Novosibirsk State Technical University

Algebra
and Model Theory *10*

Collection of papers
edited by A. G. Pinus, K, N. Ponomarev,
S. V. Sudoplatov, and E. I. Timoshenko

Novosibirsk
2015

UDC 512(06)
A 35

A 35 **Algebra and Model Theory 10.** Collection of papers / Edited by A. G. Pinus, K, N. Ponomarev, S. V. Sudoplatov, and E. I. Timoshenko. — Novosibirsk: NSTU Publisher, 2015. — 220 pp.

ISBN 978–5–7782–2781–1

The papers in this book are devoted to some problems of algebra and model theory.

Technical editor E. N. Poroshenko.

UDC 512(06)

Introduction

Algebra and Model Theory 10

The 11th International Summer School "Problems Allied to Universal Algebra and Model Theory" was held on 22–28 of June 2015 at the camping center "Erlagol" in Altai montains. The School was organized by Algebra and Mathematical Logic Department of Novosibirsk State Technical University (NSTU) and Sobolev Institute of Mathematics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (IM SBRAS). This school was dedicated to the 70th anniversaries of well-known Russian specialists in mathematical logic and algebra Professors E. A. Palyutin and E. I. Timoshenko. Professors V. D. Mazurov, A. G. Pinus, S. V. Sudoplatov, E. I. Timoshenko were the chairmen of Organizing Committee of the School. Professors B. S. Baizhanov, B. Sh. Kulpeshov, A. V. Mikhalev, E. A. Palyutin, B. Poizat, V. N. Remeslennikov, V. A. Roman'kov, P. Tanović and Associate Prof. E. N. Poroshenko were the members of Organizing Committee.

The School was supported by RFBR (grant №15-01-203070) and by Grant of NSTU having a special purpose.

The Collection of Papers is composed by articles of participants of the School being connected with the Subject of the School.

Erlagol-2015
"Problems Allied to Universal Algebra and Model Theory"

June, 23

Plenary Talks
Chairman A. S. Morozov

10:00am–10:50am	Yu. L. Ershov (*Novosibirsk, Russia*) "Separant of an arbitrary polynomial (application and computation)"
11:00am–11:50am	S. S. Goncharov (*Novosibirsk, Russia*) "On complexity of descriptions and classification of computational models "
Noon–12:50pm	B. S. Baizhanov (*Almaty, Kazakhsta*) "On a construction of S. Sudoplatov: Existence of D-prime model over countable set in small theory"
1:00pm–1:50pm	S. V. Sudoplatov (*Novosibirsk, Russia*) "Operators on classes of algebraic systems"

Short talks
Chairman V. V. Verbovskiy

3:00pm–3:20pm	A. G. Pinus (*Novosibirsk, Russia*) "Ihm-quasiorders and derived structure of universal algebras."
3:20pm–3:40pm	P. S. Kolesnikov (*Novosibirsk, Russia*) "Homogeneous conformal operators of averaging on semiprime Lie algebras"
3:40pm–4:00pm	V. A. Churkin (*Novosibirsk, Russia*) "Natural cones in real symplectic algebras of small dimensions"
4:10pm–4:30pm	A. V. Zenkov (*Barnaul, Russia*) "On congruences of m-groups"
4:30pm–4:50pm	E. N. Poroshenko (*Novosibirsk, Russia*) "Universal equivalence of partially commutative Lie algebras"

4:30pm–4:50pm Yu. A. Mikhal'chishina (*Novosibirsk, Russia*) "Invariants of virtual hitches"

June, 24

Plenary Talks
Chairman B. B. Baizhanov

10:00am–10:50am V. A. Roman'kov (*Omsk, Russia*) "On Andrews-Cartis group"

11:00am–11:50am E. A. Palyutin (*Novosibirsk, Russia*) "Generalized stable abelian groups"

Noon–12:50pm E. I. Timoshenko (*Novosibirsk, Russia*) "Automorphisms and universal theories of solvable groups"

Short talks

Classical Algebra
Chairman V. A. Roman'kov

3:00pm–3:20pm A. V. Chekhonadskikh (*Novosibirsk, Russia*) "Critical root diagrams of systems of automatic administration: recurrent building and realizability"

3:20pm–3:40pm I. I. Pavlyuk (*Pavlodar, Kazakhstan*) "To the theory of finite groups of odd orders"

3:40pm–4:00pm T. R. Nasybullov (*Novosibirsk, Russia*) "Almost solvability and the Rinf-property"

4:10pm–4:30pm Yu. A. Chirkunov (*Novosibirsk, Russia*) "Generalized equivalence transformations and their function when building submodels"

Universal Algebra and Model Theory
Chairman S. V. Sudoplatov

3:00pm–3:20pm	M. I. Bekenov (*Astana, Kazakhstan*) "B-algebraic systems of theories"
3:20pm–3:40pm	K. A. Meyrembekov (*Almaty, Kazakhstan*) "On weakly minimal models"
3:40pm–4:00pm	K. A. Baykalova (*Novosibirsk, Russia*) "Distribution of countable models of theories of locally free algebras"
4:10pm–4:30pm	R. A. Popkov (*Novosibirsk, Russia*) "On countable models of complete theories with continual number of types"
4:30pm–4:50pm	L. N. Pobedin (*Novosibirsk, Russia*) "Generalized countability in classical and alternative infinity"

June, 26

Plenary Talks
Chairman V. A. Churkin

9:30am–10:20am	A. S. Morozov (*Novosibirsk, Russia*) "Sigma-representability of structures in hereditary finite"
10:30am–11:20am	B. Sh. Kulpeshov (*Almaty, Kazakhstan*) "On weak cyclic minimality"
11:30am–12:20pm	V. V. Verbovskiy (*Almaty, Kazakhstan*) "Relative stability"
12:30pm–1:20pm	M. Shahryari (*Tabriz, Iran*) "On logically cyclic groups"

Short Talks
Chairman E. N. Poroshenko

3:00pm–3:20pm	A. A. Kuznetsov, A. S. Kuznetsova (*Krasnoyarsk, Russia*) "Application of Cayley graphs of period 3 and 4 for modeling of topologies of multyprocessor computing systems"
3:20pm–3:40pm	V. G. Puzarenko (*Novosibirsk, Russia*) "Computable models in infinite fragments"
3:40pm–4:00pm	E. V. Grachev, A. M. Popova (*Novosibirsk, Russia*) "Automorphisms of integer groups rings of finite groups"

Discussion

4:10pm–5:10pm	"DNA as the universal biological code. Analysis and transformations" with molecular biologists C. Martinez-Perez (*Bremen university, Germany*), D. Mayer (*Bremen university, Germany*), and C. Vavurakis (*Amsterdam university, Netherlands*)

June, 27

Plenary Talks
Chairman A. G. Pinus

10:00am–10:50am	B. N. Drobotun, S. S. Goncharov, A. A. Nikitin (*Pavlodar, Kazakhstan; Novosibirsk, Russia*) "To the problem of defining content of logical component in school mathematic education"

К 70-летию профессора Е. И. Тимошенко

Евгений Иосифович Тимошенко родился 16 июля 1945 года на Украине в семье военного строителя Иосифа Васильевича и домохозяйки Фаины Веньяминовны. Впоследствии в 1949 году семья переехала в Красноярский край. Среднюю школу Евгений Иосифович закончил в г. Абакане в 1962. После получения среднего образования поступил в Новосибирский Государственный Университет, в котором обучался до 1967 года.

1 Научная работа в области алгебры

1.1 Дипломная работа

Дипломная работа “Сопряжённость в свободных метабелевых группах” была выполнена под руководством члена-корреспондента Академии Наук СССР Михаила Ивановича Каргаполова и опубликована в одноимённой статье журнала “Алгебра и Логика” в том же 1967 году [1]. В ней было доказано, что свободные метабелевы группы финитно аппроксимируемы относительно сопряжённости. Отсюда в частности следует, что в свободной метабелевой группе для любой пары элементов можно алгоритмически решить: сопряжены они или нет. Уже в этой первой работе определился круг исследовательских интересов Евгения Иосифовича: вопросы эффективного определения различных свойств разрешимых групп.

1.2 Аспирантура

Эти исследования были продолжены в аспирантуре Института Математики Сибирского Отделения Академии Наук СССР (ИМ АН СССР), в которой Евгений Иосифович обучался в период 1967–1970 под руководством зав. отдела теории групп члена-корреспондента АН СССР Михаила Ивановича Каргаполова. За время обучения в аспирантуре им были опубликованы пять статей, объясняющих ряд особенностей в решении различных алгоритмических вопросов в многообразии разрешимых групп. Отметим статью [2], в которой Евгений Иосифович решил проблему М. И. Каргаполова о сохранении элементарной эквивалентности двух групп при их сплетениях с третьей группой. В этой статье было показано, что, вообще говоря, сплетение двух элементарно эквивалентных групп A, B какой-то третьей группой C может приводить к элементарно неэквивалентным группам. Однако, если исходные группы были универсально эквивалентными, то сплетённые группы также будут универсально эквивалентными группами. В дополнение к этому, в работе [3] было доказано, что если группа C конечная, то сплетение с такой группой сохраняет элементарную эквиалентность. В этой работе было указано, что любые две свободные разрешимые группы равных классов разрешимости элементарно эквивалентны. Также были найдены необходимые и достаточные условия элементарной эквивалентности двух свободных нильпотентных групп. Отметим, что эта публикация была малодоступной, поэтому впоследствии некоторые результаты этой работы заново доказывались другими учёными.

В статье [4] показана алгоритмическая разрешимость проблемы тождества элементов в конечнопорождённых метабелевых группах. Установлена алгоритмическая распознаваемость конечности порядка элементов такой группы. В работе [5] доказано, что если группа с одним определяющем соотношением в многообразии метабелевых групп определяется не менее чем тремя порождающими, то центр такой группы тривиален. Это решило проблему М. И. Каргаполова о центре разрешимой группы, определённой в многообразии разрешимых групп одним соотношением, в частном начальном случае многообразия метабелевых групп. Отметим, что полного ответа на эту проблему до сих пор не найдено.

Статья [6] положительно решила вопрос 2.16 из Коуровской тетради о существовании конечнопорождённой метабелевой группы конечного ранга, не являющейся финитно аппроксимируемой относительно сопряжённости.

По итогам этих работ в 1973 году Евгений Иосифович защитил диссертацию “Алгебраические вопросы для метабелевых групп” на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности “алгебра и теория чисел”.

1.3 Автоморфизмы разрешимых групп

В течение последующих 25 лет эти исследования были продолжены. Был решён ряд проблем о характеристических свойствах автоморфизмов различных классов разрешимых групп. При изучении многообразий разрешимых групп важным вспомогательным инструментом служит понятие примитивной системы элементов относительно свободной группы данного многообразия. Это такие наборы элементов, которые дополняются до базиса относительно свободной группы.

В ряде статей был получен критерий примитивности системы элементов относительно свободной разрешимой группы. Решён ряд проблем о примитивных системах элементов. А в 1998 году по результатам этих исследований была защищена докторская диссертация по специальности “математическая логика, алгебра и теория чисел”: “Разрешимые группы и примитивные системы элементов”. Итоги этой большой работы подведены в монографии: ‘Эндоморфизмы и универсальные теории разрешимых групп”. Первое издание этой книги вышло в издательстве НГТУ в 2011 году, а в 2013 году было осуществлено второе издание этой работы.

1.4 Международное признание

Эти исследования заслужили признание не только в России, но и за рубежом. В течение двадцати лет Евгений Иосифович руководил работой группы исследователей университета Манитобы (Канада). Результаты этого международного сотрудничества нашли выражение в цикле научных статей, опубликованных в отечественной и зарубежной литературе.

В 2011 году заслуги Евгения Иосифовича в алгебраической научной работе были отмечены именным наградным знаком международного математического семинара “Алгебра и Логика”.

2 Педагогическая работа

По окончании аспирантуры Евгений Иосифович вначале работает в институте Водного Транспорта (НИИВТ), а после защиты кандидатской диссертации с 1973 по 2009 год в Сибирском Строительном институте (теперь это Новосибирский Государственный Архитектурно-Строительный университет) на кафедре прикладной математики в должности доцента, профессора, заведующего. В этом институте он работал деканом строительного факультета, директором института Первой ступени Высшего Образования, директором института Филиалов и Дистанционного Обучения. За этот период профессиональной деятельности им опубликовано множество работ по методике образования. Особо отметим “Пособие по математической статистике”, опубликованное в 1992, 1993, 1996, и 1998 году, оно было написано совместно с Ю. Е. Воскобойниковым. С 2009 года Евгений Иосифович работает заведующим кафедрой алгебры и математической логи-ки в Новосибирском Государственном Техническом Университете.

В 2006 году заслуги Евгения Иосифовича в педагогической работе были отмечены присвоением ему звания “Заслуженный работник Высшей Школы Российской Федерации”.

3 Научная работа в области геодезии

Во время работы в Строительном институте Евгением Иосифовичем выполнен ряд исследований по математическим вопросам геодезии. Результаты этой работы выражаются в оптимизации различных геодезических задач, связанных с разметкой строительных объектов. Они отражены в статьях 1979–1981, 1985, 1988 года. А итоги этих исследований подведены в монографии “Определение оптимального положения осей инженерных объектов”, опубликованной в 1995 году в Новосибирском издательстве “Наука” в соавторстве с Г. Г. Асташенковым.

Список литературы

[1] Сопряжённость в свободных метабелевых группах, Алгебра и Логика, **6** (1967), 2, 89–94.

[2] О сохранении элементарной и универсальной эквивалентности при сплетениях, Алгебра и Логика, **7** (1968), 4, 114–119.

[3] К вопросу о элементарной эквивалентности групп.
В сб.: Алгебра, 1, Иркутск, 1972.

[4] Некоторые алгоритмические вопросы для метабелевой группы, Алгебра и Логика, **12** (1973), 2, 232–240.

[5] Центр группы с одним определяющим соотношением в многообразии двухступенно разрешимых групп.
Сиб. Мат. Жур. **14** (1973), 6, 1351–1355.

[6] К вопросу о финитной аппроксимируемости относительно сопряжённости метабелевых групп, В сб.: Материалы IV Всесоюзного симпозиума по теории групп. Тезисы докладов, 1973, 86–88.

С. Г. Афанасьева, А. А. Викентьев, А. М. Ивлева-Попова,
Е. В. Овчинникова, А. Г. Пинус, К. Н. Пономарёв,
Р. А. Попков, Е. Н. Порошенко, С. В. Судоплатов,
А. В. Чехонадских, Ю. А. Чиркунов

70th anniversary of Professor E. I. Timoshenko

Evgenii Iosifovich Timoshenko was born in Ukraine at July 16, 1945 in the family of a military builder Iosif Vasilievich and a housewife Faina Venyaminovna. Later on, in 1949, the family moved to Krasnoyarsk region. Evgenii Iosifovich graduated Secondary School in Abakan in 1962. After graduating a high-school, he entered the Novosibirsk State University, where he was studying until 1967.

4 Scientific activity in algebra

4.1 Degree work

The scientific adviser of E. I. Timoshenko was a Corresponding Member of the USSR Academy of Sciences Mikhail Ivanovich Kargapolov. Under his supervision the thesis "Conjugation in free metabelian groups" was made and published with the same article name in the journal "Algebra and logic" in 1967 [1]. It has been proven that free metabelian groups are finitely approximable with respect to conjugacy. In particular, it implies that in a free metabelian group there is an algorithm verifying if two arbitrary elements are conjugate. In this article the area of scientific interests of Evgenii Iosifovich has been determined as problems of effective verification of various properties for solvable groups.

4.2 Graduate studies

In 1967–1970, E. I. Timoshenko was a graduate student of Institute of Mathematics, Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences (IM AS USSR) where he continued his research. As before his scientific adviser was the head of Department of group theory, corresponding member of the USSR Academy of Sciences Mikhail Ivanovich Kargapolov. While studying he published five articles explaining some features in solving various algorithmic problems in the variety of solvable groups. It is worth noting [2]. In this paper, Evgenii Iosifovich solved the Kargapolov's problem on saving the property of elementary equivalence of two groups while taking their wreath products with the third group. It was shown that in the general case wreath products of groups A and C and of groups B and C may be not elementary equivalent even if the groups A and B are. However, if A and B are universally equivalent then so are their wreath products with any group C. Moreover, it was shown in [3] that if a group C is finite then the wreath product with C preserves the property of elementary equivalence. In this paper, it was stated that any two free solvable groups of equal classes of solvability are elementary equivalent. Also necessary and sufficient conditions for elementary equivalence of two free nilpotent groups were found. Note that this publication was not well-known. For this reason some results of this paper were reproved by other scientists.

In [4], it was shown that the problem of identity of elements in finitely generated metabelian groups is algorithmic solvable. It was stated that the finiteness of orders of elements in such groups is algorithmic recognizable. In the paper [5] it was proved that if a group A is metabelian and it has at least three generators and one defining relation then the center of A is trivial. This allowed to solve the problem of M. I. Kargapolov on the center of a solvable group defined in the variety of solvable groups with one relation in the particular case of the variety of metabelian groups. Note that in general case this problem has not been solved yet.

The paper [6] gave an affirmative answer to Question 2.16 in Kourovka Notebook. Namely, it was shown that there exists a finitely generated metabelian group of a finite rank such that this group is not finitely approximable with respect to the conjugacy

As a result of these papers, Evgenii Iosifovich defended his Ph.D. thesis “Algebraic questions for metabelian groups” in Mathematics (the degree of candidate of physical and mathematical sciences), specialty “Algebra and Number Theory” in 1973.

4.3 Automorphisms of solvable groups

During next 25 years, this research was continued. A number of problems on the characteristic properties of automorphisms in various classes of solvable groups was solved. An important auxiliary tool while studying varieties of solvable groups is the notion of primitive systems of elements in relatively free group of given variety. Namely, these are sets of elements that can be supplemented to the basis of a relatively free group.

In a series of papers, a criterion of primitiveness of elements in a relatively free solvable groups was obtained. A number of problems on primitive systems of elements was solved. In 1998, as a result of this resear E. I. Timoshenko defended his doctoral thesis “Solvable groups and primitive systems of elements” on specialty “Mathematical Logic, Algebra and Number Theory”. The results of this great work were summed up in the monograph “Endomorphisms and universal theories of solvable groups”. The first edition of this book was issued by NSTU Publishing in 2011. The second edition of this book was published in 2013.

4.4 International recognition

The research of E. I. Timoshenko have highly evaluated not only in Russia but also abroad. During twenty years, Evgenii Iosifovich was leading the work of the research team at the University of Manitoba (Canada). The results of this international collaboration resulted in a number of scientific papers published in domestic and foreign journals.

In 2011, Evgenii Iosifovich's achievements in algebraic science were rewarded by an international sign of a nominal premium of the Mathematical Seminar " Algebra and logic. "

4.5 Educational activities

After finishing his graduate program Evgenii Iosifovich first worked at the Institute of Water Transport (SRIWT). In 1973, after defending his Ph.D. thesis he started working at the Siberian Building Institute (now it is the Novosibirsk State Architecture and Civil Engineering University) at the Department of Applied Mathematics. He worked there till 2009 at positions of an associate professor, a professor, the head. In that institute he also worked at the positions of the dean of the Civil Engineering Department, the Director at the Institute of the first stage of Higher Education, the Director of the Institute of Branches and Remote Education. During this period of professional activities he has published many manuals on methods of education. It is worth noting "Textbook on Mathematical Statistics" issued in 1992, 1993, 1996 and 1998. This textbook was written in the co-authorship with Yu. E. Voskoboynikov. Since 2009, Evgenii Iosifovich is working at a position of the head of Algebra and Mathematical Logic Department at the Novosibirsk State Technical University.

In 2006, Evgenii I. Timoshenko's was rewarded by the title of "Honored Worker of Higher Schools of the Russian Federation" for his achievements in educational work.

4.6 Scientific activity in the area of geodesy

While working at the Siberian Building Institute Evgenii Iosifovich made a number of researches on mathematical geodesy. His work resulted in the optimization in various geodesic tasks related to the marking construction objects. The results of his researches in geodesy were described in papers of 1979–1981, 1985, 1988 and summarized in the monograph

"Determination of the optimal axis positions of engineering objects", published in 1995 by Novosibirsk publishing "Science" in the co-authorship with G. G. Astashenkov.

References

[1] Conjugation in the free metabelian groups, Algebra and Logic, **6** (1967), 2, 89–94.

[2] On the preservation of elementary and universal equivalence in wreath products, Algebra and Logic, **7** (1968), 4, 114–119.

[3] To the question of elementary equivalence of groups. Sat . In Algebra 1, Irkutsk, 1972.

[4] Some algorithmic problems for metabelian group, Algebra and Logic, **12** (1973), 2, 232–240.

[5] Center of group with one defining relation in the varieties of two-step solvable groups. Sib. Mat. Jour., **14** (1973), 6, 1351–1355.

[6] To the question of finitally approximability of metabelian groups vith respect to conjugacy, Proc: Proceedings of the IV All Union Symposium group theory, thethes, 1973, 86–88.

S. G. Afanasieva, A. V. Chekhonadskikh, Yu. A. Chirkunov,
A. M. Ivleva-Popova, E. V. Ovchinnikova, A. G. Pinus,
K. N. Ponomarev, R. A. Popkov, E. N. Poroshenko,
S. V. Sudoplatov, A. A. Vikentiev

К 70-летию профессора Е. А. Палютина

30 сентября 2015 г. исполнилось 70 лет заведующему лабораторией алгебраических систем Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, доктору физико-математических наук, профессору Евгению Андреевичу Палютину.

Евгений Андреевич Палютин родился 30 сентября 1945 г. в Хабаровске. В 1964 г. окончил Хабаровский электротехникум связи и поступил на первый курс Новосибирского электротехнического института. В 1965 г. был переведен на первый курс Новосибирского государственного университета, и в 1970 г. окончил университет по специальности "математика". С 1970 по 1973 год был аспирантом Института математики. В 1972 году защитил кандидатскую диссертацию, в 1987 г. - докторскую. В 1991 году утвержден в ученом звании профессора. С 1989 г. по настоящее время работает заведующим лабораторией алгебраических систем Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН. С 1972 года работает на кафедре алгебры и математической логики Новосибирского государственного университета (с 1972 года — ассистентом, затем — доцентом, в настоящее время — профессором). Евгений Андреевич Палютин — крупный специалист в области теории моделей. Им внесен определяющий вклад в развитие ряда направлений теории классификаций, находящихся на стыке алгебры и математической логики. Он автор более 110 научных работ, опубликованных в ведущих российских и зарубежных издательствах. Среди них - написанное в соавторстве с академиком Ю. Л. Ершовым классическое учебное пособие "Математическая логика", выдержавшее шесть изданий в России и переведенное на английский и испанский языки; дополнительная глава в "Справочной книге по математической логике", в которой собраны основные результаты по спектрам и структурам моделей полных теорий. Евгением Андреевичем Палютиным получено описание категоричных универсалов, категоричных квазимногообразий, функций спектров хорновых теорий и квазимногообразий; установлен ряд глубоких результатов, относящихся к теории групп и теории модулей; основана и развита коммутативная теория моделей, теория обобщенной стабильности, а также ее применения в теории абелевых групп.

Начиная с 2001 года результаты Е. А. Палютина восемь раз включались список важнейших научных достижений Института математики. В 2001 г. им доказана определимость типов для E^*-стабильных теорий. Этот результат обобщает известную теорему Шелаха об определимости типов для стабильных теорий и подтверждает гипотезу Б. Пуазы об определимости типов над любыми P-множествами в P-стабильных теориях. В 2002 г. доказана замкнутость операции элементарных пар для следующих классов полных теорий: примитивно нормальные; аддитивные, антиаддитивные и примитивно связные. Отсюда вытекает P-стабильность класса примитивно связных теорий, что обобщает известный результат Баура–Циглера о стабильности полных теорий модулей. В 2003 г. доказана определимость класса о-минимальных и слабо о-минимальных теорий через E^*-стабильность. В 2004 г. найдена полная характеризация стабильно определимых классов полных теорий. В 2009 г. получены необходимые и достаточные условия существования структурной теории для Фреше-замкнутых классов. В 2010 г. разработана структурная теория категоричных хорновых классов. В частности, доказана модельная полнота теорий этих классов. В 2013 г. описаны абелевы группы, теории которых являются P-стабильными для основных типов подгрупп. В 2014 г. полностью описаны все P-спектры абелевых групп для основных типов подгрупп P.

Научные труды Е. А. Палютина хорошо известны как отечественным специалистам, так и за рубежом. Он многократно выступал с докладами на всесоюзных и международных конференциях по алгебре и математической логике, а также по приглашениям в зарубежных математических центрах Германии, Казахстана, США, Франции.

Е. А. Палютиным подготовлено девять кандидатов наук и три доктора наук в области теории моделей. Много лет он участвовал в создании и развитии Казахстанской теоретико-модельной школы.

Евгений Андреевич сотрудничает с зарубежными специалистами по теории моделей в рамках Российско-Казахстанских и Российско-Французских проектов. Он многократно являлся руководителем исследовательских проектов, осуществляемых по грантам РФФИ.

Принимает активное участие в организации и проведении многих конференций по алгебре и математической логике. Являлся членом Программных комитетов Мальцевских чтений, Советско-Французского и Казахско-Французских коллоквиумов по теории моделей, Эрлагольских летних школ по теории моделей и универсальной алгебре, школ-семинаров “Синтаксис и семантика логических систем”.

Более 40 лет Е. А. Палютин преподает в Новосибирском государственном университете. Им читается курс математической логики для студентов-математиков, прочитан целый ряд спецкурсов. Его лекции, сочетающие глубокое содержание и оригинальные и тонкие импровизации, пользуются неизменной популярностью у студентов. Влияние преподавательского таланта Евгения Андреевича находит отражение в работе его учеников в Дальневосточном федеральном университете, Новосибирском государственном университете, Новосибирском государственном техническом университете, Нотрдамском университете (США), Мемориальном университете Ньюфаундленда (Канада).

На протяжении ряда лет Е. А. Палютин является соруководителем семинара "Теория моделей", проводимого в Институте математики. На этом семинаре со своими результатами выступают как молодые исследователи, так и известные специалисты по теории моделей. Е. А. Палютин является членом диссертационного совета по защите докторских диссертаций при Институте математики, а также членом Учёного совета Института.

За выдающуюся научную, педагогическую и общественную деятельность Евгений Андреевич удостоен почетного звания "Заслуженный ветеран СО РАН", к 275-летию Академии наук награжден Почетной грамотой РАН и профсоюза работников РАН. В 2005 г. Евгению Андреевичу Палютину присвоено звание почетного профессора Евразийского национального университета (Астана, Казахстан). В 2010 году Е. А. Палютин в составе коллектива авторов удостоен звания Лауреата премии Правительства Российской Федерации в области образования за цикл трудов "Концепция формирования логико-математического образования в высшей школе". В июне 2015 года на базе Новосибирского государственного технического университета была проведена XI Летняя школа "Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры", посвященная 70-летию профессора Е. А. Палютина и 70-летию профессора Е. И. Тимошенко.

Свое 70-летие Е. А. Палютин встречает активной научной работой, общением с молодежью на лекциях и семинарах, руководством спецсеминаром "Теория моделей".

А. А. Викентьев, А. М. Ивлева-Попова, Б. Ю. Лемешко, Е. В. Овчинникова, А. Г. Пинус, К. Н. Пономарёв, Р. А. Попков, Е. Н. Порошенко, С. В. Судоплатов, Е. И. Тимошенко, В. В. Усов, А. В. Чехонадских

70th anniversary of Professor E. A. Palyutin

Head of the laboratory of algebraic systems of Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Evgenii A. Palyutin had 70th anniversary at September 30, 2015.

Evgenii Andreevich Palyutin was born in Khabarovsk at September 30, 1945. In 1964 he graduated Khabarovsk Elektrotehnikum of Communications and entered the first year of the Novosibirsk Institute of Electrical Engineering. In 1965 he was transferred to the first year of the Novosibirsk State University and in 1970 graduated the University with the speciality "Mathematics". Since 1970 to 1973 he was a graduate student at Institute of Mathematics. In 1972 he defended his thesis and in 1987 — a doctorate. In 1991, he approved in the academic status of professor. Since 1989 he works as Head of the Laboratory of algebraic systems of Sobolev Institute of Mathematics SB RAS. Since 1972 he works at the Chair of Algebra and Mathematical Logic, Novosibirsk State University (since 1972 as an assistant, then an assistant professor, now — professor). Evgenii A. Palyutin is a prominent specialist in the model theory. He made a decisive contribution to the development of a series of directions of the classification theory that are at the intersection of Algebra and Mathematical Logic. He is the author of over 80 scientific papers published in the leading Russian and foreign publishing houses. Among them: co-written with Academician Ershov the classic textbook "Mathematical logic" withstood six editions in Russian and translated into English and Spanish; additional chapter in the "Handbook of mathematical logic", which summarizes the main results on the spectrum and structure of models of complete theories. Evgenii A. Palyutin described categorical universals, categorical quasivarieties, spectrum functions of Horn theories and quasivarieties; established a series of deep results related to the group theory and the theory of modules; he founded and developed the theory of commutative models, the theory of generalized stability and its application in the theory of Abelian groups.

Since 2001, the results of Palyutin were included eight times in the list of the most important scientific achievements of the Institute of Mathematics. In 2001 he proved the definability of types for E^*-stable theories. This result generalizes the well-known theorem by Shelah on the definability of types of stable theories and confirms the conjecture of B. Poizat on the definability of types over P-sets in P-stable theories. In 2002, it was shown that the operation of elementary pairs is closed for the following classes of complete theories: primitively normal; additive, antiadditive, and primitively connected. Hence the class of primitively connected theories is P-stable generalizing the known result by Baur and Ziegler that complete theories of modules are stable. In 2003, he proved the definability of class of o-minimal and weakly o-minimal theories using the E^*-stability. In 2004, he found a complete characterization of stably definable classes of complete theories. In 2009, the necessary and sufficient conditions for the existence of the structural theory of Frechet-closed classes are obtained. In 2010, he developed the structural theory of categorical Horn classes. In particular, he proved the model completeness of the theories of these classes. In 2013, he describe Abelian groups, whose theories are P-stable for the main types of subgroups. In 2014, all P-spectra of Abelian groups for main types P of the subgroup are fully described.

Proceedings E. A. Palyutin are well known to specialists, both domestic and abroad. Many times he gave talks at All-Union and international conferences on algebra and mathematical logic, as well as via invitations to foreign mathematical centers in Germany, Kazakhstan, USA, France.

E. A. Palyutin was an advisor preparing nine candidates of sciences and three doctorate in model theory. For many years he participated in the creation and development of the Kazakhstan model-theoretic school.

Evgenii A. Palyutin is cooperating with foreign experts in the model theory in the framework of the Russian-Kazakh and Russian-French projects. Many times he was the head of research projects carried out by RFBR grants.

He takes an active part in organizing and conducting many conferences on algebra and mathematical logic. He was a member of the program committees of Maltsev Meetings, Soviet-French and Kazakh-French colloquia on model theory, Erlagol summer schools on the model theory and universal algebra, workshops "Syntax and semantics of logical systems".

More than 40 years E. A. Palyutin gives lectures at Novosibirsk State University. He gives a course of mathematical logic for students-mathematicians, gives a number of special courses. His lectures that combine deep content and original and subtle improvisation, are popular among students. Influence of teaching talent of Palyutin is reflected in the work of his students in the Far Eastern Federal University, Novosibirsk State University, Novosibirsk State Technical University, Notre Dame University (USA), Memorial University of Newfoundland (Canada).

Over the years, he is co-director of the seminar "Model theory", conducted in the Institute of Mathematics. In the seminar, young researchers and well-known experts in the model theory give their talks. E. A. Palyutin is a member of the Dissertation Council for doctoral theses at the Institute of Mathematics and a member of the Academic Council of the Institute.

For outstanding scientific, educational and social activities, Evgenii A. Palyutin awarded the honorary title "Honored veteran of SB RAS", for the 275th anniversary of the Academy of Sciences awarded the Diploma of Russian Academy of Sciences and the Russian Academy of Science Workers' Union. In 2005, Evgenii A. Palyutin awarded the rank of honorary professor of the Eurasian National University (Astana, Kazakhstan). In 2010, E. A. Palyutin, in a group of authors, was awarded the rank of laureate of the Government of the Russian Federation in the field of education for the series of works “The concept of the formation of logical-mathematical education in high school”. In June 2015 at the base of Novosibirsk State Technical University, it was held XI Summer School “Problems allied to Model Theory and Universal Algebra” dedicated to the 70th anniversary of Professor E. A. Palyutin and the 70th anniversary of Professor E. I. Timoshenko.

E. A. Palyutin meets his 70 years with active scientific work, communications with young people at lectures and seminars, leading the special seminar “Model theory”.

A. V. Chekhonadskikh, A. M. Ivleva-Popova, B. Yu. Lemeshko, E. V. Ovchinnikova, A. G. Pinus, K. N. Ponomarev, R. A. Popkov, E. N. Poroshenko, S. V. Sudoplatov, E. I. Timoshenko, V. V. Usov, A. A. Vikentiev

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА СЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ МАЛЫХ ТЕОРИЙ АЦИКЛИЧЕСКИХ ГРАФОВ

К. А. Байкалова*

Новосибирский государственный технический университет
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: bkristina@bk.ru

Понятие троек распределения счетных моделей впервые вводится в работе [2]. Более подробно они рассматриваются в монографии [1]. В данной статье описываются тройки распределения счетных моделей теорий ациклических графов. Основные приемы доказательства взяты из работы [3], где с их помощью описывается число предельных моделей теорий унаров.

Определение 1. *Маршрутом длины* n в неориентированном графе Γ называется любая последовательность вершин $a_0, a_1, \ldots, a_n$, такая что a_{i-1}, a_i соединены ребром для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определение 2. *Расстоянием между элементами* a и b графа Γ называется длина кратчайшего маршрута от a до b в Γ, если такой маршрут существует, и расстояние между a и b бесконечно в противном случае. Расстояние между элементами a и b обозначается через $d(a, b)$.

Определение 3. *Компонентой связности* графа Γ называется максимальное подмножество множества вершин, в котором любые два элемента связаны маршрутами.

Определение 4. *Диаметром* компоненты связности называется наибольшее из расстояний между элементами в этой компоненте связности, если такое существует, и бесконечность в противном случае.

Определение 5. Последовательность моделей $(M_n)_{n\in\omega}$ называется *элементарной цепью*, если $M_n \preccurlyeq M_{n+1}$ для всех $n \in \omega$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, грант №083 0/ГФ4.

Определение 6. [1]. Модель M теории T называется *предельной*, если M не является простой моделью ни над каким кортежем и $M = \bigcup\limits_{n\in\omega} M_n$ для некоторой элементарной цепи $(M_n)_{n\in\omega}$ простых моделей теории T над некоторыми кортежами.

Для счетной полной теории T мощности множеств типов изоморфизма простых над кортежами, предельных и остальных счетных моделей этой теории обозначим через $P(T)$, $L(T)$ и $\mathrm{NPL}(T)$ соответственно.

Определение 7. [1, 2]. Набор $(P(T), L(T), \mathrm{NPL}(T))$ называется *тройкой распределения счетных моделей теории* T и обозначается через $cm_3(T)$.

Пусть T — теория неориентированного ациклического графа. Если эта теория ω-категорична, она имеет единственную с точностью до изоморфизма счетную модель, которая является простой.

Предположим, что T не ω-категорична. Пусть M_0 и M_1 — две неизоморфные модели теории T. Не ограничивая общности, можем считать, что M_1 не изоморфна никакой подмодели M_0. Рассмотрим два условия.

(1). Найдётся такая компонента связности C, целиком лежащая в $M_1 \setminus M_0$, что модели M_0 и M_1 содержат различное количество компонент связности, изоморфных C.

(2). Найдутся такие элементы $a \in M_0$ и $b \in M_1 \setminus M_0$, связанные ребром в M_1, что b не алгебраический над a.

Если ни одно из этих условий не выполнено, то, из-за не выполнения второго условия, каждая компонента связности модели M_1 либо изоморфна своей части, лежащей в модели M_0, либо не пересекается с M_0. Так как не выполняется первое условие, для каждой компоненты связности, лежащей в $M_1 \setminus M_0$, в M_1 и M_0 имеется одинаковое количество копий этой компоненты. Следовательно, M_1 изоморфна некоторой подмодели M_0. Противоречие.

Значит, если теория T не ω-категорична, то найдутся две модели M_0 и M_1 этой теории, для которых выполняется хотя бы одно из вышеупомянутых условий.

Пусть выполняется условие (1). Заметим, что в этом случае модель M_1 имеет более одной компоненты связности, а значит $M_1 \models \forall x \exists y d(x, y) > n$ для каждого натурального n. Следовательно эти предложения принадлежат теории T и истинны на каждой ее модели.

