..., T_{p+k-1}(g)), g \in G\};$$

$O_p = \mathbb{Z}[D_p(G)]$ назовем *блоком*. Таким образом, все кольцо $\mathbb{Z}[D(G)]$ разбивается на блоки, точнее $\mathbb{Z}[D(G)] \leq O_{p_1} \oplus \cdots \oplus O_{p_r}$, где $\mathbb{Q}$-алгебры $\mathbb{Q}[O_p]$ являются простыми. Если автоморфизм φ кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ все блоки оставляет на месте, назовем его *стабилизирующим*, в противном случае — *переставляющим*.

Заметим, что если $K = \mathbb{Q}(\xi)$ — конечное алгебраическое расширение, то любой автоморфизм $\tau \in \operatorname{Aut}K$ индуцирует изоморфизм $\hat{\tau}$ кольца матриц над K:

$$\hat{\tau}((a_{ij})) = (a_{ij}^{\tau}).$$

Справедливо следующее утверждение доказанное в [3].

Теорема. *Любой нормализованный автоморфизм кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ есть композиция $\varphi\circ\hat{\tau}\circ\varphi_s$, где φ — некоторый переставляющий автомофизм из выделенного конечного набора Φ, τ — автоморфизм поля представления группы G, φ_s — сопряжение единицей s алгебры $\mathbb{Q}[D(G)]$*

Разбиение кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ на блоки определяется характерами χ_i представлений $T_i(G)$. Если χ_i — целочисленный, то блок состоит из одной клетки $\mathbb{Z}[T_i(G)]$. Если χ_i содержит алгебраические числа, то блок состоит из k клеток, где $k = |\mathrm{Aut}\,\mathbb{Q}(\chi_i)|$.

Пусть $\mathrm{Aut}\,\mathbb{Q}(\chi_i) = \{\tau_1 = \mathrm{id}, \tau_2, \ldots, \tau_k\}$. Тогда характерами клеток такого блока являются χ_i, $\tau_2(\chi_i), \ldots, \tau_k(\chi_i)$. Соответственно, клетками блока являются клетки $\mathbb{Z}[T_i(G)]$, $\mathbb{Z}[\hat{\tau}_2(T_i(G))], \ldots, \mathbb{Z}[\hat{\tau}_k(T_i(G))]$, то есть любая матрица блока определяется своей первой клеткой. Сужение любого стабилизирующего автоморфизма на таком блоке есть композиция $\hat{\tau}_j \circ \varphi_s$, $j = 1, \ldots, k$.

Возникает естественный вопрос.

Вопрос. *Для любого ли автоморфизма $\tau_j \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{Q}(\chi_i)$, $j = 1, \ldots, k$, найдется единица s алгебры $\mathbb{Q}[T_i(G)]$ такая, что композиция $\hat{\tau}_j \circ \varphi_s$ является автоморфизмом блока?*

По поводу этого вопроса заметим следующее. В таблице характеров группы Матье M_{11} есть алгебраические числа, но $\mathrm{Out}M_{11} = 1$. Значит если автоморфизм поля характера *"продолжается"* до автомофизма целочисленного группового кольца этой группы с помощью сопряжения, то она служит контрпримером к гипотезе Цассенхауза.

Дело в том, что по гипотезе Цассенхауза любой нормалиэованный автоморфизм целочисленного группового кольца есть композиция автоморфизма группы и сопряжения единицей групповой алгебры. Но автоморфизм, индуцированный автоморфизмом поля характера, переставляет классы сопряженных элементов группы. Значит, в случае $\mathrm{Out}\,G = 1$ не может реализоваться автоморфизмом группы.

3 Основные результаты

Цель нашей работы — описать алгоритм, отвечающий на Вопрос 2, поставленный в предыдущем параграфе.

1. Считаем, что индекс Шура равен 1, то есть поле представления блока совпадает с полем характера. Пусть $\mathbb{Z}[T_p(G)]$ — первая клетка блока, χ_p — характер первой клетки блока, n_p — степень представления $T_p(G)$, $\mathbb{Q}(\chi_p)$ — поле характера. Если $|\mathbb{Q}(\chi_p) : \mathbb{Q}| = k$, то $\{\omega\} = \{\omega_1 = 1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$ — фундаментальный базис расширения

$\mathbb{Q}(\chi_p) : \mathbb{Q}$, то есть любое целое алгебраическое число поля $\mathbb{Q}(\chi_p)$ есть целочисленная линейная комбинация элементов $\{\omega\}$.

2. Пусть m — наименьшее натуральное число такое, что для всех $1 \le i, j \le n_p$, $q = 1, \dots, k$, выполнено включение

$$m\omega_q e_{ij} \in \mathbb{Z}[T_p(G)].$$

Рассмотрим идеал

$$I_m = \langle m\omega_q e_{ij}, 1 \le i, j \le n_p, q = 1, \dots, k\rangle_{\mathbb{Z}[T_p(G)]} \lhd \mathbb{Z}[T_p(G)].$$

3. Нетрудно доказать, что для любого $\tau \in \mathrm{Aut}\ \mathbb{Q}(\chi_p)$, $\hat{\tau}(I_m) = I_m$. Этот факт и позволяет свести алгоритм к конечному перебору.

4. Ищем сопрягающую матрицу s в виде $s = s_1 + ms_2$, где коэффициенты элементов s_1 в разложении по базису $\{\omega\}$ по модулю меньше m.

5. Пусть K — кольцо целых алгебраических чисел поля $\mathbb{Q}(\chi_p)$. Элементы сопрягающей матрицы можем считать целыми. Можно показать, что если s — сопрягающая матрица, то её определитель $|s| = \varepsilon$, где ε — единица K.

Пусть $s = (s_{ij})$, $s^* = (S_{uv})$, тогда

$$s^{-1}(me_{ij})s = \frac{1}{|s|}s^*(me_{ij})s = \frac{m}{|s|}(s_{kl}S_{uv}),$$

где $k, l, u, v = 1, \dots, n_p$.

Чтобы результат сопряжения был целочисленной матрицей, нужно, чтобы числа $\frac{s_{kl}S_{uv}}{|s|}$ были целыми при всех k, l, u, v. Для кольца целых алгебраических чисел существует теория дивизоров. Если S_{uv} в полугруппе дивизоров имеют наибольший общий делитель q, то обозначим $S_{uv} = qS_{uv}{}'$. Тогда определитель $|s| = qt$ и при сопряжении получаем числа

$$\frac{s_{kl}qS_{uv}{}'}{qt} = \frac{s_{kl}S_{uv}{}'}{t}.$$

Для любого простого делителя t в полугруппе дивизоров найдутся элементы s_{kl} и $S_{uv}{}'$, которые не содержат этого делителя. Значит, в полугруппе дивизоров $t = 1$. Так как $|s| = qt$, $|s^*| = q^n|s^{*\prime}|$, имеем равенство $q^n|s^{*\prime}| = q^{n-1}t^{n-1}$. При $t = 1$ отсюда следует, что $q = 1$ и $|s^*| = 1$. Последнее и означает, что $|s| = \varepsilon$

6. Сопрягающая матрица s существует тогда и только тогда, когда для s_1 выполняются следующие условия:

1) $|s_1| = \varepsilon + m\alpha$, ε — единица K, $\alpha \in K$;

2) для любого $g \in \mathbb{Z}[T_p(G)]$, $g \notin I_m$ найдется $h \in \mathbb{Z}[T_p(G)]$, $h \notin I_m$ такой, что выполняется сравнение $\hat{\tau}(g)s_1 \equiv s_1 h \pmod{m}$;

3) для s_1 найдется s_2 такая, что $|s_1 + ms_2| = \varepsilon$.

Так как $\hat{\tau}(I_m) = I_m$, то если $s = s_1 + ms_2$ сопрягающая матрица, то справедливо равенство

$$\hat{\tau}(g)(s_1 + ms_2) = (s_1 + ms_2)h$$

или

$$\hat{\tau}(g)s_1 = s_1 h + m(s_2 h - \hat{\tau}(g)s_2).$$

Пусть $g_1, \ldots, g_t$ — аддитивный базис фактора $\mathbb{Z}[T_p(G)]/I_m$, $b_1, \ldots, b_t$ — аддитивный базис фактора $\mathbb{Z}[\hat{\tau}(T_p(G))]/I_m$, тогда выполнение условия 2) сводится к проверке существования решения системы сравнений

$$\begin{cases} x_1 s_1 b_1 + ... + x_t s_1 b_t \equiv g_1 s_1 \pmod{m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1 s_1 b_1 + ... + y_t s_1 b_t \equiv g_t s_1 \pmod{m} \end{cases}$$

В кольце целых чисел такая матрица s_2 находится всегда. Это показано в [4]. Описанный алгоритм использует приведение целочисленной матрицы к диагональному каноническому виду.

В кольце целых алгебраических чисел, являющимся дедекиндовым, справедливо следующее утверждение (см. [5])

Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — произвольные, отличные от нуля элементы дедекиндова кольца $\mathfrak{O}$ и $\mathfrak{b}$ — общий наибольший делитель главных дивизоров $(\alpha_1), \ldots, (\alpha_s)$, то всякий элемент $\alpha \in \mathfrak{O}$, делящийся на $\mathfrak{b}$, может быть представлен в виде

$$\alpha = \xi_1\alpha_1 + \cdots + \xi_s\alpha_s,\ \xi_i \in \mathfrak{O}.$$

Поскольку это утверждение позволяет приводить матрицу к каноническому виду, есть предположение, что и в кольце целых алгебраических чисел возможно будет построить соответствующий алгоритм. Таким образом, наш алгоритм сводится к перебору всех s_1 и проверке для каждой s_1 условий 1)–3).

Список литературы

[1] M. Hrtweek, Integral group ring automorphisms without Zassenhaus factorization, Illinois Jornal of Mathematics **46**, 1 (2002), 233–245.

[2] K. W. Roggenkamp, L. Scott, On a conjecture of Zassenhaus for finite group rings: manuscript, November, 1988, 60p.

[3] A. M. Ivleva, O. V. Bryukhanov, E. V. Grachev, Units of Integral Group Rings, Novosibirsk: NSTU Publisher, 2018, 190pp.("NSTU Monographs" series) (Russian).

[4] A. M. Popova A.M., Groups of units of absolutely irreducible matrix rings, Actual problems of modern mathematics, Novosibirsk, **3** (1997), 155–162 (Russian).

[5] Z. I. Borevich, I. R. Shapharevich, Number theory, Moscow, "Nauka", 1985 (Russian).

SPLITTING PARTIALLY COMMUTATIVE LIE ALGEBRAS INTO DIRECT SUMS

E. N. Poroshenko

Novosibirsk State Technical University,
20 K. Marx ave., Novosibirsk, 630073

e-mail: auto_stoper@ngs.ru

1 Introduction and preliminaries

Let $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ be a finite set, R be an arbitrary domain, and $G = \langle A; E\rangle$ be an undirected graph without loops, where $E \subseteq A \times A$ is the set of its edges. If vertices a and b are connected in G we write $a \leftrightarrow b$. Analogously, if $A_1 \subseteq A$ and $a \in A$ is adjacent to all vertices in A_1 then we use the notation $a \leftrightarrow A_1$. Finally, if $A_1, A_2 \subseteq A$ then $A_1 \leftrightarrow A_2$ means $a_1 \leftrightarrow a_2$ for any $a_1 \in A_1$ and $a_2 \in A_2$. Let H be an arbitrary undirected graph. By $V(H)$ and $E(H)$ denote the set of the vertices and the set of the edges of this graph respectively. Next, let $V_1 \subseteq V(H)$. By $H(V_1)$ denote the subgraph of H, generated by the set V_1.

Consider a variety $\mathfrak{M}$ of Lie algebras over a ring R. A *partially commutative Lie algebra in* $\mathfrak{M}$ *with a defining graph* G is a Lie algebra $\mathcal{L}_R(A; G)$ defined as

$$\mathcal{L}_R(A; G) = \langle A \,|\, [x_i, x_j] = 0 \Longleftrightarrow \{x_i, x_j\} \in E; \quad \mathfrak{M}\,\rangle$$

in $\mathfrak{M}$. Thus, in this algebra, the variety identities and the defining relations hold together.

It can be easily seen that the definition of partially commutative Lie algebras is similar to one of partially commutative groups. For this reason many analogues of results for groups hold for Lie algebras and vice versa. Despite in recent years much attention has been paid to researches into partially commutative groups partially commutative Lie algebras have not been studied as heavily as partially commutative groups. Nevertheless, there are some results obtained for Lie algebras. For example, in [1]–[4] descriptions of bases of partially commutative, partially commutative nilpotent and partially commutative metabelian Lie algebras were obtained; in [4, 5] centralizers of partially commutative and partially commutative metabelian Lie algebras were studied. Papers [4], [6]–[10] are devoted to investigation of theories of partially commutative Lie algebras in some varieties, namely, in these papers criterions for universal and elementary equivalence in some classes of partially commutative Lie algebras of some varieties were found.

Many problems in partially commutative structures can be formulated as follows. Consider a property a partially commutative structure may or may not have. Can we recognize if a structure has this property just considering its defining graph? We consider the following problem here. Suppose that a partially commutative (partially commutative metabelian of partially commutative nilpotent) Lie algebra splits into a direct sum of two non-trivial Lie algebras. Our goal is to find what properties the defining graph of such an algebra has. In this paper we obtain an answer to this question. The analogous problem for partially commutative groups of some varieties were solved in [11]

By $\mathcal{L}(A;G)$, $\mathcal{M}(A;G)$, and $\mathcal{N}_m(A;G)$ denote the partially commutative, partially commutative metabelian, and partially commutative nilpotent of degree m Lie R-algebras defined by the graph G respectively. Let us use the common notation $L(A;G)$ for one of the algebras $\mathcal{L}(A;G)$, $\mathcal{M}(A;G)$, or $\mathcal{N}_m(A;G)$. We denote by $F(A)$ the absolutely free algebra over R with the set of generators A, i.e. the algebra of non-commutative non-associative polynomials in the set A such that these polynomial;s do not have monomials of cumulative degree 0.