Рассмотрим произвольную $M \models T$. Покажем, что $M \preccurlyeq M\dot{\bigcup}C$. Пусть для некоторой формулы $\varphi(\overline{x}, y)$ и некоторого $\overline{a} \in M$ выполняется $M\dot{\bigcup}C \models \exists y\varphi(\overline{a}, y)$. Тогда найдется элемент $b \in M\dot{\bigcup}C$, для которого $M\dot{\bigcup}C \models \varphi(\overline{a}, b)$. Если $b \in C$, то не существует пути, связывающего b с элементами из $\overline{a}$. Следовательно, $\varphi(\overline{a}, b) \equiv \varphi_1(\overline{a}) \wedge \varphi_2(b) \wedge \varphi_3(\overline{a}, b)$, где $\varphi_3(\overline{a}, b)$ говорит только о том, что для некоторого n не существует пути длины n, связывающего b с элементами из $\overline{a}$. Значит, в $M\dot{\bigcup}C$ выполняется каждый из трех конъюнктов.

Все элементы $\overline{a}$ лежат в M. Присоединив новую компоненту связности, мы добавили только элементы, не связанные маршрутами с $\overline{a}$. Так как $M \models T$, в M для любого n уже есть элементы, не соединенные с $\overline{a}$ маршрутами длины n или меньше. А значит, если $M\dot{\bigcup}C \models \varphi_1(\overline{a})$, то и $M \models \varphi_1(\overline{a})$.

Аналогично, так как $b \in C$, а C — компонента связности модели M_1, то если $M\dot{\bigcup}C \models \varphi_2(b)$, то и $M_1 \models \varphi_2(b)$.

Так как формула $\varphi_3(\overline{a}, b)$ содержит лишь информацию о том, что $\overline{a}$ и b не связаны маршрутами, для любого кортежа $\overline{a}' \in M_0$ верно $M_1 \models \varphi_3(\overline{a}', b)$.

Следовательно, для любого кортежа $\overline{a}' \in M_0$ верно $M_1 \models (\varphi_2(b) \wedge \varphi_3(\overline{a}', b))$. А значит, для любого кортежа $\overline{a}' \in M_0$ верно $M_1 \models \exists y(\varphi_2(y) \wedge \varphi_3(\overline{a}', y))$. Так как $M_0 \equiv M_1$, для любого кортежа $\overline{a}' \in M_0$ верно $M_0 \models \exists y(\varphi_2(y) \wedge \varphi_3(\overline{a}', y))$. Но тогда $M_0 \models \forall\overline{x}\exists y(\varphi_2(y) \wedge \varphi_3(\overline{x}, y))$.

$$(\varphi_2(y) \wedge \varphi_3(\overline{x}, y)) \vdash (\varphi_1(\overline{x}) \to (\varphi_1(\overline{x}) \wedge \varphi_2(y) \wedge \varphi_3(\overline{x}, y)));$$
$$(\varphi_1(\overline{x}) \to (\varphi_1(\overline{x}) \wedge \varphi_2(y) \wedge \varphi_3(\overline{x}, y))) \equiv (\varphi_1(\overline{x}) \to \varphi(\overline{x}, y));$$
$$M_0 \models \forall\overline{x}\exists y(\varphi_1(\overline{x}) \to \varphi(\overline{x}, y));$$
$$\exists y(\varphi_1(\overline{x}) \to \varphi(\overline{x}, y)) \equiv (\varphi_1(\overline{x}) \to \exists y\varphi(\overline{x}, y));$$
$$M_0 \models \forall\overline{x}(\varphi_1(\overline{x}) \to \exists y\varphi(\overline{x}, y)).$$

Так как $M \equiv M_0$, $M \models \forall\overline{x}(\varphi_1(\overline{x}) \to \exists y\varphi(\overline{x}, y))$. Следовательно,

$$M \models (\varphi_1(\overline{a}) \to \exists y\varphi(\overline{a}, y)).$$

Так как $M \models \varphi_1(\overline{a})$, то $M \models \exists y\varphi(\overline{a}, y))$. А значит найдется элемент $b' \in M$, для которого $M \models \varphi(\overline{a}, b')$.

Все элементы $\overline{a}$ и b' лежат в M. Присоединив новую компоненту связности, мы добавили только элементы, не связанные маршрутами с $\overline{a}$ и b'. Так как $M \models T$, в M для любого n уже есть элементы, не соединенные с $\overline{a}$ маршрутами длины n или меньше. А значит, если $M \models \varphi(\overline{a}, b')$, то и $M\dot{\bigcup}C \models \varphi(\overline{a}, b')$.

Получили, что если для некоторой формулы $\varphi(\overline{x}, y)$ и некоторого $\overline{a} \in M$ выполняется $M\dot{\bigcup}C \models \exists y \varphi(\overline{a}, y)$, то найдется элемент $b' \in M$, такой что $M\dot{\bigcup}C \models \varphi(\overline{a}, b')$. Следовательно, $M \preccurlyeq M\dot{\bigcup}C$.

Если M проста над множеством $u_1, u_2, \ldots, u_l$, $C \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, то полученная модель $M\dot{\bigcup}C$ будет проста над множеством $\{u_1, u_2, \ldots, u_l, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Если M содержит конечное число копий компоненты C, то M и $M\dot{\bigcup}C$ не изоморфны.

Таким образом, можем расширить любую простую над конечным множеством модель теории T, получив модель, простую над большим конечным множеством, присоединив к ней компоненту связности C. Не изоморфным компонентам будут соответствовать различные способы расширения.

Если выполняется условие (2), пусть K — подграф M_1, множеством вершин которого является $\{c \in M_1 \setminus M_0 \mid d(b, c) < \infty\}$, а ребрами — все ребра, соединяющие эти вершины в M_1. Рассмотрим произвольную $M \models T$. Пусть a' — вершина графа M, тип которой совпадает с $tp(a)$. Обозначим через M' — граф, множество вершин которого получено объединением множеств вершин M и K, а множество ребер — объединением множеств их ребер с добавлением ребра (a', b). Покажем, что $M \preceq M'$.

Пусть для некоторой формулы $\varphi(\overline{x}, y)$ и некоторого $\overline{d} \in M$ выполняется $M' \models \exists y \varphi(\overline{d}, y)$. Тогда найдется элемент $c \in M'$, для которого $M' \models \varphi(\overline{d}, c)$. Если $c \in K$, то $\varphi(\overline{d}, c) \equiv \varphi_1(\overline{d}) \wedge \varphi_2(c) \wedge \varphi_3(\overline{d}, c)$, где $\varphi_3(\overline{d}, c)$ описывает только маршруты, соединяющие c с элементами из $\overline{d}$, или отсутствие таковых. Так как граф ациклический, между двумя вершинами может быть не более одного маршрута. Следовательно, все маршруты, соединяющие элементы из K с элементами из M, содержат ребро (a', b). $\overline{d} \in M$, $c \in K$. Значит $\varphi_3(\overline{d}, c) \equiv \varphi_3'(\overline{d}, a') \wedge \varphi_3''(b, c) \wedge (a'; b)$, где $(a; b)$ означает, что вершины a' и b соединены ребром.

$$\varphi(\overline{d}, c) \equiv \varphi_1(\overline{d}) \wedge \varphi_2(c) \wedge \varphi_3(\overline{d}, c) \equiv \varphi_1'(\overline{d}, a') \wedge \varphi_2'(c, b) \wedge (a'; b).$$

Так как $M' \models \varphi(\overline{d}, c)$, то $M' \models \varphi_2'(c, b) \wedge (a'; b)$. Вершины b и c лежат в $K \subseteq M_1$, а с вершинами, не лежащими в K, соединены только через a', и $tp(a') = tp(a)$. Из всего этого следует, что $M_1 \models \varphi_2'(c, b) \wedge (a; b)$. Тогда $M_1 \models \exists x \exists y \varphi_2'((x, y) \wedge (a; y))$. Значит, $(\exists x \exists y (\varphi_2'(x, y) \wedge (a; y))) \in tp(a)$. Тогда, так как $tp(a') = tp(a)$, имеем $M \models \exists x \exists y \varphi_2'(x, y) \wedge (a'; y)$. А значит, в M найдутся вершины b' и c', такие что $M \models \varphi_2'(c', b') \wedge (a'; b')$. При чем, так же, как $\varphi_2'(c, b)$ описывает только те маршруты, которые лежат внутри K или проходят через a', (а значит, делятся на две части: ту, что лежит внутри K, и ту, что выводится из типа вершины a'), или отсутствие таких маршрутов, так же $\varphi_2'(c', b')$ содержит лишь информацию о маршрутах, не проходящих через вершину a', или информацию, выводящуюся из $tp(a')$. Следовательно, если $M \models \varphi_2'(c', b') \wedge (a'; b')$, то и $M' \models \varphi_2'(c', b') \wedge (a'; b')$. Следовательно,

$$M' \models \varphi_1'(\overline{d}, a') \wedge \varphi_2'(c', b') \wedge (a'; b'),$$

$$M' \models \varphi(\overline{d}, c').$$

Получили, что если для некоторой формулы $\varphi(\overline{x}, y)$ и некоторого $\overline{d} \in M$ выполняется $M' \models \exists y \varphi(\overline{d}, y)$, то найдется элемент $c' \in M$, такой что $M' \models \varphi(\overline{d}, c')$. Следовательно, $M \preccurlyeq M'$.

Если M проста над множеством $u_1, u_2, \ldots, u_l$, $K \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, то полученная модель M' будет проста над множеством $\{u_1, u_2, \ldots, u_l, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Если M содержит конечное число подграфов, изоморфных K, соединенных ребром с элементом a', то M и M' неизоморфны.

Таким образом, можем расширить любую простую над конечным множеством модель теории T, получив модель, простую над большим конечным множеством, присоединив к ней подграф K. Не изоморфным подграфам или подграфам, соединенным с элементами, которые нельзя перевести друг в друга автоморфизмом, будут соответствовать различные способы расширения, отличные от описанных в первом случае.

Если в некоторой модели теории T есть компонента связности или множество вида $\{c \in M_1 \setminus M_0 \mid d(b, c) < \infty\}$, которое можно и копировать, и расширять, добавляя к нему новые множества вида $\{c \in M_1 \setminus M_0 \mid d(b, c) < \infty\}$, то каждую копию можем расширять точно так же. Пусть n_k — количество таких копий, к которым прикреплено k множеств вида $\{c \in M_1 \setminus M_0 \mid d(b, c) < \infty\}$. Если для двух моделей хотя бы одно из таких чисел n_k будет различаться, эти модели не будут изоморфны. И для любого набора таких чисел n_k существует модель с таким набором. Если для некоторой модели сумма всех произведений kn_k конечна, такая модель будет простой над некоторым конечным множеством. Иначе — предельной. Всего таких наборов с конечной суммой — ω, а с бесконечной — 2^ω. А значит, простых моделей в этом случае будет ω, а предельных — 2^ω.

Далее будем считать, что такая ситуация невозможна.

Если теория T мала (т. е. имеет счетное число типов над пустым множеством), в каждом из случаев число способов расширения не более чем счетно. А значит, всего их тоже не более чем счетно. Занумеруем эти способы. Простой модели M теории T поставим в соответствие вектор $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3, \ldots)$, где n_i — количество копий компоненты связности или множества вида $\{c \in M_1 \setminus M_0 \mid d(b, c) < \infty\}$, соответствующего способу расширения с номером i в модели M. Сумма всех координат этого вектора будет конечной, т.к. модель проста над конечным множеством. Если двум моделям соответствует один и тот же вектор, они изоморфны. По каждому вектору можно восстановить модель, которой он соответствует. Таким образом, получили взаимнооднозначное соответствие между простыми моделями теории T и векторами с конечной суммой координат.

Будем говорить, что вектор $\bar{m}$ не превосходит вектор $\bar{n}$, если для любого i выполняется неравенство $m_i \leq n_i$.

Пусть вектор $\bar{n}$ соответствует модели M_1, а вектор $\bar{m}$ — модели M_2. Если $\bar{n} \leq \bar{m}$, то $M_1 \preccurlyeq M_2$. Если $M_1 \preccurlyeq M_2$, то количество копий каждой компоненты связности или множества вида $\{c \in M_1 \setminus M_0 \mid d(b,c) < \infty\}$ в M_1 не превосходит их количество в M_2, а значит, $\bar{n} \leq \bar{m}$. Таким образом, элементарной цепи соответствует неубывающая последовательность векторов. Пусть $n_i^{(j)}$ — i-ая координата вектора для j-ой модели. Тогда объединению элементарной цепи будет соответствовать вектор с координатами $n_i = \max\limits_{j<\omega}(n_i^{(j)})$. Если сумма его координат конечна, объединение такой элементарной цепи будет простой моделью. Иначе — предельной. Таким образом, предельным моделям будут соответствовать вектора с бесконечной суммой координат. Если способ расширения всего один, вектора будут одномерными, векторов, соответствующих простым моделям, будет ω, а единственным вектором, соответствующим предельной модели, будет (ω). В этом случае теория имеет счетное число простых моделей и одну предельную. Если способов расширения конечное число, большее 1, векторов с конечной суммой координат, а значит, моделей, простых над конечными множествами, будет ω; векторов с бесконечной суммой координат, а значит, и соответствующих им предельных моделей, будет ω. Если способов расширения ω,векторов с конечной суммой координат — 2^ω. А значит, теория имеет ω простых моделей и 2^ω предельных моделей.

Подытожив все вышесказанное, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 8. *Пусть T — полная малая теория ациклического графа, не имеющая конечных моделей. Тогда $cm_3(T)$ принимает одно из следующих значений:*

(1). $(1,0,0)$;

(2). $(\omega,1,0)$;

(3). $(\omega,\omega,0)$;

(4). $(\omega, 2^\omega, 0)$.

Список литературы

[1] С. В. Судоплатов, Классификация счетных моделей полных теорий ч.2, Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014.448 с.

[2] R. A. Popkov, S. V. Sudoplatov, Distributions of countable models of complete theories with continuum many types, Siberian Electronic Mathematical Reports, 12 (2015), 267–291.

[3] К. А. Байкалова, Предельные модели теории унаров, Вестник Омского университета, Омск: Издательство ОмГУ им. Ф.М. Достоевского, 2 (2014), 10-–14.

УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ КОНСЕРВАТИВНОГО РАСШИРЕНИЯ МОДЕЛИ ПОЛНОЙ ТЕОРИИ

Б. С. Байжанов*

Институт математики и математического моделирования,
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Республика Казахстан
e-mail: baizhanov@hotmail.com

1 Введение

Пусть N есть элементарное расширение модели M ($M \prec N$). Говорят, что модель N есть *консервативное расширение модели* M, если для любого кортежа элементов $\bar{\alpha}$ из N, $tp(\bar{\alpha}|M)$ определим [14]. Мы будем говорить, что элементарное расширение N модели M является *D-ω-насыщенным для* M, если любой определимый тип $q \in S_1(M \cup \bar{\alpha})$, где $\bar{\alpha} \in N$, реализуется в N.

Мы докажем, что любая модель любой полной теории, удовлетворяющая двум условиям, имеет консервативное расширение. Основным результатом статьи является критерий существования D-ω-насыщенного консервативного расширения модели теории (Теорема 7).

Определение 1. Пусть $A \subseteq M \models T$, $p \in S(A)$. Говорят, что тип p является *$\phi(\bar{x},\bar{v})$-определимым* для $\phi(\bar{x},\bar{v}) \in L(\bar{x})$, если существует $L(A)$-формула $\Psi_\phi(\bar{v})$, такая что для всех $\bar{a} \in A^{l(\bar{v})}$ верно: $\phi(\bar{x},\bar{a}) \in p$ тогда и только тогда, когда $M \models \Psi_\phi(\bar{a})$. Формула $\Psi_\phi(\bar{v})$ называется *$\phi(\bar{x},\bar{v})$-определением* типа p.

Говорят, что тип p *определим*, если он $\phi(\bar{x}_n,\bar{v})$-определим для любой формулы $\phi(\bar{x},\bar{v}) \in L(\bar{x}_n)$. Кортеж $\bar{\gamma} \in M$ *ht-определим над* A, если $tp(\bar{\gamma}|A)$ определим.

Определение 2. Пусть $q(\bar{x}) \in S(A), A \subset N$. Будем говорить, что тип q *строго определимый*, если для любой $L(A)$-формулы $\phi(\bar{x},\bar{y})$ существует $L(A)$-формула $\Theta_\phi(\bar{x}) \in q$, такая что для любого $\bar{a} \in A^{l(\bar{y})}$ верно:

*Работа финансировалась Комитетом науки МОН РК.

$$N \models \exists \bar{x}(\Theta_\phi(\bar{x}) \wedge \phi(\bar{x},\bar{a})) \rightarrow \forall \bar{x}(\Theta_\phi(\bar{x}) \rightarrow \phi(\bar{x},\bar{a})).$$

Из этих определений следует, что каждый изолированный тип строго определим, каждый строго определимый тип $q \in S(A)$ определим и $\phi(\bar{x},\bar{y})$-определением $q(\bar{x})$ будет $L(A)$-формула $\Psi_\phi(\bar{y}) := \forall \bar{x}(\Theta_\phi(\bar{x}) \rightarrow \phi(\bar{x},\bar{y}))$ или эквивалентно, $\Psi_\phi(\bar{y}) := \exists \bar{x}(\Theta_\phi(\bar{x}) \wedge \phi(\bar{x},\bar{y}))$. Заметим, что согласно классификации типов, проведенной Шелахом, для строго определимого типа $p \in S(A)$ и для $B \subseteq A (B := \{\bar{b} | \phi \in L, \Psi_\phi \in L(\bar{b})\})$ имеем $(p,B) \in \mathbf{F}^{\mathbf{l}}_{\aleph_0}$ ([21, Definition IV.2.2, страница 155]).

Пусть $p,q \in S(A)$ для некоторого $A \subset N$. Говорят [21], что *p слабо ортогонален q*, и обозначают $p \perp^w q$, если $p(\bar{x}) \cup q(\bar{y})$ есть полный тип. Будем говорить, что *$\bar{\alpha}$ слабо ортогонален типу $q \in S(A)$*, если $tp(\bar{\alpha}|A) \perp^w q$, и обозначать $\bar{\alpha} \perp^w q$. Будем говорить, что формула $\phi(\bar{x},\bar{b})$, $\bar{b} \in N$, *делит $C \subset N^l$* (l — длина кортежа $\bar{x}$, C необязательно формульно), если $\phi(N^l,\bar{b}) \cap C \neq \emptyset$, $\neg\phi(N^l,\bar{b}) \cap C \neq \emptyset$. Часто будем писать $\phi(N,\bar{b})$ вместо $\phi(N^l,\bar{b})$. Заметим, что для любого $\bar{\alpha} \in N$, для любого $q \in S(A), A \subset N$ верно: $\bar{\alpha} \not\perp q \iff$ некоторая $L(A \cup \bar{\alpha})$-формула делит q. Будем говорить, что *$B \subset N$ слабо ортогонально типу $q \in S(A)$*, $B \perp^w q$, если для любого кортежа $\bar{\alpha} \in B$ имеет место $\bar{\alpha} \perp^w q$ [3]. Отметим, $p \perp^w q \iff q \perp^w p$ и, если $p \perp^w q$ и $\bar{\beta} \in q(N)$, $\bar{\alpha} \in p(N)$, то для $r := tp(\bar{\beta}|A \cup \bar{\alpha})$ имеем $q(N) = r(N)$. Здесь, $p(N) := \cap_{\phi \in p}\phi(N)$.

Факт 3. Пусть T — o-минимальная теория, $A \subset N \models T$, N — $|A|^+$-насыщенная модель, $p,q \in S_1(A), q \not\perp^w p, \alpha \in q(N)$. Тогда существует $\beta \in p(N) \cap acl(A,\alpha)$.

Доказательство. Напомним, что в o-минимальной теории множество реализаций неалгебраического 1-типа в насыщенной модели есть выпуклое множество без концевых элементов, а множество реализаций любой формулы — конечное объединение интервалов и одноэлементных множеств. При этом концы этих интервалов и эти элементы принадлежат алгебраическому замыканию параметров этой формулы [17]. Тогда, так как $\alpha \not\perp^w q$ и, следовательно, некоторая $L(A \cup \{\alpha\})$-формула делит выпуклое множество $q(N)$, существует $\beta \in p(N) \cap alc(A,\alpha) \neq \emptyset$. □

При изучении моделей полных теорий важную роль играют свойства и понятия, связанные с "хорошими" элементарными расширениями моделей (множеств), такими как простые, специальные, (сильно) конструктивизирумые, насыщенные, консервативные [8, 9, 10, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 21], и их модификациями и обобщениями — F-простые модели, красивые пары, пары моделей, псевдо-малые теории, аксиоматизируемые пары моделей [1, 2, 4, 5, 6, 7, 16, 19, 21]. Почти всегда теоремы существования таких расширений базируются на различных вариантах теорем реализаций и/или опусканий типов (ϕ-типов).

Чтобы построить консервативное расширение множества с заданными свойствами, необходимо ответить на следующий вопрос:

Проблема (Проблема $A(S)$). Пусть S — свойство определимых типов и для $A \subset N$, $q(x), p(y) \in S_1(A)$ — определимые типы, обладающие свойством S. Существует ли полный определимый 2-тип $r(x, y) \in S_2(A)$, такой что
$$q(x) \cup p(y) \subseteq r(x, y)?$$

Имеем два разных случая:
A1 $q(x) \cup p(y)$ не является полным типом, то есть $p \not\perp^w q$;
A2 $q \perp^w p$.
Рассмотрим **A1** для o-минимальной теории.

Замечание. Пусть $q, p \in S_1(A)$ — два определимых 1-типа над множеством A в o-минимальной модели N, удовлетворяющие условию $q \not\perp^w p$. Тогда для любого $\alpha \in q(N)$ существует $\beta \in p(N)$, такой что $tp(\beta\alpha|A)$ определим.

Доказательство. Пусть $\alpha \in q(N)$. По Факту 3, существует $\beta \in acl(A \cup \{\alpha\}) \cup p(N)$. Тогда $tp(\beta|A \cup \{\alpha\})$ определим и, следовательно, $tp(\beta\alpha|A)$ определим. $\square$

Для случая **A2** имеем отрицательный ответ на **Проблему A(S)** даже в o-минимальном контексте, когда S есть свойство строгой определимости типов.

Предложение 4. *Существует o-минимальная теория T, такая что для $A \subset M \models T$, $p, q \in S_1(A)$ верно:*

(1). $q \perp^w p$;

(2). *q, p строго определимые типы*;

(3). *единственный 2-тип $p(x) \cup q(y) \in S_2(A)$ неопределим.*

Доказательство. Пусть $\langle \mathbb{Q}; =, <, +, 0\rangle$ — делимая упорядоченная группа рациональных чисел. Известно, что элементарная теория $\langle \mathbb{Q}; =, <, +, 0\rangle$ o-минимальна и допускает элиминацию кванторов [17]. Пусть
$$\langle \mathbb{Q}; =, <, +, 0\rangle \prec \langle \mathbb{R}; =, <, +, 0\rangle \prec \langle M; =, <, +, 0\rangle,$$

такие что $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел и $\langle M; =, <, +, 0\rangle$ — большая насыщенная модель. Пусть $\pi \in \mathbb{R}$ — неалгебраическое вещественное число. Пусть две бесконечные последовательности $\langle c_n\rangle_{n<\omega}$ и $\langle d_n\rangle_{n<\omega}$, такие что они имеют один и тот же предел $\sqrt{2}$ и верно

$$[c_1 < c_2 < \dots < c_n < \dots < d_n < \dots < d_2 < d_1]_{n<\omega}, c_n, d_n \in \mathbb{Q}.$$

Обозначим $A := \{c_n | n < \omega, c_n \in \mathbb{Q}\} \cup \{d_n | n < \omega, d_n \in \mathbb{Q}\}$, $p := tp(\pi|A)$, $q := tp(\sqrt{2} + \pi|A)$, $r := tp(\sqrt{2}|A)$. Так как r определяется двумя сходящими последовательностями, r не $(x < v)$-определим.

(i) Так как $\sqrt{2} + \pi$ и π алгебраически независимы над A, по Факту 3 получаем $q \perp^w p$.

(ii) Покажем, что q, p оба строго определимы. Так как теория $\langle \mathbb{Q}; =, <, +, 0\rangle$ допускает элиминацию кванторов, достаточно рассмотреть бескванторные типы над A, то есть типы, содержащие только бескванторные формулы. Каждый бескванторный тип над A состоит из формул следующего вида:

(1). $nx < u$;

(2). $nx > u$;

где u есть терм над A, то есть $u = \sum_i k_i e_i$ для $k_i \in Z$ и $e_i \in A$ (это не полный тип, но определяет полный тип над A).

Рассмотрим формулы вида $nx < c + \sum_{i=1}^m k_i y_i$, где c есть терм, определимый над A.

Покажем, что π и $\sqrt{2} + \pi$ не являются предельными точками

$$A_{c,k_1,\dots,k_m} = \{e \in \mathbb{Q} : \exists c_1, \dots c_m \in A \text{ такие, что } e = c + \sum_{i=1}^m k_i c_i\},$$

так как они не являются предельными точками A и типы $tp(\pi|A)$, $tp(\sqrt{2} + \pi|A)$ слабо ортогональны любому типу $tp(a|A)$, когда $a \in \bar{A}$ (здесь $\bar{A}$ есть замыкание A в топологическом смысле).

Предположим, что $\pi \in \bar{A}_{c,k_1,\dots,k_m}$. Тогда существуют последовательности $\langle a_j^i\rangle_{j<\omega}$ для $i = 1, \dots, m$, такие что $\lim_{j\to\infty}(c + \sum_i k_i a_j^i) = \pi$.

Пусть $\lim_{j\to\infty} a_j^i = a^i \in \bar{A}$, тогда $\pi = c + \sum_i k_i a^i$, но это невозможно из-за выбора A, потому что $\bar{A} = A \cup \{\sqrt{2}\}$ и $A \subset \mathbb{Q}$.

Таким образом, так как $\mathbb{Q} \subset acl(A)$ и $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$, для любых $m, n, k_1, \dots, k_m < \omega$; для любого терма c, определимого над A, существует $\Psi_{n,m,\bar{k},c}(x) \in tp(\pi|A)$, такая что для любых $b_1, \dots, b_m \in A$ верно:

$$[nx < c + \sum_{i=1}^m k_i b_i \in p \Longleftrightarrow \mathbb{Q} \models \forall x(\Psi_{n,m,\bar{k},c}(x) \to nx < c + \sum_{i=1}^m k_i b_i)].$$

Это означает, что p строго определим. Эти же самые рассуждения показывают, что q строго определим.

(iii) Так как π и $\sqrt{2}$ алгебраически независимы над A, имеем $\pi \perp^w r$ и, следовательно, для $r_0 := tp(\gamma|A, \pi)$ выполнено $r_0(M) = r(M)$. Тогда r_0 неопределим, так как он имеет те же самые сходящиеся последовательности $\langle c_n \rangle_{n<\omega}, \langle d_n \rangle_{n<\omega}$, которые обеспечивают неопределимость r. Так как $r_0 \not\perp^w q_0 := tp(\sqrt{2} + \pi|A, \pi)$, q_0 не $(x < \pi + v)$-определим. В противном случае, мы получили бы определимость r. $\square$

Таким образом, принимая во внимание Предложение 4, мы будем ограничиваться, главным образом, рассмотрением определимости объединения двух слабо ортогональных 1-типов над объединением модели и ht-определимым конечным множеством.

Определение 5. Будем говорить, что теория T имеет *свойство совместного расширения для определимых* 1*-типов* (*AP для D-1-типов*), если для пары моделей (M, N), $\forall \bar{\alpha}, \beta, \gamma \in N \setminus M$, $M \prec N \models T$ верно:
если 1-типы $q := tp(\beta|M \cup \bar{\alpha})$, $p := tp(\gamma|M \cup \bar{\alpha}), tp(\bar{\alpha}|M)$ определимы и $q \perp^w p$, то $tp(\beta\gamma|M \cup \bar{\alpha})$ определим или, эквивалентно, типы $tp(\gamma\beta\bar{\alpha}|M)$, $tp(\beta|M \cup \bar{\alpha}\gamma)$, $tp(\gamma|M \cup \bar{\alpha}\beta)$ определимы.

Будем говорить, что теория T имеет *свойство совместного расширения для строго определимых* 1*-типов* (*AP для SD*-1*-типов*), если для любых $M \prec N \models T, \forall \bar{\alpha}, \beta, \gamma \in N \setminus M$, таких что $tp(\bar{\alpha}|M)$ определим, верно:
если 1-типы $q := tp(\beta|M \cup \bar{\alpha}), p := tp(\gamma|M \cup \bar{\alpha})$ иррациональные, строго определимые и $q \perp^w p$, то $tp(\beta\gamma|M \cup \bar{\alpha})$ определим.

Мы предполагаем, что читатель знаком с базисными свойствами насыщенных моделей и имеет некоторый опыт работы с определимостью типов.

Факт 6. Пусть M такая модель, что для некоторого $A \subset M$, M — $|A|^+$–насыщенна. Тогда верно: если $p \in S_m(A)(m < \omega)$ — неизолированный тип, то для любого $\bar{\gamma} \in M$ $p(M^m)$ не является $\bar{\gamma}$-формульным.

Мы будем использовать следствие Факта 6 и определения ортогональности множества типу.

2 Критерий и его следствия

В этом параграфе мы докажем Теорему 7. Из Теоремы 7 следует ответ на вопрос о существовании консервативного расширения для произвольной модели полной теории, удовлетворяющей двум условиям **B1, B2**. Из доказательства этой теоремы следует: чтобы модель полной теории, удовлетворяющей условиям **B1, B2**, имела консервативное расширение, достаточно иметь хотя бы один определимый 1-тип над моделью. В частности, слабо o-минимальные не o-минимальные теории удовлетворяют этим двум условиям.

B1 Пусть A — произвольное множество в насыщенной модели полной теории, $p, q \in S_1(A)$, $p \not\perp^w q$. Тогда p определим тогда и только тогда когда q определим.

B2 Для бесконечной формулы $\phi(x, \bar{a}), \bar{a} \in A$ существует 1-тип $p \in S_1(A)$, где $\phi(x, \bar{a}) \in p$ и p определим.

Почти все o-минимальные теории удовлетворяют этим условиям. Условию **B2** не удовлетворяют все модели любого o-минимального обогащения $< \omega + \omega^*; =, <>$, так как любая модель этой теории не имеет определимых 1-типов над моделью.

Теорема 7. *Пусть T — полная теория, удовлетворяющая* **B1, B2**. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i). *Каждая модель M для T имеет D-ω-насыщенное консервативное расширение;*

(ii). *T имеет AP для D-1-типов.*

Доказательство. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" следует из определения D-ω-насыщенной консервативной пары и AP для D-1-типов.
"(ii) $\Rightarrow$ (i)"

Утверждение 8. *Пусть $A \subset B \subset C \subset N$. Если B — консервативное расширение A и C — консервативное расширение B, то C — консервативное расширение A.*

Пусть $M \prec N$, где N — большая насыщенная модель. Определим модель M_ω ($M \prec M_\omega \prec N$) как объединение элементарной цепи моделей $M_n, n < \omega$ (**D1**). Построение M_{n+1} ($M_n \prec M_{n+1}$) будем вести в два этапа. На первом этапе мы строим B_n ($M_n \subset B_n \subset M_{n+1}$), предполагая, что все определимые не реализованные в M_n (**D4**) 1-типы над $M \cup \bar{\alpha}$ ($\bar{\alpha} \in M_n$) реализованы в B_n (**D5**). На втором этапе мы замыкаем B_n до модели M_{n+1}, пользуясь критерием Тарского-Вота. Для этого мы строим множество $E(n, m) \subset E(n, m+1), m < \omega$, такое что любая $L(E(n, m))$-1-формула имеет решение в $E(n, m+1)$ (**D6, D7**), а M_{n+1} есть объединение $E(n, m), m < \omega$ (**D3**).

Наша задача в этой стандартной схеме построения модели (см., например, [8, Глава 3.1] или [21, Chapter 4]) заключается в выборе элементов $\beta_{n,\lambda} \in B_{n+1}$ ($\mathbf{D8}_{n,\lambda}$) и $e_{n,m,\lambda} \in E_{n,m+1}$ ($\mathbf{D9}_{n,m,\lambda}$), таких что и B_n, и $E(n,m)$ являются консервативными расширениями M_n. В итоге, применение Утверждения 8 будет завершать доказательство теоремы. Таким образом, условия **D1-D7** описывают конструкцию модели M_ω, описание выбора элементов **D8** совместно с **D4** и **D5** обеспечивают D-ω-насыщенность модели M_ω, описание выбора элементов **D9** совместно с **D6** и **D7** обеспечивают условие, что M_{n+1} есть элементарное расширение M_n:

D1 $M_\omega = \bigcup\limits_{n<\omega} M_n,\ M_n \prec M_{n+1} \prec M_\omega, M_n$ — консервативное расширение M.

$\mathbf{D2}_{n<\omega}$ $M_n \subset B_n \subset E(n,m) \subset E(n,m+1) \subset M_{n+1},\ m<\omega$.

$\mathbf{D3}_{n<\omega}$ $M_{n+1} = \bigcup\limits_{m<\omega} E(n,m)$.

$\mathbf{D4}_{n<\omega}$ $K_n = \bigcup\limits_{\bar{\alpha}\in M_n\setminus M} S_1^d(M\cup\bar{\alpha})$. Здесь,

$$S_1^d(M\cup\bar{\alpha}) = \{q \in S_1(M\cup\bar{\alpha}) | q \text{ определимый}, q(N)\cap M_n = \emptyset\}.$$

Зафиксируем произвольное перечисление типов множества

$$K_n = \{q_{n,\lambda} \in S_1^d(M\cup\bar{\alpha}_{n,\lambda}) | \lambda < \mu_n, \bar{\alpha}_{n,\lambda} \in M_n\setminus M\}, \mu_n = |K_n|.$$

$\mathbf{D5}_{n<\omega}$ $B_n = \bigcup\limits_{\lambda<\mu_n} B_{n,\lambda},\ \forall\lambda<\mu_n$,

$B_{n,\lambda} = \bigcup\limits_{\lambda'<\lambda} B_{n,\lambda'} \cup \{\beta_{n,\lambda}\}, \beta_{n,\lambda} \in q_{n,\lambda}(N),\ B_{n,\lambda}$ — консервативное расширение M.

$\mathbf{D6}_{n,m<\omega}$ $F(n,m) = \{\psi(x) | \psi(x)$ — $L(E(n,m))$-формула, такая $\psi(N) \neq \emptyset$, $\psi(N)\cap E(n,m) = \emptyset\}$. Зафиксируем произвольное перечисление формул множества

$$F(n,m) = \{\psi_{n,m,\lambda}(x) | \lambda < \mu_{n,m}\},\ \mu_{n,m} = |F(n,m)|.$$

$\mathbf{D7}_{n,m<\omega}$ $E(n,m+1) = \bigcup\limits_{\lambda<\mu_{n,m}} E(n,m,\lambda),\ \forall\lambda<\mu_{n,m}$,

$$E(n,m,\lambda) = \bigcup_{\lambda'<\lambda} E(n,m,\lambda') \cup \{e_{n,m,\lambda}\},\ e_{n,m,\lambda} \in \psi_{n,m,\lambda}(N),$$

$E(n,m,\lambda)$ — консервативное расширение M.

Для завершения описания построения M_ω дадим объяснение выбора $\beta_{n,\lambda}$ и $e_{n,m,\lambda}$ и доказательства того, что $B_{n,\lambda}$ и $E(n,m,\lambda)$ суть консервативные расширения M.

$\mathbf{D8}_{n,\lambda}$ Выбор $\beta_{n,\lambda}$ для $n<\omega, \lambda<\mu_n$.

Обозначим $B'_{n,\lambda} := \bigcup\limits_{\lambda'<\lambda} B_{n,\lambda'}$. Рассмотрим два случая:

$\mathbf{D8.1}_{n,\lambda}$ $B'_{n,\lambda} \perp^w q_{n,\lambda}$. Возьмем произвольный элемент $\beta \in q_{n,\lambda}(N)$ и обозначим его $\beta_{n,\lambda}$. Согласно (ii), то есть потому что T удовлетворяет AP для D-1-типов, $B_{n,\lambda} = B'_{n,\lambda} \cup \{\beta_{n,\lambda}\}$ является консервативным расширением M, если $B'_{n,\lambda}$ — консервативное расширение M.