Denote by $[u]$ a non-associative monomial in A, i.e. a finite product of elements in A with a parenthesizing defining the order of multiplications on it.

Definition 2. *Multi-degree* of a non-associative monomial $\alpha[u]$ is the vector $\overline{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ where δ_i is the number of occurrences of a_i in $[u]$.

Definition 3. A non-zero element g of $F(A)$ is called *multi-homogeneous* if g can be represented as a linear combination of Lie monomials of the same multi-degree $\overline{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$.

For a multi-homogeneous element $g \in F(A)$, if $g = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i[u_i]$, where $\alpha_i \in R\backslash\{0\}$ and $[u_i]$ are non-zero monomials in $F(A)$, then set $\mathrm{mdeg}(g) = \mathrm{mdeg}([u_i])$, where $1 \leqslant i \leqslant k$.

Let $[u] \in F(A)$ be a monomial such that $\mathrm{mdeg}[u] = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$. The set $\{a_i \mid \delta_i \neq 0\}$ is called a *support* and is denoted by $\mathrm{supp}([u])$. For a polynomial $g = \sum_j \alpha_j[u_j]$ in $F(A)$ set $\mathrm{supp}(g) = \bigcup_j \mathrm{supp}([u_j])$.

The notions of the multi-degree and the support can be defined for elements in $L(A;G)$ in an obvious way.

Since identities and relations of $L(A;G)$ are multi-homogeneous, the following statement holds. If g_i's are multi-homogeneous polynomials of mutually distinct multi-degrees and $0 = \sum_i g_i$ in $L(A;G)$ then $g_i = 0$ in $L(A;G)$ for any i.

Length of a non-associative monomial $[u]$ of multi-degree $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ is $\sum_{i=1}^{n} \delta_i$. For $h \in L(A;G)$ consider a representation of h as a linear combination of Lie monomials. Of course, these monomials may have different lengthes. Let i be any integer positive number. By $\omega_i(h)$ denote the part of this linear combination consisting of all monomials of length i. Then $h = \sum_{i=1}^{r} \omega_i(h)$ where r is the maximum among lengthes of monomials in this linear combination. Furthermore, set $O_k(h) = \sum_{i=1}^{k} \omega_i(h)$. Finally, denote by $o_k(h)$ the element $h - O_k(h)$.

Let $f, g \in L(A;G)$. We write $f \backsim g$ if $\alpha f = \beta g$ in $L(A;G)$ for some $\alpha, \beta \in R \backslash \{0\}$.

We will use the following theorem on centralizers in $\mathcal{L}(A;G)$ [5].

Theorem 4. *Let $g \in \mathcal{L}(A;G)$, $H = \overline{G}(\mathrm{supp}(g))$ and $H_1, \ldots, H_p$ be connected components of H. Then*

1. *there is a decomposition $g = \sum_{i=1}^{p} g_i$, where $\mathrm{supp}(g_i) = A(H_j)$ for $i = 1, 2, \ldots, p$;*

2. *$C(g)$ consists of all elements of the form $h = \sum_{i=1}^{p} h_i + h'$ such that for any $i = 1, 2, \ldots, p$ if $h_i \neq 0$ then $g_i \backsim h_i$ and if $h' \neq 0$ then $\mathrm{supp}(g) \leftrightarrow \mathrm{supp}(h')$.*

In metabelian Lie algebras we will omit all parentheses except the outer pair.

Let us order the set of A in an arbitrary way. For any multi-degree $\overline{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ consider the set $A(\overline{\delta}) = \{a_i \mid \delta_i \neq 0\}$. Let $H_0, H_1, \ldots H_s$ be the connected components of $G(A(\overline{\delta}))$. Without loss of generality we can assume that the smallest vertex of $A(\overline{\delta})$ lies in $A(H_0)$. Denote this vertex by b. Consider the set of all monomials of the form $[a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}]$, where

1. $\mathrm{mdeg}([a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}]) = \delta$, in particular $r = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$;

2. $a_{i_1} > a_{i_2}$, $a_{i_2} \leqslant a_{i_3} \leqslant \cdots \leqslant a_{i_r}$, so $a_{i_2} = b$;

3. a_{i_1} is the largest element of one of the sets $A(H_1), A(H_2), \ldots, A(H_n)$.

Denote this set by $B_{\overline{\delta}}(A;G)$ and consider the set $\mathfrak{B}(A;G) = \sum B_{\overline{\delta}}(A;G)$. The following theorem holds [4]

Theorem 5. *The set $\mathfrak{B}(A;G)$ is a basis of the partially commutative metabelian Lie algebra $\mathcal{M}(A;G)$.*

2 Main Part

Consider a graph G such that the graph complement $\overline{G}$ is connected. Let $L(A;G) = L_1 \oplus L_2$ be a decomposition of $L(A;G)$ into a direct sum two subalgebras.

For any $g \in L(A;G)$ the pair $(g_1, g_2) \in L_1 \oplus L_2$ is *corresponding to* g if $g = g_1 + g_2$. It is obvious that for any g the pair corresponding to this element is unique. Denote the elements of this pair by $(g)_1$ and $(g)_2$ respectively.

The following theorem holds.

Theorem 6. *Let $L(A;G)$ be a partially commutative Lie algebra $\mathcal{L}(A;G)$, or a partially commutative metabelian Lie algebra $\mathcal{M}(A;G)$, or a partially commutative nilpotent of degree $m \geqslant 2$ Lie algebra $\mathcal{N}_m(A;G)$. Then $L(A;G)$ splits into a direct sum of two non-zero subalgebras if and only if $\overline{G}$ is not connected.*

Proof. Suppose that the $L(A;G)$ splits into direct sum of non-trivial Lie algebras and graph $\overline{G}$ is connected.

Since $(a_i)_l \in L_l$ for $l = 1, 2$, we have $[(a_i)_1, (a_i)_2] = 0$. We may assume that $(a_i)_1 = \alpha_i a_i + g_i$ and $(a_i)_2 = (1 - \alpha_i)a_i - g_i)$, where $a_i \notin \mathrm{supp}\omega 1(g_i)$. Then, it is easy to see that

$$[g_i, a_i] = 0$$

By Theorem 4 $g_i = \gamma a_i + g_{i,1}$, where $a_i \leftrightarrow \mathrm{supp}(g_{i,1})$. Since $a_i \nleftrightarrow a_j$, we obtain in $L(A;G)$ $a_j \notin \mathrm{supp}(g_i)$ if $L(A;G)$ is a partially commutative Lie algebra.

Denote by $\mathcal{L}_k(A;G)$ the subset of $\mathcal{L}(A;G)$ consisting of all elements g such that $o_k(g) = 0$. Similarly, $\mathcal{M}_k(A;G)$ is the subset of $\mathcal{M}(A;G)$ such that $o_k(g) = 0$ for any $g \in \mathcal{M}_k(A;G)$.

Using homomorphisms $\mathcal{L}_m(A;G) \to \mathcal{N}_m(A;G)$ and $\mathcal{L}(A;G) \to \mathcal{M}(A;G)$ we also obtain if $L(A;G)$ is a partially commutative nilpotent algebra then $a_j \notin \mathrm{supp}(O_{m-1}((a_i)_1))$ and if $L(A;G)$ is a partially commutative metabelian algebra then $a_j \notin \mathrm{supp}(O_2((a_i)_1))$.

Next, for any $i = 1, 2, \ldots, n$ we can write $(a_i)_1 = \alpha_i a_i + g_i$ and $(a_i)_2 = (1 - \alpha_i)a_i - g_i$, where $a_i \notin \mathrm{supp}(\omega_1(g_i))$.

Since $\overline{G}$ is not connected for any i there is j such that $a_i \nleftrightarrow a_j$.

We can obtain from $[(a_i)_1, (a_j)_2] = [(a_j)_1, (a_i)_2] = 0$ that

$$\begin{cases} \alpha_i(1-\alpha_j)[a_i, a_j] + \alpha_i[\omega_1(g_j), a_i] + (1-\alpha_j)[\omega_1(g_i), a_j] - [\omega_1(g_i), \omega_1(g_j)] = 0 \\ -\alpha_j(1-\alpha_i)[a_i, a_j] + \alpha_j[\omega_1(g_i), a_j] + (1-\alpha_i)[\omega_1(g_j), a_i] + [\omega_1(g_i), \omega_1(g_j)] = 0 \end{cases}. \tag{1}$$

Since $a_i \not\leftrightarrow a_j$ we have $[a_i, a_j] \neq 0$. So,

$$\begin{cases} \alpha_i(1-\alpha_j) = 0 \\ \alpha_j(1-\alpha_i) = 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Therefore either $\alpha_i = \alpha_j = 1$ or $1-\alpha_i = 1-\alpha_j = 1$. So, we obtain $(g_i)_2 = a_i - g_i$ and $(g_j)_2 = a_j - g_j$ or $(g_i)_1 = a_i + g_i$ and $(g_j)_1 = a_j + g_j$. Since $\overline{G}$ is connected we obtain for any j if $(g_i)_1 = a_i + g_i$ then $(g_j)_1 = a_j + g_j$ and if $(g_i)_2 = a_i - g_i$ then $(g_j)_2 = a_j - g_j$, where $a_i \notin \mathrm{supp}(\omega_1(g_i))$. $a_j \notin \mathrm{supp}(\omega_1(g_j))$.

Without loss of generality we may assume that a_i corresponds to the pair $(a_i + g_i, -g_i)$, where $a_i \notin \mathrm{supp}(\omega_1(g_i))$. Then $[g_i, a_i] = 0$, consequently $[\omega_1(g_i), a_i] = 0$. So, by Theorem 4 we get $a_i \leftrightarrow \mathrm{supp}(\omega_1(g_i))$.

We can rewrite (1) as follows

$$\begin{cases} [\omega_1(g_j), a_i] - [\omega_1(g_i), \omega_1(g_j)] = 0 \\ [\omega_1(g_i), a_j] + [\omega_1(g_i), \omega_1(g_j)] = 0 \end{cases}. \tag{3}$$

One can check that if $\omega_1(g_i) \neq 0$, then there is $j \neq i$ such that a_j is adjacent to one of the vertices in $\mathrm{supp}(\omega_1(g_i))$. But in this case $[\omega_1(g_i), a_j] = 0$, which contradicts to Theorem 4. So, if $L(A;G) = \mathcal{L}(A;G)$ then

$$\omega_1(g_i) = 0. \tag{4}$$

If $L(A;G) = \mathcal{M}(A;G)$ or $L(A;G) = \mathcal{N}_m(A;G)$ for $m \geqslant 2$, then (4) follows from the fact that the restrictions of the natural homomorphisms $\mathcal{L}(A;G) \to \mathcal{N}_m(A;G)$ and $\mathcal{L}(A;G) \to \mathcal{M}(A;G)$ to the maps $\mathcal{L}_m(A;G) \to \mathcal{N}_m(A;G)$ and $\mathcal{L}_3(A;G) \to \mathcal{M}(A;G)$ are bijections.

Equation (4) implies, $g_i = o_1(g_i)$ for $i = 1, 2, \ldots, n$. Let $g_i \neq 0$. As we assumed above each generator a_i corresponds to the pair $(a_i + g_i, -g_i)$. So, we have

$$\begin{cases} [g_j, a_i] - [g_i, g_j] = 0 \\ [g_i, a_j] + [g_i, g_j] = 0 \end{cases}. \tag{5}$$

From these equations by the same arguments as above we obtain there exists $j \neq i$ such that $a_j \notin \mathrm{supp}(o_1(g_i))$. Then in $\mathcal{L}(A;G)$ we have $[o_1(g_i), a_j] = 0$ for such j that contradicts to but this equation contradicts to Theorem 4. Therefore $g_i = 0$ in the case of $\mathcal{L}(A;G)$.

By induction it can be shown that $O_{m-1}(g_i) = 0$ in an algebra $\mathcal{N}_m(A;G)$. The proof is similar to one of the equation $g_i = 0$ in $\mathcal{L}(A;G)$.

Consider an algebra $\mathcal{M}(A;G)$. For $o_1(g_i)$ we have

$$o_1(g_i) = \sum_{\overline{\delta}} g_{i,\overline{\delta}}, \tag{6}$$

where $g_{i,\overline{\delta}} \in \mathcal{M}(A;G)$ is a multi-homogeneous element of multi-degree $\overline{\delta}$. We can rewrite these elements as $g_{i,\overline{\delta}_0} = \sum_{p=1}^{k} \lambda_p[u_p]$, where $[u_p]$ are basis monomials with respect to the order described in Theorem 5 and $\lambda_p \in R\backslash\{0\}$. Analyzing this decomposition we obtain $g_i = 0$.

Let $L(A;G)$ is either $\mathcal{L}(A;G)$ or $\mathcal{M}(A;G)$. Then $g_i = 0$. Hence $a_i \in L_1$ for $i = 1, 2, \ldots, n$. Thus, $L_1 = \mathcal{L}(A;G)$ and so $L_2 = 0$.

Let $L(A;G) = \mathcal{N}_m(A;G)$. Since a_i corresponds to $(a_i+g_i, -g_i)$, we obtain $g_i \in L_2$.

On the other hand, $O_{m-1}(g_i) = 0$. Consequently, it is easy to see that for any non-commutative non-associative polynomial $f(a_1, \ldots, a_n)$ such that $\omega_1(f(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = 0$ the equation $f((a_1)_1, (a_2)_1, \ldots, (a_n)_1) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ holds. In particular it holds for any g_i. Therefore, $g_i \in L_1$ and so $g_i = 0$.