$\mathbf{D8.2}_{n,\lambda}$ $B'_{n,\lambda} \not\perp^w q_{n,\lambda}$. Пусть $H(x)$ будет произвольной $L(B'_{n,\lambda})$-формулой, такой что $H(x)$ расщепляет $q_{n,\lambda}(N)$, то есть $H(N) < \neg H(N)$ и $H(N) \cap q_{n,\lambda}(N) \neq \emptyset$, $\neg H(N) \cap q_{n,\lambda}(N) \neq \emptyset$. Существование такой формулы $H(x)$ следует из определения неортогональности множества типу.

Пусть $\Gamma_{n,\lambda}(x) := q_{n,\lambda}(x) \cup \{\phi(N) < x < H(N)^+ | \phi(x)$ будет $L(B'_{n,\lambda})$-формулой такой, что $N \models \exists x(\phi(N) < x < H(N)^+)\}$. Заметим, что $\Gamma_{n,\lambda}(x)$ имеет расширение до полного 1-типа $p_{n,\lambda}$ над $B'_{n,\lambda}$, который $p_{n,\lambda}(x)$ определим (**B2**).

Возьмем произвольный элемент β из $p_{n,\lambda}(N)$ и обозначим его через $\beta_{n,\lambda}$. Тогда по **B1**, $B_{n,\lambda} = B'_{n,\lambda} \cup \{\beta_{n,\lambda}\}$ — консервативное расширение M, если $B'_{n,\lambda}$ — консервативное расширение M.

$\mathbf{D9}_{n,m,\lambda}$ Выбор $e_{n,m,\lambda}$ для $n,m<\omega, \lambda<\mu_{n,m}$.

Обозначим $E'(n,m,\lambda) = \bigcup\limits_{\lambda'<\lambda} E(n,m,\lambda')$. Рассмотрим два случая:

$\mathbf{D9.1}_{n,m,\lambda}$ Существует $L(E'(n,m,\lambda))$-формула $\theta(x)$, такая что $N \models \forall x(\theta(x) \to \psi_{n,m,\lambda}(x))$ и $\theta(x)$ определяет некоторый изолированный 1-тип над $E'(n,m,\lambda)$. Тогда по Замечанию 8 для произвольного $e \in \theta(N)$ имеем, что $E'(n,m,\lambda) \cup \{e\}$ — консервативное расширение M, если $E'(n,m,\lambda)$ — консервативное расширение M. Таким образом, положим $e_{n,m,\lambda} = e$.

$\mathbf{D9.2}_{n,m,\lambda}$ Существует $L(E'(n,m,\lambda))$-формула $\theta(x)$, такая что $N \models \forall x(\theta(x) \to \psi_{n,m,\lambda}(x))$ и $\theta(x)$ определяет некоторый изолированный 1-тип над $E'(n,m,\lambda)$. Заметим, что $\Gamma_{n,m,\lambda}(x)$ имеет расширяющий его полный 1-тип $p_{n,m,\lambda}$ над $E'(n,m,\lambda)$, который к тому же является определимым (**B2**).

Тогда для произвольного элемента $e_{n,m,\lambda} \in p_{n,m,\lambda}(N)$ верно, что $E(n,m,\lambda) := E'(n,m,\lambda) \cup \{e_{n,m,\lambda}\}$ является консервативным расширением M, если $E'(n,m,\lambda)$ — консервативное расширение M. Это завершает определение M_ω.

Структура M_ω есть элементарное расширение M в силу $\mathbf{D6}_{n,m}$, $\mathbf{D7}_{n,m}$, $\mathbf{D9}_{n,m,\lambda}$ и критерия Тарского-Вота [12, 11].

Из конструкций ($\mathbf{D4}_n$, $\mathbf{D5}_n$, $\mathbf{D8}_{n,\lambda}$) следует, что M_ω — D-ω-насыщенное консервативное расширение M. $\square$

Список литературы

[1] Б. С. Байжанов, Пары моделей и свойство NBAM, Proceedings of Informatics and Control Problems Institute (М. Айдарханов и Б. Байжанов, редакторы), Гылым, Алматы, 1995, 81–89.

[2] B. S. Baizhanov, J. T. Baldwin, Local Homogeneity, The Journal of Symbolic Logic, **69**, 04, December 2004, 1243–1260.

[3] J. T. Baldwin, Fundamentals of Stability Theory, Springer-Verlag, New Jork Inc, 1988.

[4] J. T. Baldwin, M. Benedikt, Stability theory, permutations of indiscernibles, and embedded finite models, Transactions of The American Mathematical Society, **352** (2000), 4937–4969.

[5] E. Bouscaren, Dimensional order property and pairs of models, Annals of Pure and Applied Logic, **41** (1989), 205–231.

[6] S. Buechler, Pseudo-proective strongly minimal sets are locally projective, The Journal of Symbolic Logic, **56** (1991), 1184–1194.

[7] E. Casanovas, M. Ziegler, Stable theories with a new predicate, The Journal of Symbolic Logic, **66** (2001), 1127–1140.

[8] Г. Кейслер, Ч. Ч. Чэн, Теория моделей, М.: Мир, 1977.

[9] С. С. Гончаров, Тотально трансцендентная разрешимая теория без конструктивизируемых однородных моделей, Алгебра и логика, **19**, 2 (1980), 137–149.

[10] Ю. Л. Ершов, Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М.: Наука, 1980.

[11] Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин, Математическая логика, М.: Наука, 1979.

[12] W. Hodges, A Shorter Model Theory, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[13] D. Marker, Omitting types in o-minimal theories, The Journal of Symbolic Logic, **51** (1986), 63–74.

[14] D. Marker, Ch. Steinhorn, Definable types in o-minimal theories, The Journal of Symbolic Logic, **59** (1994), 185–198.

[15] E. A. Paliutin, Number of models in complete varieties, Logic, Methodology and Philosophy of Sciences, Amsterdam: North-Holland, **VI** (1980), 203–217.

[16] A. Pillay, Definability of types, and pairs of o-minimal structures, The Journal of Symbolic Logic, **59** (1994), 1400–1409.

[17] A. Pillay, Ch. Steinhorn, Definable sets in ordered structures I, Transactions of The American Mathematical Society, **295** (1986), 565–592.

[18] A. Pillay, Ch. Steinhorn, Definable sets in ordered structures III, Transactions of The American Mathematical Society, **300** (1988), 469–476.

[19] B. Poizat, Pairs de structure stables, The Journal of Symbolic Logic, **48** (1983), 239–249.

[20] S. Shelah, Uniqueness and characterization of prime models over sets for totally transcendental first-order theories, The Journal of Symbolic Logic, **37** (1972), 107–113.

[21] S. Shelah, Classification Theory and the Number of Non-Isomorphic Models, Amsterdam: North-Holland, 1978.

КОНЦЕПЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ВЛОЖИМОСТИ В КЛАССЕ МОДЕЛЕЙ СЧЕТНОГО ЯЗЫКА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

М. И. Бекенов

Евразийский Национальный Университет им. Л. Н. Гумилева,
ул. Сатпаева, 2, Астана, 010000, Республика Казахстан
e-mail: bekenov50@mail.ru

В статье используется классический метод Воота — Робинсона, исследование связей и структуры моделей по элементарной вложимости [1]. А. И. Мальцев в [2] рассматривает общую идею о неотличимости моделей по определенному признаку.

Пусть K — класс бесконечных моделей счетного языка L первого порядка. Модель A *элементарно вкладывается* в модель B, символически $A \prec B$, если существует изоморфизм модели A на элементарную подмодель модели B.

Известно: Изоморфизм $\rightarrow$ элементарную вложимость $\rightarrow$ элементарную эквивалентность.

Стрелки в обратную сторону в обоих случаях неверны.

Определение 1. Пусть A и B — модели языка L, $|A| = |B| = \mu$. Модели A и B назовем λ-*подобными*, если для любой $A' \prec A$ с условием $|A'| \leq \lambda$ выполняется $A' \prec B$ и для любой $B' \prec B$ с условием $|B'| \leq \lambda$ выполняется $B' \prec A$.

Отношение λ-подобия является отношением эквивалентности. Таким образом, это отношение разбивает класс моделей K в различных мощностях μ на непересекающиеся классы, образуя факторкласс ${}^{B}K$. Две любые λ-подобные модели элементарно эквивалентны, то есть для теории получаем ${}^{B}K_T$.

Естественно возникает понятие спектральной функции количества этих классов в каждой конкретной мощности μ для теории T относительно кардинала λ.

Определение 2. Пусть T — теория. Тогда *спектральная функция* $B_T(\lambda, \mu)$ — это количество классов моделей мощности μ по отношению λ-подобия теории T.

В отличие от известной спектральной функции $I_T(\mu)$, она двуместная.

Вообще, для одной и той же теории T спектральные функции $I_T(\mu)$ и $B_T(\lambda, \mu)$ могут быть различными. Даже для $I_T(\omega)$ и $B_T(\omega, \omega)$. Например известный классический пример Эренфойхта теории T с тремя счетными моделями имеет $B_T(\omega, \omega) = 2$.

Найдены также примеры теорий T, у которых $I_T(\omega) = 2^\omega$, $B_T(\omega, \omega) = \omega$, а также не категоричные во всех мощностях теории T, но у которых для $\mu \geq \omega_1$, $B_T(\omega, \mu) = 1$ [3].

Теорема 3. *Если T — теория, имеющая только бесконечные модели, и для некоторых $\omega \leq \lambda \leq \mu$ выполнено $B_T(\lambda, \mu) = 1$, то теория T полная.*

Доказательство. Используется теорема Левенгейма об элементарном расширении или подмодели вверх и вниз. □

Известная теорема Воота является следствием теоремы 3 [1].

Теорема 4. *Теория T категорична в некоторой несчетной мощности (равносильно в любой несчетной мощности) тогда и только тогда, когда $B_T(\lambda, \mu) = 1$ для некоторых $\omega < \lambda \leq \mu$ (равносильно для любых $\omega < \lambda \leq \mu$).*

Доказательство. "$\Rightarrow$" теорема Морли. "$\Leftarrow$" В этом случае теория T ω-стабильная и не имеет двукардинальных формул. □

Известная теорема Морли является следствием теоремы 4 [1].

Теорема 5. *Если все модели теории T бесконечны, объединение всякой цепи моделей теории T является моделью теории T и $B_T(\lambda, \mu) = 1$ для некоторых $\omega < \lambda \leq \mu$, то теория T модельно полная.*

Доказательство. Если $\omega < \lambda \leq \mu$, то теорема 5 следует из теоремы 4 и теоремы Линдстрема. Остается показать выполнимость теоремы 5, когда $B_T(\omega, \mu) = 1$ для $\omega < \mu$. Известным способом построим алгебраически замкнутую модель мощности μ, которая является моделью теории T. Так как каждая счетная модель элементарно вкладывается в модель мощности μ, каждая счетная модель является алгебраически замкнутой. Теперь можно сказать, что каждая модель любой мощности является алгебраически замкнутой. □

Известная теорема Линдстрема является следствием теоремы 5 [1].

Теорема 6. *Если $1 < B_T(\omega,\omega) < \omega$, то теория T не суперстабильная.*

Доказательство. Из условия суперстабильности и не ω-категоричности теории следует существование бесконечного неразличимого множества, а из этого уже будет следовать существование бесконечного множества элементарно невложимых в друг друга счетных моделей теории T. $\square$

Известная теорема Лахлана является следствием теоремы 6 [1].

Определение 7. Две модели назовем *подобными*, если они элементарно вкладываются друг в друга.

Отношение подобия является отношением эквивалентности в классе K. Таким образом, в каждой мощности образуются классы по подобию моделей. Понятно, что если некоторая модель A из какого-то класса k_1 элементарно вкладывается в другую модель B другого класса k_2 (уже независимо от мощности), то и все модели класса k_1 элементарно вкладываются во все модели класса k_2. В этом случае будем писать $k_1 \leq k_2$, т.е. имеем частичный порядок на множестве классов подобия моделей. Если ограничиться рассмотрением достаточно большой мощности, то имеем алгебраическую систему с частичным отношением порядка $\boldsymbol{K} = \langle {}^B K, \leq \rangle$. А для теории T ее алгебраическую подсистему $\boldsymbol{K}_T = \langle {}^B K_T, \leq \rangle$ назовем *B-алгебраической системой* теории T.

Рассматриваются взаимосвязи свойств теории T со свойствами соответствующих им алгебраических систем $\boldsymbol{K}_T = \langle {}^B K_T, \leq \rangle$.

Например, имеющийся факт в этой концепции: объединяя известные теоремы Морли, Балдуина и Лахлана, можно сказать, что эта алгебраическая система для ω_1-категоричных теорий изоморфна множеству кардинальных чисел с обычным порядком [3]. Но обратное тоже верно, т.е. справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Теория T несчетно категорична тогда и только тогда, когда ее алгебраическая система изоморфна множеству кардинальных чисел с обычным порядком.*

Доказательство. "$\Rightarrow$" следует из теоремы 4 и известных теорем Морли, Балдвина, Лахлана, а также из рассуждений о концепции подобия по элементарной вложимости, приведенной выше. "$\Leftarrow$" Рассмотрим алгебраическую систему, которая является цепью по включению классов моделей. Понятно, что в ней имеется принцип элементарной цепи моделей, т.е. объединение элементарной цепи моделей теории является моделью этой теории и каждый член цепи элементарно вкладывается в объединение. Вообще каждая цепь имеет максимальный элемент. Рассмотрим классы, содержащие модели мощности ω_2. В одном из них лежит ранее упомянутая модель (Морли), в которой для любого подмножества B в самой модели реализуется не более $|B|+\omega$ типов над B. По условию теоремы в нее элементарно вкладываются все модели мощности ω_1, отсюда следует, что теория T стабильная. Теория T не имеет двукардинальных формул, так как если это не так, то построим модель, например, мощности ω_3, в которой двукардинальная формула имеет мощность ω_1, в которую не вкладывается элементарно модель мощности ω_2, такая что в ней все бесконечные формулы имеют мощность ω_2, что противоречит условию теоремы. Отсюда следует категоричность теории T в несчетной мощности. $\square$

На алгебраической системе естественно индуцируются ультрапроизведения по различным ультрафильтрам, т.е. ультрапроизведение классов по какому-нибудь ультрафильтру будет классом для этой алгебраической структуры.

Пусть $k \in^B K$. Возьмем множество всех ультрастепеней элемента k и замкнем его относительно порядка. Полученное множество назовем B_k-деревом, порожденным элементом k. Причем любой элемент B_k-дерева является его порождающим. Таким образом, $\boldsymbol{K}$ есть множество различных непересекающихся B-деревьев, так же как и $\boldsymbol{K}_T$. А множество всех моделей B-дерева — множество всех моделей некоторой полной теории T.

Теорема 9. *Теория T полна тогда и только тогда, когда каждый элемент $\boldsymbol{K}_T$ является ее порождающим.* [4]

Множество всех моделей B-дерева назовем B^M*–деревом.* Аксиоматизируемый класс моделей — множество различных B^M–деревьев. Но не каждое множество B^M–деревьев образует аксиоматизируемый класс. Также, не каждое объединение аксиоматизируемых классов будет аксиоматизируемым классом. Класс моделей назовем *конечнопорожденным*, если он является объединением конечного числа B^M –деревьев.

Теорема 10. *Конечнопорожденный класс является аксиоматизируемым классом.*

Доказательство. Ультрапроизведения моделей этого класса будут моделями этих деревьев. $\square$

Теорию, соответствующую конечнопорожденному классу, назовем *конечнопорожденной теорией.* Конечное объединение конечнопорожденных классов — аксиоматизируемый класс. На множестве B-деревьев также индуцируются ультрапроизведения по различным ультрафильтрам следующим образом. Ультрапроизведение заданных B-деревьев по заданному ультрафильтру это тоже B-дерево, полученное ультрапроизведениями элементов, выбранных из заданных B-деревьев по заданному ультрафильтру.

Определение 11. Пусть $L1 \subset L$. $K_T \downarrow_{L1}$ — это класс всех обедненных моделей класса K_T до языка $L1$.

Теорема 12. *Пусть $L1$ и $L2$ — языки и $L3 = L1 \cap L2$, а $T1$, $T2$ — теории в языках $L1$ и $L2$ соответственно. Тогда теория $T1 \cup T2$ в языке $L1 \cup L2$ непротиворечива тогда и только тогда, когда $K_{T1} \downarrow_{L3} \cap K_{T2} \downarrow_{L3} \neq \emptyset$.*

В данной теореме дается критерий непротиворечивости объединения теорий различных языков, из которой следует известная теорема Робинсона, которая сформулирована при предположении существования полной теории в виде достаточного условия.

На алгебраической системе $\boldsymbol{K}$ можно рассматривать прямое произведение элементов, так как прямое произведение классов по подобию индуцированное обычным прямым произведением моделей будет давать так же класс по подобию. Таким образом, возникает алгебраическая система $\boldsymbol{K} = \langle {}^B K, \leq, * \rangle$ и ее подсистемы [5].

Понятно, что для Хорновых теорий T система $\boldsymbol{K}_T = \langle {}^B K_T, \leq, * \rangle$ будет подсистемой системы $\boldsymbol{K} = \langle {}^B K, \leq, * \rangle$, что выполняется не для любой теории.

Прямое произведение B-деревьев дает B-дерево. Прямое произведение конечно порожденных теорий даст конечнопорожденную теорию. Таким образом, класс конечнопорожденных теорий замкнут относительно объединения, пересечения и прямого произведения.

Вопросы:

(1). Существование стабильной не категоричной полной теории T, у которой для $\mu \geq \omega_1$ имеет место $B_T(\omega, \mu) = 1$.

(2). Какие виды графов возможны для конечных и бесконечных B-алгебраических систем теорий?

Список литературы

[1] Г. Кейслер, Ч. Ч. Чен, Теория моделей, М.: Мир, 1977.

[2] А. И. Мальцев, Алгебраические системы, М.: Наука, 1970.

[3] М. И. Бекенов, Мальцевские чтения, Новосибирск, 2012, 130.

[4] М. И. Бекенов, Мальцевские чтения, Новосибирск, 2013, 148.

[5] М. И. Бекенов, Мальцевские чтения, Новосибирск, 2014, 121.

О ВЫРАЖЕНИИ ПАРАМЕТРОВ УПРАВЛЕНИЯ ОДНОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ЧЕРЕЗ КООРДИНАТЫ ЕЕ ПОЛЮСОВ

А. В. Чехонадских[*]

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: alcheh@ngs.ru

1 Введение

Построение стабилизирующего управления для линейных динамических систем — классическая область теории автоматического управления (ТАУ), в которой даже для одноканального случая сохраняется немало содержательных проблем [1, 2]. Важная особенность линейных систем заключается в возможности применения преобразования Лапласа к описывающим их дифференциальным уравнениям, за счет чего модель системы принимает алгебраическую форму. Принципиальное значение для инженерных свойств системы имеет расположение корней ее характеристического уравнения — так называемых *полюсов системы*. Как правило, необходимо за счет выбора структуры регулятора и значений его свободных параметров добиться попадания полюсов $z_1, \ldots, z_n$ в левую комплексную полуплоскость, затем можно указать более узкую область в соответствии с инженерными требованиями к качеству управления. Специфика управления пониженного порядка проявляется в том, что с его помощью нельзя добиться произвольного расположения полюсов (это обусловлено недостаточным числом настраиваемых параметров C или характером их вхождения в коэффициенты характеристического многочлена $f_C(s)$. Отыскание же наилучшего расположения полюсов

[*]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, по государственному заданию № 2014/138, проект 1052.

наталкивается на ряд принципиальных оптимизационных трудностей: невыпуклость, многоэкстремальность, недифференцируемость с неограниченными производными. Перечень методов, позволяющих добиваться оптимального по тем или иным критериям расположений полюсов, труднообозрим [3]–[5]. При этом в ряде работ российских и западных исследователей отмечалось, что наибольшее смещении влево правой границы множества полюсов: $\max \mathrm{R}e(z_1, \ldots, z_n) \to \min$, что соответствует наилучшей устойчивости управляемой системы, приводит к скоплению на границе максимально возможного их числа [6]–[9]. Алгебраический метод отыскания критических (оптимальных и субоптимальных) расположений полюсов системы АУ разрабатывался автором при руководстве проф. А. А. Воеводы с начала 2000-х годов. Целью наших исследований было формирование геометрического представления всевозможных расположений корней многочленов с действительными коэффициентами и развитие на его основе эффективных оптимизационных возможностей. Главная идея предложенного метода заключается в отыскании тех точек в пространстве параметров C управления, которым соответствует наличие на правой границе области расположения полюсов фиксированного типа (полуплоскости, конуса, внутренности параболы или левой ветви гиперболы) максимального их числа. Эти граничные полюса оказываются наименее устойчивыми, "правыми" корнями характеристического многочлена системы; их значения выражаются через несколько действительных переменных χ, которые А. А. Воевода в конце 90-х годов предложил именовать *корневыми координатами* [10]. Произведение $p_\chi(s) = (s - z_1) \ldots (s - z_m)$ скобок, содержащих все правые корни, естественно называть *корневым многочленом.* Характеристический многочлен, в коэффициенты которого входят параметры управления C, должен нацело делиться на корневой, за счет чего возникают полиномиальные соотношения между переменными C и χ. В ряде содержательных примеров удавалось выразить параметры управления C через корневые координаты χ из системы уравнений, которая возникает после приравнивания к нулю остатка $r_{C,\chi}(s)$ от деления характеристического многочлена на корневой [11]–[14]. Если за одну из корневых координат α взять основной показатель устойчивости (например, степень устойчивости $\delta = \max \mathrm{R}e(z_1, \ldots, z_n)$, рассматриваемую А. М. Шубладзе и его коллегами), то левая граница по координате α области определения зависимости $C(\chi)$ задает оптимальное значение параметров регулятора.

Для одноканальных систем такая возможность в общем случае была рассмотрена в [14, 15]; основная теорема в [15] была доказана при некотором соотношении степеней характеристического и корневого многочленов. В настоящей заметке устанавливается избыточность последнего.

2 Корневые координаты

Управляемый объект (plant) описывается передаточной функцией $D_{pl}(s)^{-1}N_{pl}(s)$, а регулятор (controller) — функцией $D_C(s)^{-1}N_C(s)$, которые для одноканальных систем (SISO system) являются рациональными дробями. При этом $D_{pl}(s) \geq N_{pl}(s), D_C(s) \geq N_C(s)$, а для обеспечение правильности системы требуется, чтобы одно из неравенств было строгим. Характеристический многочлен одноканальной системы возникает из Диофантова соотношения

$$f_C(s) = D_{pl}(s)D_C(s) + N_{pl}(s)N_C(s) = \\ = D_{pl}(s)(s^u + d_{u-1}s^{u-1} + \cdots + d_0) + N_{pl}(s)(b_v s^v + b_{v-1}s^{v-1} + \cdots + b_0),$$

из которого видно, что коэффициенты характеристического многочлена $f_C(s)$ линейно зависят от $k = u + v + 1$ свободных параметров $C = \{b_0, \ldots, b_v, d_0, \ldots, d_{u-1}\}$ регулятора. Пониженный порядок управления в одноканальном случае, как правило, означает, что число k свободных параметров C регулятора недостаточно для обеспечения произвольного расположения полюсов системы, в частности, k-мерное многообразие коэффициентов многочлена $f_C(s)$ строго содержится в пространстве $\mathbf{R}^n$. Качество управления, достигающееся при каждом значении параметров C^*, определяется граничными наименее устойчивыми корнями. Упомянутая выше большая серия работ А. М. Шубладзе и его соавторов (в т.ч. [6]–[8]) посвящена исследованию систем АУ с наибольшей степенью устойчивости δ, достижение которой сопровождается наличием на прямой $\operatorname{Re} s = \delta$ максимально возможного числа полюсов системы, действительных и комплексно сопряженных, простых и кратных. Однако, наряду со степенью устойчивости, которая качественно характеризует скорость подавления возмущений в системе, нередко приходится рассматривать и другие требования: ограниченной колебательности, бесколебательного гашения возмущений и др. Как наиболее типичные можно привести следующие подходы к выбору показателя устойчивости и оптимальности расположения полюсов:

(1). максимизация Гурвицевой функции (степени устойчивости) за счет минимизации функции

$$H(C) = \max\{\operatorname{Re} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_m\};$$

при этом полюса окажутся в самой левой из полуплоскостей $\{s \mid \operatorname{Re} s \leq H(p)\}$;

(2). снижение колебательности системы с учетом устойчивости за счет минимизации функции

$$K(C) = \max(\operatorname{Re} z_k + |\operatorname{Im} \mathrm{z_k}|),$$

при этом полюса окажутся в самом левом из конусов семейства $\{s \mid \operatorname{Re} s + |\operatorname{Im} s| \leq K(p)\}$;

(3). увеличение запаса устойчивости системы с учетом колебательности, связанное с минимизацией функции

$$G(C) = \max\left(\operatorname{Re} z_k + \sqrt{L^2 + \operatorname{Im}^2 z_k}\right) - L,$$

в результате чего полюса окажутся во внутренности самой левой ветви гиперболы $\operatorname{Re} z + \sqrt{L^2 + \operatorname{Im}^2 z} - L \leq G(p)$.

Число α, в этих примерах равное $H(C)$, $K(C)$ и $G(C)$ соответственно, будет *показателем устойчивости* данного набора полюсов; минимизация показателя устойчивости как функции $\alpha(C)$ параметров регулятора обеспечивает самое левое расположение правой границы всего набора полюсов.

Замечание. В предыдущих работах [11]–[14] вместо выражения "показатель устойчивости" использовалось понятие ***R**-градуировки*, связанное с подробно изложенной там оптимизационной концепцией, остающейся за рамками настоящей заметки.

Обобщая представления о показателе устойчивости, подобные приведенным выше, можно описывать границы области расположения полюсов либо соотношениями $\operatorname{Re} s = \iota_\alpha(|\operatorname{Im} s|)$, где $\iota_\alpha(y)$ — целая алгебраическая функция действительного аргумента $y \geq 0$, причем $\iota_\alpha(0) = \alpha$, либо соотношениями $\operatorname{Im} s = \pm\tau_\alpha(\operatorname{Re} s)$, где убывающая функция $\tau_\alpha(x) \geq 0$ определена на отрезке $(-\infty; \alpha]$, причем $\tau_\alpha(\alpha) = 0$ и $\tau_\alpha^2(x)$ — целая алгебраическая функция [13, 14]. В обоих случаях действительные корни и комплексно сопряженные пары корней задают действительный корневой многочлен с коэффициентами, являющимися целыми алгебраическими функциями переменных χ. Помимо действительной и мнимой частей, корневыми координатами могут служить и другие величины, связанные с условиями конкретной задачи и однозначно описывающие положение полюса на комплексной плоскости. Очевидно, для точек границ областей (в том числе правых полюсов) вполне достаточно указывать значения показателя устойчивости α, который задает каждую граничную кривую, и ординаты этих точек.

3 Коэффициенты корневых многочленов

Предложение 13. *Все коэффициенты корневого многочлена являются ненулевыми алгебраическими функциями корневых координат χ.*

Действительно, как указано выше, корневые ординаты $y_k = \mathrm{Im} z_k$ допускают обращение в ноль, при этом абсцисса корня $\mathrm{Re}\, z_k = \iota_\alpha(0) = \alpha$. В альтернативном случае корневые абсциссы допускают значение показателя устойчивости: $\mathrm{Re}\, z_k = \alpha$, при этом ордината корня обращается в ноль: $\mathrm{Im}\, z_k = \tau_\alpha(\alpha) = 0$. В этом случае все правые полюса смещаются в одну точку $z_1 = \cdots = z_m = \alpha$, а корневой многочлен обращается в бином $p_\chi(s) = (s-\alpha)^m$. Поскольку зависимость коэффициентов бинома от координаты α ненулевая, коэффициенты корневого многочлена не обращаются тождественно в ноль ни при каком выборе корневых координат χ.

В статье [15] предложение 2 и его следствия устанавливают это свойство безотносительно конструкции корневых координат, но при наличии связи $n < m(m-1)$ между степенями характеристического и корневого многочленов. Обоснование всех остальных предложений и теоремы на эту связь не опирается и может быть воспроизведено без изменений. Тем самым уточненная формулировка основного результата [15] примет следующий вид.

Теорема 14. *Пусть зависимость коэффициентов характеристического многочлена $f_C(s) = s^n + a_{n-1}(C)s^{n-1} + \cdots + a_0(C)$ от параметров управления $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ линейна и невырожденна, а правые корни $z_1, \ldots, z_m$ многочлена $f_C(s)$ выражаются через $l \le m$ корневых координат χ, причем $k, m < n$. Тогда равенство $r_{C,\chi}(s) = 0$ позволяет выразить параметры управления C через корневые координаты χ.*

Список литературы

[1] Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory, Edited by Vincent D. Blondel, Alexandre Megretski, Princeton, Oxford: Princeton University Press, 2004, 350 Pp.

[2] Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков, Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к их решению, Автоматика и телемеханика, 5 (2005), 7–46.

[3] D. Henrion, D. Arzelier, D. Peaucelle, Positive polynomial matrices and

improved LMI robustness conditions, Automatica, **39** (2003), 1479–1485.

[4] В. А. Бойченко, А. П. Курдюков, В. Н. Тимин, М. Н. Чайковский, И. Б. Ядыкин, Некоторые методы синтеза регуляторов пониженного порядка и заданной структуры, Управление большими системами, Сборник трудов, М.: ИПУ РАН, 19 (2007), 23–126.

[5] M. Saeki, K. Aimoto, PID controller optimization for H_∞-control by linear programming, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 10 (2000), 83–99.

[6] А. М. Шубладзе, Достаточные условия экстремума в системах максимальной степени устойчивости I, Автоматика и телемеханика, 3 (1997), 93–105.

[7] А. М. Шубладзе, Достаточные условия экстремума в системах максимальной степени устойчивости II, Автоматика и телемеханика, 3 (1997), 67–79.

[8] А. М. Шубладзе, В. Е. Попадько, С. И. Кузнецов и др., Исследование оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД-управлении, ч. 1, Управление большими системами, Сборник трудов, М.: ИПУ РАН, **22** (2008), 86–100.

[9] А. М. Шубладзе, В. Е. Попадько, С. И. Кузнецов и др., Исследование оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД-управлении, ч. 2, Управление большими системами, Сборник трудов, М.: ИПУ РАН, **23** (2008), 39–55.

[10] А. А. Воевода, В, В. Плохотников, А. В. Чехонадских, О совмещенных декартовых координатах в пространстве корней многочленов с действительными коэффициентами, Сб. науч. тр. НГТУ, Новосибирск: Изд-во НГТУ, **23**, 1 (2001), 153–156.

[11] A. N. Koryukin, A. V. Chekhonadskikh A.V., Extreme root location of real polynomials and stabilization of 3-mass control system, Algebra and Model Theory 8, Novos. State Techn. Univ., Novosibirsk, 2011, 19–39.

[12] А. А. Воевода, А. Н. Корюкин, А. В. Чехонадских, О понижении порядка стабилизирующего управления на примере двойного перевернутого маятника, Автометрия, **48**, 6 (2012), 69–83.

[13] А. В. Чехонадских, Экстремальные расположения полюсов систем автоматического управления с регулятором пониженного порядка, Автоматика и телемеханика, 10 (2014), 6–24.

[14] А. В. Чехонадских, Корневые координаты в синтезе одноканальных систем автоматического управления пониженного порядка, Автометрия, **51**, 5 (2015), 69–81.

[15] А. В. Чехонадских, С. Н. Калашников, Параметры управления пониженного порядка одноканальных систем и корневые координаты, Науч. Вестн. НГТУ, **57**, 4 (2014), 40–47.

ОБОБЩЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ИХ РОЛЬ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ПОДМОДЕЛЕЙ

Ю. А. Чиркунов*

Новосибирский государственный технический университет
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: chr01@rambler.ru

Симметрийный (групповой) анализ базируется на теории групп Ли и алгебр Ли. Он хорошо зарекомендовал себя при отыскании классов точных решений дифференциальных уравнений. Основополагающее начало было сделано норвежским математиком Софусом Ли (1842–1899). В России метод развивался как теория размерностей. Теория групп Ли долгое время оставалась в стороне от возможных приложений к дифференциальным уравнениям математической физики. Начиная с середины прошлого столетия исследования, выполненные академиком Л. В. Овсянниковым, его учениками и последователями, показали, что методы теории групп Ли являются эффективным способом изучения структуры множества решений дифференциальных уравнений. В настоящее время это математическое направление получило название группового или симметрийного анализа дифференциальных уравнений. Симметрийный (групповой) анализ лежит на стыке математических дисциплин: алгебры, геометрии, анализа и имеет богатые приложения. Современное представление симметрийного анализа понимается как наиболее полное использование группы преобразований, допускаемых классом уравнений (моделью), для классификации представителей класса, для перечисления подмоделей (редукций основной модели к более простым), точных решений и их особенностей.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (2014/138, проект № 435; и гранта № НШ-2133.2014.1. в рамках Программы Президента РФ по поддержке ведущих научных школ.

Математические модели многих явлений реального мира и, конечно, модели механики сплошной среды формулируются в виде систем дифференциальных уравнений.

При выводе этих уравнений используется их инвариантность относительно преобразований, как следствие симметричности пространства-времени, в котором описывается явление. Множество преобразований действует в пространстве-времени окружающего нас мира, что позволяет представить геометрическую структуру этого пространства. Например, однородность (независимость свойств пространства от места), изотропность (независимость от направления), динамическое подобие событий (галилеева и лагранжева инвариантность).

Но симметричность модели может быть скрытой, как следствие физических свойств моделируемого явления.

Использование всех симметрийных свойств позволяет правильно моделировать явление и классифицировать подмодели. Симметрийный анализ таких уравнений является одним из самых эффективных способов получения качественных и количественных характеристик соответствующих физических процессов.

Групповая классификация дифференциальных уравнений позволяют, в частности, выявить значения и формы экспериментально определяемых физических величин и зависимостей, и указать тем самым подмодели, наиболее перспективные с точки зрения математического исследования.

1 Групповая классификация систем дифференциальных уравнений

Пусть (S) — система дифференциальных уравнений порядка $n \geq 1$ с независимыми переменными $\mathbf{x}$ и зависимыми переменными $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, содержащая произвольный элемент $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, где $\mathbf{u}_i$ — набор производных порядка i зависимых переменных $\mathbf{u}$ по независимым переменным $\mathbf{x}$. Пусть произвольный элемент удовлетворяет структурным уравнениям (Q), в которых независимыми переменными являются $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$, а зависимыми переменными — $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$.

Задача групповой классификации системы (S) состоит [1]:

— в отыскании ядра основных групп;

— в перечислении с точностью до преобразований эквивалентности всех специализаций произвольного элемента, при которых происходит расширение ядра;

— в отыскании основной группы для каждой специализации.

При этом основную роль играют преобразования эквивалентности [1], т. е. преобразования переменных $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}$, сохраняющие дифференциальную структуру системы (S). Они определяются двумя следующими признаками [1]:

(α) Преобразования эквивалентности порождаются операторами

$$\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cdot \partial_{\mathbf{x}} + \eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cdot \partial_{\mathbf{u}} + \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{f}) \cdot \partial_{\mathbf{f}} \tag{1}$$

и являются точечными симметриями системы $(S) \bigcup (Q)$. При этом продолжение этих операторов осуществляется с учетом того, что в системе (S) независимыми переменными являются $\mathbf{x}$, зависимыми переменными — $\mathbf{u}, \mathbf{f}$, а в системе (Q) независимыми переменными являются $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$, зависимыми переменными — $\mathbf{f}$. Соответствующие формулы продолжения указаны в [1].

(β) Преобразования эквивалентности допускаются системой

$$(S) \bigcup (Q)$$

при всех имеющих данный функциональный или параметрический произвол специализаций произвольного элемента $\mathbf{f}$.

Преобразования эквивалентности обладают двумя следующими важными свойствами. Во-первых, эти преобразования действуют только на произвольный элемент, сохраняя дифференциальную структуру системы; при этом произвольный элемент сохраняет функциональный или параметрический произвол, задаваемый структурными уравнениями. Во-вторых, преобразования эквивалентности образуют группу Ли. Эта группа называется группой эквивалентностей системы для данной специализации произвольного элемента.

Одной из первых работ, в которой была предпринята попытка учесть влияние специализации произвольного элемента на группу эквивалентностей, была работа [2]. Такая же попытка была сделана в работе [3] при групповой классификации уравнений двумерных движений газа. В этих работах рассматривались преобразования эквивалентности, в которых преобразования независимых и зависимых переменных явно зависели от произвольного элемента, но опять речь шла о преобразованиях, сохраняющих вид системы при всех имеющих данный функциональный или параметрический произвол специализаций произвольного элемента.

В настоящей работе предлагается новый алгоритм, позволяющий получить все специализации произвольного элемента $\mathbf{f}$, при которых происходит расширение группы эквивалентностей системы (S) и найти все эти расширения.