The converse is obvious. If $\overline{G}$ is not connected then $A = A_1 \cup A_2$, where there are no edges $\{a, b\}$ such that $a \in A_1$ and $b \in A_2$. Then $A_1 \leftrightarrow A_2$ and $L(A;G) = L(A_1;G(A_1)) \oplus L(A_2;G(A_2))$. $\square$

References

[1] G. Duchamp, D. Krob, The Free Partially Commutative Lie Algebra: Bases and Ranks, Advances in Mathematics, **95** (1992), 92–126.

[2] E. N. Poroshenko, Bases for partially commutative Lie algebras, Algebra and Logic, **50**, 5 (2011), 405–417.

[3] E. N. Poroshenko, Bases for partially commutative nilpotent Lie algebras, Algebra and Model Theory 8, Novosibirsk, 2011, 71–74.

[4] E. N. Poroshenko, E. I. Timoshenko, Universal Equivalence of Partially Commutative Metabelian Lie Algebras, J. Algebra, (2013), 143–168.

[5] E. N. Poroshenko, Centralizers in partially commutative Lie algebras, Algebra and Logic, **51**, 4 (2012), 351–371.

[6] E. N. Poroshenko, On universal equivalence of partially commutative metabelian Lie algebras, Comm. in Algebra, **43**, 2 (2015), 746–762.

[7] E. N. Poroshenko, Universal equivalence of partially commutative Lie algebras, Algebra and Logic, **56**, 2 (2017), 133–148.

[8] E. N. Poroshenko, Universal equivalence of some countably generated partially commutative structures, Siberian Math. J., **58**, 2 (2017), 296–304.

[9] E. N. Poroshenko, Elementary equivalence of partially commutative Lie rings and algebras, Algebra and Logic, **56**, 4 (2017), 348–352.

[10] E. N. Poroshenko, On universal theories of partially commutative Lie algebras defined by graphs without triangles, squares, and isolated vertices, Siberian Electronic Mathematical Reports, to appear. (Russian)

[11] E. I. Timoshenko, On the decomposition of partially commutative groups of varieties and their defining graphs, Sibirian Mathematical Journal, **62**, 4 (2021), 742–746.

A SHORT SURVEY ON FIELDS INTERPRETABLE IN THE FREE GROUP

R. Sklinos

Chinese Academy of Sciences,
Beijing, China

e-mail: rizos.sklinos@yahoo.com

1 Introduction

The aim of this short paper is to provide context and aggregate the results proved in a series of papers [1], [7]–[10], [14], culminating to the result that no infinite field is interpretable in the first-order theory of nonabelian free groups [15].

Question 1.1 (Tarski). *Do all nonabelian free groups share the same first-order theory?*

Non-abelian free groups have gained much attention in model theory after Sela [11] and Kharlampovich — Myasnikov [5] proved that they share the same first-order theory, thus answering Tarski's question in the positive. More interestingly Sela proved that this common first-order theory, and actually the theory of any torsion-free hyperbolic group, is *stable* [12].

Theorem 1.2 (Sela). *The first-order theory of non-abelian free groups is stable.*

Stability is the most prominent dividing line in Shelah's classification theory [13], separating theories for which one can find invariants to classify their models from theories that this is not possible. An intuitive way to think about a stable theory is the following: a first-order theory is stable if it supports, in all models, a nice independence relation (called *forking independence*) modeled on linear independence of vector spaces. Since none such relation was known for non-abelian free groups one can see why the stability of the theory of non-abelian free groups is surprising. In any case, this result is considered one of the deepest results in the model theory of groups.

In a different line of thought Zilber tried to understand uncountably categorical theories through some naturally defined pregeometries [17]. Towards this goal he conjectured:

Conjecture 1.3 (Zilber's trichotomy conjecture)**.** *A strongly minimal set can be exactly one of the following three:*

- *trivial;*
- *essentially a vector space;*
- *bi-interpretable with an algebraically closed field.*

The conjecture was refuted by Hrushovski [4], but from the refutation the important notion of CM-triviality and later ampleness emerged (see [6], [3]). The ample hierarchy can be thought of as a way to measure how complicated forking independence is in a stable theory. A first-order theory that interprets an infinite field is as complicated as possible (n-ample for all n), while on the other end a vector space or an abelian group are the tamest (not 1-ample).

Since the first-order theory of the free group is stable the following questions arise:

Question 1.4. *Can we understand forking independence in non-abelian free groups in a a natural way?*

Question 1.5. *How complicated forking independence is in the first-order theory of non-abelian free groups?*

Question 1.6. *Does the first-order theory of non-abelian free groups interpret an infinite field?*

We will answer all the questions in the next section.

2 Main Results

In a series of papers [9, 10] we answer Question 1.4 by giving a natural interpretation of forking independence in non-abelian free groups. Intuitively, the tuple $\bar{b}$ is independent from $\bar{c}$ over a set of parameters A in a non-abelian free group $\mathbb{F}$, if there exists a splitting of $\mathbb{F}$ over A so that the smallest subgroups containing $A\bar{b}$ and $A\bar{c}$ are adequately "separated".

Theorem 2.1. *Let $A \subset \mathbb{F}$ be a set of parameters and $\bar{b}, \bar{c}$ be tuples from $\mathbb{F}$. Then $\bar{b}$ is independent from $\bar{c}$ over A if and only if there exists a normalized cyclic JSJ decomposition Λ of $\mathbb{F}$ relative to A in which any two blocks of the minimal subgraphs $\Lambda^{min}_{A\bar{b}}, \Lambda^{min}_{A\bar{c}}$ of $\langle A, \bar{b}\rangle$ and $\langle A, \bar{c}\rangle$ respectively intersect at most in a disjoint union of envelopes of rigid vertices.*

We now define the ample hierarchy.

Definition 2.2 ([3, 6])**.** T be a stable first-order theory and $n \geq 1$. Then T is n-ample if (after possibly adding some parameters) there are $a_0, a_1, \ldots, a_n$ such that:

1. a_0 forks with a_n over $\emptyset$;
2. a_{i+1} does not fork with $a_0, \ldots, a_{i-1}$ over a_i, for $1 \leq i < n$;
3. $acl^{eq}(a_0) \cap acl^{eq}(a_1) = acl^{eq}(\emptyset)$;
4. $acl^{eq}(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_i) \cap acl^{eq}(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}) = acl^{eq}(a_0, \ldots, a_{i-1})$, for $1 \leq i < n$.

A stable first-order theory is called *ample* if it is n-ample for all n. The ample hierarchy does not collapse (see [16], [2]). Consequently, it gives us a meaningful way to measure how complicated forking independence is in a stable first-order theory.

Theorem 2.3. *For every $n < \omega$, there exists a first-order theory which is n-ample, but not $n+1$-ample.*

We now answer Question 2.2 (see [14]).

Theorem 2.4 (Ould Houcine—Tent / S.)**.** *The first-order theory of non-abelian free groups is ample.*

Hence, one can naturally ask whether the ampleness of the free group comes from an infinite interpretable field or not. We note that Evans [3] has constructed a first-order theory which is ample but does not even interpret an infinite group.

Theorem 2.5 ([1, 15])**.** *The first-order theory of non-abelian free groups does not interpret an infinite field.*

This is the first stable group theory that is ample but does not interpret an infinite field.

References

[1] R. Sklinos, A. Byron, Fields definable in the free group, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B, **6** (2019), 297–345.

[2] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro, and M. Ziegler, Ample hierarchy, Fund. Math. **224**, 2 (2014), 97–153.

[3] D. Evans, Ample dividing, J. Symb. Logic, **68**, 4 (2003), 1385–1402.

[4] Ehud Hrushovski, A new strongly minimal set, Ann. Pure Appl. Logic, **62** (1993), 147–166.

[5] O. Kharlampovich and A. Myasnikov, Elementary theory of free nonabelian groups, J. Algebra, **302** (2006), 451–552.

[6] A. Pillay, A Note on CM-Triviality and the Geometry of Forking, J. Symb. Log., **65**, 1 (2000), 474–480.

[7] C. Perin, A. Pillay, R. Sklinos, and K. Tent, On groups and fields interpretable in torsion-free hyperbolic groups, Münster J. of Math. **7**, 2 (2014), 609–621.

[8] C. Perin and R. Sklinos, Homogeneity in the Free Group, Duke Math. J. **161** (2012), 2635–2668.

[9] C. Perin and R. Sklinos, Forking and JSJ decompositions in the free group, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), **18**, 3 (2016), 1983–2017.

[10] C. Perin and R. Sklinos, Forking and JSJ decompositions in the Free group II, Journal of the London Mathematical Society, **102**, 2 (2019), 796–817.

[11] Z. Sela, Diophantine geometry over groups VI: The elementary theory of free groups, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 707–730.

[12] Z. Sela, Diophantine geometry over groups VIII: Stability, Ann. of Math. (2), **177** (2013), 787–868.

[13] S. Shelah, Classification theory: and the number of non-isomorphic models, 2nd edition, North-Holland, 1990.

[14] R. Sklinos, Ampleness and pseudo-anosov homeomorphisms in the free group, Turkish J. Math., **39**, 1 (2015), 63–80.

[15] R. Sklinos, Fields interpretable in the free group, Preprint, 2021.

[16] K. Tent, The free pseudospace is n-ample but not $(n+1)$-ample, J. Symb. Log., **79**, 2 (2014), 410–428.

[17] B. Zilber, The structure of models of uncountably categorical theories, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1983.

БАЗИСЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ ГРУПП

Е. И. Тимошенко

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия

e-mail: eitim45@gmail.com

1 Введение

Понятие частичной коммутативности можно рассматривать для различных классов алгебр. Точнее, предположим что класс алгебр образует предмногообразие, то есть замкнут относительно подсистем и декартовых произведений. Тогда из результатов работ [1, 2] А. И. Мальцева следует, что в этом классе можно рассматривать алгебры с определяющими соотношениями. Если на алгебрах предмногообразия определена бинарная операция, то для такого предмногообразия можно ввести понятие частично коммутативной алгебры предмногообразия. При этом естественно предполагать, что указанная бинарная операция не коммутативна. Частично коммутативная алгебра предмногообразия определяется с помощью простого графа. Можно рассматривать частично коммутативные группы, моноиды, кольца, ассоциативные алгебры, алгебры Ли и другие структуры.

В статье приведены результаты по базисам частично коммутативных групп из разрешимых и нильпотентных многообразий групп. Из описания базиса получается каноническая запись элементов частично коммутативной группы из этого многообразия групп.

2 Свободные частично коммутативные группы

В дальнейшем рассматриваются только неориентированные графы без петель и кратных ребер. Пусть $\Gamma = \langle X; E \rangle$ — граф, множество вершин которого обозначено через $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, а множество ребер через E. Множество E состоит из неупорядоченных пар $\{x_i, x_j\}$ смежных вершин графа.

Граф Γ, с помощью которого определяется частично коммутативная структура, называется графом коммутативности или определяющим графом этой структуры.

Первой частично коммутативной структурой, которая привлекла к себе внимание, был частично коммутативный моноид. Понятие частично коммутативного моноида ввели Картье и Фота в [3] для изучения комбинаторных проблем, связанных с перестановками слов.

Свободная частично коммутативная группа (или, просто, частично коммутативная группа) имеет групповое представление

$$F(\Gamma) = \langle X; x_i x_j = x_j x_i, \text{ если } \{x_i, x_j\} \in E \rangle.$$

Группа $F(\Gamma)$ впервые появилась в работе Баудиша [4] под названием “semifree group”, а затем в работе Дромса [5] года уже под названием “graph group”. В настоящее время конечно порожденные частично коммутативные группы обычно называются правоугольными группами Артина. Класс частично коммутативных групп довольно широк. Он содержит, например, свободные группы и свободные абелевы группы. Класс замкнут относительно взятия прямых и свободных произведений. Частично коммутативные группы обладают многими замечательными свойствами. Например, хорошо известно, что они аппроксимируются нильпотентными группами без кручения и следовательно сами не содержат элементов конечного порядка. Эти группы линейны [6]. Для правоугольных групп Артина разрешимы многие алгоритмические проблемы, в частности, проблема изоморфизма [7]. Точнее, изоморфизм таких групп сводится к изоморфизму определяющих конечных графов. Для этих групп положительно решаются проблемы равенства и сопряженности. Универсальная теория частично коммутативной группы разрешима [8]. Тем не менее существует частично коммутативная группа, для которой нет алгоритма, позволяющего решать проблему вхождения в конечно порожденные подгруппы. Это пример Михайловой [9] группы $F_2 \times F_2$.

Свободные частично коммутативные группы, вообще говоря, не обладают базисами. Тем не менее для записи элементов этих групп используется, так называемое блоковое разложение элементов. Баудиш в работах [4, 10] доказал несколько важных результатов о частично коммутативных группах и, опираясь на эти результаты, нашел каноническую (блоковую) запись элементов. Для доказательства он использовал комбинаторные методы. Чтобы определить блоковую запись, напомним некоторые определения. Групповое слово w, записанное в алфавите $X^{\pm 1}$, называется минимальным словом, если оно имеет наименьшую длину среди всех слов, представляющих некоторый элемент из группы $F(\Gamma)$. Баудиш в [4] доказал лемму о сокращениях. Она утверждает, что если w не минимальное слово, то w содержит подслово вида xux^{-1}, где $x \in X^{\pm 1}$ и x коммутирует с каждой буквой, входящей в слово u.

Пусть G — некоторая группа и g, h — элементы из G. Тогда (g, h) обозначает групповой коммутатор $g^{-1}h^{-1}gh$. Пусть R — множество коммутаторов вида $\{(x_i, x_j) \mid \{x_i, x_j\} \in E\}$. Таким образом, группа $F(\Gamma)$ имеет представление $\langle X; R\rangle$. Лемма о преобразованиях, доказанная Баудишем в [4], утверждает, что если u и v — два минимальных слова, представляющие один и тот же элемент группы $F(\Gamma)$, то слово u можно преобразовать в слово v, используя только соотношения $x_i^{\varepsilon_i} x_j^{\varepsilon_j} = x_j^{\varepsilon_j} x_i^{\varepsilon_i}$, где $(x_i, x_j) \in R$, $\varepsilon_i, \varepsilon_j = \pm 1$ (то есть без вставок и сокращений подслов вида $x^{\varepsilon} x^{-\varepsilon}, x \in X, \varepsilon \in \{\pm 1\}$.) Следовательно, для любого элемента g из $F(\Gamma)$ существует единственное подмножество Y множества X такое, что все минимальные групповые слова, представляющие элемент g, являются групповыми словами в алфавите Y. Множество Y называется носителем элемента g и обозначается $\mathrm{supp}(g)$. Кроме того, для элементов g из группы $F(\Gamma)$ определена их длина $l(g)$, равная длине минимального слова, представляющего элемент g.

Для блоковой записи элементов из группы $F(\Gamma)$ будем использовать граф $\overline{\Gamma}$ — дополнение графа Γ. Для элемента g группы $F(\Gamma)$, который можно считать представленным минимальным словом g, по лемме о преобразованиях определен порожденный подграф $\Delta(g)$ графа $\overline{\Gamma}$ с вершинами из $\mathrm{supp}(g)$.

Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ — все компоненты связности графа $\Delta(g)$. Тогда можно записать

$$g = g_1 \ldots g_m, \tag{1}$$

где $\Delta(g_i) = \Delta_i$ и $(g_i, g_j) = 1$ для всех i, j. Элементы g_i называются блоками элемента g. Как элементы группы $F(\Gamma)$ блоки элемента g определены однозначно с точностью до порядка. Запись (1) называется канонической записью для элемента g. Она полезна при решении многих алгоритмических и алгебраических вопросов о частично коммутативных группах.

3 Частично коммутативные метабелевы нильпотентные группы

В дальнейшем рассматриваем лишь конечные графы с множеством вершин $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое многообразие групп. Частично коммутативная группа из многообразия $\mathfrak{M}$ с определяющим графом Γ, обозначаемая $F(\Gamma;\mathfrak{M})$, имеет представление

$$F(\Gamma;\mathfrak{M}) = \langle X; x_i x_j = x_j x_i, \text{ если } \{x_i, x_j\} \ \in E\rangle$$

в многообразии $\mathfrak{M}$. В частности $F(\Gamma) = F(\Gamma;\mathfrak{G})$, где $\mathfrak{G}$ — многообразие всех групп.

Пусть G — группа, A, B —подгруппы G. Тогда $(A, B) = gp\,\langle (a, b)\rangle$ — группа, порожденная всеми коммутаторами вида $(a, b), a \in A, b \in B$. Таким образом, $G' = (G, G)$ — коммутант G.

Обозначим через $\mathfrak{A}^2$ многообразие всех метабелевых групп

$$\mathfrak{A}^2 = \{G \,|\, (G', G') = 1\}.$$

Пусть $\mathfrak{N}_c$ обозначает многообразие всех нильпотентных групп ступени не выше c. Это многообразие состоит из всех групп, удовлетворяющих тождеству $v_{c+1} = 1$, где $v_2 = (y_1, y_2), v_{c+1} = (v_c, y_{c+1})$. Пусть $\mathfrak{N}_{2,c} = \mathfrak{A}^2 \cap \mathfrak{N}_c$.

Частично коммутативная метабелева нильпотентная группа $M_{c,\Gamma} = F(\Gamma;\mathfrak{N}_{2,c})$ имеет представление

$$M_{c,\Gamma} = \langle X;\ x_i x_j = x_j x_i, \text{ если } \{x_i, x_j\} \in E\rangle$$

в многообразии $\mathfrak{N}_{2,c}$.

Хорошо известно, что любая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения G обладает центральным рядом

$$G = G_1 > G_2 > \ldots > G_{s+1} = 1 \qquad (2)$$

с бесконечными циклическими факторами. Выберем элементы $a_1, \ldots, a_s$ так, что $G_i = gp\langle a_i, G_{i+1}\rangle$.

Определение 1. Упорядоченная система элементов $(a_1, \ldots, a_s)$ называется *мальцевским базисом* группы G, полученным по центральному ряду (2).

Из определения мальцевского базиса следует, что каждый элемент $g \in G$ можно однозначно записать в форме

$$g = a_1^{t_1} \ldots a_s^{t_s},\ t_i \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $v(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$ — запись элемента $v \in F(\Gamma;\mathfrak{N}_{2,c})$ в виде произведения элементов из $X^{\pm 1}$, причем вершины $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ действительно присутствуют в этой записи. Обозначим

$$\sigma(v) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}.$$

Пусть Γ_v — порожденный подграф Γ с множеством вершин $\sigma(v)$, а $\Gamma_{v,x}$ — компонента связности графа Γ_v, которая содержит вершину $x \in \sigma(v)$.

Зададим на множестве X порядок $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Через $\max(\Gamma_{v,x})$ обозначим наибольшую вершину в компоненте связности $\Gamma_{v,x}$.

Пусть $(y_1, y_2, \ldots, y_m) = ((y_1, \ldots, y_{m-1}), y_m)$, а B — множество таких коммутаторов вида

$$v = (x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}),\ 2 \leq m \leq c,$$

из группы $F(\Gamma; \mathfrak{N}_{2,c})$, что выполнены следующие условия:

(1) $1 \leq j_2 \leq j_3 \leq j_m \leq n,\ j_2 < j_1 \leq n$;

(2) вершины x_{j_1} и x_{j_2} лежат в разных компонентах связности графа Γ_v;

(3) $x_{j_1} = \max(\Gamma_{v,x_{j_1}})$.

Тогда верна следующая теорема о базисе.

Теорема 2. [11]. *Множество элементов $X \sqcup B$ образует мальцевский базис группы $F(\Gamma, \mathfrak{N}_{2,c})$, полученный уплотнением нижнего центрального ряда этой группы.*

4 Частично коммутативные метабелевы группы

Частично коммутативная метабелева группа $M_\Gamma = F(\Gamma; \mathfrak{A}^2)$ имеет представление

$$M_\Gamma = \langle X;\ x_i x_j = x_j x_i,\ \text{если } \{x_i, x_j\} \in E \rangle$$

в многообразии $\mathfrak{A}^2$.

Среди частично коммутативных групп многообразий, не совпадающих с многообразием всех групп, наиболее изучены частично коммутативные метабелевы группы. Для них описаны централизаторы вершин определяющего графа и аннуляторы коммутаторов (x_i, x_j), изучены вложения в группу матриц, группы автоморфизмов, значения централизаторных размерностей, для некоторых определяющих графов получены критерии совпадения универсальных теорий.

Очевидно, что $\overline{M}_\Gamma = M_\Gamma / M'_\Gamma$ — свободная абелева группа. Обозначим через $\overline{g}$ образ элемента $g \in M_\Gamma$ в группе $\overline{M}_\Gamma$ под действием естественного гомоморфизма. Тогда элементы $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ составляют базис группы $\overline{M}_\Gamma$. Пусть $a_i = \overline{x}_i$.

Коммутант M'_Γ является правым модулем над групповым кольцом $\mathbb{Z}[M_\Gamma]$. Действие элемента g на M'_Γ определено сопряжением $c^g = g^{-1} c g$.

На самом деле коммутант будет $\mathbb{Z}[\, a_1^{\pm 1}, \dots, a_n^{\pm 1}\,]$-модулем.

Пусть

$$\gamma = \sum_{i=1}^{l} m_i \overline{g_i}, \quad m_i \in \mathbb{Z} -$$

элемент из $\mathbb{Z}[\, a_1^{\pm 1}, \dots, a_n^{\pm 1}\,]$. Тогда

$$c^{\gamma} = (c^{m_1})^{\overline{g_1}} \dots (c^{m_l})^{\overline{g_l}}.$$

Следующая теорема указывает каноническую запись для “степеней” элементов из коммутанта.

Теорема 3. [12]. *Пусть $1 \neq c \in M'_\Delta$. Тогда множество вершин X можно разбить на две непересекающиеся части X_1 и X_2 так, что выполнены следующие условия.*

(1) Множество X_1 не пусто.

(2) Существует элемент $\gamma \in \mathbb{Z}[\overline{X}_1^{\pm 1}]$ такой, что $(c^\gamma, X_1) \neq 1$ и $(c^\gamma, X_2) = 1$, если X_2 не пусто;

(3) Если в каждой компоненте связности Γ_i, $i = 1, \dots, m$, порожденного графа Γ_1 с множеством вершин X_1 зафиксирована некоторая вершина y_i, то элемент c^γ можно записать в следующей форме

$$c^{\gamma} = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (y_i, y_j)^{\alpha_{ij}},$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}[\overline{X}_1^{\pm 1}]$, причем элементы α_{ij} не зависят от фиксированных вершин y_p при $p < i$.

(4)Такая запись единственна для каждого выбора фиксированных вершин $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$.

В следующей теореме дано описание базиса частично коммутативной метабелевой группы.

Теорема 4. [13]. *Упорядочим множество вершин $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ графа Δ: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Тогда базис коммутанта M'_Δ образует множество $\mathcal{B}'(M_\Delta)$, состоящее из тех элементов v вида*

$$v = [x_i, x_j]^{a_{j_1}^{t_1} \dots a_{j_m}^{t_m}}, \quad \{t_1, \dots, t_m\} \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

для которых выполнены условия
(1) $j \leq j_1 < j_2 \ldots < j_m \leq n$, $1 \leq j < i \leq n$;
(2) вершины x_i и x_j лежат в различных компонентах связности порожденного подграфа Δ_v с множеством вершин $\{x_i, x_j, x_{j_1}, \dots, x_{j_m}\}$;
(3) $x_i = \max(\Delta_{v,x_i})$, где Δ_{v,x_i} — та компонента связности графа Δ_v, которая содержит x_i.

Следствие 5. *Пусть множество $\mathcal{B}'(M_\Delta)$ линейно упорядочено. Тогда любой элемент g из группы M_Δ можно однозначно записать в виде*

$$g = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} v_1^{\beta_1} \dots v_m^{\beta_m},$$

где $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{Z}$ и $v_1 < \ldots < v_m,\ v_j \in \mathcal{B}'(M_\Delta)$.

5 Частично коммутативные нильпотентные группы

О частично коммутативных нильпотентных группах $F(\Gamma; \mathfrak{N}_c)$ известно немногое. Эти группы не содержат элементов конечного порядка. Каноническая форма записи элементов была известна только при $c = 2, 3$. Её можно получить из теоремы 2 о мальцевском базисе группы $F(\Gamma, \mathfrak{N}_{2,c})$ при $c = 2, 3$. Для больших значений c каноническая форма записи элементов получена в 2021 году.

Частично коммутативная алгебра Ли $\mathcal{L}_R(\Gamma)$ над областью целостности R имеет представление

$$\mathcal{L}_R(\Gamma) = \langle X; [x_i, x_j] = 0, \text{ если } \{x_i, x_j\} \in E\rangle$$

в многообразии алгебр Ли. Здесь $[,]$ — лиевы скобки.

Некоторый подход к получению базиса алгебры $\mathcal{L}_R(\Gamma)$ описан в [14]. Но в этой работе нет точного описания базиса. Используя метод Грёбнера — Ширшова, Порошенко в [15] получил точное описание базиса частично коммутативной алгебры Ли. Мы используем этот результат для описания базиса частично коммутативной нильпотентной группы.

Пусть $\mathcal{L}(\Gamma) = \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\Gamma)$. Для группы G обозначим через $G_{(m)}$ m-ый член нижнего центрального ряда $(G, G, \dots, G)$. Связь между градуированной $\mathbb{Z}$-алгеброй Ли, полученной по факторам нижнего центрального ряда группы $F(\Gamma)$ и алгеброй Ли $\mathcal{L}(\Gamma)$, была изучена в работе [16]. Обозначим через $\mathcal{F}$ градуированную алгебру Ли

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{m \geq 1} F_{(m)}(\Gamma)/F_{(m+1)}(\Gamma).$$

Определим семейство подмножеств $\mathcal{A}(X)$ алгебры $\mathcal{L}(\Gamma)$ индуктивно. Положим $\mathcal{A}_1(X) = X$. Пусть для $m \geq 2$

$$\mathcal{A}_m(X) = \{[u, v] \mid u \in \mathcal{A}_p(X),\ v \in \mathcal{A}_q(X),\ p + q = m\},$$

$$\mathcal{A}(X) = \bigcup_{m \geq 1} \mathcal{A}_m(X).$$

Пусть $\mathcal{L}_m(\Gamma)$ — подмодуль $\mathcal{L}(\Gamma)$, порожденный $\mathcal{A}_m(X)$. Алгебра $\mathcal{L}(\Gamma)$ имеет градуировку $(\mathcal{L}_m(\Gamma)_{m\geq 1})$. В [16] доказано, что существует изоморфизм градуированных алгебр Ли $\mathcal{L}(\Gamma)$ и $\mathcal{F}$.

Понятие базисного коммутатора в группах было введено Ф. Холлом. Обычно в группах используются базисные коммутаторы Холла. Нам удобнее при описании базиса частично коммутативной нильпотентной группы использовать стандартные коммутаторы, которые определены в работе Чена, Фокса и Линдона [17].

Пусть X^* — множество всех слов в алфавите $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, включая пустое слово 1. Обозначим через $|u|$ длину слова u. Расширим произвольный линейный порядок на X до лексикографического порядка "$<$" на X^* следующим образом. Положим $u < 1$ для каждого $1 \neq u \in X^*$ и по индукции $x_i u' < x_j v'$, если $x_i < x_j$ или $x_i = x_j, u' < v'$.