В отличие от ставшего классическим алгоритма, приведенного в [1], новый алгоритм, во-первых, позволяет избежать значительных аналитических трудностей, связанных с анализом классифицирующих уравнений, возникающих при применении алгоритма из [1], во-вторых, существенно сокращает объем вычислений, в-третьих, позволяет сразу найти наиболее широкую группу эквивалентностей системы для каждой конкретной специализации произвольного элемента.

Определение 1. Преобразования, задаваемые условиями (α), (β) будут называться универсальными преобразованиями эквивалентности системы (S).

Предлагается отказаться от условия (β) и искать оператор вида (1), допускаемый системой $(S)\bigcup(Q)$ в соответствии с условием (α).

Отказ от условия (β) означает, что неизвестными функциями в системе определяющих уравнений, полученных с помощью условия (α), являются не только ξ, η, ζ, но и $\mathbf{f}$. Каждое решение этой системы определяет специализацию произвольного элемента $\mathbf{f}$ и группу эквивалентностей системы (S) для этой специализации произвольного элемента. При этом получаются все такие специализации, поскольку, условие (α) определяет общий вид преобразований эквивалентности системы (S).

Таким образом, отказ от условия (β) позволяет получить все специализации произвольного элемента, при которых происходит расширение группы эквивалентностей системы (S) и найти все эти расширения.

Определение 2. Преобразования, задаваемые условиями (α), будут называться обобщенными преобразованиями эквивалентности системы (S).

Множество обобщенных преобразований эквивалентности системы (S) состоит из преобразований эквивалентности, сохраняющих ее дифференциальную структуру при всех задаваемых уравнениями структуры (Q) различных специализациях произвольного элемента. Оно содержит все универсальные преобразования эквивалентности, сохраняющие дифференциальную структуру системы (S) при любом произвольном элементе $\mathbf{f}$, и преобразования, сохраняющие дифференциальную структуру системы (S) при каждой конкретной специализации произвольного элемента $\mathbf{f}$.

Множество обобщенных преобразований эквивалентности системы (S), вообще говоря, не образует группу Ли преобразований, т. к. оно состоит из преобразований, сохраняющих ее дифференциальную структуру при различных специализациях элемента $\mathbf{f}$.

Пусть Ω — множество решений структурных уравнений (Q). Оно состоит из всех специализаций произвольного элемента $\mathbf{f}$, определяемого уравнениями структуры (Q).

Множество обобщенных преобразований эквивалентности системы (S) является множеством сохраняющих ее дифференциальную структуру преобразований переменных $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}$, для каждого из которых в множестве Ω найдется хотя бы один инвариантный элемент.

Множество универсальных преобразований эквивалентности системы (S) — это множество преобразований переменных $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}$, сохраняющих дифференциальную структуру системы (S), для которых каждый элемент множества Ω является инвариантным множеством.

Выполнить групповую классификацию системы (S) означает для каждого элемента $q \in \Omega$ найти максимальное подмножество множества обобщенных преобразований эквивалентности системы (S), относительно которого q инвариантно, т. е. q является неподвижной точкой для всех преобразований этого максимального подмножества. Каждое такое максимальное подмножество для фиксированного элемента $q \in \Omega$ есть не что иное, как группа эквивалентностей системы (S) для данной специализации произвольного элемента.

Пересечением групп эквивалентностей для всех специализаций произвольного элемента является множество универсальных преобразований эквивалентности системы (S), т. е. образуемая универсальными преобразованиями эквивалентности группа Ли — это ядро групп эквивалентностей для всех специализаций данной системы.

Универсальные преобразования эквивалентности, действующие на произвольный элемент $\mathbf{f}$ тождественно, образуют ядро основных групп системы (S). Ядро основных групп системы (S) является нормальным делителем группы эквивалентностей для каждой специализации произвольного элемента $\mathbf{f}$.

Для множества обобщенных преобразований эквивалентности системы (S) справедлива следующая оценка снизу: множество точечных симметрий системы (S) при всех специализациях произвольного элемента $\mathbf{f}$ является подмножеством множества обобщенных преобразований эквивалентности системы (S).

Новый алгоритм решения задачи групповой классификации системы дифференциальных уравнений состоит из двух этапов:

1. Сначала ищется оператор (1) обобщенных преобразований эквивалентности системы (S). Условие (α) в силу инфинитезимального критерия инвариантности многообразия $(S)\bigcup(Q)$ относительно оператора (1) после расщепления по параметрическим производным дает систему

определяющих уравнений для отыскания $\xi, \eta, \zeta, \mathbf{f}$. Решение этой переопределенной системы дает все специализации произвольного элемента $\mathbf{f}$ и для каждой специализации — соответствующие преобразования эквивалентности системы (S). Множество этих преобразований эквивалентности и составляет множество обобщенных преобразований эквивалентности системы (S). Для каждой не имеющей функционального или параметрического произвола специализации произвольного элемента $\mathbf{f}$ множество преобразований эквивалентности системы (S) образует для системы с этоим произвольным элементом ее основную группу Ли преобразований. Случай наиболее широкой основной группы, как правило, выделяется сразу.

2. Для имеющих функциональный или параметрический произвол специализаций произвольного элемента $\mathbf{f}$ исследуется действие группы эквивалентностей системы (S) с этим произвольным элементом, точнее исследуется действие факторгруппы этой группы эквивалентностей по ядру основных групп системы (S), на систему (S) с этим произвольным элементом. В результате этого действия получаются эквивалентные системы. Для перечисления всех не эквивалентных систем строится оптимальная система подгрупп для рассматриваемой группы эквивалентностей, точнее строится оптимальная система подгрупп для факторгруппы этой группы эквивалентностей по ядру основных групп системы (S). Преобразования эквивалентности, действующие на $\mathbf{f}$ тождественно, образуют ядро основных групп системы (S) при данном произвольном элементе $\mathbf{f}$, т.е. допускаются системой (S) при всех имеющих рассматриваемый произвол элементах $\mathbf{f}$. Система (S) допускает дополнительно к ядру основных групп каждую подгруппу группы эквивалентностей при условии, что данная подгруппа действует на элемент $\mathbf{f}$ тождественно. Для каждой подгруппы из построенной оптимальной системы подгрупп элемент $\mathbf{f}$ конкретизируется из условия, состоящего в том, что данная подгруппа действует на элемент $\mathbf{f}$ тождественно.

Приведенный новый алгоритм и его применение к конкретным математическим моделям опубликованы в работах [4]–[10].

Список литературы

[1] Л. В. Овсянников, Групповой анализ дифференциальных уравнений, М.: Наука, 1978, 399 с.

[2] С. В. Хабиров, Групповая классификация систем Гамильтона, Динамика сплошной среды, Новосибирск, **44**, 1980, 139–146.

[3] С. В. Мелешко, Групповая классификация уравнений двумерных движений газа, ПММ., **58**, 4 (1994), 56–62.

[4] Yu. A. Chirkunov, Generalized Equivalence Transformations and Group Classification of Systems of Differential Equations, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, **53**, 2 (2012), 147–155, DOI:10.1134/S0021894412020010.

[5] Yu. A. Chirkunov, S. Yu. Dobrokhotov, S. B. Medvedev, and D. S. Minenkov, Exact Solutions of One-Dimentional Nonlinear Shallow-Water Equations Over Even and Sloping Bottoms, Theoretical and Mathematical Physics, **178**, 3 (2014), 278–299, DOI:10.1007/s11232-014-0143-4.

[6] Yu. A. Chirkunov, S. V. Nazarenko, S. B. Medvedev, and V. N. Grebenev. Invariant solutions for the nonlinear diffusion model of turbulence, Jourrnal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **47**, 18 (2014), 185501. DOI: 10.1088/1751- 8113/47/18/185501.

[7] B. D. Annin, N. F. Belmetsev, Yu. A. Chirkunov, Group analysis of equations dinamic transversely isotropic elastic model, Applied mathematics and mechanics, **78**, 5 (2014), 529–537. DOI:10.1016/j.jappmathmech.2015.03.013.

[8] Yu. A. Chirkunov, E. O. Pikmullina, Symmetry Properties and Solutions of Shallow Water Equations, Universal Journal of Applied Mathematics. HRPUB (USA), **2**, 1 (2-14), 10–23, DOI: 10.13189/ujam.2014.020103.

[9] Yu. A. Chirkunov, Nonlinear longitudinal oscillations of viscoelastic rod in Kelvin model, Applied mathematics and mechanics, **79**, 4 (2014).

[10] Ю. А. Чиркунов, С. В. Хабиров, Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды, Новосибирск, НГТУ, 2012, 659 с.

АЛГЕБРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ БИНАРНЫХ ИЗОЛИРУЮЩИХ ФОРМУЛ ДЛЯ ВЛОЖЕННЫХ ОТНОШЕНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Д. Ю. Емельянов*

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: dima-pavlyk@mail.ru

В работе описываются алгебры распределений бинарных изолирующих формул для полных 1-типов, структура которых представляется в виде вложенных отношений эквивалентности.

1 Предварительные сведения

Определение 3. [1, 4, 5, 6, 7, 8]. Пусть T — полная теория, $\mathcal{M} \models T$. Рассмотрим типы $p(x), q(y) \in S(\emptyset)$, реализуемые в $\mathcal{M}$, а также всевозможные (p,q)-*устойчивые* или (p,q)-*полуизолирующие* формулы $\varphi(x,y)$ теории T, т. е. формулы, для которых найдутся элементы $a \in M$, такие что $\models p(a)$ и $\varphi(a,y) \vdash q(y)$. Напомним, что если $\models p(a)$ и $\models \varphi(a,b)$ для (p,q)-полуизолирующей формулы $\varphi(x,y)$, то говорят, что *a полуизолирует b*. Определим для каждой такой формулы $\varphi(x,y)$ двухместное отношение $R_{p,\varphi,q} \rightleftharpoons \{(a,b) \mid \mathcal{M} \models p(a) \wedge \varphi(a,b)\}$. При условии $(a,b) \in R_{p,\varphi,q}$ пара (a,b) называется (p,φ,q)-*дугой*. Если $\varphi(a,y)$ — главная формула (над a), то (p,φ,q)-дуга (a,b) также называется *главной*.

Если $\varphi(x,y)$ является $(p \leftrightarrow q)$-*формулой*, т. е. одновременно (p,q)- и (q,p)-устойчивой, то множество $[a,b] \rightleftharpoons \{(a,b),(b,a)\}$ называется (p,φ,q)-*ребром*. Если (p,φ,q)-ребро $[a,b]$ состоит из главных (p,φ,q)- и (q,φ^{-1},p)-дуг, где $\varphi^{-1}(x,y)$ обозначает $\varphi(y,x)$, то $[a,b]$ называется *главным* (p,φ,q)-ребром.

*Данные исследования поддержаны грантом КН МОН РК № 0830/ГФ4.

Будем называть (p,φ,q)-дуги и (p,φ,q)-рёбра *дугами* и *рёбрами* соответственно, если из контекста ясно, о какой формуле идёт речь или если речь идёт о некоторой формуле $\varphi(x,y)$. Дуги (a,b), у которых пары (b,a) не являются дугами ни по каким (q,p)-формулам, будем называть *необращаемыми*

Определение 4. [1, 2]. Для типов $p(x), q(y) \in S(\emptyset)$ обозначим через $\mathrm{PF}(p,q)$ множество

$$\{\varphi(x,y) \mid \varphi(a,y) \text{ — главная формула,}$$

$$\varphi(a,y) \vdash q(y), \text{ где } \models p(a)\}.$$

Пусть $\mathrm{PE}(p,q)$ — множество пар $(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ формул из $\mathrm{PF}(p,q)$, таких что для любой (некоторой) реализации a типа p совпадают множества решений формул $\varphi(a,y)$ и $\psi(a,y)$.

Очевидно, что $\mathrm{PE}(p,q)$ является отношением эквивалентности на множестве $\mathrm{PF}(p,q)$. Заметим, что каждому $\mathrm{PE}(p,q)$-классу E соответствует либо главное ребро, либо необращаемая главная дуга, связывающая реализации типов p и q посредством любой (некоторой) формулы из E. Таким образом, фактор-множество $\mathrm{PF}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ представляется в виде дизъюнктного объединения множеств $\mathrm{PFS}(p,q)$ и $\mathrm{PFN}(p,q)$, где $\mathrm{PFS}(p,q)$ состоит из $\mathrm{PE}(p,q)$-классов, соответствующих главным рёбрам, а $\mathrm{PFN}(p,q)$ состоит из $\mathrm{PE}(p,q)$-классов, соответствующих необращаемым главным дугам.

Множества $\mathrm{PF}(p,p)$, $\mathrm{PE}(p,p)$, $\mathrm{PFS}(p,p)$ и $\mathrm{PFN}(p,p)$ обозначаются соответственно через $\mathrm{PF}(p)$, $\mathrm{PE}(p)$, $\mathrm{PFS}(p)$ и $\mathrm{PFN}(p)$.

Зафиксируем полную теорию T, не имеющую конечных моделей. Пусть $U = U^- \dot\cup \{0\} \dot\cup U^+$ — некоторый алфавит мощности $\geq |S(T)|$, состоящий из *отрицательных элементов* $u^- \in U^-$, *положительных элементов* $u^+ \in U^+$ и нуля 0. Как обычно, будем писать $u < 0$ для любого элемента $u \in U^-$ и $u > 0$ для любого элемента $u \in U^+$. Множество $U^- \cup \{0\}$ обозначается через $U^{\leq 0}$, а $U^+ \cup \{0\}$ — через $U^{\geq 0}$. Элементы множества U будем называть *метками*.

Рассмотрим инъективные *меточные функции*

$$\nu(p,q)\colon \mathrm{PF}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q) \to U,$$

$p(x), q(y) \in S(\emptyset)$, при которых классам из $\mathrm{PFN}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ соответствуют отрицательные элементы, а классам из $\mathrm{PFS}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ — элементы неотрицательные так, что значение 0 определяется лишь для $p = q$ и задаётся по формуле $(x \approx y)$, $\nu(p) \rightleftharpoons \nu(p,p)$. При этом будем считать, что $\rho_{\nu(p)} \cap \rho_{\nu(q)} = \{0\}$ для $p \neq q$ (где, как обычно, через ρ_f обозначается область значений функции f) и $\rho_{\nu(p,q)} \cap \rho_{\nu(p',q')} = \emptyset$, если $p \neq q$ и $(p,q) \neq (p',q')$. Любые меточные функции с указанными свойствами, а также семейства таких функций будем называть *правильными* и далее рассматривать только правильные меточные функции и их правильные семейства.

Через $\theta_{p,u,q}(x,y)$ будут обозначаться формулы из $\mathrm{PF}(p,q)$, представляющие метку $u \in \rho_{\nu(p,q)}$. Если тип p фиксирован и $p = q$, то формула $\theta_{p,u,q}(x,y)$ обозначается через $\theta_u(x,y)$.

Отметим, что если $\theta_{p,u,q}(x,y)$ и $\theta_{q,v,p}(x,y)$ — формулы, свидетельствующие о том, что для реализаций a и b типов p и q соответственно пары (a,b) и (b,a) являются главными дугами, то формула $\theta_{p,u,q}(x,y) \wedge \theta_{q,v,p}(y,x)$ свидетельствует о том, что $[a,b]$ является главным ребром. При этом *обратимой* метке u однозначно соответствует (неотрицательная) метка v и наоборот. Метки u и v будем называть *взаимно обратными* и обозначать через v^{-1} и u^{-1} соответственно.

Для типов $p_1, p_2, \ldots, p_{k+1} \in S^1(\emptyset)$ и множеств меток $X_1, X_2, \ldots, X_k \subseteq U$ обозначим через

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

множество, состоящее из всех меток $u \in U$, соответствующих формулам $\theta_{p_1,u,p_{k+1}}(x,y)$, которые для реализаций a типа p_1 и некоторых $u_1 \in X_1 \cap \rho_{\nu(p_1,p_2)}, \ldots, u_k \in X_k \cap \rho_{\nu(p_k,p_{k+1})}$ удовлетворяют условию

$$\theta_{p_1,u,p_{k+1}}(a,y) \vdash \theta_{p_1,u_1,p_2,u_2,\ldots,p_k,u_k,p_{k+1}}(a,y),$$

где

$$\begin{gathered}\theta_{p_1,u_1,p_2,u_2,\ldots,p_k,u_k,p_{k+1}}(x,y) \rightleftharpoons \\ \rightleftharpoons \exists x_2, x_3, \ldots, x_k(\theta_{p_1,u_1,p_2}(x,x_2) \wedge \theta_{p_2,u_2,p_3}(x_2,x_3) \wedge \ldots \\ \ldots \wedge \theta_{p_{k-1},u_{k-1},p_k}(x_{k-1},x_k) \wedge \theta_{p_k,u_k,p_{k+1}}(x_k,y)).\end{gathered}$$

Тем самым, на булеане $\mathcal{P}(U)$ множества U образуется *алгебра распределений бинарных изолирующих формул* с k-местными операциями

$$P(p_1, \cdot, p_2, \cdot, \ldots, p_k, \cdot, p_{k+1}),$$

где $p_1, \ldots, p_{k+1} \in S^1(\emptyset)$. Эта алгебра имеет естественное обеднение на любое семейство $R \subseteq S^1(\emptyset)$.

Очевидно, что биективно заменяя множество меток, мы получаем изоморфную алгебру. В частности, имеется *каноническая алгебра*, у которой метки представлены элементами

$$\bigcup_{p,q} \mathrm{PF}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q).$$

Тем не менее, мы будем использовать абстрактное множество меток U, отражающее знаки меток и проясняющее алгебраические свойства операций на $\mathcal{P}(U)$.

Заметим, что если хотя бы одно из множеств X_i не пересекается с $\rho_{\nu(p_i,p_{i+1})}$ и, в частности, если оно пусто, справедливо равенство

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1}) = \emptyset.$$

Отметим также, что если $X_i \not\subseteq \rho_{\nu(p_i,p_{i+1})}$ для некоторого i, то

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1}) =$$
$$= P(p_1, X_1 \cap \rho_{\nu(p_1,p_2)}, p_2, X_2 \cap \rho_{\nu(p_2,p_3)}, \ldots, p_k, X_k \cap \rho_{\nu(p_k,p_{k+1})}, p_{k+1})$$

На основании последнего равенства в дальнейшем при рассмотрении значений

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

будем предполагать, что $X_i \subseteq \rho_{\nu(p_i,p_{i+1})}$, $i = 1, \ldots, k$.

Если каждое множество X_i состоит лишь из одного элемента u_i, то в записи

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

вместо множеств X_i будем использовать элементы u_i и писать

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}).$$

По определению справедливо следующее равенство:

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1}) =$$
$$= \cup\{P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}) \mid u_1 \in X_1, \ldots, u_k \in X_k\}.$$

Таким образом, задание множества

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

сводится к заданию множеств $P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1})$. Отметим также, что для любого множества $X \subseteq \rho_{\nu(p,q)}$ имеет место $P(p, X, q) = X$.

Заметим, что если $u_i = 0$, то $p_i = p_{i+1}$ для непустых множеств
$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_i, 0, p_{i+1}, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1})$$
и при этом выполняются следующие соотношения:
$$P(p_1, 0, p_1) = \{0\},$$
$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_i, 0, p_{i+1}, u_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}) =$$
$$= P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_i, u_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}).$$

Если все типы p_i совпадают с типом p, то вместо записей
$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$
и
$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1})$$
будем писать $P_p(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ и $P_p(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ соответственно, а также $\lfloor X_1, X_2, \ldots, X_k \rfloor_p$ и $\lfloor u_1, u_2, \ldots, u_k \rfloor_p$. Будем также опускать индексы $\cdot_p$, если из контекста ясно, о каком типе p идет речь. При этом вместо формул $\theta_{p,u_1,p,u_2,\ldots,p,u_k,p}(x, y)$ будем писать $\theta_{u_1,u_2,\ldots,u_k}(x, y)$.

При наличии модели $\mathcal{M}_p$ группоид $\mathfrak{P}_{\nu(p)} \rightleftharpoons \langle \mathcal{P}(\rho_{\nu(p)}) \setminus \{\emptyset\}; \lfloor \cdot, \cdot \rfloor \rangle$, будучи *полуассоциативной (слева)* алгеброй, позволяет представить всевозможные операции $\lfloor \cdot, \cdot, \ldots, \cdot \rfloor$ термами сигнатуры $\lfloor \cdot, \cdot \rfloor$. В дальнейшем операцию $\lfloor \cdot, \cdot \rfloor$ будем также обозначать через $\cdot$ и использовать запись uv вместо $u \cdot v$. При этом в случае отсутствия полуассоциативности справа будем в записи $u_1 u_2 \ldots u_k$ предполагать следующую расстановку скобок: $(((u_1 \cdot u_2) \cdot \ldots) \cdot u_k)$.

Поскольку по выбору метки 0 для формулы $(x \approx y)$ справедливы равенства $X \cdot \{0\} = X$ и $\{0\} \cdot X = X$ для любого $X \subseteq \rho_{\nu(p)}$, группоид $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ имеет единичный элемент $\{0\}$ и, при выполнении свойства полуассоциативности справа, является моноидом. В этой системе для любых множеств $Y, Z \in \mathcal{P}(\rho_{\nu(p)}) \setminus \{\emptyset\}$ справедливо соотношение
$$Y \cdot Z = \bigcup \{yz \mid y \in Y, z \in Z\}. \tag{1}$$

Для семейства 1-типов $R \subset S(T)$ обозначим через I_R (в модели $\mathcal{M}$) множество
$$\{(a, b) \mid \mathrm{tp}(a), \mathrm{tp}(b) \in R \text{ и } a \text{ изолирует } b\},$$
а через SI_R (в модели $\mathcal{M}$) множество
$$\{(a, b) \mid \mathrm{tp}(a), \mathrm{tp}(b) \in R \text{ и } a \text{ полуизолирует } b\}.$$

Очевидно, что $I_R \subseteq \mathrm{SI}_R$ и на любом множестве реализаций типов из R отношения I_R и SI_R рефлексивны. Известно, что отношение полуизолированности на множестве кортежей произвольной модели транзитивно и, в частности, транзитивно любое отношение SI_R. Что касается отношения I_R, оно может быть как транзитивным, так и нетранзитивным:

Предложение 5. [1, 2] *Пусть $p(x)$ — полный тип полной теории T, имеющей модель $\mathcal{M}_p$, $\nu(p)$ — правильная меточная функция. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *отношение I_p (на множестве реализаций типа p в любой модели $\mathcal{M} \models T$) транзитивно;*

(2) *для любых меток $u_1, u_2 \in \rho_{\nu(p)}$ множество $P_p(u_1, u_2)$ конечно.*

Предложение 6. [1, 2] *Если $p, q \in R$ — главные типы, то $\rho_{\nu(p,q)} \cup \rho_{\nu(q,p)} \subseteq U^{\geq 0}$.*

Расширяя множество меток U положительными и отрицательными метками для полуизолирующих формул, а также *нейтральными* метками $u' \in U'$ (совмещающими необратимые дуги и главные ребра в множество решений полуизолирующих формул), получаем $\mathfrak{SI}_{\mathcal{R}}$-системы $\mathfrak{SI}$ для полуизолирующих формул, а также si-ранги, булевы операции на метках этих формул, отношения доминирования меток, соответствующие отношению $\vdash$, и $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-системы, включающие все указанные атрибуты [1, 9].

Предложение 7. [1, 10] *Для любой теории T, непустого семейства $R \subseteq S^1(\emptyset)$ изолированных типов и правильного семейства $\nu(R)$ меточных функций для полуизолирующих формул $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-система $\mathfrak{M}_{\nu(R)}$ состоит из положительных меток и нуля, и каждая метка u имеет дополнение $\bar{u}$, такое что $u \wedge \bar{u} = \emptyset$ и $u \vee \bar{u}$ является максимальным элементом. Если $R = \{p\}$, то моноид $\mathfrak{SI}_{\nu(p)} = \langle M_{\nu(R)}, \cdot \rangle$ порождается булевой алгеброй, для которой $u \vee \bar{u}$ соответствует изолирующим формулам типа p.*

Следствие 8. [1, 10] *Для любой ω-категоричной теории T, непустого семейства $R \subseteq S^1(\emptyset)$ и правильного семейства $\nu(R)$ меточных функций для полуизолирующих формул $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-система $\mathfrak{M}_{\nu(R)}$ конечна, состоит из положительных меток и нуля и каждая метка u имеет дополнение $\bar{u}$.*

Теорема 9. [1, 10] *Для любой $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-системы $\mathfrak{M}$, у которой каждая метка положительная или нулевая и при этом имеет дополнение, существует теория T, непустое семейство $R \subseteq S^1(\emptyset)$ изолированных* *типов и правильное семейство $\nu(R)$ меточных функций для полуизолирующих формул, такие что $\mathfrak{M}_{\nu(R)} = \mathfrak{M}$.*

Следствие 10. [1, 10] *Для любой конечной* $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$*-системы $\mathfrak{M}$, у которой любая метка положительна или нулевая и имеет дополнение, существует ω-категоричная теория T, непустое семейство $R \subseteq S^1(\emptyset)$ и правильное семейство $\nu(R)$ меточных функций для полуизолирующих формул такие, что $\mathfrak{M}_{\nu(R)} = \mathfrak{M}$.*

Замечание. [3] Отметим, что если $u_1, \ldots, u_n$ — все метки, связывающие реализации 1-типов p и q главными дугами, то для любой метки $u = u_{i_1} \vee \ldots \vee u_{i_k}$ её дополнением является метка $\bar{u} = u_{j_1} \vee \ldots \vee u_{j_l}$, где $\{i_1, \ldots, i_k\}, \{j_1, \ldots j_l\}$ — разбиение множества $\{1, \ldots, n\}$. Поэтому в следствиях 8 и 10 о наличии дополнений можно не упоминать.

Кроме того, поскольку в любой конечной $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-системе $\mathfrak{M}$ все метки сводятся к меткам изолирующих формул, эта система однозначно определяется своей подалгеброй распределений изолирующих формул.

Пример 11. [3] Если некоторая система $\mathcal{A}$ состоит из различных констант c_i, $i \in I$, и не имеет других сигнатурных символов, то для 1-типов $p_i(x)$, содержащих формулы $(x \approx c_i)$, и для типа $p_\infty(x) = \{\neg(x \approx c_i) \mid i \in I\}$, если множество I бесконечно, то алгебра изолирующих формул состоит из следующих меток:

1) 0 для формулы $(x \approx y)$; для связи реализации типа p_i с самой собой метка 0 обозначается через (i, i), $i \in I$, а для связи реализаций типа p_∞ с самими собой метка 0 обозначается через (∞, ∞) (если $|I| \geq \omega$);

2) (i, j) для формулы $(x \approx c_i) \wedge (y \approx c_j)$, связывающей реализацию c_i типа p_i с реализацией c_j типа p_j, $i \neq j$, $i, j \in I$;

3) (∞, j) для формулы $(x \approx x) \wedge (y \approx c_j)$, связывающей реализации типа p_∞ с реализацией c_j типа p_j, $j \in I$ (если $|I| \geq \omega$).

В алгебре $\mathfrak{A}$ распределений бинарных изолирующих формул имеет место равенство

$$P(p_{i_1}, (i_1, i_2), p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}, (i_k, i_{k+1}), p_{i_{k+1}}) = \{(i_1, i_{k+1})\}.$$

При замене в левой части этого равенства каких-то из типов p_{i_j} на другие типы p_{i_l} правая часть оказывается непустой (и равной $\{0\}$) только если все типы p_{i_j} совпадают друг с другом и одновременно меняются снова на совпадающие типы. При замене в левой части данного равенства каких-то из типов p_{i_j} на p_∞ правая часть оказывается непустой (и равной $\{(\infty, i_k)\}$ или $\{(\infty, \infty)\}$) лишь если на тип p_∞ заменяются типы $p_{i_1}, \ldots, p_{i_s}$ для $s \leq k$, метки $(i_1, i_2), \ldots, (i_{s-1}, i_s)$ заменяются на 0, а метка (i_s, i_{s+1}) — на (∞, i_{s+1}).

Если множество I конечно, то алгебра $\mathfrak{A}$ остаётся той же самой независимо от обогащений системы $\mathcal{A}$, сохраняющих её носитель A.

2 Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для теорий с отношениями эквивалентности

Рассмотрим отличное от равенства отношение эквивалентности E на множестве реализаций некоторого полного 1-типа $p(x)$ с изолирующими формулами, исчерпывающимися следующим списком: $(a \approx y)$ и $E(a, y) \wedge \neg(a \approx y)$, где $a \models p$, а также $\varphi_0(x) \wedge \neg E(a, x)$, если $p(x)$ — изолированный тип с изолирующей формулой $\varphi_0(x)$. Заметим, что указанному условию удовлетворяет любая транзитивная теория отношения эквивалентности E, а также любая теория отношения эквивалентности E с одноместными предикатами, сохраняющими классы эквивалентности.

Для указанного отношения E введем две основные характеристики: λ_1 — мощность каждого E-класса, λ_2 — число E-классов. В зависимости от этих характеристик будет получаться та или иная таблица Кэли алгебры распределения бинарных изолирующих формул $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$.

Определение 12. Для произвольного значения $\lambda_1 \in (\omega \setminus \{0, 1\}) \cup \{\infty\}$ обозначим через $\mathfrak{A}_{\lambda_1}$ алгебру $\langle A_{\lambda_1}; *\rangle$ с носителем $A_{\lambda_1} = \mathcal{P}(\{0, 1\})$, задаваемую следующей таблицей:

$*$	0	1
0	$\{0\}$	$\{1\}$
1	$\{1\}$	$\{0\}$ при $\lambda_1 = 2$, $\{0,1\}$ при $\lambda_1 > 2$

Замечание. Алгебра $\mathfrak{A}_{\lambda_1}$ соответствует алгебре $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$, если $\lambda_2 = 1$ или $p(x)$ — неглавный тип (в последнем случае $\lambda_2 = \infty$). При этом метка 1 используется для обозначения множества формул, представляемых формулой $E(a, y) \wedge \neg(a \approx y)$.

Определение 13. Для произвольного значения $\lambda_1 \in (\omega \setminus \{0, 1\}) \cup \{\infty\}$ и $\lambda_2 \in (\omega \setminus \{0, 1\}) \cup \{\infty\}$ обозначим через $\mathfrak{A}_{\lambda_1,\lambda_2}$ алгебру $\langle A_{\lambda_1,\lambda_2}; *\rangle$ с носителем $A_{\lambda_1,\lambda_2} = \{0, 1, 2\}$, задаваемую следующей таблицей:

$*$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{0\}$ при $\lambda_1 = 2$, $\{0{,}1\}$ при $\lambda_1 > 2$	$\{2\}$
2	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{0,1\}$ при $\lambda_2 = 2$; $\{0,1,2\}$ при $\lambda_2 > 2$

Замечание. Алгебра $\mathfrak{A}_{\lambda_1,\lambda_2}$ соответствует алгебре $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$, если $\lambda_2 \geq 2$ и $p(x)$ — главный тип. При этом метка 1 используется для обозначения множества формул, представляемых формулой $E(a,y)\wedge\neg(a \approx y)$, а метка 2 — для обозначения множества формул, представляемых формулой $\varphi_0(x) \wedge \neg E(a,x)$.

В силу замечаний 2 и 2 справедлива следующая теорема.

Теорема 14. *Пусть $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ — алгебра распределений бинарных изолирующих формул теории T с отношением эквивалентности E на множестве реализаций типа p с изолирующими формулами, исчерпывающимися следующим списком: $(a \approx y)$ и $E(a,y) \wedge \neg(a \approx y)$, где $a \models p$, а также $\varphi_0(x) \wedge \neg E(a,x)$, если $p(x)$ — изолированный тип с изолирующей формулой $\varphi_0(x)$. Тогда алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ задается одной из следующих алгебр: $\mathfrak{A}_{\lambda_1}$, $\mathfrak{A}_{\lambda_1,\lambda_2}$.*

3 Алгебры распределений бинарных изолирующих формул теорий с конечными (бесконечными) семействами вложенных отношений эквивалентности

В этом разделе мы обобщим Теорему 14 для последовательности вложенных отношений эквивалентности.

Рассмотрим последовательность вложенных отношений эквивалентности $E_k \subset E_{k+1}$ (или $E_{k+2} \subset E_{k+1}$, в зависимости от того, возрастающие или убывающие эквивалентности рассматриваются). Для каждой пары (E_k, E_{k+1}) (соответственно (E_{k+1}, E_k)) введем характеристики: λ_{k+1} — число E_k-классов, содержащихся в E_{k+1}-классе (E_{k+1}-классов, содержащихся в E_k-классе). Используя эти характеристики, составим таблицы Кэли.

Определение 15. Для произвольных значений $n \in \omega$ и $\lambda_k \in (\omega\setminus\{0,1\})\cup\{\infty\}$, $k \in \{1,\ldots,n\}$, обозначим через $\mathfrak{B}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$ алгебру $\langle B_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}; *\rangle$ с носителем $B_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} = \mathcal{P}(\{0,1,2\ldots,n\}) \setminus \{\emptyset\}$, задаваемую следующей таблицей:

$*$	0	1	2	$\ldots$	n
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\ldots$	$\{n\}$
1	$\{1\}$	$\{0\}$ при $\lambda_1 = 2$, $\{0,1\}$ при $\lambda_1 > 2$,	$\{2\}$	$\ldots$	$\{n\}$
2	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{0,1\}$ при $\lambda_2 = 2$; $\{0,1,2\}$ при $\lambda_2 > 2$;	$\ldots$ $\ldots$	$\{n\}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
n	$\{n\}$	$\{n\}$	$\{n\}$	$\ldots$	$\{0,1,\ldots,n-1\}$ при $\lambda_n = 2$; $\{0,1,\ldots,n\}$ при $\lambda_n > 2$;

Очевидно, что $\mathfrak{B}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \subset \mathfrak{B}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\lambda_{n+1}}$.

Положим $\mathfrak{B}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\ldots} \rightleftharpoons \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathfrak{B}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}}$.

Замечание. Алгебра $\mathfrak{B}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$ соответствует алгебре $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$, где структура неглавного типа p состоит из вложенных отношений эквивалентности с характеристиками $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, λ_1 — мощность каждого E_1-класса. При этом метка 1 используется для обозначения множества формул, представляемых формулой $E_1(a,y) \wedge \neg(a \approx y)$, а каждая метка $k > 1$ — для обозначения множества формул, представляемых формулой $E_k(a,y) \wedge \neg E_{k-1}(a,y)$.

В силу замечания 3 справедлива следующая теорема.

Теорема 16. *Пусть $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ — алгебра распределений бинарных изолирующих формул теории T с последовательно вложенными отношениями эквивалентности $E_1,\ldots,E_n$, $E_{k-1} \subset E_k$, на множестве реализаций неглавного типа p с изолирующими формулами, исчерпывающимися следующим списком: $(a \approx y)$, $E_1(a,y) \wedge \neg(a \approx y)$, $E_k(a,y) \wedge \neg E_{k-1}(a,y)$, где $a \models p$. Тогда алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ задается некоторой алгеброй $\mathfrak{B}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$.*

Замечание. Алгебра $\mathfrak{B}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\ldots}$ соответствует алгебре $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$, где структура типа p состоит из вложенных отношений эквивалентности с характеристиками $\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\ldots$, λ_1 — мощность каждого E_1-класса. При этом, как в Замечании 3, метка 1 используется для обозначения множества формул, представляемых формулой $E_1(a,y) \wedge \neg(a \approx y)$, а каждая метка $k > 1$ — для обозначения множества формул, представляемых формулой $E_k(a,y) \wedge \neg E_{k-1}(a,y)$.

На основании замечания 3 имеет место следующая теорема.

Теорема 17. *Пусть $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ — алгебра распределений бинарных изолирующих формул теории T с последовательно вложенными отношениями эквивалентности $E_1, \ldots, E_n, \ldots$: $E_{k-1} \subset E_k$, на множестве реализаций типа p с изолирующими формулами, исчерпывающимися следующим списком: $(a \approx y)$, $E_1(a, y) \wedge \neg(a \approx y)$, $E_k(a, y) \wedge \neg E_{k-1}(a, y)$, где $a \models p$. Тогда алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ задается некоторой алгеброй $\mathfrak{B}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\ldots}$.*

Определение 18. Для произвольных значений $n \in \omega$ и $\lambda_k \in (\omega \setminus \{0, 1\}) \cup \{\infty\}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, обозначим через $\mathfrak{C}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\ldots}$ алгебру $\langle C_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}; * \rangle$ с носителем $C_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\ldots} = \mathcal{P}(\{0, 1, 2 \ldots, n\}) \setminus \{\emptyset\}$, задаваемую следующей таблицей:

$*$	0	1	2	$\ldots$	n	$\ldots$
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\ldots$	$\{n\}$	$\ldots$
1	$\{1\}$	$\omega \setminus \{1\}$ при $\lambda_1 = 2$, ω при $\lambda_1 > 2$	$\{1\}$	$\ldots$	$\{1\}$	$\ldots$ $\ldots$
2	$\{2\}$	$\{1\}$	$\omega \setminus \{1, 2\}$ при $\lambda_2 = 2$; $\omega \setminus \{1\}$ при $\lambda_2 > 2$;	$\ldots$ $\ldots$	$\{n\}$	$\ldots$ $\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
n	$\{n\}$	$\{1\}$	$\{n\}$	$\ldots$	$\omega \setminus \{1, \ldots, n\}$ при $\lambda_n = 2$; $\omega \setminus \{1, \ldots, n-1\}$ при $\lambda_n > 2$;	$\ldots$ $\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Замечание. Алгебра $\mathfrak{C}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\ldots}$ соответствует алгебре $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$, где структура типа p состоит из вложенных отношений эквивалентности с характеристиками $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$. При этом каждая метка $k \geq 1$ используется для обозначения множества формул, представляемых формулой $E_k(a, y) \wedge \neg E_{k+1}(a, y)$, $a \models p$.