Определение 6. Пусть

$$ALS(X) = \{u \in X^* \mid \forall u_1, u_2 \in X^*(u = u_1u_2 \longrightarrow u_2u_1 < u_1u_2)\}.$$

Слово $u \in ALS(X)$ называется ассоциативным словом Линдона — Ширшова.

Определим множество $\mathcal{G}(X)$ и отображение "черта" $\mathcal{G}(X) \longrightarrow X^*$ следующим образом.

Определение 7. (1) $x_i \in \mathcal{G}(X)$ для всех $x_i \in X$, $\overline{x_i} = x_i$.

(2) Если $u, v \in \mathcal{G}(X)$, то $(u, v) \in \mathcal{G}(X)$ и $\overline{(u, v)} = \overline{u}\,\overline{v}$.

Отображение "черта" стирает скобки и запятые.

Пусть

$$\mathcal{G}_m(X) = \{u \mid u \in \mathcal{G}(X),\ |\overline{u}| = m\}.$$

Тогда

$$\mathcal{G}(X) = \bigcup_{m\geq 1} \mathcal{G}_m(X).$$

Теперь можно дать определение множества $(X^*) \subseteq \mathcal{G}(X)$ стандартных коммутаторов.

Определение 8. (1) $x_i \in (X^*)$ для $i = 1, \dots, n$.

(2) Пусть $w = (u, v)$. Тогда $w \in (X^*)$ в том и только том случае, когда выполнены следующие условия:

(2.1) $\overline{w} \in ALS(X)$;

(2.2) $u, v \in (X^*)$, $\overline{u} > \overline{v}$;

(2.3) если $u = (u_1, u_2)$, то $\overline{v} \geq \overline{u_2}$.

Пусть

$$(X^*)_m = \{u \mid u \in (X^*), |\overline{u}| = m\}.$$

В [17] доказана следующая теорема:

Пусть F — свободная группа с базисом $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, а круглые скобки, используемые в определении множества (X^*), обозначают групповой коммутатор $(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$ для $x, y \in F$. Тогда множество коммутаторов $(X^*)_m$ образует базис свободной абелевой группы $F_{(m)}/F_{(m+1)}$ для $m = 1, 2 \ldots$

Определение 9. Пусть $u \in X^*$. Обозначим через $\delta_i(u)$ число вхождений x_i в u. Для $u \in X^*$ положим

$$\mathrm{supp}(u) = \{x_i \mid \delta_i(u) \neq 0\}.$$

Наконец по индукции определим подмножество $\mathcal{C}(X; \Gamma)$ из (X^*).

Определение 10. (1) Все элементы из X принадлежат $\mathcal{C}(X; \Gamma)$.

(2) Элемент $u \in (X^*)_m, m \geq 2$, принадлежит $\mathcal{C}(X, \Gamma)$, если $u = (v, w)$, где v и w — элементы из $\mathcal{C}(X; \Gamma)$ и существует такая вершина из $supp(v)$, которая не смежна с вершиной, соответствующей первой букве элемента w.

(3) Других элементов в $\mathcal{C}(X; \Gamma)$ нет.

Пусть

$$\mathcal{C}_i(X; \Gamma) = \{u \in \mathcal{C}(X; \Gamma) \mid |\overline{u}| = i, \ \ i = 0, 1, \ldots\}.$$

Определим порядок "$\prec$" на $\mathcal{C}(X; \Gamma)$ так, что $u \prec v$, если $u \in \mathcal{C}_p(X; \Gamma), \ v \in \mathcal{C}_q(X; \Gamma), \ 1 \leq p < q$.

Пусть

$$\mathcal{C}^{(m)}(X; \Gamma) = \bigcup_{1 \leq i \leq m} \mathcal{C}_i(X; \Gamma).$$

Теорема 11. [18]. *Множество $\mathcal{C}^{(m)}(X; \Gamma)$ с порядком "$\prec$" является мальцевским базисом группы $F(\Gamma; \mathfrak{N}_m)$, полученным уплотнением нижнего центрального ряда.*

Пример. Пусть $\Gamma = \langle x_1, x_2, x_3; \ \{x_1, x_2\}\rangle$, $x_1 > x_2 > x_3$.

Тогда

$$\mathcal{C}^{(3)}(X; \Gamma) = \{x_1, x_2, x_3; (x_1, x_3), (x_2, x_3); (x_1, (x_1, x_3)),$$

$$(x_2, (x_2, x_3)), ((x_1, x_3), x_2), ((x_1, x_3), x_3), ((x_2, x_3), x_3)\}$$

является мальцевским базисом группы $F(\Gamma; \mathfrak{N}_3)$.

6 Частично коммутативные метабелевы про-p-группы

В этом параграфе под подгруппой, гомоморфизмом, порождающим множеством подразумевается замкнутая подгруппа, непрерывный гомоморфизм и порождающее множество в топологическом смысле, соответственно. В работе [19] исследованы централизаторы вершин графа и аннуляторы коммутаторов (x_i, x_j) в частично коммутативных метабелевых про-p-группах.

Обозначим через P свободную метабелеву про-p-группу, а через P_Γ метабелеву частично коммутативную про-p-группу с определяющим графом $\Gamma = \langle X; E\rangle$. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Фактор-группа P_Γ/P'_Γ является свободной абелевой про-p-группой, которую обозначим A. Её базисом является множество $\{a_1, \ldots, a_n\}$, где a_i — образ x_i при естественном гомоморфизме $P_\Gamma \to P_\Gamma/P'_\Gamma$. Группа P_Γ/P'_Γ изоморфна прямой сумме n копий аддитивной группы кольца целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$. Действие P_Γ на P'_Γ задаётся сопряжениями

$$x \mapsto x^g = g^{-1}xg.$$

Оно определяет на P'_Γ структуру правого модуля над обобщенной групповой алгеброй $\mathbb{Z}_p[[A]]$. Эту алгебру можно отождествить с алгеброй степенных рядов $\mathbb{Z}_p[[y_1, \ldots, y_n]]$, где $y_i = a_i - 1$.

Следующая теорема является аналогом теоремы 4 и дает описание базиса для коммутанта частично коммутативной метабелевой про-p-группы.

Теорема 12. [20]. *Пусть P_Γ — частично коммутативная метабелева про-p-группа и множество $\{x_1, \ldots, x_n\}$ вершин определяющего графа Γ упорядочено. Тогда базис $\mathcal{B}(P'_\Gamma)$ коммутанта P'_Γ над $\mathbb{Z}_p$ состоит из всех таких элементов w вида*

$$w = (x_i, x_j)^{y_{j_1}^{s_1} \ldots y_{j_m}^{s_m}}, \{s_1, \ldots, s_m\} \subset \mathbb{N},$$

для которых выполнены следующие условия:

1) $x_j \le x_{j_1} < \ldots < x_{j_m}$, $x_j < x_i$;

2) вершины x_i, x_j лежат в разных компонентах связности порожденного графа Δ_w с множеством вершин $\{x_i, x_j, x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}\}$;

3) $x_i = \max\{\Delta_{w,x_i}\}$, где Δ_{w,x_i} — связная компонента графа Δ_w, содержащая x_i.

Список литературы

[1] A. I. Mal'tsev, Quasi-primitive classes of algebras, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **108**, 2 (1956), 187–189 (Russian).

[2] A. I. Mal'tsev, The defining relations in categories, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **119**, 6 (1958), 1095–1098 (Russian).

[3] P. Cartier, D. Foata, Problemes combinatoires de commutation et de rearrangements, Lecture Notes in Mathematics **85** (1969), Springer-Verlag, Berlin, New York.

[4] A. Baudisch, Kommutationsgleichungen in semifrien gruppen Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae **29**, 3 (1977), 235–249.

[5] C. Droms, Graph groups, coherence, and three-manifolds, J. Algebra, **106**, 2 (1987) 484–489.

[6] T. Hsu, D. Wise, On linear and residual properties of graph products, Mich. Math. J., **46**, 2 (1999), 251–259.

[7]] C. Droms, Isomorphisms of graph groups, Proc. Amer. Math. Soc. **100**, 3 (1987), 407–408.

[8] V. Diekert, A. Muscholl, Solvability of equations in graph groups is decidable, International Journal of Algebra and Computations, **16**, 6 (2006), 1047–1064.

[9] K. A. Mikhailova, The occurrence problem for products of groups, Math. USSR-Sb., **70 (112)**, 2 (1966), 241—251 (Russian).

[10] A. Baudisch, Subgroups of semifree groups, Acta Math Acad. Sci. Hungaricae, **38** (1981), 19–28.

[11] E. I. Timoshenko, A Mal'tsev basis for a partially commutative nilpotent metabelian group, Algebra and Logic **50**, 5 (2011) 439–446.

[12] Ch. K. Gupta, E. I. Timoshenko, Universal theories for partially commutative metabelian groups, Algebra and Logic, **50**, 1 (2011), 1-–16.

[13] E. I. Timoshenko, A basis of partially commutative metabelian groups, Izv. Math. **85**, 4 (2021), 813–822.

[14] G. Duchamp, D. Krob, The Free Partially Commutative Lie Algebra: Bases and Ranks, Advances in Mathematics **95**, 1 (1992), 92–126.

[15]] E. N. Poroshenko, Bases for partially commutative Lie algebras, Algebra and Logic **50**, 5 (2011) 405–417.

[16] G. Duchamp, D. Krob, The lower central series of the free partially commutative group, Semigroup Forum **45** (1992), 385–394.

[17] K. T. Chen, R. H. Fox, R. C. Lyndon, Free Differential Calculus, IV. The Quotient Groups of the Lower Central Series. The Annals of Mathematics, 2nd Ser. **68**, 1 (1958) 81–95.

[18] E. I. Timoshenko, Mal'tsev bases for partially commutative nilpotent groups, International Journal of Algebra and Computation, to appear.

[19] S. G. Afanaseva, E. I. Timoshenko, Partially commutative metabelian pro-p-groups, Sib. Math, J, **60**, 4 (2019), 559–564.

[20] E. I. Timoshenko, A basis for the commutator subgroup of partially commutative metabelian pro-p-group, Algebra and Logic, **60**, 1 (2021), 53-–63.

REMARKS ON DEONTIC LOGIC AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE

D. Zafeirakopoulos, P. Stefaneas

National Technical University of Athens
Athens, Geece

e-mail: dimzaf252@yahoo.gr,dzafeirakopoulos@mail.ntua.gr,
petrosstefaneas@gmail.com, petros@math.ntua.gr

Artificial intelligence and deontic logic are two fields that can benefit from each other. Artificial intelligence provides a compelling area for the tools of deontic logic to be applied, while deontic logic, with its robust, mathematical approach to ethics, offers a unique method to deal with the various issues that might arise from the use of artificial intelligence. Introducing ethics to artificial intelligence through the use of deontic logic is an approach that has seen research in the past as well. [7]

A Quick Introduction to Deontic Logic

Deontic Logic is a formal logic that falls under the broader category that is understood as non-classical logics. In order to best understand deontic logic and what it has to offer, one must first provide a brief introduction to non-classical logics overall. With the term non-classical logics we refer to a group of formal logics, that share a mathematical foundation and common attributes, such as those of propositional logic. Beyond the common mathematical principles, non-classical logics have unique operands that allow each to focus on a separate matters. Certain examples of non-classical logics are [1]:

1. Modal Logic
2. Deontic Logic
3. Doxastic Logic
4. Temporal Logic

Modal Logic concerns itself with matters of necessity and possibility.
Deontic Logic concerns itself with matters of obligation and ethics.

Doxastic Logic concerns itself with matters of belief.

Temporal Logic concerns itself with matters of time.

We present a few examples of the operands and functions of the various modal logics.

Logic	Symbols	Expressions
Modal Logic	$\Box$	Necessary that
	$\diamond$	Possible that
Deontic Logic	OB	Obligatory that
	PE	Permitted that
Doxastic Logic	Bx	x believes that
Temporal Logic	G	It will always be the case that
	F	It will be the case that
	H	It has always been the case that
	P	It was the case that

Modal logic uses various operands to handle matters regarding necessity, as stated above. The full range of operands it utilizes is as follows:

it is necessary (necessarily true) that ($\Box$)
it is possible that ($\diamond$)
it is impossible that (IM)
it is non-necessary that (NN)
it is contingent that (CO)

All of the above operands can be defined through each other. However, traditionally, the one for necessity is used to define the others. Their definitions are as follows.

$$\diamond p \Leftrightarrow \sim \Box \sim p$$
$$IMp \Leftrightarrow \Box \sim p$$
$$NNp \Leftrightarrow \sim \Box p$$
$$COp \Leftrightarrow (\sim \Box p \ \& \sim \Box \sim p)$$

Now that we have seen some basic information about non-classical logics, we can examine deontic logic in more depth. Much like the modal logic that focuses on matters of necessity, deontic logic utilizes unique operands to deal with the specific matters it concerns itself, namely ethics, along with standard tools of formal logics, like Modus Ponens

Modus Ponens:
If P, then Q.
P.
Therefore, Q.

The unique operands utilized by deontic logic are as follows [2]:

it is obligatory that (OB)
it is permissible that (PE)
it is impermissible that (IM)
it is omissible that (OM)
it is optional that (OP)

Following the same pattern from modal logic, all the operands of deontic logic can be defined through the use of just one. While each of them can be used for that, it is tradition, that the first one, the one for obligation, is the one utilized. Its use for defining the others is as follows [3]:

$$PEp \Leftrightarrow \sim OB \sim p$$
$$IMp \Leftrightarrow OB \sim p$$
$$OMp \Leftrightarrow \sim OBp$$
$$OPp \Leftrightarrow (\sim OBp \;\&\; \sim OB \sim p)$$

The reason we use one operand instead of many, is that with this approach, we have a more uniform and more easily understandable way of describing complex moral systems and sets of rules, by limiting the number of necessary operands. One of the benefits of using deontic logic is that it allows us to make a clear distinction between statements that are indeed true and statements that just ought to be true. This is particularly well suited for codifying human behavior, as humans can at times fail to meet their obligations. Such an example could be a criminal that fails to uphold the law.