В силу замечания 3 справедлива следующая теорема.

Теорема 19. *Пусть $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ — алгебра распределений бинарных изолирующих формул теории T с последовательно вложенными отношениями эквивалентности $E_1, \ldots, E_n, \ldots$: $E_{k+1} \subset E_k$, на множестве реализаций типа p с изолирующими формулами, исчерпывающимися следующим списком: $(a \approx y)$, $E_k(a, y) \wedge \neg E_{k+1}(a, y)$, где $a \models p$. Тогда алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ задается некоторой алгеброй $\mathfrak{C}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\ldots}$.*

Список литературы

[1] S. V. Sudoplatov, Classification of Countable Models of Complete Theories, Novosibirsk, NSTU, 2014.

[2] I. V. Shulepov, S. V. Sudoplatov, Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory, Siberian Electronic Mathematical Reports, **11** (2014), 380–407.

[3] Д. Ю. Емельянов, Б. Ш. Кулпешов, С. В. Судоплатов, Алгебры распределений бинарных формул в счетно категоричных слабо o-минимальных структурах, статья сдана в журнал “Алгебра и логика”, 2015, 23 с.

[4] A. Pillay, Countable models of stable theories, Proc. Amer. Math. Soc, **89**, 4 (1983), 666–672.

[5] B. S. Baizhanov, Orthogonality of one types in weakly o-minimal theories, Algebra and Model Theory 2, Collection of papers, eds.: A. G. Pinus, K. N. Ponomaryov, Novosibirsk : NSTU, 1999, 5–28.

[6] B. S. Baizhanov, B. Sh. Kulpeshov, On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories, Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference, eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono, Singapore, World Scientific: 2006, 31–40.

[7] S. V. Sudoplatov, Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories, J. Math. Sciences, **169**, 5 (2010), 680–695.

[8] B. S. Baizhanov, S. V. Sudoplatov, V. V. Verbovskiy, Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation, Siberian Electronic Mathematical Reports, **9** (2012), 161–184.

[9] S. V. Sudoplatov, Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory, Siberian Electronic Mathematical Reports, **11**, 2014, 408–433.

[10] S. V. Sudoplatov, Algebras of distributions for binary semi-isolating formulas for families of isolated types and for countably categorical theories, International Mathematical Forum, **9**, 21 (2014), 1029–1033.

К ПРОБЛЕМЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ ЛОГИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ШКОЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

С. С. Гончаров

Институт математики
им. С. Л. Соболева, СО РАН
пр. Академика Коптюга, 4
Новосибирск 630090, Россия
e-mail: gonchar@math.nsc.ru

Б. Н. Дроботун

Павлодарский государственный
университет им. С. Торайгырова
ул. Ломова, 64,
г. Павлодар, 140008, Казахстан
e-mail: drobotun.nina@mail.ru

А. А. Никитин

Учреждение Российской академии образования,
“Институт педагогических исследований одаренности детей”,
ул. Приморская, д. 22, г. Новосибирск, 630098, Россия
e-mail: drobotun.nina@mail.ru

Данная работа является неполной версией одноименного пленарного доклада, представленного вторым автором на 11–ю Международную летнюю школу–конференцию “Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры”, Эрлагол-2015. Она включает в себя лишь вводную часть этого доклада, касающуюся вопросов научно-методологического обоснования его основной части, отраженной в материалах компьютерного сопровождения. Эти материалы, в связи с их большим объемом (более 50 страниц), обилием схем, таблиц, графиков, диаграмм и демонстрационных примеров, отражающих принципы, методы и технологии универсальной применимости, в предлагаемой работе не приводятся. Желающие получить полную версию нашего доклада и ознакомиться с материалами компьютерного сопровождения могут обратиться по адресу: drobotun.nina@mail.ru.

Давая аннотационную характеризацию структуры и содержания этих материалов, следует заметить, что они представляют результат опыта наполнения конкретным содержанием основных положений нашего пленарного доклада “Логические курсы в образовании”, сделанного на международной конференции “Мальцевские чтения-2011”. Расширенные версии этого доклада были опубликованы в России в работах [1, 2] и в Казахстане в работах [3, 4]. В этих работах были изложены наши взгляды на проблему включения логической компоненты в естественно-математическую подготовку учащихся средних общеобразовательных школ и были предложены возможные подходы к ее решению. В них были сформулированы также цели и задачи обучения элементам математической логике в средней школе и предложены варианты возможного содержания обучения. Но проблемы выявления механизмов и принципов, регламентирующих отбор содержания (из многообразия направлений современных логико-алгебраических наук) и адаптации этого содержания до уровня, допускающего возможности его выражения средствами школьной математики, в этих работах не затрагивались.

Анализируя в докладе “Логические курсы в образовании” попытки введения логической и теоретико-множественной составляющих в школьную математику, авторы отметили, что эти попытки можно отнести, в основном:

- или к попыткам критического пересмотра понятийно-терминологической базы и системы символических обозначений языка школьной математики с целью приведения его в наиболее полное соответствие с языком современной математики (как это было сделано в рамках реформы школьного математического образования 70-х годов XX века);

- или к попыткам описания этого языка по схеме построения языка прикладного исчисления предикатов с целью последующего использования его выразительных возможностей в логико-математической практике.

Попытки первого толка привели, как известно, к провалу реформы, второго — к выписыванию громоздких символических выражений, труднодоступных (без соответствующей подготовки) для содержательного восприятия и практически бесполезных для дальнейшего использования.

Одним из упорно бытующих последствий провала реформы явилось более чем осторожное (скорее негативное) отношение учителей нашего времени к обязательности присутствия формальной составляющей в системе естественно-математических знаний и необходимости ее освоения в рамках школьной математики.

Тем не менее, по нашему мнению, “логическая реконструкция” школьной математики должна предполагать, в первую очередь, непосредственное изучение синтаксической и семантической составляющих формальных языков исчисления высказываний и исчисления предикатов и функций на основе использования традиционного содержания и языка школьной математики для разработки примеров демонстрационного сопровождения, а также систем упражнений и задач для формирования соответствующих знаний, умений и навыков.

В связи с этим, уместно подчеркнуть, что изучение морфологии и синтаксиса естественных языков производится, в сущности, с формальных позиций, как изучение общепринятых правил и законов построения, соединения и формоизменения тех синтаксических конфигураций, посредством которых реализуются описательные функции этих языков и которые образуют основу для языкового общения. При этом, в качестве метаязыка, посредством которого изучается грамматика естественных (родных языков), используются обычно эти же самые языки, а в качестве примеров, демонстрирующих правила построения и анализа правильных конфигураций и законов их соединения, берутся конкретные языковые образования, имеющие определенные содержательный смысл и значение.

Таким образом, предлагаемый нами путь логической реконструкции генетически обусловлен.

В качестве основной задачи, которая решалась в данной работе, явилась задача выявления механизмов и принципов педагогического отражения в школьную математику научно-теоретических и идейно-методологических оснований современной теории алгебраических систем. Алгебраические системы, как базовые объекты семантики формальных языков классических исчислений математической логики, представляют собой идеальное поля демонстрационного развертывания выразительных возможностей этих языков, а также их алгебраических и алгоритмических свойств.

С другой стороны, содержание школьных математических дисциплин аккумулирует в себе достаточные возможности для формирования представлений о концепции алгебраической системы.

В процессе решения этой задачи был сформулирован один из таких принципов, который, в соответствии с его содержательной сущностью, мог бы быть назван принципом методологической обусловленности педагогического отражения.

Характеризуя этот принцип, отметим, что индивидуальные особенности, свойственные структурным свойствам объектов реальной действительности и специфика их отражения налагают, в рамках той науки предметом изучения которой они являются, печать определенного своеобразия на формирование системы методов, ориентированных на выявление знаний об этих объектах. Многие из этих методов (синтезирования новых знаний) приобретают, в дальнейшем, для данной науки и ее педагогических отражений характер универсальной применимости.

Тем не менее, процессуальная составляющая каждого из этих методов, облаченная в "доспехи" терминологии и символики, свойственной различным разделам учебной дисциплины, педагогически отражающей эту науку, призванная к оперированию объектами конкретной, но всякий раз новой природы, даже после ее многократного воспроизведения, не будучи выявленной в чистом виде и зафиксированной в формах бесстрастных конструкций и схем, не обретет статуса внутренней знаниевой структуры.

Следование принципу методологической обусловленности педагогического отражения той или иной системы математических знаний в содержание соответствующей учебной дисциплины предполагает выделение, констатацию и актуализацию методологических средств, сопряженных с процессами синтезирования этих знаний, выявления внутренних механизмов их развития и системной организации.

Раскрывая дидактические возможности принципа методологической обусловленности педагогического отражения, необходимо подчеркнуть, что следование этому принципу, уже при первых проявлениях знаниеобразующих возможностей того или иного метода, предполагает выявление (и внедрение в содержание соответствующей дисциплины) схем осуществления мыслительных процедур, свойственных отмеченным проявлениям, и использование дальнейшего материала этой дисциплины в качестве поля развертывания для демонстрации познавательных возможностей, как самого метода, так и обогащения этих возможностей за счет его сочетания с другими методами научного познания.

В материалах компьютерного сопровождения был выделен ряд направлений алгебры и математической логики, педагогическое отражение которых в содержание школьного логического образования в наиболее показательной форме демонстрирует дидактические возможности принципа методологической обусловленности и предложены возможные подходы к отражению этапов их адаптации до уровня школьной математики, начиная с научно-теоретических оснований до уровня разработки соответствующих систем задач, упражнений и заданий творческого характера.

А именно, в качестве базовых направлений и объектов педагогического отражения были определены:

(1). Множества, алгебраические операции и отношения (предикаты), как структурные составляющие понятия алгебраической системы;

(2). Синтаксическая и семантическая составляющие формальных языков исчисления высказываний и исчисления предикатов и средства выявления и использования их выразительных возможностей;

(3). Индуктивные и дедуктивные методы;

(4). Метод формальных аксиоматических теорий;

(5). Концепции алгебраической системы и изучения алгебраических систем с точностью до изоморфизма;

(6). Конкретные алгебраические системы: алгебры множеств, высказываний и событий, а также технологии выявления и использования взаимосвязей между ними в логико-алгебраической практике.

Выбор этих направлений и объектов был обусловлен:

- универсальностью применения языков логических исчислений, методов и инструментально-технологических средств методологического потенциала логико-алгебраических наук в естественно-математическом познании;
- местом и значимостью понятий множества, высказывания и события в школьной математике;
- реалиями и запросами современной информационной цивилизации.

Научно-теоретические основания этих направлений в формах, использующих преимущественно материал школьных математических дисциплин разработаны авторами доклада “К проблеме определения содержания логической составляющей школьного математического образования” в книгах [5]–[9] и статьях [1]–[4]; [10]–[16].

Список литературы

[1] С. С. Гончаров, Б. Н. Дроботун, А. А. Никитин, К проблеме формирования и развития фундаментальных основ логического образования в средней общеобразовательной школе I, Педагогические за-

метки. Научный журнал учреждения российской академии образования “Институт педагогических исследований одаренности детей”, Новосибирск, **3**, 2 (2010), 21–35.

[2] С. С. Гончаров, Б. Н. Дроботун, А. А. Никитин, К проблеме формирования и развития фундаментальных основ логического образования в средней общеобразовательной школе II, Педагогические заметки. Научный журнал учреждения российской академии образования “Институт педагогических исследований одаренности детей”, Новосибирск, **4**, 2 (2011), 21–38.

[3] С. С. Гончаров, Б. Н. Дроботун, А. А. Никитин, О логико-алгебраической составляющей математического образования (I), Вестник ЕНУ им. Гумилева, 4 (2012), 15–22.

[4] С. С. Гончаров, Б. Н. Дроботун, А. А. Никитин, О логико-алгебраической составляющей математического образования (II), Вестник ЕНУ им. Гумилева, 4 (2012), 23–31.

[5] С. С. Гончаров, Б. Н. Дроботун, Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшем учебном заведении, Моногр, Новосибирск: изд-во НГУ, 2007, 251 с.

[6] С. С. Гончаров, Б. Н. Дроботун, А. А. Никитин, Алгебраические и алгоритмические свойства логических исчислений, Часть I, Моногр, Новосибирск: изд-во НГУ, 2008, 221 с.

[7] С. С. Гончаров, Б. Н. Дроботун, А. А. Никитин, Алгебраические и алгоритмические свойства логических исчислений, Часть II, Моногр., Новосибирск: изд-во НГУ, 2008, 376 с.

[8] С. С. Гончаров, Б. Н. Дроботун, А. А. Никитин, Основания дидактики обучения логико-алгебраическим дисциплинам в высшей школе. Часть I, Научно-теоретические и идейно-методологические предпосылки. Моногр, Новосибирск: изд-во Учреждения Российской академии образования “Институт педагогических исследований одаренности детей”, 2011, 275 с.

[9] Б. Н. Дроботун, Методологическое введение в алгебру. Часть I, Учебное пособие, Павлодар: Кереку, 2014, 189 с.

[10] С. С. Гончаров, Б. Н. Дроботун, А. А. Никитин, О научно-теоретических предпосылках понятий “Множество”, “Высказывание” и “Событие” школьного курса математики (I), Педагогические заметки,

Научный журнал учреждения Российской академии образования “Институт педагогических исследований одаренности детей”, Новосибирск, **6**, 3 (2013), 3–20.

[11] С. С. Гончаров, Б. Н. Дроботун, А. А. Никитин, О научно-теоретических предпосылках понятий “Множество”, “Высказывание” и “Событие” школьного курса математики (II), Педагогические заметки, Научный журнал учреждения Российской академии образования “Институт педагогических исследований одаренности детей”, Новосибирск, **6**, 4 (2013), 3–15.

[12] С. С. Гончаров, Б. Н. Дроботун, А. А. Никитин, Отношения по направлению и кванторные операции над предикатами (I), Педагогические заметки, Научный журнал учреждения Российской академии образования “Институт педагогических исследований одаренности детей”, Новосибирск, **6**, 3 (2013), 21–32.

[13] С. С. Гончаров, Б. Н. Дроботун, А. А. Никитин, Отношения по направлению и кванторные операции над предикатами (II), Педагогические заметки, Научный журнал учреждения Российской академии образования “Институт педагогических исследований одаренности детей”, Новосибирск, **6**, 4 (2013), 16–31.

[14] С. С. Гончаров, Б. Н. Дроботун, А. А. Никитин, О постановке и проведении педагогического эксперимента процессе обучения логико-алгебраическим дисциплинам (I), Вестник ПГУ, Серия физико-математическая, 2 (2013), 14–26.

[15] С. С. Гончаров, Б. Н. Дроботун, А. А. Никитин, О постановке и проведении педагогического эксперимента процессе обучения логико-алгебраическим дисциплинам (II), Вестник ПГУ, Серия физико-математическая, 2 (2013), 26–38.

[16] С. С. Гончаров, Б. Н. Дроботун, А. А. Никитин, К вопросу выявления содержательной сущности принципа абстрактности, Педагогические заметки, Новосибирск: ИПИО РАО, **7**, 1 (2014), 3–16.

О ГРУППЕ АВТОМОРФИЗМОВ КОЛЬЦА ZS_4

Е. М. Грачев **А. М. Попова**

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: ampopova@ngs.ru

Для изучения целочисленного группового кольца ZS_4 используем, как и в прежних работах, например, в [1], теорию представлений. Известно, что S_4 имеет пять неприводимых неэквивалентных представлений $T_1(S_4)$, $T_2(S_4)$, $T_3(S_4)$, $T_4(S_4)$, $T_5(S_4)$ степеней, соответственно, $n_1 = n_2 = 1$, $n_3 = 2$, $n_4 = n_5 = 3$. Составим следующее клеточно-диагональное представление

$$D(S_4) = \{diag(T_1(g), T_2(g), T_3(g), T_4(g), T_5(g)), g \in S_4\}$$

Для целочисленной линейной оболочки $Z[D(S_4)]$ матричной группы $D(S_4)$ легко показать, что $ZS_4 \cong Z[D(S_4)]$. Это позволяет все дальнейшие рассуждения проводить для клеточно-диагонального кольца $Z[D(S_4)]$. Будем считать все представления целочисленными, так как в каждом классе неприводимых неэквивалентных представлений группы S_4 существует целочисленное представление.

Как показано в [2], для групп S_n при любом целом n справедлива гипотеза Цассенхауза. Это означает, что любой нормализованный автоморфизм φ кольца ZS_4 представим в виде $\varphi = \tau_u\sigma$, где $\sigma \in AutS_4$, а τ_u — сопряжение кольца ZS_4 единицей u кольца QS_4. Поскольку группа S_4 совершенна, отсюда следует, что для кольца $Z[D(S_4)]$ любой нормализованный автоморфизм есть сопряжение единицей кольца $Q[D(S_4)]$. На самом деле можно искать сопрягающие матрицы в группах $GL_n(Z)$, $n = 2, 3$.

Лемма 1. *Пусть $T(S_4)$ — неприводимое представление группы степени 3 или 2 над кольцом целых чисел. Если сопряжение матрицей $s \in GL_n(Q)$ задаёт автоморфизм кольца $Z[D(S_4)]$, то $s \in GL_n(Z)$.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что матрицу s можно считать целочисленной со взаимно простыми элементами. Действительно, если

$s \in GL_n(Q)$, то $s = \frac{p}{q}s'$, где $s' \in M_n(Z)$ и элементы s' взаимно просты. Тогда для любой матрицы a имеем $a^s = \frac{q}{p}s'^{-1}a\frac{p}{q}s' = a^{s'}$.

Положим $n = 3$. Будем доказывать лемму от противного. Предположим, что $s \in M_3(Z)$ и $|s| \neq \pm 1$. Пусть $0 \neq m \in N$ — минимальное число со свойством $me_{ij} \in Z[D(S_4)]$, $i, j = 1, 2, 3$. Так как сопряжение матрицей s задаёт автоморфизм кольца $Z[D(S_4)]$, то $(me_{ij})^s$ является целочисленной. Обозначим $s = (s_{ij})$, присоединенную матрицу $s^* = (S_{ji})$.

$$(me_{ij})^s = m\frac{1}{|s|}(s_{uj}S_{vi}), i, j = 1, 2, 3; u, v = 1, 2, 3.$$

Пусть $q = (S_{ji}, i, j = 1, 2, 3)$, то есть $s^* = qs'$, где элементы s' взаимно просты. Тогда $|s^*| = q^3|s'|$, откуда $|s^2| \vdots q^3$. Если $|s| = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, $q = p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k}$, то из последнего условия следует, что $2\alpha_i \geq 3\beta_i$, откуда $\alpha_i > \beta_i$. Так как все s_{ij} взаимно просты, $\forall p_i (i = 1, \ldots, k)$ найдётся элемент $s_{k_0 l_0}$, такой что p_i его не делит. С другой стороны, так как q — наибольший общий делитель элементов матрицы s^*, найдётся такой элемент $S_{t_0 j_0}$, что $S_{t_0 j_0} \vdots p_i^{\beta_i}$ и $p_i^{\beta_i + 1}$ этот элемент не делит. Поскольку матрица $(me_{ij})^s$ должна быть целочисленной, отсюда следует, что $m \vdots p_i^{\alpha_i - \beta_i}$ т. е. m делится на все простые множители определителя $|s|$.

Удобным инструментом исследования колец вида $Z[T(G)]$, где $T(G)$ — неприводимое представление группы G является аддитивный базис таких колец специального нижнетреугольного вида. Для получения такого базиса матрицы $T(g)$ “растягиваются” в столбцы и базис из этих столбцов целочисленными элементарными преобразованиями столбцов приводится к нижнетреугольному виду (см. [3]). Аддитивные базисы колец $T_4(S_4)$ и $T_5(S_4)$ приводятся к следующему нижне-треугольному виду:

$$\begin{matrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{matrix} \tag{1}$$

В [3] показано, что $m = [1, q_2, \ldots, q_9]$, где $q_i, i = 1, \ldots, 9$ — диагональные элементы нижнетреугольного вида, к которому приводится аддитивный базис кольца $Z[S_4)]$. Из вида (1) следует, что $m = 2$, значит определитель сопрягающей матрицы может быть только степенью числа 2. Так как элементы сопрягающей матрицы взаимно просты, то эта матрица приводится к следующему каноническому виду:

$$s = u \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^k & \\ & & 2^t \end{pmatrix} v,$$

где u, v — унимодулярные матрицы над кольцом целых чисел, т. е. с определителями, равными ± 1.

$$(Z[T(S_4)])^s = v^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^{-k} & \\ & & 2^{-t} \end{pmatrix} u^{-1}(Z[T(S_4)])u \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^k & \\ & & 2^t \end{pmatrix} v$$

Понятно, что если заменить $T(S_4)$ эквивалентным представлением $u^{-1}(T(S_4))u$, то группа автоморфизмов не изменится. Поэтому можем считать, что $u^{-1}(Z[T(S_4)])u$ имеет аддитивный базис (1).

Рассмотрим матрицу базиса $b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^{-k} & \\ & & 2^{-t} \end{pmatrix} b_2 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^k & \\ & & 2^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^{t-k} \\ 2^{-t} & 0 & 0 \end{pmatrix} = a$$

Прямым вычислением убедимся в том, что матрица $v^{-1}av$ не является целочисленной.

Пусть $v_{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_4 & v_5 & v_6 \\ v_7 & v_8 & v_9 \end{pmatrix}$, тогда

$$v = \pm \begin{pmatrix} v_5v_9 - v_6v_8 & -(v_2v_9 - v_3v_8) & v_2v_6 - v_3v_5 \\ -(v_4v_9 - v_6v_7) & v_1v_9 - v_3v_7 & -(v_1v_6 - v_3v_4) \\ v_4v_8 - v_5v_7 & -(v_1v_8 - v_2v_7) & v_1v_5 - v_2v_4 \end{pmatrix}$$

$$a^v = \pm \begin{pmatrix} v_3 2^{-t} & v_1 2^k & v_2 2^{t-k} \\ v_6 2^{-t} & v_4 2^k & v_5 2^{t-k} \\ v_9 2^{-t} & v_7 2^k & v_8 2^{t-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_5v_9 - v_6v_8 & & \\ -(v_4v_9 - v_6v_7) & * & \\ v_4v_8 - v_5v_7 & & \end{pmatrix}$$

Отсюда получается, что должны быть целыми числа

$$v_3 2^{-t}(v_5v_9 - v_6v_8), -v_3 2^{-t}(v_2v_9 - v_3v_8), v_3 2^{-t}(v_2v_6 - v_3v_5).$$

Поскольку хотя бы одна из скобок не делится на 2, получаем $v_3 \vdots 2^t$. Аналогично, $v_6 \vdots 2^t$ и $v_9 \vdots 2^t$. Пришли к противоречию с унимодулярностью матрицы v, откуда и следует, что матрица a^v не является целочисленной. Значит, предположение о том, что $|s| \neq \pm 1$ неверно. Тем самым лемма доказана для $n = 3$. Аналогичное доказательство для $n = 2$. □

Описание алгоритма

В силу справедливости гипотезы Цассенхауза для группы S_4 и леммы 1 будем искать группу матриц вида $diag(1, 1, v, y, z)$, сопряжение которыми задаёт автоморфизм кольца $Z[D(S_4)]$.

Прежде всего заметим, что, как показано в [1], существуют минимальные с таким свойством числа $0 \neq m \in N$, такие что

$$diag(0, \ldots, 0, m_i Z[T_i(S_4)], 0, \ldots 0) \subset Z[D(S_4)] \tag{2}$$

В нашем случае $m_1 = m_2 = 24$, $m_3 = 12$, $m_4 = m_5 = 8$.

Напомним определение гомоморфизма Минковского:

$$\varphi_m : GL_n(Z) \longrightarrow GL_n(Z_m)$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} K_{12} &= \{diag(1, 1, Ker\varphi_{12}, 1, 1)\}\,; \\ K_{4,8} &= \{diag(1, 1, 1, Ker\varphi_8, 1)\}\,; \\ K_{5,8} &= \{diag(1, 1, 1, 1, Ker\varphi_8)\}\,, \end{aligned}$$

где 1 означает единичную матрицу соответствующей степени. Из (2) следует очевидное включение для группы единиц кольца.

$$K_{12} \times K_{4,8} \times K_{5,8} \triangleleft U(Z[D(G)]) \tag{3}$$

Пусть G – группа сопрягающих матриц вида $diag(1, 1, v, y, z)$, G_1 — группа сопрягающих матриц вида $diag(1, 1, v, 1, 1)$, G_2 — группа сопрягающих матриц вида $diag(1, 1, v, y, 1)$. Обозначим

$$V = G/K_{12} \times K_{4,8} \times K_{5,8} \; V_1 = G_1/K_{12} \; V_2 = G_2/K_{12} \times K_{4,8}$$

Рассмотрим инвариантный ряд

$$V_1 \triangleleft V_2 \triangleleft V \tag{4}$$

Алгоритм позволяет находить группы и фактор-группы ряда (4) и описывать их строение.

Для нахождения перебираем все матрицы $v' = \begin{pmatrix} v'_1 & v'_2 \\ v'_3 & v'_4 \end{pmatrix}$, такие что $v'_i \in \{0, 1, \dots, 11\}$ и $|v'| \equiv \pm 1 \pmod{12}$. Как показано в [4], в этом случае найдётся матрица $h \in M_2(Z)$, такая что $|v| = |v' + 12h| = \pm 1$. Каждой v' поставим в соответствие матрицу v. Аддитивный нижнетреугольный базис кольца $Z[T_3(S_4)]$ имеет вид:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{matrix} \tag{5}$$

Обозначим матрицы этого базиса через b_1, b_2, b_3, b_4. Из найденных матриц находим такие, для которых выполняются условия

$$b_i^v = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i b_i, \ \alpha_i \in Z, \tag{6}$$

т.е. сопряжение матрицами вида $diag(1, 1, v)$ задают автоморфизмы кольца $Z[diag(T_1(g), T_2(g), T_3(g)), g \in S_4]$. Такие матрицы образуют группу H_{576} порядка 576. Из этой группы выбираем такие v, что сопряжение матрицей $a = diag(1, 1, v, 1, 1)$ является автоморфизмом кольца $Z[D(S_4)]$. Такие матрицы образуют группу $H_{12} \cong C_2 \times C_6$. Таким образом, $V_1 \cong C_2 \times C_6$.

Далее находим фактор-группу $H_{576}/H_{12} = H_{48}$.Теперь перебираем матрицы $y' = \begin{pmatrix} y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y'_4 & y'_5 & y'_6 \\ y'_7 & y'_8 & y'_9 \end{pmatrix}$, такие что $y'_i \in \{0, 1, \dots, 7\}$ и $|y'| \equiv \pm 1 \pmod 8$. Каждой y' ставим в соответсиве матрицу $y = y' + 8h$, где $h \in M_3(Z)$ и $|y' + 8h| = \pm 1$ и выбираем те, которые удовлетворяют условиям, аналогичным (6) для аддитивного базиса кольца $Z[T_4(S_4)]$. Такие матрицы образуют группу H_{786432} порядка 786432. Для каждого $y \in H_{786432}$ ищем $v \in H_{576}$, такую что сопряжение матрицей $b = diag(1, 1, v, y, 1)$ является автоморфизмом кольца $Z[D(S_4)]$. Заметим, что если матрицы $b_1 = diag(1, 1, v_1, y_1, 1)$ и $b_2 = diag(1, 1, v_2, y_2, 1)$ удовлетворяют этому условию, то матрица $v_1 v_2^{-1} \in H_{12}$. Поэтому если для данного y существует v, то она является единственной из группы H_{48}.

Вычисления показали, что такие пары (v, y) по модулю $Ker\varphi_{12} \times Ker\varphi_8$ образуют группу $H_{128} \cong C_2^7$.

Далее, для каждого $y \in H_{786432}$ ищем матрицу $v \in H_{576}$, такую что сопряжение матрицей вида $diag(1,1,v,y)$ задаёт автоморфизм кольца $Z[diag(T_1(g),T_2(g),T_3(g),T_4(g)), g \in S_4]$. Такие пары матриц по модулю $Ker\varphi_{12} \times Ker\varphi_8$ образуют группу H_{8192} порядка 8192. Находим фактор-группу $H_{8192}/H_{128} = H_{64}$.

Теперь аналогично кольцу $Z[T_4(S_4)]$ проводим вычисления для кольца $Z[T_5(S_4)]$ и находим группу H'_{786432} порядка 786432 таких матриц $z \in GL_3(Z)/Ker\varphi_8$, которые удовлетворяют условиям, аналогичным (6) для аддитивного базиса кольца $Z[T_5(S_4)]$. Для каждой матрицы $z \in H'_{786432}$ ищем пару матриц (v,y), такую что сопряжение матрицей $c = diag(1,1,v,y,z)$ является автоморфизмом кольца $z[D(S_4)]$.

Опять заметим, что если матрицы $c_1 = diag(1,1,v_1,y_1,z)$ и $c_2 = diag(1,1,v_2,y_2,z)$ удовлетворяют этому условию, то матрица $c_1c_2^{-1} = diag(1,1,v_1v_2^{-1},y_1y_2^{-1},1) \in V_2$.

Значит с каждой $z \in H'_{786432}$ нужно перебирать пары матриц (v,y) из $H64$.

Тройки матриц (v,y,z), такие что сопряжение матрицей $c = diag(1,1,v,y,z)$ является автоморфизмом кольца $Z[D(S_4)]$ образуют группу H_{524288}, строение которой следующее:

$$C(H_{524288}) \cong C_2^{13}, \quad H_{524288}/C(H_{524288}) \cong C_2^6$$

. Таким образом, с помощью алгоритма получена следующая теорема.

Теорема 2. *В введённых выше обозначениях $V_1 \cong C_2 \times C_6$, $V_2/V_1 \cong C_2^7$, $V/V_2 \cong H$, где $|H| = 524288$, $C(H) \cong C_2^{13}$, $H/C(H) \cong C_2^6$.*

Осталось заметить, как связаны автоморфизмы кольца $Z[D(S_4)]$ и сопрягающие матрицы, задающие автоморфизмы этого кольца.

Пусть матрицы $a_1 = diag(1,1,v_1,y_1,z_1)$ и $a_2 = diag(1,1,v_2,y_2,z_2)$ задают один и тот же автоморфизм, т. е. для любой матрицы $t = diag(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5) \in Z[D(S_4)]$ справедливо равенство $t^{a_1} = t^{a_2}$, откуда $t^{a_1}a_2^{-1} = t$, т. е. матрица $a_1a_2^{-1}$ перестановочна с любой матрицей t кольца $Z[D(S_4)]$.

Поскольку все представления $T_1(S_4),\dots,T_5(S_4)$ неприводимы, по Лемме Шура матрица $a_1a_2^{-1}$ является клеточно-скалярной. Это означает, что $v_1v_2^{-1} = \pm 1$, $y_1y_2^{-1} = \pm 1$, $z_1z_2^{-1} = \pm 1$, где 1 означают единичные матрицы соответствующих степеней. Значит, либо $v_1 = v_2$, либо $v_1 = -v_2$, аналогично для y_1, y_2, z_1, z_2. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 3. $Aut(Z[D(S_4)]) \cong V/\{diag(\pm 1 < \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1\}$.

Список литературы

[1] А. М. Попова, Е. Н. Порошенко, Группы единиц целочисленных групповых колец конечных групп, Algebra and Model Theory 4, Новосибирск, 2003, 99–106.

[2] Gary L. Peterson, Automorphisms of the integxral group ring of S_n, Proceedings of the American Mathematical Society. **59**, 1, August 1976.

[3] Е. В. Грачёв, А. М. Попова, Единицы целочисленного группового кольца группы A_5, Вестник Красноярского Государственного университета. Физико-математические науки, 4 (2006), 54–59.

[4] А. М. Попова, Группы единиц абсолютно неприводимых матричных колец, Актуальные проблемы современной математики, Новосибирск, **III** (1997), 155–161.

АВТОМОРФИЗМЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ

Е. М. Грачев **А. М. Попова**

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: ampopova@ngs.ru

Основной метод нашего изучения целочисленных групповых колец конечных групп основан на теории представлений конечных групп.

Во всех исследуемых целочисленных групповых кольцах выполняется несколько более общая факторизация автоморфизмов, отличная от факторизации Цассенхауза, а именно любой автоморфизм целочисленного группового кольца является композицией автоморфизма поля представления группы и сопряжения единицами групповой алгебры над полем рациональных чисел. Сформулирован критерий и построен алгоритм для проверки справедливости гипотезы Цассенхауза для конечных групп, заданных таблицами характеров и представлениями.

Пусть $T_1(G), \ldots, T_s(G)$ — все неприводимые, неэквивалентные представления группы G степеней, соответственно, $n_1, \ldots, n_s$, $R(G)$ — матричное правое регулярное представление группы G, $R(G) < Mon_n(\mathbb{Z})$, $|G| = n$. Известно, что представление $R(G)$ эквивалентно клеточно-диагональному, в которое каждое из всех неприводимых неэквивалентных представлений группы G входит столько раз, какова его степень, то есть

$$(R(G))^t = \begin{pmatrix} T_1(G) & & & & & & \\ & \underbrace{T_2(G) \quad \ddots \quad T_2(G)}_{n_2} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \underbrace{T_s(G) \quad \ddots \quad T_s(G)}_{n_s} \end{pmatrix}$$

и $n = n_1^2 + \dots + n_s^2$, где $n_i | n, i = 1, \dots, s$. Это эквивалентно разложению пространства $V = \mathbb{C}^n$ в прямую сумму подпространств, инвариантных относительно $R(G)$.

Рассмотрим следующее клеточно-диагональное представление $D(G)$ группы G:

$$\mathbf{D(G)} = \{\mathrm{diag}(\mathbf{T_1(g)}, \mathbf{T_2(g)}, \dots, \mathbf{T_s(g)}), \mathbf{g} \in \mathbf{G}\},$$

в которое каждое из $T_i(G), i = 1, \dots, s$, входит ровно один раз. Очевидно, группа $D(G) \cong R(G)$. Так же очевидно, что целочисленное групповое кольцо $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}[R(G)] \cong \mathbb{Z}[D(G)]$. Здесь под $\mathbb{Z}[R(G)]$ и $\mathbb{Z}[D(G)]$ будем понимать кольца, порождённые матричными группами $R(G)$ и $D(G)$ соответственно.

Эти изоморфизмы позволяют сводить изучение группы автоморфизмов кольца $\mathbb{Z}G$ к изучению группы автоморфизмов кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$. Условимся кольца $\mathbb{Z}[T_i(G)]$ называть *клетками* кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$.

Между различными клетками кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ возникают отображения

$$\mu_{\mathbf{ij}} : \sum_{\mathbf{g} \in \mathbf{G}} \alpha_{\mathbf{g}} \mathbf{T_i(g)} \longleftrightarrow \sum_{\mathbf{g} \in \mathbf{G}} \alpha_{\mathbf{g}} \mathbf{T_j(g)}, \alpha_{\mathbf{g}} \in \mathbb{Z},$$

которые либо являются изоморфизмами, либо не являются.

Например, для группы $\mathrm{SL}_2(3) = \langle a, b \mid a^3 = 1, aba = bab \rangle$ имеем

$$T_5(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_3 & -\overline{\omega}_3 \end{pmatrix}, T_5(b) = \begin{pmatrix} \overline{\omega}_3 & -\omega_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_6(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\overline{\omega}_3 & -\omega_3 \end{pmatrix}, T_6(b) = \begin{pmatrix} \omega_3 & -\overline{\omega}_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где ω_3 — первообразный корень третьей степени из единицы. Понятно, что μ_{56} в данном случае задается комплексным сопряжением элементов матриц представлений $T_5(\mathrm{SL}_2(3))$ и $T_6(\mathrm{SL}_2(3))$, то есть является изоморфизмом.