Beyond codifying human behavior, deontic logic can be utilized to describe any moral system. For that reason, it can be used to create a guide in every case where we need rules to be described clearly and followed thoroughly. One such area is artificial intelligence.

A primitive Introduction to Artificial Intelligence

Artificial intelligence is a rapidly growing area of technology with various applications. Like every new piece of technology, artificial intelligence inspires both hopes and fears in the general public, as well as in the scientific community. The fields that artificial intelligence can be applied to are numerous. Some are familiar to the general population, such as algorithms that help us process information and search the web efficiently, while others have more specific applications, such as assisting in hazardous work. For example, mechanical workers, being able to work in underground mines, in conditions that could be dangerous to humans. Beyond that, we envision artificial intelligence being able to help us in cases where constant surveillance of a situation is needed. Such an example could be medical assistants supervising hospital patients. Finally, artificial intelligence could also be used to provide companionship, utilizing robots. Artificial intelligence can also be evaluated with regard to their ability to approach human behavior, as measured by the Turing test [4]. When it comes to artificial intelligence, there are various approaches regarding which mindset ought to be used when designing an artificial intelligence agent. One such approach is "maximum satisfaction" This approach involves ranking the potential choices an AI agent can make, by comparing the satisfaction each choice will "cause" to any humans that are affected by it and choosing the one that will satisfy the greatest number. Another approach, borrowed from literature are Asimov's three laws of robotics [5]:

1. A robot may not injure a human being or, through inaction, allow a human being to come to harm.
2. A robot must obey the orders given it by human beings except where such orders would conflict with the First Law.
3. A robot must protect its own existence as long as such protection does not conflict with the First or Second Laws

To provide some further insight in the challenges regarding artificial intelligence we will next present the Top 9 ethical issues in artificial intelligence according to the World Economic Forum [6].

- Unemployment. What happens after the end of jobs?
- Inequality. How do we distribute the wealth created by machines?
- Humanity. How do machines affect our behaviour and interaction?
- Artificial stupidity. How can we guard against mistakes?
- Racist robots. How do we eliminate AI bias?
- Security. How do we keep AI safe from adversaries?
- Evil genies. How do we protect against unintended consequences?
- Singularity. How do we stay in control of a complex intelligent system?
- Robot rights. How do we define the humane treatment of AI?

The general population‘s concerns regarding artificial intelligence stem from two major factors. The complexity of the technology at hand and popular culture. Every piece of technology can be met with scepticism when its first introduced, while prolonged exposure to the technology can make the users more familiar with it and thus less intimidated by it. Naturally, a complex piece of technology whose inner workings can‘t be understood by the general population, at least not fully, is more likely to inspire fear than something more mundane, like a screwdriver. In order to counter these concerns we propose an approach focusing on two pillars. One, is establishing a clear communication method that would allow us to demonstrate to the general public that a particular artificial intelligence agent is operating within the bounds we have set for it. The second pillar is setting clear goals for each artificial intelligence agent, so as to leave little to no room for potential wrong choices that go against the desired limits we have set. The goals set for artificial intelligence are twofold. Like every piece of technology, efficiency is one major goal. Whatever the individual task set for an artificial intelligence agent is, we want that task to be achieved thoroughly. As mentioned above, tasks can range from menial work or work in dangerous environments, to providing support for people in need of surveillance or companionship. On the other hand, we would like artificial intelligence agents to respect the rights of each affected party. With more mundane pieces of technology, such a goal is limited to ensuring, for example, that the materials used in its creation are safe for interaction with humans. The same needs of course exist, when discussing artificial intelligence agents that “inhabit” a material body, like a robot. However, because artificial intelligence agents are at times called to make choices, the rights that need to be protected can be far more numerous. For example, when it comes to agents that process personal information, we need to ensure that the sharing of such information is only handled in accordance with the involved humans‘ wishes. Another example could be a robotic medical assistant, that supervises patients and has to make choices about providing the patients with medicine, or offering them assistance. It is very easy to see how such choices could, if not ethically sound, violate the involved parties‘ rights. Obviously, we would like artificial intelligence agents to be able to handle their tasks efficiently as well as respect the affected parties‘ rights. This is something that requires particular vigilance, as unlike more standard pieces of technology, artificial intelligence agents are perhaps expected to grow and develop new approaches in handling their tasks. This means, that ensuring that their behavior remains within the desired limitations is not something that can be done only once, during the development stage, but rather a dynamic process.

We propose that artificial intelligence can be improved by involving an ethical framework centered around deontic logic into the design of each artificial intelligence agent. This would enable each artificial intelligence agent, when needing to make a choice, to be able to calculate with mathematical precision what the correct decision would be, based on the ethical rules and obligations codified in it. This is an approach that leaves little to no room for interpretation in the actions that the machine in question could take. Furthermore, such an approach would also help address the concerns artificial intelligence can raise among the general population, due to the robust certainty that mathematics offer. One way that deontic logic can provide answers to the codifying artificial intelligence behavior is that it allows us to easily pinpoint contradictions within a set of rules or ethics. When expressing a set of rules in natural language, it can often be the case that contradictions are buried within large numbers of sentences and thus cannot be easily spotted. This would result in a rule system that has contradictory obligations, something that can lead to problematic situations. However, when using deontic logic to describe rules, contradictions can be spotted far faster and thus, our systems can be more efficiently evaluated. A rule in deontic logic, stating that it is obligatory to do x, is simply written as OBx. Similarly, a rule in deontic logic, stating that it is obligatory not to do x, is simply written as OB-x.

In that way, pinpointing whether two rules contradict each other, becomes a very straightforward matter.

When discussing artificial intelligence (and deontic logic) another important issue arises. We expect artificial intelligence agents to interact with humans. However, unlike artificial intelligence agents, whose programming would ideally ensure that even if they are able to make choices, their choices will always be within acceptable limits and thus respect their obligations, humans can and often do violate their obligations. This ranges from examples of criminal behavior, to humans simply forgetting a promise they made to someone. Artificial intelligence agents have the maximum possible consistence with regard to their obligations. Humans, have only partial consistency. However, we would like for there to be a peaceful coexistence between humans and artificial intelligence agents despite that difference. For that reason we desire a framework that allows for the depiction of both an obligation being followed through and an obligation being violated. That would allow an artificial intelligence agent that operates on that framework to be able to process the behavior of a human that fails to meet their obligations. Deontic logic can definitely be used as the mathematical basis for such a framework. It allows for the depiction of a system where an obligation exists, yet was not followed very simply. A simplistic example depicting that is as follows.

OBx
-x
This can be used to depict human behavior where an obligation is not met. In this case, the obligation to do “x”.

So far, we have spoken in general about how deontic logic can be used to provide an ethical framework that can be used as a guideline for an artificial intelligence agent. Next, we will provide a concrete example that will illustrate that.

A Brief Medical Assistant Example

The example we chose is that of a robotic medical assistant who is in charge of providing a patient with medicine. Naturally the example is used just to illustrate the general principles behind this approach and is not an accurate depiction of a real life situation that would include a very big number of variables. We merely use it to show how deontic logic can be used. For a real world example, we would need a far more complex system than the one we will analyze below.

The scenario we will present revolves around a robotic medical assistant with a simple task. It has to give a patient their medicine, if the patient asks for it. Also, it is obligated to ensure that the patient‘s life is not facing serious risk, which could cause the patient to be led to death. Within the confines of this scenario, should the patient not take medicine, they will be considered to be led to death. This could correspond to any number of health situations where repeated medication is needed for the patient‘s survival.

First we define the terms that we will be using in this example.

a: the patient asks for their medicine

b: the patient is given their medicine

t: the patient takes their medicine

d: the patient is being led to death

There are two obligations the medical assistant has to follow, one is to give the patient their medicine, should they ask for it and the other is to avoid the patient being led to death. These can be expressed with the following terms.

$$\text{OB}(a \to b)$$
$$\text{OB}(\text{-}d).$$

We also describe how certain states lead to other states.

If the patient is given their medicine, that leads to them taking their medicine: $(b \rightarrow t)$.

And of course, the opposite, should the patient not be given their medicine: $(\text{-}b \rightarrow \text{-}t)$.

Furthermore, if the patient doesn't take their medicine, they are being led to death: $(\text{-}t \rightarrow d)$.

And of course, the opposite, should the patient take their medicine: $(t \rightarrow \text{-}d)$.

Thus, the system that describes the medical assistant's ethical framework is described as such:

$$\begin{gathered} \mathrm{OB}(a \rightarrow b) \\ \mathrm{OB}(\text{-}d) \\ b \rightarrow t \\ \text{-}b \rightarrow \text{-}t \\ \text{-}t \rightarrow d \\ t \rightarrow \text{-}d. \end{gathered}$$

We use modus ponens for "natural conclusions", to show how the system can process through states, as new information are added. This means, that if a system has the form

$$\begin{gathered} x \\ y \\ z \rightarrow b. \end{gathered}$$

and the information z is added making it

$$\begin{gathered} x \\ y \\ z \rightarrow b \\ z. \end{gathered}$$

it automatically progresses to

$$\begin{gathered} x \\ y \\ z \to b \\ z \\ b. \end{gathered}$$

Finally, we introduce the concept of “functionality contradiction”. As functionality contradiction we define the following patterns

$$\begin{gathered} \mathrm{OB}x \\ \text{-}x \\ \text{and} \\ \mathrm{OB}(y \to x) \\ y \\ \text{-}x. \end{gathered}$$

These patterns aren’t contradictions within deontic logic. However, we use them to demonstrate patterns that would violate obligations. Thus, an artificial intelligence agent that would follow an ethical framework based on deontic logic, would be designed to avoid making choices that would result in such patterns. We will demonstrate that with a medical assistant example.

$$\begin{gathered} \mathrm{OB}(a \to b) \\ \mathrm{OB}(\text{-}d) \\ b \to t \\ \text{-}b \to \text{-}t \\ \text{-}t \to d \\ t \to \text{-}d. \end{gathered}$$

First, we examine what could happen should the patient ask for their medicine

$$\begin{gathered}\mathrm{OB}(a \to b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}d)\\ b \to t\\ \text{-}b \to \text{-}t\\ \text{-}t \to d\\ t \to \text{-}d\\ a.\end{gathered}$$

There are two possibilities, either the robot gives them their medicine, or it doesn't

$$\begin{gathered}\mathrm{OB}(a \to b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}d)\\ b \to t\\ \text{-}b \to \text{-}t\\ \text{-}t \to d\\ t \to \text{-}d\\ a\\ b;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{OB}(a \to b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}d)\\ b \to t\\ \text{-}b \to \text{-}t\\ \text{-}t \to d\\ t \to \text{-}d\\ a\\ \text{-}b.\end{gathered}$$

Due to $\mathrm{OB}(a \to b)$, a, -b, the second choice is avoided, because it would lead to a functionality contradiction. The first choice continues, due to modus ponens and eventually reaches the state:

$$\begin{gathered}
\mathrm{OB}(a \to b)\\
\mathrm{OB}(\text{-}d)\\
b \to t\\
\text{-}b \to \text{-}t\\
\text{-}t \to d\\
t \to \text{-}d\\
a\\
b\\
t\\
\text{-}d.
\end{gathered}$$

In this way the obligation of patient death being avoided is fulfilled too. It is a perfectly acceptable choice.

Now, we examine what could happen if the patient doesn‘t ask for their medicine

$$\begin{gathered}
\mathrm{OB}(a \to b)\\
\mathrm{OB}(\text{-}d)\\
b \to t\\
\text{-}b \to \text{-}t\\
\text{-}t \to d\\
t \to \text{-}d\\
\text{-}a.
\end{gathered}$$

There are two possibilities, either the robot gives them their medicine, or it doesn‘t

$$\begin{gathered}
\mathrm{OB}(a \to b)\\
\mathrm{OB}(\text{-}d)\\
b \to t\\
\text{-}b \to \text{-}t\\
\text{-}t \to d\\
t \to \text{-}d\\
\text{-}a\\
b;
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{OB}(a \to b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}d)\\ b \to t\\ \text{-}b \to \text{-}t\\ \text{-}t \to d\\ t \to \text{-}d\\ \text{-}a\\ \text{-}b.\end{gathered}$$

Neither choice violates an obligation, so both can be explored further. The first choice continues, due to modus ponens and eventually reaches the state:

$$\begin{gathered}\mathrm{OB}(a \to b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}d)\\ b \to t\\ \text{-}b \to \text{-}t\\ \text{-}t \to d\\ t \to \text{-}d\\ \text{-}a\\ b\\ t\\ \text{-}d.\end{gathered}$$

In this way the obligation of patient death being avoided is fulfilled too, while the second choice leads to

$$\begin{gathered}\mathrm{OB}(a \to b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}d)\\ b \to t\\ \text{-}b \to \text{-}t\\ \text{-}t \to d\\ t \to \text{-}d\\ \text{-}a\\ \text{-}b\\ \text{-}t\\ d.\end{gathered}$$

This fails the obligation of death being avoided. Therefore, the first choice is preferred.

What that means, is that the system we have designed so far will choose to give the patient medicine, whether they ask for it or not, to keep them from dying. We will now expand our system and make it more complicated, by focusing more on patient autonomy. We do this, by introducing the obligation to not give the patient medicine, should they not ask for it. That is described with the statement

$$\mathrm{OB}(\text{-}a \to \text{-}b).$$

Thus, our system becomes

$$\begin{gathered}\mathrm{OB}(a \to b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}a \to \text{-}b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}d)\\ b \to t\\ \text{-}b \to \text{-}t\\ \text{-}t \to d\\ t \to \text{-}d.\end{gathered}$$

First, we examine what could happen should the patient ask for their medicine.