Про совокупность всех тех клеток $\mathbb{Z}[T_i(G)]$, $i = 1, \dots, s$, между которыми отображения μ_{ij} являются изоморфизмами, будем говорить, что они образуют блок. Если для клетки $\mathbb{Z}[T_i(G)]$ никакое из отображений μ_{ij} не является изоморфизмом, то она одна образует блок. Если же для клетки $\mathbb{Z}[T_i(G)]$ нашлись клетки $\mathbb{Z}[T_j(G)]$, такие что μ_{ij} являются изоморфизмами, без ограничения общности можем считать, что это клетки $\mathbb{Z}[T_{i+1}(G)]$,…,$\mathbb{Z}[T_{i+k-1}(G)]$. Обозначим через

$$D_i(G) = \{\mathrm{diag}(T_i(g), \dots, T_{i+k-1}(g)), g \in G\}.$$

Кольцо $O_i = \mathbb{Z}[D_i(G)]$ назовём блоком. В таких обозначениях $D(g) = \mathrm{diag}(D_1(g), \ldots, D_t(g))$ и $\mathbb{Z}[D(G)] = \mathrm{diag}(O_1, \ldots, O_t)$.

Пусть $\mathbb{K}$ — некоторое расширение поля $\mathbb{Q}$. Рассмотрим алгебру матриц $A = (\mathbb{K})_n$, как алгебру над полем $\mathbb{Q}$. Для $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{K})$ определим автоморфизм $\hat{\tau}$ алгебры A по формуле

$$\hat{\tau}((a_{ij})) = (a_{ij}^{\tau}). \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть клетки $\mathbb{Z}[T_i(G)], \mathbb{Z}[T_{i+1}(G)], \ldots, \mathbb{Z}[T_{i+k-1}(G)]$, $k \geqslant 1$, с соответствующими характерами $\chi_i, \ldots, \chi_{i+k-1}$, образуют блок O. Пусть, далее, $\mathbb{Q}(O)$ — общее поле представления клеток этого блока. Тогда степени представлений $T_i(G), \ldots, T_{i+k-1}(G)$ совпадают, $k = |\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i))|$ и представление $T_{i+j}(G)$ эквивалентно представлению $\hat{\tau'}(T_i(G))$, где $\tau' \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(O))$ — продолжение некоторого зависящего от j автоморфизма $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i))$, где $j = 0, \ldots, k-1$.*

Доказательство. Прежде всего напомним, что $\forall g \in G$ $\chi_i(g)$ — целое алгебраическое число [1], то есть $\chi_i(g)$ имеет целочисленный минимальный многочлен. Полем разложения для G служит поле $Q(\sqrt[l]{1})$, где $l = exp(G)$. Это поле является нормальным [2]. Так как $\chi_i(g)$ принадлежит этому полю, все корни минимального многочлена для $\chi_i(g)$ тоже лежат в этом поле. Автоморфизмы поля $Q(\chi_i)$ переводят корни минимального многочлена в корни этого же многочлена. Эти автоморфизмы продолжаются до автоморфизмов поля $Q(\sqrt[l]{1})$ [2]. А любой автоморфизм поля представления группы G переводит неприводимый характер в неприводимый [1]. Отсюда получаем, что любой автоморфизм поля $Q(\chi_i)$ переводит χ_i в некоторый неприводимый характер χ_j. Если этот автоморфизм продолжить до автоморфизма поля $Q(\xi)$ и подействовать им на элементы матриц представления $T_i(G)$, то получим с точностью до эквивалентности представление $T_j(G)$ в силу совпадения характеров. Очевидно, что отображение μ_{ij} при этом будет задавать изоморфизм. Таким образом, клетка $Z[T_j(G)]$ попадает в блок O . Из приведенных рассуждений следует, что если $Aut(Q(\chi_i)) = \{\tau_1 = id, \tau_2, \ldots, \tau_r\}$, то $k = r$ и $T_{i+j}(G) \approx \hat{\tau'}_{j+1}(T_i(G))$, $j = 0, \ldots, r-1$, τ'_{j+1} — продолжение τ_{j+1} до автоморфизма поля $Q(\xi)$. Тем самым лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть χ — сумма всех неприводимых характеров блока O_i. Тогда $\chi \subset \mathbb{Z}$, при этом клетка $\mathbb{Z}[T_i(G)]$ образует блок тогда и только тогда, когда характер χ_i является целочисленным.*

Доказательство. Пусть $\forall g \in G\,[\chi_i(g) \in Z]$. Если среди представлений $T_1(G), \dots, T_s(G)$ нет представления степени $n_j = n_i$, то утверждение леммы очевидно. Пусть, напротив, нашлось $T_j(G)$, такое что $n_i = n_j$. Так как $\chi_i \neq \chi_j$, найдется такой класс сопряженных элементов группы G, на котором классовая сумма в кольце $Z[T_i((G)]$ даст скалярную матрицу вида $\dfrac{|g^G|\chi_i(g)}{n_i}e_{n_i}$, а в кольце $Z[T_j(G)]$, соответственно, вида $\dfrac{|g^G|\chi_j(g)}{n_i}e_{n_i}$. Если бы μ_{ij} было изоморфизмом, то, так как $\chi_i(g) \in Z$, справедливо было бы равенство

$$mu_{ij}\left(\frac{|g^G|\chi_i(g)}{n_i}e_{n_i}\right) = \frac{|g^G|\chi_j(g)}{n_i}e_{n_i},$$

что, очевидно, не выполняется, так как $\chi_i \neq \chi_j$. Значит, ни для какого j отображение μ_{ij} не является изоморфизмом, и клетка $Z[T_i((G)]$ образует блок.

Пусть теперь известно, что клетка $Z[T_i(G)]$ образует блок. Если бы нашлось значение $\chi_i(g) \notin Z$, то, как следует из доказательства леммы 1 существовал бы автоморфизм $\tau \in ut(Q(\chi_i))$, такой, что для клетки, полученной из $Z[T_i(G)]$ действием автоморфизма $\hat{\tau}'$, отображение μ_{ij} было бы изоморфизмом, что противоречит тому, что клетка $Z[T_i(G)]$ образует блок. Тем самым лемма доказана. □

Перестановка блоков не является автоморфизмом кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$, т. к. блоки не изоморфны. Поэтому любой автоморфизм кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ на блоке задает автоморфизм блока.

Любой автоморфизм блока O_i продолжается до автоморфизма алгебры $Q[D_i(G)]$, т. к. аддитивный базис блока является аддитивным базисом алгебры. Можно показать, что алгебра $Q[D_i(G)]$ является простой над своим центром $Q(\chi_i)$, где χ_i — характер представления $T_i(G)$. Тогда по теореме Нётер-Сколема автоморфизмы алгебры $Q[D_i(G)]$ есть композиции автоморфизмов, индуцированных автоморфизмами поля характеров $Q(\chi_i)$, и сопряжений единицами этой алгебры. Таким образом, если блок состоит из одной клетки, то по лемме 2 его автоморфизмами являются только сопряжения. Если же клеток больше одной, то все автоморфизмы блока определяются автоморфизмами его первой клетки в силу изоморфизмов μ_{ij}.

Для дальнейшего изложения напомним гипотезу Цассенхауза.

Пусть $h = \Sigma\alpha_g g \in ZG$. Обозначим через $\varepsilon(h) = \Sigma\alpha_g$.

Определение 3. Автоморфизм $\theta \in Aut(ZG)$ называется нормализованным, если $\varepsilon(\theta(g)) = 1 \forall g \in G$.

Гипотеза Цассенхауза (Aut). *Пусть $\theta \in Aut(ZG)$ — нормализованный. Тогда существует единица $\alpha \in QG$ и автоморфизм $\sigma \in Aut(G)$, такие что*

$$\theta(g) = \alpha^{-1}\sigma(g)\alpha, \ \forall g \in G.$$

Пусть $\tau \in Aut(Q(\chi_i))$, $Q(\chi_i) \neq Q$, ψ — автоморфизм блока O_i, т. е. его первой клетки $\mathbb{Z}[T_i(G)]$, тогда $\psi = \widehat{\tau} \circ \psi_t$, где ψ_t — сопряжение единицей $t \in Q[D_i(G)]$. Получили, что автоморфизмы кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ есть композиции автоморфизмов, индуцированных автоморфизмами полей характеров и сопряжений единицами из $Q[D(G)]$. По сравнению с гипотезой Цассенхауза вместо автоморфизмов группы $\sigma \in Aut(G)$ появились автоморфизмы, индуцированные автоморфизмами полей характеров.

Хертвик [3] построил контрпример к гипотезе Цассенхауза, а именно рассмотрел группу порядка $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 = 1440$, для которой гипотеза Цассенхауза не верна.

Эта группа в работе Хертвика определена следующим образом:

$$G = (M \times N \times Q) \leftthreetimes W,$$

где

$$W =< w : w^8 > \leftthreetimes (< b : b^2 > \times < c : c^2 >), \ w^b = w^{-1}, \ w^c = w^5;$$

$$M =< m : m^5 >, \ N =< n : n^3 >, \ Q =< q : q^3 >;$$

$$C_W(m) =< wc, b >, \ C_W(n) =< w^2, b, c >, \ C_W(q) =< w, b > .$$

Интересно было проверить этот контрпример с помощью теории представлений. Для построения всех неприводимых неэквивалентных представлений этой группы и ее таблицы характеров необходимо дополнить список этих соотношений до генетического кода. Из условия нормальности подгруппы $M \times N \times Q$ в группе G получаем, что $m^c = m^4$, $n^w = n^2$, $q^c = q^2$.

В связи с результатом Хертвика стало актуальным отвечать на вопрос: справедлива ли гипотеза Цассенхауза для данной конкретной группы? Из приведенных выше рассуждений следует, что справедливость гипотезы Цассенхауза означает, что любой автоморфизм поля характеров, который является автоморфизмом кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$, индуцирует автоморфизм группы.

Полезно заметить, что гипотеза Цассенхауза эквивалентна утверждению, что групповые базисы кольца $\mathbb{Z}G$, получающиеся при автоморфизмах кольца, сопряжены. В нашей конструкции это означает, что если гипотеза Цассенхауза для данной группы справедлива, тогда любые два представления $T_i(G)$ и $T_j(G) = (\widehat{\tau} \circ \psi_t)(T_i(G)$, принадлежащие одному блоку, должны быть сопряжены между собой для любого $\tau \in Aut(Q(\chi_i))$. Вот этот критерий мы и проверяем для представлений конкретных групп.

Авторами были найдены неприводимые неэквивалентные представления группы Хертвика и проверены на сопряженность. Оказалось, что существуют в одном блоке два представления, для которых не существует сопрягающей матрицы. Это и доказывает на языке представлений, что для группы Хертвика гипотеза Цассенхауза не справедлива.

Данный критерий был также проверен и для двух простых групп четных перестановок A_5 и A_6.

Для группы A_5 таблица характеров имеет следующий вид.

	$\|G\|$	4	3	5	5
	1A	2A	3A	5A	5B
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	$-b_5$	$-b_5^*$
χ_3	3	-1	0	$-b_5^*$	$-b_5$
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

Алгебраическое число $b_5 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ является корнем уравнения $z^2 + z - 1 = 0$, $b_5^* = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$ — второй корень уравнения.

Группа A_5 порождается двумя элементами $a = (12)(34)$ и $b = (135)$.

Была вычислена матрица $s \in GL_3(Q(b_5))$, такая что $T_2(a)^s \in T_3([a])$ и $T_2(b)^s \in T_3([b])$, где $[a]$ и $[b]$ сопряженные классы элементов a и b соответственно, что, согласно предыдущим рассуждениям, подтверждает гипотезу Цассенхауза для этой группы.

Мы также нашли автоморфизм группы A_5, индуцированный автоморфизмом поля характера $b_5 \to b_5^*$. Этот автоморфизм задается в порождающих a и b следующим образом: $\sigma(a) = a$, $\sigma(b) = b^2$.

Для группы A_6 таблица характеров имеет следующий вид.

	$\|G\|$	8	9	9	4	5	5
	1A	2A	3A	3B	4A	5A	5B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	5	1	2	-1	-1	0	0
χ_3	5	1	-1	2	-1	0	0
χ_4	8	0	-1	-1	0	$-b_5$	$-b_5^*$
χ_5	8	0	-1	-1	0	$-b_5^*$	$-b_5$
χ_6	9	1	0	0	1	-1	-1
χ_7	10	-2	1	1	0	0	0

В качестве порождающих группы взяты два элемента $a = (12)(34)$ и $b = (1235)(46)$. Гипотеза Цассенхауза для группы A_6 проверялась аналогично и оказалась справедливой.

В этом случае автоморфизм группы следующий: $\sigma(a) = a$, $\sigma(b) = b^3$.

Из рассмотрения таблицы характеров конкретной группы сразу можно видеть, какие представления образуют блоки. Если характер целочисленный,то данное представление одно образует блок, если характер содержит алгебраические числа, отличные от целых чисел, то все представления, чьи характеры получаются из данного под действием соответствующего автоморфизма поля характеров, образуют блок. Мы проверяли сопряженность представлений, входящих в один и тот же блок.

Поскольку, по сравнению с гипотезой Цассенхауза, автоморфизмы группового кольца, исходя из теории представлений, являются композициями автоморфизмов поля характеров и сопряжений единицами алгебры $Q[D(G)]$, проверка справедливости гипотезы Цассенхауза сводится к проверке сопряженности представлений, входящих в один и тот же блок.

Список литературы

[1] В. А. Белоногов, Представления и характеры в теории конечных групп, Свердловск, 1990, стр. 379

[2] Ч. Кэртис, И. Райнер Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М. 1969. 668 с.

[3] M. Hertweek, A Counterexample to the Isomorphism Problem for Integral Group Rings, Ann. of Math (2), **154**, 1 (2001), 115–138.

TOPOLOGICAL SEMANTICS IN INSTITUTIONS WITH PROOFS

Y. Kiouvrekis **P. Stefaneas**

National Technical University of Athens,
Department of Mathematics,
Herron Polytechniou 9, 15780 Zografou, Greece

e-mail: yiannisq@central.ntua.gr e-mail: petros@math.ntua.gr

1 Introduction

The Theory of Institutions was introduced by Goguen and Burstall as a systematic way of studying logical systems using category theory. In this paper, we introduce the concept of the (entailment) topological semantic of a proof system and we indicate that every Institution with proof system is complete. This is work in progress coming from the Ph.D. thesis (in preparation) by the first author [7].

2 Institutions preliminaries

2.1 Institutions

Definition 1 (Institutions). [2] An *Institution* $\mathcal{I} = \left(\mathbb{S}ig^{\mathcal{I}}, \boldsymbol{Sen}^{\mathcal{I}}, \boldsymbol{Mod}^{\mathcal{I}}, \models^{\mathcal{I}}\right)$ consists of:

(1). a category $\mathbb{S}ig^{\mathcal{I}}$, whose objects are called *signatures*,

(2). a functor $\boldsymbol{Sen}^{\mathcal{I}} : \mathbb{S}ig^{\mathcal{I}} \to \mathbb{S}et$ giving for each signature a set whose elements are called *sentences* over that signature,

(3). a functor $\boldsymbol{Mod}^{\mathcal{I}} : \left(\mathbb{S}ig^{\mathcal{I}}\right)^{op} \to \mathbb{CAT}$ giving for each signature Σ a category whose objects are called Σ-*models* and whose arrows are called Σ-*morphisms*, and

(4). a relation $\models^{\mathcal{I}}_{\Sigma} \subseteq \left|Mod^{\mathcal{I}}(\Sigma)\right| \times \boldsymbol{Sen}^{\mathcal{I}}(\Sigma)$ for each $\Sigma \in \left|\mathbb{S}ig^{\mathcal{I}}\right|$, called Σ-*satisfaction* such that for each morphism $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ in $\mathbb{S}ig^{\mathcal{I}}$ the *satisfaction condition*

$$M' \models^{\mathcal{I}}_{\Sigma'} \boldsymbol{Sen}^{\mathcal{I}}(\phi)(\rho) \quad \text{if and only if} \quad \boldsymbol{Mod}^{\mathcal{I}}(\phi)(M') \models^{\mathcal{I}}_{\Sigma} \rho$$

holds for each $M' \in \left|\boldsymbol{Mod}^{\mathcal{I}}\right|$ and $rho \in \boldsymbol{Sen}^{\mathcal{I}}(\Sigma)$.

Definition 2. [2] Let $\mathcal{I}$ be a fixed but arbitrary institution. Then

(1). A Σ-*presentation* is a pair $\langle \Sigma, E \rangle$, where Σ is a signature and E is collection of Σ-sentences.

(2). A Σ-model M *satisfies* a presentation $\langle \Sigma, E \rangle$ if it satisfies each sentence in E; we write $M \models E$ in this case.

(3). Given a collection E of Σ-sentences, let E^* be the collection of all Σ-models that satisfy each sentence in E.

(4). Given a collection M of Σ-models, let M^* be the collection of all Σ-sentences that are satisfied by each model in M; also let M^* denote $\langle \Sigma, M^* \rangle$ called the *theory* of M.

(5). The *closure* of a collection E of Σ-sentences is E^{**}, denoted $E^\bullet$.

(6). A collection E of Σ-sentences is *closed* if and only if $E = E^\bullet$.

(7). A Σ-*theory* is a presentation $\langle \Sigma, E \rangle$ such that E is closed.

(8). The Σ-theory *presented* by a presentation $\langle \Sigma, E \rangle$ is $\langle \Sigma, E^\bullet \rangle$.

(9). A Σ-sentence e is *semantically entailed* by a collection E of Σ-sentences, written $E \models e$, if and only if $e \in E^\bullet$.

Proposition 3. [2] *The two functions denoted* $< * >$ *in Definition* 2 *form what is known as Galois connection* (*see* [1]), *in that they satisfy the following properties, for any collections* E, E' *of* Σ-*sentences and collections* M, M' *of* Σ-*models:*

(1). $E \subseteq E' \Rightarrow E'^* \subseteq E^*$.

(2). $M \subseteq M^* \Rightarrow M'^* \subset M^*$.

(3). $E \subseteq E^{**}$.

(4). $M \subseteq M^{**}$.

(5). $E^* = E^{***}$.

(6). $M^* = M^{***}$.

(7). *There is a dual (i.e. inclusion reversing) isomorphism between the closed collections of sentences and the closed collections of models. This isomorphism takes unions to intersections and intersections to unions.*

(a) $\bigcap_n E_n^* = \left(\bigcup_n E_n\right)^*$

(b) $\left(\bigcap_n E_n^*\right) = \left(\bigcup_n E_n\right)^*$

(c) $\left(\bigcup_n E_n^{**}\right)^* = \bigcap_n E_n^*$

(d) $\left(\bigcup_n E_n^{**}\right)^* = \left(\bigcup_n E_n\right)^*$

(e) $\left(\bigcap_n E_n^{**}\right)^* = \left(\bigcup_n E_n\right)^{**}$

There are also dual identities to (a)-(e) for collections of models.

Definition 4 (Internal Boolean Connectives). [5] Let Σ a signature in an institution then:

- the Σ-sentence ϕ is a (semantic) negation of ψ when $\phi^* = |\boldsymbol{Mod}(\Sigma)| \setminus \psi^*$;
- the Σ-sentence ϕ is the (semantic) conjunction of the Σ-sentence ψ_1 and ψ_2 when $\phi^* = \psi_1^* \cap \psi_2^*$.

Remark. The least Boolean connectives such as disjunction $\vee$, implication $\Rightarrow$, equivalence $\Leftrightarrow$, etc can be derived as usually from negations and conjunctions.

Definition 5 (Internal Quantifiers). [5] For any signature morphism $\chi : \Sigma \to \Sigma'$ in an arbitrary institution

- a Σ-sentence ϕ is a (semantic) *existential χ-quantification* of a χ-sentence ψ when $\phi^* = (\psi^*)\restriction_\chi$; in this case we write ϕ as $\exists\chi\psi$;

- a Σ-sentence ϕ is a (semantic) *universal χ-quantification* of a χ-sentence ϕ when $\phi^* = |\boldsymbol{Mod}(\Sigma)| \setminus (|\boldsymbol{Mod}(\Sigma')| \setminus \psi^*) \restriction_\chi$; in this case we write ϕ as $\forall\chi\psi$.

Example 6 (Propositional Logic). [3] As example we will give $\boldsymbol{PL}$ the institution of Propositional Logic.

- The category $\mathbb{S}ig^{\boldsymbol{PL}}$ has as objects sets of propositional variables and the arrows are the functions between them.
- A signature morphism σ is a mapping between the propositional variables.
- The functor $\boldsymbol{Sen}^{\boldsymbol{PL}}$ acts and mapping for each signature Σ the $\boldsymbol{Sen}^{\boldsymbol{PL}}(\Sigma)$ the set of propositional variables from Σ and connectives for conjunction, disjunction, implication and negation.
- The $\boldsymbol{Sen}^{\boldsymbol{PL}}(\sigma)$ is the extension of σ to all formulas.
- Models of Σ are truth valuations, i.e. mappings from Σ into the standard Boolean algebra $Bool = \{0, 1\}$.
- A model morphism between Σ-models M and m' exists iff $M(p) \leq M'(p)$.
- Given $\sigma : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ and a Σ_2-model $M_2 : \Sigma_2 \to Bool$, then the reduct $M_2 \restriction_\sigma$ is the composition $M_2 \circ \sigma$.
- $M \models^{\boldsymbol{PL}}_{\Sigma} \phi$ if and only if ϕ is evaluated 1 under the standard extension of M to all formulas.

Remark. For more examples see [5]

Definition 7 (Institution Morphisms). [2, 5] An institutions morphism $(\Phi, \alpha, \beta) : \mathcal{I}' \to \mathcal{I}$ consists of:

(1). a functor $\Phi : \mathbb{S}ig' \to \mathbb{S}ig$;

(2). a natural transformation $\alpha : \Phi; \boldsymbol{Sen} \Rightarrow \boldsymbol{Sen}'$; and

(3). a natural transformation $\beta : \boldsymbol{Mod}' \Rightarrow \Phi^{op}; \boldsymbol{Mod}$.

Remark. Although institution morphisms are suitable to formalize *forgetful* mappings between more complex institutions to simpler ones, there also other kinds of examples of institutions morphisms, some of them can be found in [5].

$\mathcal{I}'$	$\mathcal{I}$	Φ	α	β
PA	**FOL**	$\Phi(S,T,F,PF) = (S,T,F,\emptyset)$	canonical inclusion	forget interpretations of PF
POA	**FOL**	$\Phi(S,F) = (S,F,\emptyset)$	canonical inclusion	forget the preorder relations

Таблица 1: Classic Institutions Morphisms [4]

2.2 Institutions with Proofs

Definition 8 (Proof System). [5] A Proof System $(\mathbb{S}ign, Sen, Pf)$ is a triple whose elements are

- a category of signatures $\mathbb{S}ign$
- a functor $Sen : \mathbb{S}ign \to \mathbb{S}et$ called sentence functor
- and a functor $Pf : \mathbb{S}ign \to \mathbb{CAT}$ called proof functor which is giving for each signature Σ the category of the Σ-proofs.

such that

(1). $\boldsymbol{Sen}; \mathcal{P}; (-)^{op}$ is a sub-functor of Pf and

(2). the inclusion $\mathcal{P}\left(\boldsymbol{Sen}(\Sigma)\right)^{op} \hookrightarrow Pf(\Sigma)$ is broad and preserves finite products of disjoint sets of sentences for each signature Σ, where $\mathcal{P}\mathbb{S}et \to \mathbb{CAT}$ is the power-set functor.

Remark. [5] The inclusion $\mathcal{P}\left(\boldsymbol{Sen}(\Sigma)\right)^{op} \hookrightarrow Pf(\Sigma)$ is broad means that $Pf(\Sigma)$ has subsets of $\boldsymbol{Sen}(\Sigma)$ as objects, which preservation of products implies there are distinguished monotonicity proofs $\supseteq_{\Gamma,E}: \Gamma \to E$ whenever $E \subseteq \Gamma$ which preserved by signature morphisms, i.e. $\phi\left(\supseteq_{\Gamma,E}\right) = \supseteq_{\phi(\Gamma),\phi(E)}$ and that proofs $\Gamma \to E_1 \uplus E_2$ are in one-to-one natural correspondence with the pairs of proofs $\langle \Gamma \to E_1, \Gamma \to E_2 \rangle$.

Example 9 (PL). The set proof rules of propositional logic **PL**.

A1	$\emptyset \vdash \phi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \phi)$
A2	$\emptyset \vdash (\phi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\phi \Rightarrow \chi))$
A3	$\emptyset \vdash (\neg\psi \Rightarrow \neg\phi) \Rightarrow ((\neg\psi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$
MP	$\{\phi, \phi \Rightarrow \psi\} \vdash \psi$

Proposition 10 (Entailment institution). [5] *Each proof system* $(\mathbb{S}ig, \boldsymbol{Sen}, Pf)$ *determines an institution* $\mathcal{I} = \left(\mathbb{S}ig^{\mathcal{I}}, \boldsymbol{Sen}^{\mathcal{I}}, \boldsymbol{Mod}^{\mathcal{I}}, \models^{\mathcal{I}}\right)$ *called the entailment institution of the proof system where for each signature* $\Sigma \in |\mathbb{S}ig|$,

- *the entailment* Σ*-models are pairs* (ψ, E')*, where* $\psi : \Sigma \to \Sigma'$ *is a signature morphism and* E' *is a* Σ'*-theory;*
- *a* Σ*-model homomorphism*

$$\phi : (\psi : \Sigma' \to (\Sigma', E')) \to (\psi' : \Sigma \to (\Sigma'', E''))$$

is just a theory morphism $\phi : (\Sigma, E) \to (\Sigma', E'')$ *such that* $\psi; \phi = \psi'$*,*

- *a* Σ*-model* (ψ, E') *satisfies a* Σ*-sentence* ρ *iff* $\psi(\rho) \in E'$*,*
- *model reducts are obtained just by composition to the left.*

Corollary 11. [5] *Any entailment institution is sound and complete.*

3 Semantic Topology

Theorem 12. [6] *Let* Σ *be a signature of an Institution* $\mathcal{I} = \big(\, \mathbb{S}ig^{\mathcal{I}}, \boldsymbol{Sen}^{\mathcal{I}}, \boldsymbol{Mod}^{\mathcal{I}}, \models^{\mathcal{I}} \big)$*, then if we define for every set of* Σ*-sentences* E

$$E^* = \{M \in Mod(\Sigma) \mid M \models_\Sigma e \quad \forall e \in E\}$$

then the class $|Mod(\Sigma)|$ *of all* Σ*-models admits a natural topology, where the open sets are*

$$\tau_\Sigma = \left\{ \bigcup_{i \in I} E_i^* \mid \{E_i\}_{i \in I} \quad \text{family of finite sets of } \Sigma\text{-sentences} \quad \right\}.$$

Definition 13. Let M_1 and M_2 be two models such that

$$M_1 \models \phi \ \Leftrightarrow \ M_2 \models \phi$$

for every $\phi \in Sen(\Sigma)$. Then $\mathcal{T}h(M_1) = \mathcal{T}h(M_2)$.
If $\mathcal{T}h(M_1) = \mathcal{T}h(M_2)$ then we say that M_1 and M_2 are equivalent and write $M_1 \sim M_2$.

Definition 14. Let Σ be a signature and $Mod(\Sigma)$ the class of its models. Define the class invariant under the relation $\sim$:

$$|Mod(\Sigma)|/\sim .$$

The next corollary comes naturally to the observant reader.

Proposition 15. *The function that mapping each point to its equivalence class*

$$F : |Mod(\Sigma)| \to |Mod(\Sigma)|/\sim$$

*defines the Identification (Semantic) Topology (**ISM**), moreover is continuous.*

Theorem 16. [7] *If $\mathcal{I} = \left(\mathbb{S}ig^{\mathcal{I}}, \boldsymbol{Sen}^{\mathcal{I}}, \boldsymbol{Mod}^{\mathcal{I}}, \models^{\mathcal{I}}\right)$ is an institution with negation and conjunction then the **ISM** topology is T_2 topology.*

Proof. We want to prove that for every $M_1 \neq M_2 \in |Mod(\Sigma)|/\sim$ exist two disjoint open sets V_1, V_2 such that $M_1 \in V_1$ and $M_2 \in V_2$. Indeed $M_1 \neq M_2$ implies that $Th(M_1) \neq Th(M_2)$ which means that there exist $\phi \in Sen(\Sigma)$ such that

$$M_1 \models_\Sigma \phi \quad \text{and} \quad M_2 \models_\Sigma \neg\phi$$

that means

$$M_1 \in \{\phi\}^* = V_1 \quad \text{and} \quad M_2 \in \{\neg\phi\}* = V_2$$

with $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. □

Theorem 17. [7] *If $\mathcal{I} = \left(\mathbb{S}ig^{\mathcal{I}}, \boldsymbol{Sen}^{\mathcal{I}}, \boldsymbol{Mod}^{\mathcal{I}}, \models^{\mathcal{I}}\right)$ is an institution with negation and conjunction then the **ISM** topology is regular topology.*

Proof. To understand the methodology, we will present two different situations.
First, let $x \in X$ be a point and $F \in X$ a closed set such that $x \notin F$.
Let $X = |Mod(\Sigma)/\sim$ then if E^* and if $F = X \setminus E^*$ is closed and

$$M \in F \Leftrightarrow \exists \phi \in E : M \not\models_\Sigma \phi \Leftrightarrow \exists \phi \in E : M \models \neg\phi.$$

That's why $M \in \{\neg\phi\}^*$. Therefore there exists an open set, the $\{\neg\phi\}^*$ such that $M \in \{\neg\phi\}^*$.
Now, for all $M \in F$ $\exists \phi_M \in E : M \not\models_\Sigma \phi_M$, therefore we set

$$V = \bigcup_{M \in F} \{\neg\phi_M\}*$$

and $F \subseteq V$.
Now $x \notin F$ implies that

$$x \notin X \setminus E^* \Leftrightarrow x \in E^* \Leftrightarrow x \models_\Sigma \phi \ \forall \phi \in E$$

that implies

$$x \in \bigcup_{M \in F} \{\phi_M\}^* = U$$

and $V \cap U = \emptyset$.
If $F = X \setminus \bigcup_{i\in I} E_i^* = \bigcap_{i\in I} X \setminus E_i^*$ then

$$M \in F \Leftrightarrow M \in \bigcap_{i\in I} X \setminus E_i^* \Leftrightarrow \forall i \in I \; M \in X \setminus E_i^* \Leftrightarrow$$

$$\forall i \in I \; \exists \phi_i^M \in E_i : M \models_\Sigma \neg\phi_i^M$$

we can set

$$V = \bigcup_{M\in F} \{\neg\phi_i^M\}^*$$

And

$$x \notin F \Leftrightarrow x \notin X \setminus \bigcup_{i\in I} E_i^* \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i\in I} X \setminus E_i^* \Leftrightarrow$$

$$\exists j : x \notin X \setminus E_j^* \Leftrightarrow \exists j : x \models_\Sigma \phi \forall \phi \in E_j$$

therefore there exists a $\phi \in E_j$ such that

$$x \in \{\phi\}^* = U$$

and $V \cap U = \emptyset$. □

Theorem 18. [7] *If $\mathcal{I} = \left(\mathbb{S}ig^{\mathcal{I}}, \boldsymbol{Sen}^{\mathcal{I}}, \boldsymbol{Mod}^{\mathcal{I}}, \models^{\mathcal{I}}\right)$ is an institution with negation and conjunction then the **ISM** topology is a normal topology.*

Proof. Let F_1 and F_2 be two closed sets, the goal is to find two disjoint open sets V_1 and V_2 such that

$$F_1 \subseteq V_1 \text{ and } F_2 \subseteq V_2 \text{ and } V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

If $F_1 = X \setminus \bigcup_{i\in I} E_i^* = \bigcap_{i\in I} X \setminus E_i^*$ then

$$M \in F_1 \Leftrightarrow M \in \bigcap_{i\in I} X \setminus E_i^* \Leftrightarrow \forall i \in I \; M \in X \setminus E_i^* \Leftrightarrow$$

$$\forall i \in I \; \exists \phi_i^M \in E_i : M \models_\Sigma \neg\phi_i^M$$

we can set

$$V_1 = \bigcup_{M\in F_1} \{\neg\phi_i^M\}^*$$

We work similarly with before, if $N \in F_2$ then $N \notin F_1$ therefore there exists $\phi_i^N \in \bigcup_{i\in I} E_i^*$ such that $N \models_\Sigma$. We define

$$V_2 = \bigcup_{N\in F_2} \{\phi_i^N\}^*$$

then $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. □

It is very important to note that Theorems 16, 17, and 18 have been proved independently by Steffen Lewitzka [6].

Theorem 19 (Entailment Topology). [7] *Let* $(\mathbb{S}ig, \boldsymbol{Sen}, Pf)$ *be an Institution with proofs (proof system) then there is a topology (**Entailment topology**) such that the entailment logic of the proof system is sound and complete with respect to its entailment topological semantic.*

Proof. (Sketch) It is coming natural to define the topology (W, τ_w), where open sets are

$$E^* = \{(\psi, E') \in \boldsymbol{Mod} \mid \psi[E] \subseteq E'\}\,.$$

A basis of the topology is

$$\rho^* = \{(\psi, E') \in \boldsymbol{Mod} \mid \psi(\rho) \in E'\}$$

The proof of soundness and completeness arising natural from Proposition 10 and Corollary 11. □

References

[1] Paul M. Cohn, Universal Algebra, Harper and Row, 1965, Revised edition 1991.

[2] Joseph Goguen and Rod Burstall, Institutions: Abstract model theory for specification and programming, Journal of the Association for Computing Machinery **39**, 1 (1992), 95–146.

[3] Joseph A. Goguen, Till Mossakowski, Valeria de Paiva, Florian Rabe, Lutz Scroder, An Institutional View of Categorical Logic, Int. J. Software Informatics, 1 (2007), 129–152.

[4] Petros Stefaneas and Razvan Diaconescu, Ultraproducts and possible worlds semantics in institutions, Theoritical Computer Science, **379**, 1 (2007), 210–230.

[5] Razvan Diaconescu, Institution-independent Model Theory, Studies in Universal Logic Springe Birkhauser, 2008.

[6] Steffen Lewitzka, Abstract Logics, Logic Maps and Logic Homomorphisms, Logica universalis, 1 (2007), 243–276.

[7] Yiannis Kiouvrekis, PhD Thesis (in progress), NTUA, Department of Mathematics, supervisor Pr. Petros Stefaneas.

СЧЕТНО КАТЕГОРИЧНЫЕ СЛАБО O-МИНИМАЛЬНЫЕ ТЕОРИИ РАНГА ВЫПУКЛОСТИ 2

Б. Ш. Кулпешов*

Международный университет информационных технологий,
ул. Манаса, 34А / Жандосова, 8А, Алматы, 050040, Казахстан
e-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

1 Предварительные сведения

Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо o-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$, такая что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M (см. [1]).

Пусть A, B — произвольные подмножества линейно упорядоченной структуры M. Тогда $A < B$ означает, что $a < b$ всякий раз когда $a \in A$ и $b \in B$. Выражение $A < b$ означает что $A < \{b\}$. Через A^+ (и соответственно A^-) будем обозначать множество элементов b рассматриваемой структуры с условием $A < b$ $(b < A)$.

Определение 1. [2] Пусть T — слабо o-минимальная теория, M — достаточно насыщенная модель теории T, и пусть $\phi(x)$ — произвольная M-определимая формула. *Ранг выпуклости формулы* $\phi(x)$ $(RC(\phi(x)))$ определяется следующим образом:
1) $RC(\phi(x)) \geq 1$, если $\phi(M)$ бесконечно;
2) $RC(\phi(x)) \geq \alpha + 1$, если существуют параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$ и бесконечное число элементов $b_i, i \in \omega$, такие что:

- для любых $i, j \in \omega$, всякий раз когда $i \neq j$ мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$;

*Данные исследования поддержаны грантом КН МОН РК №0830/GF4.

- для каждого $i \in \omega \quad RC(E(x,b_i)) \geq \alpha$ и $E(M,b_i)$ — выпуклое подмножество множества $\phi(M)$;

3) $RC(\phi(x)) \geq \delta$, если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех $\alpha \leq \delta$ (δ предельный).
Если $RC(\phi(x)) = \alpha$ для некоторого α, то мы говорим, что $RC(\phi(x))$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех α), мы полагаем $RC(\phi(x)) = \infty$.

Определение 2. [3] Пусть M — слабо o-минимальная структура, $A, B \subseteq M$, где M $|A|^+$-насыщенна, $p, q \in S_1(A)$ неалгебраические. Будем говорить что тип p не является *слабо ортогональным* типу q ($p \not\perp^w q$), если существуют A-определимая формула $H(x,y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$, такие что $\beta_1 \in H(M,\alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M,\alpha)$.