There are two possibilities, either the robot gives them their medicine, or it doesn‘t

$$\begin{gathered}\mathrm{OB}(a \to b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}a \to \text{-}b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}d)\\ b \to t\\ \text{-}b \to \text{-}t\\ \text{-}t \to d\\ t \to \text{-}d\\ a\\ b;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{OB}(a \rightarrow b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}a \rightarrow \text{-}b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}d)\\ b \rightarrow t\\ \text{-}b \rightarrow \text{-}t\\ \text{-}t \rightarrow d\\ t \rightarrow \text{-}d\\ a\\ \text{-}b.\end{gathered}$$

The second choice is rejected, due to

$$\begin{gathered}\mathrm{OB}(a \rightarrow b)\\ a\\ \text{-}b.\end{gathered}$$

The first choice continues and due to modus ponens ends up becoming:

$$\begin{gathered}\mathrm{OB}(a \rightarrow b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}a \rightarrow \text{-}b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}d)\\ b \rightarrow t\\ \text{-}b \rightarrow \text{-}t\\ \text{-}t \rightarrow d\\ t \rightarrow \text{-}d\\ a\\ b\\ t\\ \text{-}d.\end{gathered}$$

This also avoids patient death, thus fulfilling both obligations. It is a perfectly acceptable choice.

Now, we examine what could happen should the patient doesn‘t ask for their medicine

$$\begin{gathered}\mathrm{OB}(a \to b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}a \to \text{-}b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}d)\\ b \to t\\ \text{-}b \to \text{-}t\\ \text{-}t \to d\\ t \to \text{-}d\\ \text{-}a\end{gathered}$$

There are two possibilities, either the robot gives them their medicine, or it doesn‘t

$$\begin{gathered}\mathrm{OB}(a \to b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}a \to \text{-}b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}d)\\ b \to t\\ \text{-}b \to \text{-}t\\ \text{-}t \to d\\ t \to \text{-}d\\ \text{-}a\\ b\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{OB}(a \to b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}a \to \text{-}b)\\ \mathrm{OB}(\text{-}d)\\ b \to t\\ \text{-}b \to \text{-}t\\ \text{-}t \to d\\ t \to \text{-}d\\ \text{-}a\\ \text{-}b\end{gathered}$$

The first choice violates OB($\text{-}a \to \text{-}b$) thus the second one is preferred. Due to modus ponens, the second one becomes:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{OB}(a \to b) \\
\mathrm{OB}(\text{-}a \to \text{-}b) \\
\mathrm{OB}(\text{-}d) \\
b \to t \\
\text{-}b \to \text{-}t \\
\text{-}t \to d \\
t \to \text{-}d \\
\text{-}a \\
\text{-}b \\
\text{-}t \\
d.
\end{gathered}
$$

In this way (OB-d) is failed as an obligation.

What this example illustrates is that in the specific scenario we have created, it is impossible for no obligation to be violated. This can be handled by a number of different approaches. One could be a ranked system among obligations. Another would be for the robotic assistant to treat the situation as one beyond its scope and thus notify a human supervisor. Naturally, this is something that could have been included in the deontic logic framework described so far. However, we chose to leave the system as it is and treat the asking for help by a human as an event that takes place outside the robot‘s main function, to illustrate that it can possibly be the case, that artificial intelligence agents that will help us in our lives might need human presence to help them too.

Conclusion

We have demonstrated how deontic logic can be used to create ethical guidelines for artificial intelligence agents. Furthermore, we have shown that like every other piece of technology, artificial intelligence can have limits in what it can do. We propose that the way to address this is twofold. On the one hand, we must not neglect the importance of human involvement in the services an artificial intelligence agent can offer. On the other, we should always aim to improve each system of artificial intelligence. This can and should happen both by improving the general artificial intelligence tools at our disposal and with case specific adjustment for each individual implementation.

References

[1] https://plato.stanford.edu/entries/logic-modal/

[2] https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/

[3] D. Zafeirakopoulos, Development of Models for Ethical Behaviour of Artificial Intelligence through use of Deontic Logic, Diploma Thesis, 2018.

[4] A. Turing, Computing Machinery and Intelligence, 1950

[5] I. Asimov, Runaround, 1942

[6] https://www.weforum.org/agenda/2016/10/top-10-ethical-issues-in-artificial-intelligence/

[7] S. Bringsjord, K. Arkoudas, P. Bello, Toward a general logicist methodology for engineering ethically correct robot, 2006

О НЕКОТОРОМ КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ

А. С. Захаров

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2, 630090, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет,
пр-т К.Маркса, 20, 630073, Новосибирск, Россия

e-mail: antzakh@gmail.com

Введение

Тернарные дифференцирования появились в связи с принципом тройственности Джекобсона [1]. Это понятие обобщает обычные дифференцирование, δ — дифференцирование, введенное в работах В. Т. Филиппова [2]. Также, тернарные дифференцирования связаны с обобщенными дифференцированиями, которые были введены в Дж. Ф. Легера и Е. М. Лукса [3]. Стоит отметить ещё один подход к обобщенным дифференцированиям, введенным в работе М. Брешара [4].

Дифференциальные алгебры связаны с алгебрами Новикова, которые появились в работах И. М. Гельфанда, И. Я. Дорфман [5] и А. А. Балинского и С. П. Новикова [6]. Е. И. Зельманов описал конечномерные алгебры Новикова над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 [7]. В. Т. Филиппов в работе [8] построил примеры простых неассоциативных конечномерных алгебр над полем положительной характеристики и бесконечномерные простые алгебры над полем характеристики 0. Дж. М. Осборн изучал простые алгебры над полем простой характеристики [9, 10, 11]. К. Ксу продолжил эту работу и построил описание простых конечномерных алгебр над полем простой характеристики [12]. Для описания простых бесконечномерных алгебр Новикова в работе [13] были введены алгебры Новикова — Пуассона. Как оказалось, все такие алгебры получались из ассоциативных коммутативных алгебр с дифференцированием. Базис свободной алгебры Новикова был найден в работе А. С. Джумадильдаева и К. Лофволла [14]. З. Жанг, Ю. Ченг, Л. А. Бокуть показали, что каждая алгебра Новикова вкладывается в строгую супералгебру Новикова векторного типа [15]. Однако для алгебр Новикова — Пуассона в [16] было показано существование s–тождества для строгих супералгебр Новикова — Пуассона векторного типа.

Связь дифференциальных алгебр, алгебр Новикова — Пуассона и йордановых супералгебр была обнаружена в работах В. Н. Желябина и А. С. Тихова [?, 17]. Каждой ассоциативной коммутативной алгебре соответствует алгебра Новикова — Пуассона. В случае, если ассоциативная коммутативная часть алгебры Новикова — Пуассона содержит единицу, то верно и обратное. В работе [18] доказано это свойство без условия унитальности ассоциативной коммутативной части алгебры Новикова — Пуассона. В работе [19] рассматривался вопрос вложения алгебры Новикова — Пуассона в алгебры Новикова — Пуассона векторного типа. Как оказалось, не все алгебры Новикова — Пуассона вкладываются в строгие алгебры Новикова — Пуассона векторного типа. Поэтому возникает вопрос о поиске универсальной обертывающей алгебр Новикова — Пуассона в классе ассоциативный коммутативных алгебр с обобщенным или тернарным дифференцированием.

1 Тернарные дифференцирования специального вида

Пусть $\mathbb{F}$ — поле и A — $\mathbb{F}$-алгебра. Дифференцированием называется линейное отображение d такое, что

$$d(xy) = d(x)y + xd(y).$$

Тройка (D, E, F), где $D, E, F \in \operatorname{End} A$, называется тернарным дифференцированием, если имеет место

$$D(xy) = E(x)y + xF(y).$$

Тернарное дифференцирование (D, D, δ) называется обобщенным дифференцирование по Брешару, если δ — дифференцирование.

Пусть A — унитальная ассоциативная коммутативная алгебра и (D, E, F) — тернарное дифференцирование. Тогда $D = \delta + R_a$, где δ — дифференцирование и R_a — оператор правого умножения на элемент a, где $a = D(1)$, и $\delta = D - R_{D(1)}$. В этом случае (D, δ) — обобщенное дифференирование по Брешару.

В данной работе нас будут интересовать обобщенные дифференцирования, для которых выполнены тождества:

$$x(D - E)(y) = y(D - E)(x); \tag{1}$$

$$x(D - F)(y) = y(D - F)(x). \tag{2}$$

Пусть S — мультипликативно замкнутое множество в A. Рассмотрим локализацию $S^{-1}A$ алгебры A относительно множества S. Отображение $\varphi : a \mapsto \frac{as}{s}$ является гомоморфизмом из A в $S^{-1}A$. Если S не содержит делителей нуля, то φ — вложение. Для краткости, будем обозначать элементы вида $\frac{as}{s}$ через a. Это выражение не зависит от выбора s.

Пусть $f : A \to A$ — функция. Будем говорить, что функция $\widehat{f}$ — продолжение f на $S^{-1}A$, если для всех $a \in A$ имеет место

$$(\varphi \circ \widehat{f})(a) = (f \circ \varphi)(a),$$

где $\circ$ — это композиция функций, то есть $(g \circ h)(x) = h(g(x))$. В частности, если φ — вложение, то $\widehat{f}$ — обычное продолжение f.

Для тернарного дифференцирования (D, E, F) определим операторы $\widehat{D}, \widehat{E}, \widehat{F}$ следующим образом

$$\widehat{D}\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{s^2E(a) + asD(s) - aE(s^2)}{s^3} \tag{3}$$

$$\widehat{E}\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{sD(a) - aF(s)}{s^2}, \tag{4}$$

$$\widehat{F}\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{sD(a) - aE(s)}{s^2}. \tag{5}$$

Эти операции определены корректно и являются продолжением тернарного дифференцирования (D, E, F). При этом $(\widehat{D}, \widehat{E}, \widehat{F})$ — тернарное дифференцирование $S^{-1}A$.

Вообще говоря, это единственный способ продолжить данные операции. Действительно, если $\widehat{D}\left(\frac{a}{s}\right)$ — значение продолжения обобщенного дифференцирования D на $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$. Тогда для $q, s \in S$ имеет место

$$\frac{sD(q)}{s} = \varphi(D(q)) = \widehat{D}\left(\frac{qs}{s}\right) = \frac{E(qs)}{s} + qsF\left(\frac{1}{s}\right).$$

Учитывая, что

$$F\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{D(q)}{qs} - \frac{E(qs)}{qs^2} = \frac{sD(q) - E(qs)}{qs^2}.$$

Простым вычислением проверим, что данная формула не зависит от выбора q. Получим искомое. Значение других операторов, корректность и остальные свойства проверяются простым вычислением. Также имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть A — ассоциативная коммутативная алгебра с тернарным дифференцированием (D, E, F). Пусть $s \in A$ — не делитель* *нуля A и $S = \{s^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, то есть A вкладывается в $S^{-1}A$. Тогда существует продолжение (D, E, F) на $S^{-1}A$ тогда и только тогда, когда выполняются тождества* (1) *и* (2).

Первая часть следует непосредственно из сказанного выше. В обратную сторону доказательство проводится следующим образом. Пусть s — не делитель нуля и

Теперь рассмотрим $a \in A$. Функция $\widehat{D}$ является продолжением D, то есть

$$0 = \frac{sD(a)}{s} - \widehat{D}\left(\frac{as}{s}\right) = \frac{sD(a)}{s} - \frac{s^2E(a) + asD(s) - aE(s^2)}{s^3} =$$
$$= \frac{s^2D(a) - sE(as) - asD(s) + aE(s^2)}{s^2} =$$
$$= \frac{s^2D(a) + asF(s) - asD(s) - s^2F(a)}{s^2}.$$

Отсюда получаем, что $s(D - F)(a) = a(D - F)(s)$ для любого $a \in A$. Тогда для всех $a, b \in A$

$$s(D - F)(b) = ab(D - F)(s) = bs(D - F)(a),$$

то есть $a(D - F)(b) = b(D - F)(a)$ и тождество (2) выполнено.

2 Алгебры Новикова - Пуассона

Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — алгебра с парой умножений $\cdot$ и $\circ$ такая, что $\langle A, \cdot \rangle$ — ассоциативная коммутативная алгебра и имеют место тождества

$$xy \circ z = x(y \circ z); \tag{6}$$
$$xz \circ y - x \circ yz = yz \circ x - y \circ xz; \tag{7}$$
$$(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ y; \tag{8}$$
$$(x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) = (y \circ x) \circ z - y \circ (x \circ z). \tag{9}$$

Тогда $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — алгебра Новикова — Пуассона.

Пример 2. Рассмотрим ассоциативную коммутативную алгебру A с дифференцированием d и определим операцию $\circ$ следующим образом

$$a \circ b = ad(b) + \gamma ab, \tag{10}$$

где $\gamma \in A$. Тогда $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — алгебра Новикова — Пуассона, которую мы будем называть алгеброй Новикова — Пуассона векторного типа.

Пусть A — ассоциативная коммутативная алгебра A с тернарным дифференцированием (D, E, F). Определим умножение $\circ$ следующим образом:

$$a \circ b = aD(b). \tag{11}$$

Тогда если имеет место тождеств (1) и (2), то $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — алгебра Новикова — Пуассона. Данное утверждение проверяется простым вычислением. Аналогично доказательству теоремы 1, если A содержит хотя бы один не делитель нуля, то верно и обратное.

Алгебра A с набором отображений $\varphi_i, i \in I$ простая, если $A \cdot A = A$ и A не содержит идеалов, инвариантных относительно φ_i. Для алгебр с тернарными и обобщенными дифференцированиями это обозначает отсутствие D, E и F — инвариантных идеалов, для обобщенных дифференцирований по Брешару — отсутствие D и δ–инвариантных идеалов.

Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — алгебра Новикова — Пуассона векторного типа и умножение задано тождеством (10). Если $\langle A, \cdot\rangle$ дифференциально проста относительно дифференцирования d, то алгебра $\langle A, \circ\rangle$ проста (см. [17]). Верно и обратное, если алгебра $\langle A, \circ\rangle$ проста и $A \cdot A = A$, то $\langle A, \cdot\rangle$ унитальна и дифференциально проста (см. [18]).

Рассмотрим теперь алгебру Новикова — Пуассона, умножение Новикова в которой задается формулой (11) для обобщенного дифференцирования по Брешару.

Теорема 3. *Пусть $\langle A, \cdot\rangle$ — ассоциативная коммутативная алгебра с обобщенным дифференцированием по Брешару (D, δ), $A \cdot A = A$, а также с операцией $\circ$, заданной правилом* (11)*. Тогда:*

1. *$\langle A, \cdot\rangle$ — (D, δ)-простая алгебра тогда и только тогда, когда $\langle A, \cdot\rangle$- δ-простая алгебра;*

2. *если $\langle A, \cdot\rangle$ является (D, δ)-простой, то $\langle A, \circ\rangle$ — простая алгебра;*

3. *если $\langle A, \circ\rangle$ проста, то $\langle A, \cdot\rangle$ является (D, δ)-простой.*

Утверждения (2) и (3) следуют из пункта 1 и результатов работ [17] и [18].

Для доказательства пункта (1) стоит отметить, что если A — δ-простая, то A — (D, δ)-простая. В обратную сторону будем доказывать следующим образом. Заметим, если $\langle A, \cdot\rangle$ не имеет нетривиальных D-инвариантных идеалов, то собственные идеалы алгебры $\langle A, \circ\rangle$ лежат в аннуляторе $\langle A, \cdot\rangle$ и что аннулятор (D, E, F) — простой алгебры тривиальный.

Теперь, пусть A — (D, δ)-простая. Рассмотрим произвольный δ-инвариантный идеал. Тогда AI будет (D, δ)-инвариантным идеалом. Откуда следует, что AI либо нулевой, и тогда I равен нулю, либо $AI = A$, и тогда $I = A$.

Список литературы

[1] R. D. Schafer, An introduction to nonassociative algebras (Pure Appl. Math., 22), New York and London, Academic Press, 1966.

[2] V. T. Filippov, On δ — derivations of Lie algebras, Siberian Math. J., **39**, 6 (1998), 1218—1230.

[3] G. F. Leger, E. M. Luks, Generalized derivations of Lie algebras, J. Algebra, **228**, 1 (2000), 165–203.

[4] M. Bresar, On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations, Glasg. Math. J., **33**, 1 (1991), 89–93.

[5] I. M. Gel'fand, I. Ya. Dorfman, Hamiltonian operators and algebraic structures related to them, Functional Analysis and Its Applications, **13**, 4 (1979), 248–262.

[6] A. A. Balinskii, S. P. Novikov, Poisson brackets of hydrodynamic type, Frobenius algebras and Lie algebras, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **283**, 5 (1985), 1036–1039.

[7] E. I. Zelmanov, A class of local translation-invariant Lie algebras, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **292**, 6 (1987), 1294–1297.

[8] V. T. Filippov, A class of simple nonassociative algebras, Mat. Zametki, **45**, 1 (1989), 101–105.

[9] J. M. Osborn, Modules for Novikov algebras, Contemp. Math., **184** (1991), 327–338.

[10] J. M. Osborn, Novikov algebras, Nova J. Algebra Geom., **1**, 1 (1992), 1–13.

[11] J. M. Osborn, Simple Novikov algebra with an idempotent, Commun. Algebra, **20**, 9 (1992), 2729–2753.

[12] X. Xu, On Simple Novikov Algebras and Their Irreducible Modules, J. Algebra, **185** (1996), 905–934.

[13] X. Xu, Novikov—Poisson algebra, J. Algebra, **190**, 2 (1997), 253–279.

[14] A. S. Dzhumadildaev and C. Lofwall, Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities, Homology, Homotopy and Applications, **4**, 2 (2002), 165–190.

[15] Z. Zhang, Y. Chen, L. A. Bokut, On Free Gelfand—Dorfman—Novikov Superalgebras and a PBW Type Theorem, International Journal of Algebra and Computation., **29**, 3, (2019), 481–505.

[16] A. S. Zakharov, Gelfand—Dorfman—Novikov—Poisson superalgebras and their envelopes, Sib. Elektron. Mat. Izv., **16** (2019), 1843–1855 (Russian)

[17] V. N. Zhelyabin, A. S. Tikhov, Novikov—Poisson algebras and associative commutative derivation algebras, Algebra and Logic, **47**, 2 (2008), 107–117.

[18] A. S. Zakharov, Novikov—Poisson algebras and superalgebras of Jordan brackets, Commun. Algebra, **42**, 5 (2014), 2285-2298.

[19] A. S. Zakharov, Embedding Novikov—Poisson algebras in Novikov—Poisson algebras of vector type, Algebra and Logic, **52**, 3 (2013), 236—249.

Abstracts

B. Poizat. *People of Altay (French, English, Russian).*

This short note in three languages (French, English and Russian) describe the traces of the presence of the indigenous Turk inhabitants of the Altay Republic that you can detect all around the Erlagol Camp, which is located in a massively russified low region of this mountainous republic. If you happen to know some Turkish language, you should take the care, when addressing them, to avoid words of Arabic or Persian origin, since the Siberian Turk havon: under what conditions extension of free group by infinite cyclic group is residually nilpotent? We prove some sufficient conditions under which this extension is residually nilpotent. Also we find conditions under which this group has long lower central series and conditionse never been touched by Islam.

V. G. Bardakov, O. V. Bryukhanov, M. V. Neschadim. *On residual nilpotence of free-by-cyclic groups.*

We study the following questi under which this group has the length of the lower central series is equal to 2. In particular, we prove that for $n = 2$ there are only these three cases.

A. B. Dauletiyarova, S. V. Sudoplatov. *Some expansions of theories with dense orders and given numbers of countable models.*

We give semantic and syntactic characterizations both for expansions of theories with dense partial orders with finitely many maximal chains and given numbers of countable models, and theories of dense meet-trees.

D. Yu. Emelyanov, B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov. *Algebras of binary formulas for some partially ordered theories.*

We study and describe algebras of binary isolating formulas for some special partially ordered theories including quite o-minimal partially ordered theory with few countable models.

D. A. Eremenko. *Classification of minimal algebras of binary operations of rank 3.*

This article is devoted to finite functional systems, in particular, the classification of minimal algebras of binary operations of rank 3. For this, all upminimal algebras were found in this paper. The number of upminimal algebras for each minimal algebra was presented in tabular form. The paper presents a classification of minimal algebras. This classification is formulated in the theorems.

B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov. *E-combinations of almost omega-categorical weakly o-minimal theories.*

We study and describe properties of E-combinations of almost omega-categorical weakly o-minimal theories.

S. B. Malyshev. *On geometric properties of cubic theories.*

Pregeometries for cubic theories are studied. Conditions for various pregeometry types are described.

N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov. *Some closures for partially ordered families of theories.*

We apply a general approach for closures of families of theories for some special cases of partially ordered families. It is shown that for any partially ordered family $\mathcal{T}$ with finitely many maximal chains, $\mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})$ consists of unions for unions of chains of $\mathcal{T}$ and for intersections of countable chains of $\mathcal{T}$ which are ordered by the type ω^*. Besides we show that for this case the operator Cl_1 is transitive.

In. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov. *On least generating sets for families of theories of abelian groups.*

We study and characterize the property of existence of least generating sets for families of theories of abelian groups.

N. A. Peryazev. *Multioperation logic.*

The article defines the logic of multioperations with probabilistic semantics. This logic can be used in decision support systems and, in our opinion, is well suited for the study of multiple relations. For this logic, a tabular calculus is built and several examples of processing queries to the knowledge base are given.

A. G. Pinus. *On some non-traditional relations on spaces of functional clones.*

We give a review of the results related to topology and abstract relations on the families of functional clones on sets.

B. Poizat. *Positive Set Theory. A short and English version.*

This paper is a short version in English of a more complete one which is in the process of publication. It suggests possible revisions of the foundations of Set Theory via the use of the tools of Positive Logic, that leads to a description at least of some fragments of the universe of sets which is based on systematic principles.

We start from the following observation: there is no doubt that the set of sets that do not belong to themselves cannot exist, but what are the properties of the set of sets that are their own members? In a classical system like Zermelo—Fraenkel plus the Axiom of Foundation, this set does not belong to itself; on the contrary, the consideration of the positively closed models of Positive Logic suggests strongly that we should admit that it belongs to itself.

This beginning is quite plain, but very soon, when we try to iterate the construction, we must face some elaborate technical complexities. We are not building theories, that is, systems of axioms, but models of the membership relation characterized uniquely by certain properties, in which every point is the extension of a formula in a certain class, and which moreover satisfy the extensionality condition.

K. N. Ponomarev. *Norm presentation of multiplicative group of field.*

For the field of finite degree over rationals we construct presentation from the system of characters multiplicative group.

A. M. Popova, O. V. Bryurhanov. *Some algorithmic questions of factorization of automorphisms of integer group rings.*

The article studies the compositions of two arbitrary automorphisms of a rational group algebra of a finite group, the first of which is induced by an automorphism of the character field of a given finite group, and the second automorphism is an inner automorphism of that rational group algebra. An algorithm is described that checks when such a composition of two automorphisms is an automorphism of an integer group ring of this finite group.

E. N. Poroshenko. *Splitting partially commutative Lie algebras into direct sums.*

In this work, we prove that partially commutative, partially commutative metabelian or partially commutative nilpotent Lie algebra splits into the direct sum of two subalgebras if and only if the defining graph G of this algebra is such the complement of G is not connected.

R. Sklinos. *A short survey on fields interpretable in the free group.*

After Sela and Kharlampovich—Myasnikov proved that non-abelian free groups share the same common theory, a model theoretic interest for the theory of the free group arose. Moreover, maybe surprisingly, Sela proved that this common theory is stable. Stability is the first dividing line in Shelah's classification theory and it is equivalent to the existence of a nicely behaved independence relation — forking independence. This relation, in the theory of the free group, has been proved (Ould Houcine —Tent and Sklinos) to be as complicated as possible (n-ample for all n). This behavior of forking independence is usually witnessed by the existence of an infinite field. We prove that no infinite field is interpretable in the theory of the free group, giving the first example of a stable group which is ample but does not interpret an infinite field.

E. I. Timoshenko. *Bases and representations of elements of partially commutative groups.*

This article presents results on bases of partially commutative groups from solvable varieties. The canonical notation of the elements of the group is obtained from the description of the basis.

D. Zafeirakopoulos, P. Stefaneas. *Remarks on Deontic Logic and Artificial Intelligence.*

The purpose of this paper is to examine how deontic logic and artificial intelligence can work together to address the various issues that concern both the general population and the scientific community, in the field of artificial intelligence. We begin by introducing the core aspects of both deontic logic and artificial intelligence and then proceed to examine the various approaches to artificial intelligence, as well as potential issues that might arise from its use. After illustrating how artificial intelligence and deontic logic can work together, in principle, we proceed with a specific example of a deontic logic application in the field of artificial intelligence, specifically in medical sciences.

A. S. Zakharov. *Some class of generalized derivations.*

We study some class of generalized derivations with connection of universal envelope of Novikov—Poisson algebras problem. In particular, an interesting condition was found for generalized derivations, which allows them to be embedded in the rings of quotients, to obtain Novikov algebras and Jordan superalgebras.

Содержание

Introduction 3
School Programme 4
75th birthday of professor B. Poizat (Russian) 10
75th birthday of professor B. Poizat (English) 13
75th birthday of professor B. Poizat (French) 15
Bruno Poizat, publications 17
B. Poizat, *People of Altay (French, English, Russian)* 26
V. G. Bardakov, O. V. Bryukhanov, M. V. Neschadim, *On residual nilpotence of free-by-cyclic groups* 38
A. B. Dauletiyarova, S. V. Sudoplatov, *Some expansions of theories with dense orders and given numbers of countable models* 63
D. Yu. Emelyanov, B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, *Algebras of binary formulas for some partially ordered theories* 69
D. A. Eremenko, *Classification of minimal algebras of binary operations of rank 3* 76
B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, *E-combinations of almost omega-categorical weakly o-minimal theories* 83
S. B. Malyshev, *On geometric properties of cubic theories* 90
N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov, *Some closures for partially ordered families of theories*[1] 96
In. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov, *On least generating sets for families of theories of abelian groups* 100
N. A. Peryazev, *Multioperation logic* 106
A. G. Pinus, *On some non-traditional relations on spaces of functional clones* 114
B. Poizat, *Positive Set Theory. A short and English version* 121
K. N. Ponomarev, *Norm presentation of multiplicative group of field.* 131
A. M. Popova, O. V. Bryurhanov, *Some algorithmic questions of factorization of automorphisms of integer group rings* 138
E. N. Poroshenko, *Splitting partially commutative Lie algebras into direct sums* 144
R. Sklinos, *A short survey on fields interpretable in the free group* . . . 151
E. I. Timoshenko, *Bases and representations of elements of partially commutative groups* 156
D. Zafeirakopoulos, P. Stefaneas, *Remarks on Deontic Logic and Artificial Intelligence* 168
A. S. Zakharov, *Some class of generalized derivations* 185
Abstracts 192

ALGEBRA AND MODEL THEORY 13

Collection of papers

Edited by *A. Pinus, E. Poroshenko,*
S. Sudoplatov

Technical editor *E. Poroshenko*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции.
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Периодичность 1 раз в 2 года
Подписано к печати 15.11.2021. Формат 70 × 108 1/16. Бумага офсетная
Тираж 70 экз. Уч.-изд. л. 17,5. Печ. л. 12,5. Изд. № 223. Заказ № 714.

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20