Лемма 3. ([3], Corollary 34 (iii)) *Отношение $\not\perp^w$ является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.*

Вспомним некоторые понятия, первоначально введенные в [1].
Пусть $Y \subset M^{n+1}$ — $\emptyset$-определимо, пусть $\pi : M^{n+1} \to M^n$ — проекция, которая отбрасывает последнюю координату, и пусть $Z := \pi(Y)$. Для каждого $\bar{a} \in Z$ пусть $Y_{\bar{a}} := \{y : (\bar{a}, y) \in Y\}$. Предположим что для каждого $\bar{a} \in Z$ множество $Y_{\bar{a}}$ ограничено сверху, но не имеет супремума в M. Пусть $\sim$ — $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности на M^n, определяемое следующим образом:

$$\bar{a} \sim \bar{b} \text{ для всех } \bar{a}, \bar{b} \in M^n \setminus Z,$$

$$\text{и } \bar{a} \sim \bar{b} \Leftrightarrow \sup Y_{\bar{a}} = \sup Y_{\bar{b}}, \text{ если } \bar{a}, \bar{b} \in Z.$$

Пусть $\overline{Z} := Z/\sim$, и для каждого кортежа $\bar{a} \in Z$ мы обозначаем $\sim$-класс кортежа $\bar{a}$ через $[\bar{a}]$. Существует естественный $\emptyset$–определимый линейный порядок на $M \cup \overline{Z}$, определяемый следующим образом. Пусть $\bar{a} \in Z$ и $c \in M$. Тогда $[\bar{a}] < c$ тогда и только тогда когда $w < c$ для всех $w \in Y_{\bar{a}}$. Если $\bar{a} \not\sim \bar{b}$, то существует некоторый $x \in M$ такой, что $[\bar{a}] < x < [\bar{b}]$ или $[\bar{b}] < x < [\bar{a}]$, и поэтому $<$ индуцирует линейный порядок на $M \cup \overline{Z}$. Мы называем такое множество $\overline{Z}$ *сортом* (в данном случае, $\emptyset$-определимым сортом) в $\overline{M}$, где $\overline{M}$ — Дедекиндово пополнение структуры M, и обозреваем $\overline{Z}$ как естественно вложенную в $\overline{M}$. Аналогично мы можем получить сорт в $\overline{M}$, рассматривая инфимумы вместо супремумов.

Определение 4. [1] Пусть M — линейно упорядоченная структура, $D \subseteq M$ бесконечно, $K \subseteq \overline{M}$, $f : D \to K$ — функция. Будем говорить, что f является *локально возрастающей (локально убывающей, локально* *константой)* на D, если для любого $x \in D$ существует бесконечный интервал $J \subseteq D$, содержащий x, так что f является строго возрастающей (строго убывающей, константой) на J.

Будем также говорить, что функция f является *локально монотонной* на множестве $D \subseteq M$, если f является либо локально возрастающей, либо локально убывающей на D.

Предложение 5. [4] *Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$ и $p \in S_1(A)$ — неалгебраический. Тогда любая функция в A-определимый сорт, область определения которой содержит множество $p(M)$, является локально монотонной или локально константой на $p(M)$.*

Пусть f — A-определимая функция и E — A-определимое отношение эквивалентности на $D \subseteq M$. Мы говорим что f — *строго возрастающая (убывающая) на D/E*, если для любых $a, b \in D$ с условием $a < b \wedge \neg E(a, b)$ мы имеем $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$).

Определение 6. [5] Пусть M — слабо o-минимальная структура, $B, D \subseteq M$, $A \subseteq \overline{M}$ — B-определимый сорт и $f : D \to A$ — B-определимая функция, являющаяся локально возрастающей (убывающей) на D. Будем говорить, что функция f *имеет глубину n* на множестве D, если существуют отношения эквивалентности $E_1(x, y), \ldots, E_n(x, y)$, разбивающие D на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что для любого $2 \le i \le n$ каждый E_i-класс разбивается на бесконечное число бесконечных выпуклых E_{i-1}-подклассов и выполняется следующее:

- f является строго возрастающей (убывающей) на каждом E_1-классе;
- f является локально убывающей (возрастающей) на D/E_k для любого нечетного $k \le n$; f является строго убывающей (возрастающей) на каждом $E_{k+1}(a, M)/E_k$ для любого $a \in D$);
- f является локально возрастающей (убывающей) на D/E_k для любого четного $k \le n$;
- f является строго монотонной на D/E_n.

В этом случае функцию f будем называть *локально возрастающей (убывающей) глубины n*.

Очевидно что строго возрастающая (убывающая) функция является *локально возрастающей (убывающей) глубины* 0.

Теорема 7. [5] *Пусть T — слабо о-минимальная теория. Тогда любая функция в определимый сорт имеет конечную глубину.*

Мы естественным образом расширяем Определение 6, вводя понятие *локально константной функции глубины n*, если в данном определении функция f является константой на каждом E_1-классе. Заметим, что в этом случае функция f может быть как локально возрастающей, так и локально убывающей на D/E_1.

Пример 8. Пусть $M = \langle M, <, P_1^1, P_2^1, E_1^p, E_2^p, E_1^q, f^1 \rangle$ — линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_1 с $Q \times Q \times Q$, упорядоченной лексикографически, а P_2 с $Q \times Q$, также упорядоченной лексикографически. Интерпретации бинарных предикатов $E_1^p(x, y)$ и $E_2^p(x, y)$ — это отношения эквивалентности на $P_1(M)$ такие, что для всех $x = (n_1, m_1, l_1)$, $y = (n_2, m_2, l_2) \in Q \times Q \times Q$ выполнено

$$E_1^p(x, y) \Leftrightarrow n_1 = n_2 \wedge m_1 = m_2 \text{ и } E_2^p(x, y) \Leftrightarrow n_1 = n_2.$$

Аналогично определяется интерпретация бинарного предиката $E_1^q(x, y)$: это отношение эквивалентности на $P_2(M)$ такое, что для всех $x = (n_1, m_1)$,
$y = (n_2, m_2) \in Q \times Q$ имеет место

$$E_1^q(x, y) \Leftrightarrow n_1 = n_2.$$

Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $\mathrm{Dom}(f) = P_1(M)$ и $\mathrm{Range}(f) = P_2(M)$ и определяется посредством $f((n, m, l)) = (-n, m)$ для всех $(n, m, l) \in Q \times Q \times Q$.

Может быть доказано, что M — счетно категоричная слабо o-минимальная структура. Пусть $p := \{P_1(x)\}$, $q := \{P_2(x)\}$. Очевидно, что $p, q \in S_1(\emptyset)$.

Утверждаем, что функция f является локально константой глубины 2 на $P_1(M)$, т.е. f — константа на каждом E_1^p-классе, f — строго возрастающая на каждом $E_2(a, M)/E_1$, где $a \in P_1(M)$, и строго убывающая на $P_1(M)/E_2$.

Если же в Примере 8 f определить следующим образом: $f((n, m, l)) = (-n, -m)$ для всех $(n, m, l) \in Q \times Q \times Q$, то получим, что f —локально константа глубины 1 на $P_1(M)$, при этом f — константа на каждом E_1^p-классе и f — строго убывающая на $P_1(M)/E_1$.

Определение 9. [6] Пусть M — слабо o-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический.
(1) A-определимая формула $F(x,y)$ называется *p-стабильной*, если существуют α, γ_1, $\gamma_2 \in p(M)$, такие что $F(M,\alpha)\setminus\{\alpha\} \neq \emptyset$ и $\gamma_1 < F(M,\alpha) < \gamma_2$.
(2) p-стабильная формула $F(x,y)$ называется *выпуклой вправо (влево)*, если существует $\alpha \in p(M)$, такой что $F(M,\alpha)$ выпукло, α — левая (правая) концевая точка множества $F(M,\alpha)$ и $\alpha \in F(M,\alpha)$.

Пусть $F_1(x,y), F_2(x,y)$ — p-стабильные выпуклые вправо (влево) формулы. Будем говорить, что $F_2(x,y)$ *больше чем* $F_1(x,y)$, если существует $\alpha \in p(M)$, такой что $F_1(M,\alpha) \subset F_2(M,\alpha)$.

Определение 10. [7] Будем говорить, что p-стабильная выпуклая вправо (влево) формула $F(x,y)$ является *эквивалентность-генерирующей*, если для любых $\alpha, \beta \in p(M)$, таких что $M \models F(\beta,\alpha)$, имеет место следующее:

$$M \models \forall x[x \geq \beta \to [F(x,\alpha) \leftrightarrow F(x,\beta)]];$$
$$(M \models \forall x[x \leq \beta \to [F(x,\alpha) \leftrightarrow F(x,\beta)]]).$$

Лемма 11. [7] *Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический, M — $|A|^+$-насыщена. Предположим, что $F(x,y)$ — p-стабильная выпуклая вправо формула, являющаяся эквивалентность-генерирующей. Тогда*

1) $G(x,y) := F(y,x)$ — p-стабильная выпуклая влево формула, являющаяся также эквивалентность-генерирующей;

2) $E(x,y) := F(x,y) \vee F(y,x)$ — отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.

Теорема 12. [7] *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический. Тогда любая p-стабильная выпуклая вправо (влево) формула является эквивалентность-генерирующей.*

Вспомним, что полная теория T называется *бинарной*, если любая формула эквивалентна булевой комбинации формул самое большее от двух свободных переменных.

Теорема 13. [8] *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория. Тогда T бинарная $\Leftrightarrow$ T имеет конечный ранг выпуклости.*

2 Основная теорема

Рангом выпуклости 1-*типа* p ($RC(p)$) называется инфимум множества $\{RC(\phi(x))|\phi(x) \in p\}$.

Предложение 14. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 2, $M \models T$, $p, q \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические, $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap q(M) \neq \emptyset$ для некоторого $a \in p(M)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $RC(p) > RC(q)$;

(2) не существует $\emptyset$-определимой биекции $f : p(M) \to q(M)$;

(3) $\mathrm{dcl}(\{b\}) \cap p(M) = \emptyset$ для любого $b \in q(M)$;

(4) Существует $\emptyset$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, являющаяся локально константой на $p(M)$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Допустим противное: существует $\emptyset$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, являющаяся биекцией $p(M)$ на $q(M)$. Поскольку $RC(p) = 2$, существует $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности $E^p(x, y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Рассмотрим следующую формулу:

$$E'(x, y) := U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [U_p(t_1) \wedge U_p(t_2) \wedge E^p(t_1, t_2) \wedge$$

$$\wedge f(t_1) = x \wedge f(t_2) = y].$$

Очевидно, что $E'(x, y)$ — отношение эквивалентности, разбивающее $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, откуда $RC(q) \geq 2$, противореча условию.

(2) $\Rightarrow$ (3). Поскольку $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap q(M) \neq \emptyset$, существуют $b \in q(M)$ и $\emptyset$-определимая формула $\phi(x, y)$, такие что $M \models \exists! y \phi(a, y) \wedge \phi(a, b)$. Допустим противное: $\mathrm{dcl}(\{b\}) \cap p(M) \neq \emptyset$. Поймем, что $a \in \mathrm{dcl}(\{b\})$. Если это не так, то существует $a_1 \in p(M)$, такой что $a_1 \neq a$ и $a_1 \in \mathrm{dcl}(\{b\})$. Но тогда поскольку $b \in \mathrm{dcl}(\{a\})$, мы имеем $a_1 \in \mathrm{dcl}(\{a\})$. Тогда можно доказать, что $\mathrm{dcl}(\{a\})$ бесконечно, противореча счетной категоричности. Таким образом, $a \in \mathrm{dcl}(\{b\})$. Но тогда существует $\emptyset$-определимая формула $\phi'(x, y)$, такая что

$$M \models \exists! y \phi'(a, y) \wedge \exists! x \phi'(x, b) \wedge \phi'(a, b).$$

Определим функцию f следующим образом: $f(a) = b \Leftrightarrow \phi'(a, b)$. Нетрудно понять, что f биективно отображает $p(M)$ на $q(M)$, противореча нашему предположению.

(3) $\Rightarrow$ (4). Допустим противное: $f : p(M) \to q(M)$ — $\emptyset$-определимая функция и f не является локально константой на $p(M)$. Тогда f должна быть локально монотонной на $p(M)$, т.е. либо локально возрастающей, либо локально убывающей. Но тогда f биективно отображает $p(M)$ на $q(M)$, противореча ранее доказанному.

(4) $\Rightarrow$ (1). Пусть $f : p(M) \to q(M)$ — $\emptyset$-определимая функция, являющаяся локально константой на $p(M)$, т.е. существует $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что f является константой на каждом E-классе и f является строго монотонной на $p(M)/E$. Таким образом, $RC(p) = 2$. Поймем, что $RC(q) = 1$. Если это не так, то существует $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности $E^q(x, y)$, разбивающее $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Тогда рассмотрим следующую формулу:

$$E'(x, y) := U_p(x) \wedge U_p(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [E^q(t_1, t_2) \wedge f(x) = t_1 \wedge f(y) = t_2].$$

Очевидно, что $E(a, M) \subset E'(a, M)$, откуда $RC(p) \geq 3$, противореча тому, что T имеет ранг выпуклости 2. Таким образом, $RC(q) = 1$. □

Следствие 15. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 2, $M \models T$, $p, q \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические, $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap q(M) \neq \emptyset$ для некоторого $a \in p(M)$. Тогда*

(1) если $RC(p) = RC(q) = 1$, то существует единственная $\emptyset$-определимая строго монотонная биекция $f : p(M) \to q(M)$;

(2) если $RC(p) = RC(q) = 2$, то существует единственная $\emptyset$-определимая локально монотонная функция f глубины $k \leq 1$, являющаяся биекцией $p(M)$ на $q(M)$;

(3) если $RC(p) > RC(q)$, то существует единственная $\emptyset$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, являющаяся локально константой глубины 1 на $p(M)$.

Далее понадобится понятие (p_1, p_2)-секатора, введенное в [8]. Пусть $A \subseteq M$, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ — неалгебраические, $p_1 \not\perp^w p_2$. Мы говорим, что A–определимая формула $\phi(x, y)$ является $(p_1,\ p_2)$*-секатором*, если существует $a \in p_1(M)$, такой что $\phi(a, M) \subset p_2(M)$, $\phi(a, M)$ выпукло и $\phi(a, M)^- = p_2(M)^-$. Если $\phi_1(x, y)$, $\phi_2(x, y)$ — (p_1, p_2)-секаторы, то мы говорим, что $\phi_1(x, y)$ *меньше чем* $\phi_2(x, y)$, если существует $a \in p_1(M)$, такой что $\phi_1(a, M) \subset \phi_2(a, M)$.

Очевидно, что если $p_1, p_2 \in S_1(A)$ — неалгебраические и $p_1 \not\perp^w p_2$, то существует (p_1, p_2)-секатор и множество всех (p_1, p_2)-секаторов линейно упорядочено. Также очевидно, что для любого (p_1, p_2)-секатора $\phi(x, y)$ функция $f(x) := \sup \phi(x, M)$ не является константой на $p_1(M)$.

Предложение 16. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 2, $p, q \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические, $p \not\perp^w q$. Тогда $RC(p) > RC(q) \Leftrightarrow$ существует $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что для любого (p, q)-секатора $R(x, y)$ функция $f(x) := \sup R(x, M)$ является константой на каждом E-классе.*

Доказательство. $(\Rightarrow)$ В этом случае $RC(p) = 2$, $RC(q) = 1$. Следовательно, существует $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности $E^p(x, y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.

Допустим противное: существует (p, q)-секатор $R(x, y)$, для которого функция $f(x) := \sup R(x, M)$ не является константой на каждом E^p-классе. Но тогда f должна быть строго монотонной (строго возрастающей или строго убывающей) на каждом E^p-классе. Действительно, f не может быть локально монотонной (не строго монотонной) на каждом E^p-классе, иначе появится $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности $E_0(x, y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $E_0(a, M) \subset E^p(a, M)$ для некоторого (любого) $a \in p(M)$, противореча тому, что $RC(p) = 2$.

Далее рассмотрим поведение функции f на $p(M)/E^p$. Она должна быть строго монотонной на $p(M)/E^p$, иначе появится $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности $\bar{E}(x, y)$, такое что $E^p(a, M) \subset \bar{E}(a, M)$, опять противореча тому, что $RC(p) = 2$.

Рассмотрим следующую формулу:

$$E'(x, y) := [x \leq y \to \exists t_1 \exists t_2 (E^p(t_1, t_2) \land f(t_1) < x \leq y < f(t_2))] \land$$
$$\land [x > y \to \exists t_1 \exists t_2 (E^p(t_1, t_2) \land f(t_1) < y < x < f(t_2))].$$

Нетрудно понять, что $E'(x, y)$ — отношение эквивалентности, разбивающее $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, откуда $RC(q) \geq 2$, противореча нашему предположению.

$(\Leftarrow)$ Пусть существует $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что для любого (p, q)-секатора $R(x, y)$ функция $f(x) := \sup R(x, M)$ является константой на каждом E-классе. Очевидно, что $RC(p) = 2$. Поймем, что $RC(q) = 1$. Возьмем произвольный (p, q)-секатор $R(x, y)$. Согласно предположению $f(x) := \sup R(x, M)$ является константой на каждом E-классе. Мы знаем что f не является константой на $p(M)$. Тогда f должна быть строго монотонной на $p(M)/E$. Допустим противное: $RC(q) = 2$. Тогда существует $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности $E^q(x, y)$, разбивающее $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Рассмотрим следующую формулу:

$$\hat{E}(x, y) := U_p(x) \wedge U_p(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [E^q(t_1, t_2) \wedge$$

$$\wedge f(x) < t_1 < f(y) \wedge f(x) < t_2 < f(y)].$$

Очевидно, что $E(a, M) \subset \hat{E}(a, M)$, откуда $RC(p) \geq 3$, противореча тому, что T имеет ранг выпуклости 2. Таким образом, $RC(q) = 1$. □

Следствие 17. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 2, $p, q \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические, $p \not\perp^w q$. Тогда $RC(p) = RC(q) \Leftrightarrow$ существует (p, q)-секатор $R(x, y)$ такой, что функция $f(x) := \sup R(x, M)$ является локально монотонной на $p(M)$.*

Лемма 18. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 2, $M \models T$, $p, q \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические, $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap q(M) \neq \emptyset$ для некоторого $a \in p(M)$. Тогда*

(1) если $RC(p) = RC(q) = 2$, то существует в точности четыре (p, q)-секатора;

(2) если $RC(p) = RC(q) = 1$ или $RC(p) > RC(q)$, то существует в точности два (p, q)-секатора.

Доказательство. Пусть $RC(p) = RC(q) = 2$. В силу Следствия 15 существует единственная $\emptyset$-определимая локально монотонная функция f глубины $k \leq 1$, являющаяся биекцией $p(M)$ на $q(M)$. Тогда рассмотрим следующие формулы:

$$\phi^1_-(x, y) := U_p(x) \wedge U_q(y) \wedge y < f(x);$$

$$\phi^1_+(x, y) := U_p(x) \wedge U_q(y) \wedge y \leq f(x);$$

$$\phi^2_-(x, y) := U_p(x) \wedge U_q(y) \wedge \forall t[E^p(x, t) \to y < f(t)];$$

$$\phi^2_+(x, y) := U_p(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t[E^p(x, t) \wedge y < f(t)].$$

Очевидно, что эти формулы являются (p, q)-секаторами, причем

$$\phi^2_-(a, M) \subset \phi^1_-(a, M) \subset \phi^1_+(a, M) \subset \phi^2_+(a, M).$$

Утверждаем, что других (p,q)-секаторов нет. Допустим противное: существует (p,q)-секатор $\Phi(x,y)$, отличный от этих четырех. Тогда возможны следующие случаи:

$$\phi_-^2(a,M) \subset \Phi(a,M) \subset \phi_-^1(a,M), \phi_+^1(a,M) \subset \Phi(a,M) \subset \phi_+^2(a,M),$$

$$\Phi(a,M) \subset \phi_-^2(a,M) \text{ или } \phi_+^2(a,M) \subset \Phi(a,M)$$

Не умаляя общности, предположим, что

$$\phi_-^2(a,M) \subset \Phi(a,M) \subset \phi_-^1(a,M)$$

(остальные случаи рассматриваются аналогично). Поскольку f — локально монотонная глубины $k \leq 1$, функция f должна быть строго возрастающей или строго убывающей на каждом E^p-классе. Для определенности предположим первое. Тогда рассмотрим следующую формулу:

$$G^\Phi(z,a) := U_p(z) \wedge z \leq a \wedge \forall y[U_q(y) \wedge y < f(z) \to \Phi(a,y)].$$

Нетрудно понять, что $G^\Phi(z,x)$ — p-стабильная выпуклая влево формула, причем $G^\Phi(z,x)$ меньше чем $G(z,x)$, где $G(z,x) := E^p(z,x) \wedge z \leq x$, также p-стабильная выпуклая влево. Тогда в силу Теоремы 12 и Леммы 11 мы получаем, что $RC(p) \geq 3$, противореча условиям доказываемой леммы. Таким образом, других (p,q)-секаторов нет.

Пусть $RC(p) = RC(q) = 1$. В этом случае $E^p(x,y) \equiv x = y$ и поэтому $\phi_-^2(a,M) = \phi_-^1(a,M)$ и $\phi_+^1(a,M) = \phi_+^2(a,M)$.

Пусть теперь $RC(p) > RC(q)$, т.е. $RC(p) = 2$ и $RC(q) = 1$. В силу Предложения 14 и Следствия 15 существует единственная $\emptyset$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, являющаяся локально константой глубины 1 на $p(M)$. Следовательно, f является константой на каждом E^p-классе, откуда $\phi_-^2(a,M) = \phi_-^1(a,M)$ и $\phi_+^1(a,M) = \phi_+^2(a,M)$. $\square$

Лемма 19. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 2, $M \models T$, $p,q \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические, $p \not\perp^w q$, $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap q(M) = \emptyset$ для некоторого $a \in p(M)$. Тогда*

(1) если $RC(p) = RC(q) = 2$, то существует в точности три (p,q)-секатора;

(2) если $RC(p) = RC(q) = 1$, то существует единственный (p,q)-секатор $\phi(x,y)$, так что $f(x) := \sup \phi(x,M)$ является строго монотонной на $p(M)$;

(3) если $RC(p) > RC(q)$, то существует единственный (p,q)-секатор $\phi(x,y)$, так что $f(x) := \sup \phi(x,M)$ является локально константой глубины 1 на $p(M)$.

Доказательство. Пусть $RC(p) = RC(q) = 2$. В силу Следствия 17 существует (p, q)-секатор $\phi(x, y)$, такой что функция $f(x) := \sup \phi(x, M)$ является локально монотонной на $p(M)$. Поскольку $RC(p) = 2$, функция f имеет глубину $k \leq 1$. Рассмотрим следующие формулы:

$$\Phi_-(x, y) := U_p(x) \wedge U_q(y) \wedge \forall t[E^p(x, t) \to \phi(t, y)];$$

$$\Phi_+(x, y) := U_p(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t[E^p(x, t) \wedge \phi(t, y)].$$

Очевидно, что эти формулы являются (p, q)-секаторами, причем

$$\Phi_-(a, M) \subset \phi(a, M) \subset \Phi_+(a, M).$$

Аналогично доказательству Леммы 18 можно показать, что других (p, q)-секаторов нет, если в формуле $G^\Phi(z, x)$ вместо конъюнктивного члена $y < f(z)$ рассматривать $\phi(z, y)$.

Пусть $RC(p) = RC(q) = 1$. Поскольку $p \not\perp^w q$, существует хотя бы один (p, q)-секатор $\phi(x, y)$. Так как $RC(p) = 1$, функция $f(x) := \sup \phi(x, M)$ является строго монотонной на $p(M)$. Поймем, что других (p, q)-секаторов нет. Допустим противное: существует (p, q)-секатор $\phi'(x, y)$, отличный от $\phi(x, y)$. Не умаляя общности, предположим, что f — строго возрастающая на $p(M)$ и $\phi(a, M) \subset \phi'(a, M)$. Тогда рассмотрим следующую формулу:

$$F(z, a) := U_p(z) \wedge a \leq z \wedge \forall y[U_q(y) \wedge \phi(z, y) \to \phi'(a, y)].$$

Нетрудно понять, что $F(z, x)$ — p-стабильная выпуклая вправо формула, откуда в силу Теоремы 12 и Леммы 11 мы получаем, что $RC(p) \geq 2$, противореча условиям доказываемой леммы.

Пусть $RC(p) > RC(q)$. Поскольку $p \not\perp^w q$, существует хотя бы один (p, q)-секатор $\phi(x, y)$. В силу Предложения 16 $f(x) := \sup \phi(x, M)$ является локально константой глубины 1 на $p(M)$. Поймем, что других (p, q)-секаторов нет. Допустим противное: существует (p, q)-секатор $\phi'(x, y)$, отличный от $\phi(x, y)$.

Не умаляя общности, предположим, что f — строго возрастающая на $p(M)/E^p$ и $\phi(a, M) \subset \phi'(a, M)$. Тогда рассматривая формулу $F(z, x)$, мы получим, что она больше чем $F^p(z, x)$, где $F^p(z, x) := E^p(z, x) \wedge z \geq x$ также является p-стабильной выпуклой вправо. Откуда получаем противоречие с тем, что $RC(p) = 2$. □

Назовем (p, q)-секатор $\phi(x, y)$ из доказательства Леммы 19 *базисным*, поскольку все остальные (p, q)-секаторы определяются с помощью формулы $\phi(x, y)$ однозначно.

Следующая теорема полностью описывает счетно категоричные слабо о-минимальные теории ранга выпуклости 2.

Теорема 20. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 2, $M \models T$, $|M| = \aleph_0$. Тогда*
(i) существует конечное множество $C = \{c_0, \ldots, c_n\} \subseteq M(M\cup \{-\infty, +\infty\}$, если M не имеет первого или последнего элементов), состоящее из всех $\emptyset$–определимых элементов в M (с возможными исключениями для $-\infty$, $+\infty$), такое что $M \models c_i < c_j$ для всех $i < j \leq n$ и для каждого $j \in \{1, \ldots, n\}$ либо $M \models \neg(\exists x)c_{j-1} < x < c_j$, либо $I_j = \{ x \in M : M \models c_{j-1} < x < c_j \}$ является плотным линейным порядком без концевых точек и существуют $k_j \in \omega$ и $p_1^j, \ldots, p_{k_j}^j \in S_1(\emptyset)$, так что $I_j = \bigcup_{s=1}^{k_j} p_s^j(M)$;
(ii) для каждого неалгебраического $p \in S_1(\emptyset)$ $RC(p) \leq 2$ и существует единственное $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности $E^p(x, y)$, так что в случае $RC(p) = 1$ имеем $E^p(x, y) \equiv x = y$, а в случае $RC(p) = 2$ $E^p(x, y)$ разбивает $p(M)$ на бесконечное число E^p-классов, каждый E^p-класс выпуклый и открытый, так что индуцированный порядок на классах является плотным линейным порядком без концевых точек;
(iii) для любых неалгебраических $p, q \in S_1(\emptyset)$, таких что $p \not\perp^w q$
(1) если $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap q(M) \neq \emptyset$ для некоторого $a \in p(M)$, то существует единственная $\emptyset$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, так что

если $RC(p) = RC(q) = 1$, то f строго монотонная на $p(M)$ и является биекцией $p(M)$ на $q(M)$,

если $RC(p) = RC(q) = 2$, то f локально монотонная глубины $k \leq 1$ на $p(M)$ и является биекцией $p(M)$ на $q(M)$,

если $RC(p) > RC(q)$, то f локально константа глубины 1 на $p(M)$, т.е. f константа на каждом E^p-классе и строго монотонная на $p(M)/E^p$;
(2) если $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap q(M) = \emptyset$ для всех $a \in p(M)$, то

в случае $RC(p) = RC(q) = 1$ существует единственный (p, q)-секатор $S(x, y)$, так что $f(x) := \sup S(x, M)$ является строго монотонной на $p(M)$;

в случае $RC(p) = RC(q) = 2$ существуют в точности три (p, q)-секатора $S_1(x, y)$, $S_2(x, y)$, $S_3(x, y)$, такие что $S_1(a, M) \subset S_2(a, M) \subset S_3(a, M)$ для всех $a \in p(M)$, функция $f(x) := \sup S_2(x, M)$ локально монотонная глубины $k \leq 1$ на $p(M)$ и

$$S_1(x, y) \equiv \forall t[E^p(x, t) \to S_2(t, y)], \quad S_3(x, y) \equiv \exists t[E^p(x, t) \wedge S_2(t, y)];$$

в случае $RC(p) > RC(q)$ существует единственный (p, q)-секатор $S(x, y)$, так что $f(x) := \sup S(x, M)$ является локально константой глубины 1 на $p(M)$, т.е. f константа на каждом E^p-классе и строго

монотонная на $p(M)/E^p$;
так что T допускает элиминацию кванторов до языка

$$\{=,<\}\bigcup\{c_i : i\leq n\}\bigcup\{U_s(x) : s\leq r=\sum_{j=1}^{n} k_j\}\bigcup\{E^{p_s}(x,y) :$$

$$RC(p_s)=2 \text{ и } s\leq r\}\bigcup\{f_{i,j} : \mathrm{dcl}(\{a\})\cap p_j(M)\neq\emptyset$$

$$\text{для некоторого } a\in p_i(M), RC(p_i)\geq RC(p_j)\}\bigcup\{S_{i,j}(x,y) :$$

$$p_i \not\perp^w p_j, \mathrm{dcl}(\{a\})\cap p_j(M)=\emptyset \text{ для всех } a\in p_i(M),$$

$$RC(p_i)\geq RC(p_j),\ \ S_{i,j}(x,y) - \text{ базисный } (p_i,p_j)\text{-секатор}\},$$

где $U_s(x)$ изолирует тип p_s для каждого $s\leq r$.
Более того, любому упорядочению с выделенными элементами как в (i)-(iii) соответствует счетно категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 2 как выше.

Доказательство. (i) Пусть $C=\{c\in M : c$ является $\emptyset$–определимым в $M\}$. В силу счетной категоричности T C должно быть конечным. Пусть C ($\cup\{-\infty,+\infty\}$, если M не имеет первого или последнего элементов) перечислено как $\{c_0,\ldots,c_n\}$.

Далее, предположим, что $I_j=\{x\in M : M\models c_{j-1}<x<c_j\}\neq\emptyset$. Тогда I_j должно быть плотным без концевых точек. Если I_j является 1–неразличимым над $\emptyset$, тогда существует $p^j\in S_1(\emptyset)$, такой что $I_j=p^j(M)$, т.е. $k_j=1$. Если I_j не является 1–неразличимым над $\emptyset$, тогда в силу счетной категоричности существуют $k_j\in\omega$ и $p_1^j,\ldots,p_{k_j}^j\in S_1(\emptyset)$, так что $I_j=\bigcup_{s=1}^{k_j} p_s^j(M)$.

(ii) Поскольку теория T имеет ранг выпуклости 2, для каждого неалгебраического 1-типа $p\in S_1(\emptyset)$ имеем $RC(p)\leq 2$, а также в силу Теоремы 13 T бинарная. Если $RC(p)=1$, то не существует параметрически определимого отношения эквивалентности, разбивающего $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, т.е. $p(M)$ 2-неразличимо над $\emptyset$, и следовательно, в силу бинарности T получаем, что $p(M)$ неразличимо над $\emptyset$. Если $RC(p)=2$, то существует $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности $E^p(x,y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных E^p-классов, каждый E^p-класс выпукл и открыт, так что индуцированный порядок на E^p-классах является плотным линейным порядком без концевых точек. Более того, для любого $a\in p(M)$ множество $E^p(M,a)$ является 2-неразличимым над $\emptyset$, откуда, также в силу бинарности T, получаем, что $E^p(M,a)$ неразличимо над $\emptyset$.

(iii) Следует из Следствия 15 и Леммы 19.

И, наконец, в силу бинарности T полный тип любого m-кортежа $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ элементов из M определяется формулой Ψ, состоящей из конъюнкции формул вида $x = y, x < y, c_i < x$, $x < c_i$, $U_s(x)$, $y = f_{i,j}(x)$, $y < f_{i,j}(x)$, $f_{i,j}(x) < y$, $S_{i,j}(x, y)$ и $E^s(x, y)$ и их отрицаний, которые имеют место на координатах кортежа $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle$, откуда следует утверждаемая элиминация кванторов. $\square$

Список литературы

[1] H. D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields, Transactions of The American Mathematical Society, **352** (2000), 5435–5483.

[2] B. Sh. Kulpeshov, Weakly o-minimal structures and some of their properties, The Journal of Symbolic Logic, **63** (1998), 1511–1528.

[3] B. S. Baizhanov, Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, The Journal of Symbolic Logic, **66** (2001), 1382–1414.

[4] B. Sh. Kulpeshov, Countably categorical quite o-minimal theories, Journal of Mathematical Sciences, **188**, 4 (2013), 387–397.

[5] V. V. Verbovskiy, On formula depth of weakly o-minimal structures, Algebra and Model Theory, (A. G. Pinus and K. N. Ponomaryov, editors), Novosibirsk, 1997, 209–223.

[6] B. S. Baizhanov, One-types in weakly o-minimal theories, Proceedings of Informatics and Control Problems Institute, Almaty, 1996, 75–88.

[7] B. S. Baizhanov, B. Sh. Kulpeshov, On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories, Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference (S. Goncharov, R. Downey, H. Ono editors) Singapore, World Scientific: 2006, 31–40.

[8] B. Sh. Kulpeshov, Criterion for binarity of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories, Annals of Pure and Applied Logic, **45** (2007), 354–367.

ОПРЕДЕЛИМО МИНИМАЛЬНЫЕ ПОЛЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ НОЛЬ

К. А. Мейрембеков

Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
Пр. аль-Фараби, 71, Алматы, 050040, Республика Казахстан
e-mail: meirembekov@mail.ru

Структура M называется *сильно минимальной* [1], если для любого элементарного расширения $M \prec N$ и любой формулы $\varphi(x, \bar{a})$ одно из формульных множеств $\varphi(N, \bar{a})$ или $\neg\varphi(N, \bar{a})$ конечно. А. Макинтайр [3] в 1971 г. исследовал ω_1-категоричные поля и доказал, что все они являются сильно минимальными полями и алгебраически замкнуты. В 1975 г. Л. Подевски, исследуя поля, предположил, что этот вывод остается справедлив для полей M, таких что $\varphi(M, \bar{a})$ или $\neg\varphi(M, \bar{a})$ конечно.

В 2000 г. Ф. Вагнер [7] дал положительный ответ на гипотезу Подевского в случае полей позитивной характеристики. В 2013 г. Ф. Вагнер и польские математики К. Крупински и П. Танович [9] дали позитивный ответ для стабильных полей нулевой характеристики. В настоящей заметке доказывается гипотеза Подевски для нестабильных полей нулевой характеристики и тем самым завершается эта тема.

Все неопределяемые в статье понятия уже стали классическими и их можно найти в [4].

Сильно минимальные модели несчетно категоричны и играли ключевую роль при описании всех несчетно категоричных теорий. Ослаблением этого понятия является понятие определимо минимальной модели из [6, 8].

Определение 1. Структура M называется *определимо минимальной*, если для любой формулы $\varphi(x, \bar{a})$, где $\bar{a} \in M$, одно из формульных множеств $\varphi(M, \bar{a})$ или $\neg\varphi(M, \bar{a})$ конечно.

Формула $\varphi(x, \bar{y})$ обладает *свойством независимости* [4], если для каждого $n < \omega$ существуют кортежи $\bar{a}_i$ $(i < n)$, такие что для любого множества $w \subseteq n$ выполняется

$$\models \exists x \Big[\wedge_{i<n} \varphi(x, \bar{a}_i)^{if(l \in w)} \Big]. \tag{1}$$

Теория обладает *свойством независимости*, если существует формула $\phi(x, \bar{y})$, обладающая свойством независимости.

Формула $\varphi(x, \bar{y})$ обладает *свойством строгого порядка*, если для всех n существуют $\bar{a}_l$, $l < n$, такие что для любых $k, l < n$ верно

$$\exists x[\neg\varphi(x, \bar{a}_k) \wedge \varphi(x, \bar{a}_l)] \Longleftrightarrow k < l. \tag{2}$$

Теория T обладает *свойством строгого порядка*, если существует формула $\varphi(x, \bar{y})$, со свойством строгого порядка. Теория T нестабильна тогда и только тогда, когда она обладает свойством независимости или свойство строгого порядка. Эти свойства не пересекаются.

В противовес к сильно минимальным теориям, теории имеющие определимо минимальную, но не сильно минимальную модель, могут обладать свойством порядка (например, порядки $\omega + n, n + \omega^*, \omega + \omega^*$) или свойством независимости [8]. В работе [8] показано, что нетривиальные определимо минимальные алгебры над полем из классов ассоциативных алгебр, либо альтернативных алгебр, либо йордановых алгебр, являются полями. Предостережем читателя от путаницы с классическим понятием минимальной модели, которое также будет использоваться.

Вместе с тем, как показано в [2], всякая определимо минимальная группа сильно минимальна и абелева. Всякое сильно минимальное поле по теореме Макинтайра [3] является алгебраически замкнутым. Л. Подевски предположил, говоря в наших терминах, что каждое определимо минимальное поле является алгебраически замкнутым. Ф. Вагнер [7], подтверждая гипотезу Подевского, выдвинутую в 1975 году, доказал, что всякое определимо минимальное поле ненулевой характеристики является алгебраически замкнутым и поэтому сильно минимальным полем. Для полей нулевой характеристики Крупинским, Вагнером, Тановичем [9] недавно доказано, что определимо минимальные стабильные поля являются алгебраически замкнутыми. Таким образом, гипотеза Подевского была ранее не решена для нестабильных полей характеристики ноль.

Теорема 2. *Всякое поле характеристики нуль, имеющее трансцендентные элементы, содержит собственную элементарную подмодель.*

Доказательство. Пусть K — поле характеристики нуль, имеющее трансцендентный элемент a. Рассмотрим подполе $K_0 \subset K$, состоящее в точности из тех элементов K, которые алгебраичны над $K \cap K_0$. Мы утверждаем, что $K_0 \prec K$. Действительно, пусть $K \models \exists x\varphi(x, \bar{a})$, где $\bar{a} \in K_0$. Индукцией по сложности φ докажем, что $K_0 \models \exists x\varphi(x, \bar{a})$. Если $\varphi(x, \bar{a}) = (f(x, \bar{a}) = 0)$, то из определения K_0 следует требуемое утверждение. Если $\varphi(x, \bar{a}) = \vartheta_1(x, \bar{a}) \wedge \vartheta_2(x, \bar{a})$, то утверждение следует легкой индукцией. Аналогичный результат верен и для $\varphi(x,\bar{a}) = \neg\vartheta(x,\bar{a})$. Если $\varphi(x,\bar{a}) = \exists y\vartheta(x,y,\bar{a})$, то

$$K \models \exists x\varphi(x,\bar{a}) \iff K \models \exists x\exists y\vartheta(x,y,\bar{a}) \iff K_0 \models \exists x\exists y\vartheta(x,y,\bar{a}).$$

Поэтому, $K_0 \models \exists x\varphi(x,\bar{a})$. Следовательно, по критерию Тарского-Вота $K_0 \prec K$. □

Теорема 3. *Всякое поле характеристики нуль, не имеющее трансцендентных элементов, является минимальной простой моделью.*

Доказательство. Пусть поле K_0 не содержит трансцендентных элементов. Если поле G является элементарным подполем в поле K_0, то алгебраические элементы в K_0 и G совпадают. Отсюда следует, что поля K_0 и G совпадают. Если K — любое поле рассматриваемой характеристики, то сконструируем поле K_0' без трансцендентных элементов и имеющее те же алгебраические элементы, что и K. Очевидно, имеем изоморфное элементарное вложение поля K_0' в поле K. □

Теорема 4. *Если существует определимо минимальное поле K характеристики нуль, то существует определимо минимальное поле K_0, которое является простой минимальной моделью и $K_0 \preceq K$.*

Доказательство. Результат следует из теоремы 2 из [8]. □

Теорема 5. *Не существует определимо минимального поля нулевой характеристики.*

Доказательство. Формула, определяющая свойство независимости, должна существенно зависеть от обеих операций сложения и умножения, так как теория любой абелевой группы стабильна [5]. Допустим, что K — определимо минимальное нестабильное поле нулевой характеристики. Тогда K должно обладать свойством строгого порядка или обладать свойством независимости.

Если поле K обладает свойством строгого порядка, то достаточно понять, что упорядоченное множество I элементов, о которых идет речь в формуле (2), бесконечно и отлично от линейных порядков $\omega+n, n+\omega^*, \omega+\omega^*$. Но если $a<b$ и $a,b \in I$, то $a < \dfrac{a+b}{2} < b$ и $\dfrac{a+b}{2} \in I$. Следовательно, множество I плотно упорядочено. Поэтому, существует элемент $a \in I$ такой, что оба множества $\{x : x < a\}$ и $\{x : x \geq a\}$ бесконечны и, следовательно, поле K не является определимо минимальным.

Допустим, что поле K имеет свойство независимости и существует бесконечное дерево, о котором идет речь в формуле (1). Это дерево гарантирует, что теория имеет континуум счетных моделей. Выберем два разных элемента a_1, a_2 на одном этаже. Тогда формульные множества $\varphi(x, a_1)$ и $\neg\varphi(x, a_2)$ оба бесконечны и не пересекаются. Следовательно, формула $x = x$ не минимальна.

Итак, упомянутая гипотеза Подевского подтверждена. $\square$

Замечание. Отметим, что в контрасте с доказываемой теоремой, существуют теории со свойством независимости на основе случайных графов, имеющие определимо минимальную модель [8].

Вопрос. *Существует ли поле со свойством независимости?*

Список литературы

[1] J. T. Baldwin, A. H. Lachlan, On strongly minimal sets, J. Symbol. Log., **36**, 1 (1971), 79– 96.

[2] J. Reineke, Minimalle Gruppen, Zeitshr. Math. Log., **21** (1975), 357–359.

[3] A. Macintyre, On ω_1-cathegorical theories of fields, Fund. Math., **71** (1971), 1–20.

[4] S. Shelah, Classification theory and the number of non isomorphic models, North Holland, 1978, 544 pp.

[5] К. А. Мейрембеков, Замечания о теориях с ограниченным спектром, в сб. Исследования по теоретическому программированию, 1981, изд-во Казахского госуниверситета им. Кирова, 69–74.

[6] Б. И. Зильбер, В. Смуров, О минимальных структурах, 9-я Всес. конф. по математической логике, Ленинград, 1989, 199.

[7] F. Wagner, Minimal Fields, J. Symbol. Logic, **65** (2000), 1833–1835.

[8] Е. Р. Байсалов, К. А. Мейрембеков, А. Т. Нуртазин, Определимо минимальные модели, в книге Теория моделей в Казахстане, Сб. научных работ посвященных памяти А. Д. Тайманова, Eco Study, Алматы, 2006, 14–28.

[9] K. Krupiński, P. Tanović, F. Wagner, Around Podewski's conjecture, Fund. Math. **222** (2013), 175–193.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТЕОРИИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП С ВЫДЕЛЕННОЙ ПОДГРУППОЙ

Е. А. Палютин*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: palyutin@math.nsc.ru

1 Введение

Работа представляет собой обзор результатов, содержащихся в статьях [1]–[6] и посвящена элементарным теориям абелевых групп с выделенной подгруппой. Такие теории намного сложнее теорий без выделенных подгрупп. В частности, если элементарная теория всех абелевых групп разрешима, то теория абелевых групп с выделенной подгруппой неразрешима.

Понятие P-стабильности является частным случаем понятий T^*-стабильности из [7] и E^*-стабильности из [8], которые, в свою очередь, являются обобщениями классического понятия стабильности, восходящее к работам М. Морли [9] и С. Шелаха [10]. Исследования по P-стабильности касаются также теории моделей элементарных пар, которой с 80-х годов занимались такие математики, как Б. Пуаза, Э. Бускарен, Т. Г. Мустафин, Т. А. Нурмагамбетов, А. Т. Нуртазин и др. В нашем случае по сути дела изучается теория пар моделей без обязательного требования элементарности P-подмодели. М. А. Русалеев в работе [11] доказал, что если не налагать никаких условий на преликат P, то условие P-стабильности теории T равносильно определимой эквивалентности теории T некоторой теории, язык которой состоит только из одноместных предикатных символов. В работе [12] М. А. Русалеев доказал, что если T — теория абелевой группы без кручения, то она будет P-стабильной, если P определяет алгебраически замкнутую подгруппу. В тезисах Т. А. Нурмагамбетова [13] содержится теорема о том, что при

*Данные исследования поддержаны грантом КН МОН РК № 0830/ГФ4.

предположении обобщенной континуум-гипотезы теория любой абелевой группы будет P-суперстабильной, если P определяет элементарную подсистему.

В разделе 3 показано, что теория любой абелевой группы является P-суперстабильной, если P определяет сервантную подгруппу. Это обобщает указанные выше результаты Т. А. Нурмагамбетова и М. А. Русалеева. В разделе 4 дано описание (P, e)-спектров теорий абелевых групп, которое обобщает другую теорему Нурмагамбетова из [13].

2 Терминология, обозначения и предварительные результаты

Необходимые для понимания сведения из теории абелевых групп можно найти, например, в [16] и [14] (параграф 8.4). Необходимые сведения из теории моделей можно найти, например, в [14] и [15]. Под теорией в дальнейшем понимается элементарная теория некоторого языка L.

Напомним некоторые хорошо известные понятия из теории абелевых групп.

В дальнейшем под группой всегда подразумевается абелева группа.

Для группы A и натурального числа n через $A[n]$ будем обозначать подгруппу

$$\{a \mid a \in A, na = 0\},$$

а через nA обозначается подгруппа $\{na \mid a \in A\}$. Буквой p всегда будет обозначаться некоторое простое число.

p-группой называется группа, все элементы которой имеют порядок p^k для некоторого натурального k. Максимальная p-подгруппа группы A называется ее *p-компонентой* и обозначается через A_p. *Элементарной p-группой* называется прямая сумма циклических групп порядка p. *Элементарной группой* называется элементарная p-группа для некоторого p. Группа A называется *ограниченной*, если существует такое натуральное число n, что $nA = 0$.

Подгруппа P группы A называется *сервантной* или *чистой* (pure), если $nP = (P \cap nA)$ для любого натурального числа n.

Подструктура B структуры A называется *алгебраически замкнутой*, если B содержит каждое конечное множество $X \subseteq A$, определимое в A формулой $\Phi(x)$ с параметрами из подструктуры B. Именно в этом смысле мы в дальнейшем будем понимать термин "алгебраически замкнутая подгруппа".

Для группы A, простых чисел p и натуральных чисел m следующие кардиналы называются *шмелевскими инвариантами группы* A:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{p,m}(A) &= \min\{\dim((p^m A)[p]/p^{(m+1)}A)[p]), \omega\},\\
\beta_p(A) &= \min\{\inf\{\dim(p^n A)[p] | n \in \omega\}, \omega\},\\
\gamma_p(A) &= \min\{\inf\{\dim((A/A[p^n])/p(A/A[p^n])) | n \in \omega\}, \omega\},\\
& \varepsilon(A) \in \{0,1\} \text{ и } (\varepsilon(A) = 0 \Leftrightarrow A \text{ ограничена}).
\end{aligned}
$$

Следующая теорема доказана В. Шмелев [17].

Теорема 1. *Абелевы группы A и B тогда и только тогда элементарно эквивалентны, когда их шмелевскими инварианты совпадают.*

Мы будем говорить о шмелевских инвариантах полной теории T, имея в виду шмелевские инварианты ее моделей.

Зафиксируем в этом параграфе некоторую полную теорию T языка L. Для удобства работы с моделями теории T мы, как принято в современной теории моделей, зафиксируем некоторую достаточно насыщенную модель C теории T и будем считать, что все рассматриваемые нами T-модели являются элементарными подмоделями модели C. Такая T-модель C называется *монстр-моделью* теории T.

Множество всех кортежей из элементов множества U обозначается через $U^{<\omega}$. Для простоты вместо обозначения $\mathbf{u} \in U^{<\omega}$ будем использовать обозначение $\mathbf{u} \in U$. Кортежи элементов монстр-модели C будут обозначаться жирными буквами начала латинского алфавита: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots$, а кортежи переменных — жирными буквами конца этого алфавита: $\ldots, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$.

Если A — структура языка L, $\Phi(\mathbf{x})$ — формула языка L с параметрами из структуры A, то через $\Phi(A)$ обозначаем множество $\{\mathbf{a} \mid A \models \Phi(\mathbf{a}), \mathbf{a} \in A\}$.

Если X — подмножество монстр-модели C, то X будем называть *множеством в теории* T. Через $L(X)$ будем обозначать язык, который получается из языка L добавлением множества X в качестве множества новых констант. Через $T(X)$ будем обозначать следующее множество формула языка $L(X)$:

$$\{\varphi(\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in X, C \models \varphi(\mathbf{a}), \varphi(\mathbf{x}) \text{ — формула языка } L \text{ без параметров}\}.$$

Ясно, что $T(X)$ будет полной теорией языка $L(X)$ и являться расширением теории T.

Пусть язык L_P получается из языка L добавлением нового одноместного предикатного символа P.

Определение 2. Пусть T — некоторая полная теория языка L, Δ — некоторое множество предложений языка L_P, X — множество в теории T. Обозначим через $C_T(\Delta, X)$ мощность множества пополнений в языке $(L(X))_P$ множества

$$T_\Delta(X) = (T(X) \cup \{P(a) \mid a \in X\} \cup \Delta).$$

Кардинальную функцию, сопоставляющую кардиналу λ супремум множества кардиналов

$$\{C_T(\Delta, X) \mid X - \text{ множество в теории } T, |X| \leqslant \lambda\}$$

называется P_Δ-*спектром* теории T и обозначается через $S_T(P, \Delta)$. P_Δ-спектр называется *максимальным*, если $S_T(P, \Delta)(\varkappa) = 2^\varkappa$ для любого бесконечного кардинала $\varkappa$.

Предложение 3. *Для любой полной теории T конечного или счетного языка L, любого множества Δ предложений языка L_P и любого не более чем счетного множества X кардинал $C_T(\Delta, X)$ может принимать только одно из следующих значений: 2^ω, ω и n, где $n \in \omega$.*

Определение 4. Пусть Δ — некоторое множество предложений языка L_P.

(1). Полная теория T языка L называется P_Δ-*стабильной*, если для некоторого бесконечного кардинала λ выполнено $S_T(P, \Delta)(\lambda) \leqslant \lambda$.

(2). Полная теория T языка L называется P_Δ-*суперстабильной*, если для некоторого кардинала $\varkappa$ выполнено $S_T(P, \Delta)(\lambda) \leqslant \lambda$ для всех кардиналов $\lambda \geqslant \varkappa$.

(3). Полная теория T языка L называется *тотально* P_Δ-*стабильной*, если для любого бесконечного кардинала λ выполнено

$$S_T(P, \Delta)(\lambda) \leqslant \lambda.$$

(4). Структура A называется P_Δ-(*супер*)*стабильной* (*тотально* P_Δ-*стабильной*), если таковой является ее теория.

Отметим, что понятие P_Δ-стабильности является частным случаем понятия E^*-стабильности, введенного в работе [8]

Обозначение 1. В дальнейшем мы будем рассматривать полные теории T абелевых групп, а в качестве Δ будут рассматриваться следующие множества предложений $\Delta_i, i \in \{s, p, e, a\}$:

(1). Δ_s утверждает, что предикат P определяет произвольную подгруппу;

(2). Δ_p утверждает, что предикат P определяет сервантную подгруппу;

(3). Δ_e утверждает, что предикат P определяет элементарную подсистему;

(4). Δ_a утверждает, что предикат P определяет алгебраически замкнутую подгруппу.

Для $i \in \{s, p, e, a\}$ вместо записи P_{Δ_i}-стабильность и P_{Δ_i}-спектр будем использовать запись (P, i)-стабильность и (P, i)-спектр.

В работах, по которым написан обзор, для любого $i \in \{s, p, e, a\}$ полностью описаны (P, i)-стабильные, (P, i)-суперстабильные и тотально (P, i)-стабильные абелевы группы, а также их (P, i)-спектры. Перейдем к изложению этих результатов.

Примитивной формулой языка L называется формула вида

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \Phi,$$

где Φ — конъюнкция атомарных формул языка L.

В дальнейшем через L будем обозначать язык теории абелевых групп, состоящий из двухместного функционального символа $+$, одноместного функционального символа $-$ и символа константы 0. Через AG будем обозначать теорию всех абелевых групп, заданную обычными аксиомами абелевых групп языка L.

Следующая лемма хорошо известна. Ее доказательство можно найти, например, в [18] и [14].

Лемма 5. *Пусть T — полная теория абелевых групп. Любая формула языка абелевых групп эквивалентна в теории T булевой комбинации примитивных формул.*

Доказательство следующей леммы практически не отличается от доказательства предыдущей леммы.

Лемма 6. *Пусть A — абелева группа, P — ее подгруппа. Любая формула языка L_P эквивалентна в теории $Th(\langle A, P\rangle)$ булевой комбинации примитивных формул языка L_P.*

Легко проверить, что если A — абелева группа, P — ее подгруппа, то любая примитивная формула $\Phi(x)$ языка L_P определяет в структуре $\langle A, P\rangle$ подгруппу группы A. Если P_1, P_2 — подгруппы группы A и $P_2 \subseteq P_1$, то через $[P_1 : P_2]$ обозначается число $\min\{|P_1/P_2|, \omega\}$, которое называется *индексом подгруппы* P_2 в подгруппе P_1.

Следующее предложение доказывается точно так же как соответствующее предложение для модулей (см. [18]).

Proposition 20. *Пусть A_1, A_2 — абелевы группы, P_1, P_2 — их подгруппы. Для того, чтобы структуры $\langle A_1, P_1\rangle$ и $\langle A_2, P_2\rangle$ были элементарно эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы для любых примитивных формул $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ языка L_P с условием $\vdash \Psi(x) \to \Phi(x)$ выполнялось равенство индексов*

$$[\Phi(\boldsymbol{A}_1) : \Psi(\boldsymbol{A}_1)] = [\Phi(\boldsymbol{A}_2) : \Psi(\boldsymbol{A}_2)]$$

, где $\boldsymbol{A}_i = \langle A_i, P_i\rangle$.

Следующая лемма восходит к работе Ванды Шмелев [17] и в данном виде содержится, например, в [14] (лемма 8.4.7).

Лемма 7. *Любая примитивная формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ языка абелевых групп эквивалентна в теории AG конъюнкции формул вида $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ и $\exists y \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = p^k y$ для целых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, простых чисел p и натуральных чисел k, которые будут называться соответственно стандартными формулами первого и второго рода. При этом простое число p в стандартной формуле второго рода будем называть модулем этой формулы.*

Определение 8. Теорию T счетного языка L назовем P_Δ-*малой*, если множество $(T \cup \Delta)$ имеет не более, чем счетное число пополнений в языке L_P.

Для полных теорий абелевых групп для $i \in \{s, p, e, a\}$ вместо P_{Δ_i}-малая будем писать (P, i)-*малая*.

3 (P, p)-стабильность и (P, p)-спектр

Из леммы 7 вытекает следующая лемма.

Лемма 9. *Пусть A — абелева группа, P — сервантная подгруппа. Для любой примитивной формулы $\Phi(\mathbf{x})$ языка L и любого кортежа $\mathbf{a} \in P$ выполнено*

$$A \models \Phi(\mathbf{a}) \Leftrightarrow P \models \Phi(\mathbf{a}).$$

Доказательство следующей леммы содержится в доказательстве леммы 8 из статьи [4].

Лемма 10. *Для любой примитивной формулы* $\Phi(\mathbf{x})$ *языка* L_P *найдется примитивная формула* $\Phi^*(\mathbf{x})$ *языка* L*, такая что для любой абелевой группы* A *и любой ее сервантной подгруппы* P *формула* $\Phi^*(\mathbf{x})$ *определяет в группе* A *на подгруппе* P *тот же предикат, что и формула* $\Phi(\mathbf{x})$ *в структуре* $\langle A, P\rangle$.

Из этой леммы и леммы 6 сразу получаются следующие две теоремы.

Теорема 11. *Любая полная теория* T *абелевых групп является* (P,p)*-суперстабильной.*

Теорема 12. *Следующие свойства для полной теории* T *абелевых групп равносильны:*
(1) T *тотально* (P,p)*-стабильна;*
(2) T *является* (P,p)*-малой.*

Обозначение 2. Для абелевой группы A через $Sh(A)$ обозначим множество

$$\{\langle p,n\rangle \mid \alpha_{p,n}(A)\neq 0, n<\omega,\}\cup\{p\mid \beta_p(A)\neq 0\}\cup\{p\mid \gamma_p(A)\neq 0\}.$$

Определение 13. Абелева группа A называется *шмелевски ограниченной*, если множество $Sh(A)$ конечно. Как обычно, полную теорию T абелевых групп будем называть *шмелевски ограниченной*, если таковыми являются ее модели.

Теорема 14. *Для того, чтобы теория абелевой группы* A *была* (P,p)*-малой, необходимо и достаточно, чтобы группа* A *была шмелевски ограниченной.*

Из предыдущей теоремы и теоремы 12 получается следующая теорема.

Теорема 15. *Для того, чтобы теория абелевой группы* A *была тотально* (P,p)*-стабильной, необходимо и достаточно, чтобы группа* A *была шмелевски ограниченной.*

Теорема 16. *Для любой полной теории* T *абелевых групп ее* (P,p)*-спектр тождественно равен одному из следующих значений:* 2^ω, ω *и* n*, где* $n\in\omega, n\neq 0$*. Причем каждый из этих видов* (P,p)*-спектра реализуются для некоторой полной теории* T *абелевых групп.*

4 (P,e)-стабильность и (P,e)-спектр

Следующее предложение хорошо известно, см., например, [18].

Proposition 21. *Пусть A — абелева группа, P — ее подгруппа. Для того чтобы подгруппа P была элементарной подсистемой группы A, необходимо и достаточно, чтобы P была сервантной подгруппой и выполнялось свойство $A \equiv P$.*

Ясно, что элементарные подсистемы группы A будут сервантными подгруппами. Поэтому из леммы 10 так же как в предыдущем параграфе вытекают следующие две теоремы.

Теорема 17. *Любая полная теория T абелевых групп является (P,e)-суперстабильной.*

Теорема 18. *Следующие свойства для полной теории T абелевых групп равносильны:*
(1) *T тотально (P,e)-стабильна;*
(2) *T является (P,e)-малой.*

Обозначение 3. Для абелевой группы A через $Sh_\omega(A)$ обозначим множество

$$\{\langle p,n\rangle \mid \alpha_{p,n}(A)=\omega, n\in\omega\} \cup \{p \mid \beta_p(A)=\omega\} \cup \{p \mid \gamma_p(A)=\omega\}.$$

Определение 19. Абелева группа A называется *шмелевски ω-ограниченной*, если множество $Sh_\omega(A)$ конечно. Как обычно, полную теорию T абелевых групп будем называть *шмелевски ω-ограниченной*, если таковыми являются ее модели.

Теорема 20. *Для того, чтобы теория абелевой группы A была (P,e)-малой, необходимо и достаточно, чтобы группа A была шмелевски ω-ограниченной.*

Из теоремы 20 и теоремы 18 получается следующая теорема.

Теорема 21. *Следующие свойства для полной теории T абелевых групп равносильны:*
(1) *T тотально (P,e)-стабильна;*
(2) *T является шмелевски ω-ограниченной.*

Теорема 22. *Для любой полной теории T абелевых групп ее (P,e)-спектр тождественно равен одному из следующих значений: 2^ω, ω, 2 и 1. Причем каждый из этих видов (P,e)-спектра реализуются для некоторой полной теории абелевых групп.*

5 (P,a)-стабильность и (P,a)-спектр

Теорема 23. *Для абелевой группы A ее теория $T = Th(A)$ тогда и только тогда является (P,a)-стабильной, когда группа A удовлетворяет следующим условиям:*

(B) *для любого простого числа p подгруппа $(pA)[p]$ группы A конечна;*

(C) *для любого простого числа p либо подгруппа $A[p]$ группы A конечна, либо ее шмелевский инвариант $\gamma_p(A)$ конечен.*

Так как элементарная подсистема является алгебраически замкнутой, из теоремы 20 получаем следующий факт.

(A) Если абелева группа A является (P,a)-малой, то группа A является шмелевски ω-ограниченной.

Предложение 24. *Если теория абелевой группы A является (P,a)-малой, то выполняется условие*

(D) *множество $W = \{p \mid \gamma_p(A) \neq 0\}$ конечно.*

Теорема 25. *Для того, чтобы полная теория абелевой группы A была тотально (P,a)-стабильной необходимо и достаточно, чтобы группа A была (P,a)-малой и выполнялись условия (B) и (C).*

Сформулируем оставшийся здесь вопрос в виде гипотезы.

Гипотеза. *Для того, чтобы полная теория абелевой группы A была тотально (P,a)-стабильной необходимо и достаточно, чтобы группа A была шмелевски ω-ограниченной и выполнялись условия* (B), (C) *и* (D).

Теорема 26. *Для любой полной теории T абелевых групп ее (P,a)-спектр либо максимальный, либо тождественно равен одному из следующих значений: 2^ω, ω, n, где n — натуральное число, $n \neq 0$. Причем каждый из этих видов (P,a)-спектра реализуются для некоторой полной теории абелевых групп.*

6 (P,s)-стабильность и (P,s)-спектр

Теорема 27. *Следующие условия для абелевой группы A равносильны.*

(1). Теория группы A является тотально (P,s)-стабильной.

(2). Теория группы A является (P, s)-стабильной.

(3). Группа A представляет собой прямую сумму конечной группы и конечного числа элементарных абелевых групп.

Теорема 28. *Для любой полной теории T абелевых групп ее (P, s)-спектр является либо максимальным, либо тождественно равен одному из следующих значений: ω и n, где $n \in \omega, n \neq 0$. Причем каждый из этих видов (P, s)-спектров реализуются для некоторой полной теории абелевых групп.*

Таким образом, мы видим, что (P, i)-спектры для различных $i \in \{p, e, a, s\}$ являются различными.

Список литературы

[1] Е. А. Палютин, Число P-обогащений абелевых групп, Алгебра и логика, **52**, 2 (2013), 255–258.

[2] Е. А. Палютин, P-стабильные абелевы группы, Алгебра и логика, **52**, 5 (2013), 606–631.

[3] Е. А. Палютин, P-суперстабильные абелевы группы. Вестник карагандинского университета, серия Математика, **69**, 1 (2014), 74–80.

[4] Е. А. Палютин, P-спектры абелевых групп. Алгебра и логика, **53**, 2 (2014), 216–255.

[5] Е. А.Палютин, Теории P-обогащений абелевых групп. Алгебра и логика, **54**, 2 (2015), 275-282.

[6] Е. А.Палютин, Тотально P-стабильные абелевы группы. Алгебра и логика, 54, 4(2015).

[7] Т. Г. Мустафин, Новые понятия стабильности теорий, Труды Советско-Французского коллоквиума по теории моделей, Караганда, 1990, 112–125.

[8] Е. А. Палютин, E^*-стабильные теории, Алгебра и логика, **42**, 2 (2003), 194–210.

[9] M. Morley, Categoricity in power, Trans. AMS, **114** (1965), 514–538.

[10] S. Shelah, Stable theories, Israel J. Math. 7 (1969), 187-202.

[11] М. А. Русалеев, Характеризация $(P,1)$-стабильных теорий, Алгебра и логика, **46**, 3 (2007), 346–359.

[12] М. А. Русалеев, Обобщенная стабильность абелевых групп без кручения, Алгебра и логика, **50**, 2 (2011), 231–245.

[13] Т. А. Нурмагамбетов, P-стабильность полных теорий абелевых групп, XI Межреспубл. конф. по мат. логике. Тез. сообщений, Казань, изд-во КГУ, 1992, 106.

[14] Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин, Математическая логика, Изд-во "Физматлит", Москва, 6-е издание, 2011, 357 стр.

[15] W. Hodges, Model theory, Cambridge University Press, 1993, 772 p.p.

[16] Л. Фукс, Бесконечные абелевы группы т. 1, перевод с английского, Издательство "Мир", Москва, 1974, 335 стр.

[17] W. Szmielew, Elementary properties of Abelian groups, Fund. Math., **41** (1955), 203–271.

[18] M. Ziegler, Model theory of modules, Ann. Pure and Appl. Logic, **26** (1984), 149–213.

КВАЗИПОРЯДКИ МОНОИДОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МНОЖЕСТВ (АЛГЕБР)

А. Г. Пинус*

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: ag.pinus@gmail.com

В работе [2] для изучения оператора алгебраического замыкания на подмножествах основных множеств универсальных алгебр $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ было предложено (и оказалось довольно эффективным в этих целях) рассмотрение некоторого квазипорядка $\leqslant_{Ihm\,\mathfrak{A}}$ на множестве A и основных множествах ряда расширений алгебры $\mathfrak{A}$. Этот квазипорядок на A индуцируется моноидом $Ihm\,\mathfrak{A}$ внутренних гомоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$. Напомним, что внутренним гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ называется любой гомоморфизм между ее подалгебрами. При этом операция умножения между элементами определяется как естественная операция суперпозиции частичных отображений (преобразований) множества $\mathfrak{A}$. Отношение же $\leqslant_{Ihm\,\mathfrak{A}}$ на A определяется следующим образом: для $a, b \in A$ $a \leqslant_{Ihm\,\mathfrak{A}} b$ тогда и только тогда, когда $\varphi(b) = a$ для некоторого $\varphi \in Ihm\,\mathfrak{A}$ или, что равносильно, когда существует гомоморфизм ψ алгебры $< b >_{\mathfrak{A}}$ на алгебру $< a >_{\mathfrak{A}}$ такой, что $\varphi(b) = a$. Здесь и далее $< c >_{\mathfrak{A}}$ для $c \in A$, есть подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$ порожденная элементом c. Рассмотрению свойств квазипорядков вида $\leqslant_{Ihm\,\mathfrak{A}}$, а так же взаимосвязи этих квазипорядков с другими производными структурами алгебры $\mathfrak{A}$ посвящены работы [1]–[3]. При этом квазипорядок $\leqslant$ на множестве A называется Ihm-дозволенным (Ihm-запрещенным), если существует универсальная алгебра $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ такая, что $\leqslant$ совпадает с $\leqslant_{Ihm\,\mathfrak{A}}$ (если ни для какой алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ квазипорядок $\leqslant_{Ihm\,\mathfrak{A}}$ не совпадает с $\leqslant$). В настоящей работе рассмотрена взаимосвязь квазипорядков на множестве A (алгебре $\mathfrak{A}$) с любыми моноидами (относительно операции суперпозиции) преобразований (частичных преобразований) множеств (универсальных алгебр).

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, по государственному заданию № 2014/138, проект 1052

1

Прежде всего остановимся на взаимосвязи квазипорядков на множестве A с моноидами преобразований этого множества. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый моноид преобразований множества A. По аналогии с определением квазипорядка $\leqslant_{Ihm\,\mathfrak{A}}$, квазипорядок $\leqslant_{\mathfrak{M}}$ определим следующим образом: для $a, b \in A$ положим $a \leqslant_{\mathfrak{M}} b$ тогда и только тогда, когда $a = \varphi(b)$ для некоторого $\varphi \in \mathfrak{M}$. Очевидно, что отношение $\leqslant_{\mathfrak{M}}$ является отношением квазипорядка (будем говорить "отношением квазипорядка, индуцированным моноидом $\mathfrak{M}$") на множестве A.

Заметим теперь, что любой квазипорядок $\leqslant$ на множестве A индуцируется (совпадает с $\leqslant_{\mathfrak{M}}$) некоторым моноидом $\mathfrak{M}$ преобразований множества A. Действительно, для каждого $a \in A$ рассмотрим отображение φ_a множества A в A определенное как

$$\varphi_a(b) = \begin{cases} a, & \text{если } a \leqslant b, \\ b, & \text{иначе.} \end{cases}$$

для любого $b \in A$. Пусть $\mathfrak{M}$ — моноид (относительно операции суперпозиции отображений A в A), порожденный совокупностью $\{\varphi_a | a \in A\}$. Непосредственно замечается, что для $a, b \in A$ и $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $\varphi(b) = a$ для некоторого $\psi \in \mathfrak{M}$. То есть $\leqslant$ совпадает с $\leqslant_{\mathfrak{M}}$. Тем самым изучение произвольных квазипорядков на множествах сводится к изучению квазипорядков индуцированных моноидами преобразований (частичных преобразований) этих множеств.

2

В этом пункте будут рассмотрены квазипорядки на основных множествах универсальных алгебр $\mathfrak{A}$ индуцированные теми или иными моноидами преобразований этих алгебр (традиционно рассматриваемыми в качестве производных структур этих алгебр): моноидом эндоморфизмов $End\,\mathfrak{A}$, группой автоморфизмов $Aut\,\mathfrak{A}$ моноидом мономорфизмов (изоморфных вложений $\mathfrak{A}$ в себя) $Mon\,\mathfrak{A}$ алгебры $\mathfrak{A}$. Соответственно, при выборе некоторого типа подобных моноидов — $End\,\mathfrak{A}$, $Aut\,\mathfrak{A}$, $Mon\,\mathfrak{A}$, квазипорядок $\leqslant$ на множестве A будем называть *End*- (*Aut*-, *Mon*-s)-дозволенным, если существует универсальная алгебра $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$, такая что $\leqslant$ совпадает с квазипорядком $\leqslant_{End\,\mathfrak{A}}$ ($\leqslant_{Aut\,\mathfrak{A}}$, $\leqslant_{Mon\,\mathfrak{A}}$). В противном случае квазипорядок $\leqslant$ будем называть *End*-(*Aut*-, *Mon*-) - запрещенным.

Существование End- (Aut-, Mon-)-дозволенных квазипорядков любой мощности, очевидно, связано с существованием универсальных алгебр произвольной мощности. Остановимся на вопросе существования End- (Aut-, Mon-)-запрещенных квазипорядков тех или иных мощностей и на некоторых особенностях как дозволенных так и запрещенных квазипорядков.

Непосредственно замечается, что любые одно и двухэлементные квазипорядки являются End-дозволенными.

Утверждение 1. *Существуют End-запрещенные квазипорядки любой мощности не меньшей трех.*

Доказательство. Пусть $|A| \geqslant 3$ и $\leqslant$ некоторое отношение квазипорядка на A без минимальных элементов и с единственной изолированной точкой a (т.е. такой, что для любого $b \in A$ из отношений $a \leqslant b$ либо $b \leqslant a$ вытекает равенство $b = a$). Допустим, что алгебра $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ такова, что $\leqslant$ совпадает с $\leqslant_{End\,\mathfrak{A}}$. Тогда для любого $b \in A \setminus \{a\}$ существует $\varphi_b \in End\,\mathfrak{A}$, такой что $\varphi(b) \neq b$ и, в то же время, $\varphi_b(a) = a$.

Так как совокупность неподвижных точек $Fix\varphi$ любого эндоморфизма φ алгебры $\mathfrak{A}$ образует ее подалгебру, то для подалгебры $Fix\varphi_b$ имеет место $a \in Fix\varphi_b$ и $b \notin Fix\varphi_b$. То есть $\bigcap\limits_{b \in A \setminus \{a\}} Fix\varphi_b = \{a\}$ и, значит, $\{a\}$ одноэлементная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, а константное отображение A в $\{a\}$ является эндоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$. То есть элемент a — наименьший элемент квазипорядка $\leqslant_{End\,\mathfrak{A}}$ на A в противоречии с выбором $\leqslant$. Утверждение доказано. $\square$

Очевидно, что любой Aut-дозволенный квазипорядок на множестве A является эквивалентностью на этом множестве. Соответствующее разбиение для которой есть разбиение множества A на орбиты относительно действия на A группы автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$. Без труда замечается, что верно и обратное.

Утверждение 2. *Любое отношение эквивалентности на произвольном множестве A является Aut-дозволенным.*

Доказательство. Действительно, пусть $\sim$ некоторое отношение эквивалентности на множестве A. Определим на A алгебру $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ сигнатуры σ состоящей из унарных функций $f_{a/\sim}$, определенных на A следующим образом: для $a \in A$ пусть $f_{a/\sim}$ определяет на $a/\sim$ некоторый цикл в случае когда $a/\sim$ конечен и тождественна на классах $b/\sim$ отличных от $a/\sim$. Если же $a/\sim$ бесконечен, то пусть $A_i (i \in A)$ — разбиение множества $a/\sim$ на счетные множества A_i и φ_i — некоторые фиксированные биекции множеств A_i на множество Z целых чисел. Для $b \in A_i$ пусть $f_{a/\sim} = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(b)+1)$ и $f_{a/\sim}$ тождественна на классах, отличных от $^{a}/_{\sim}$. Непосредственно замечается, что квазипорядок $\leqslant_{Aut\,\mathfrak{A}}$ в этом случае, совпадает с эквивалентностью $\sim$ и утверждение доказано. □

Так как $\leqslant_{Aut\,\mathfrak{A}}$ совпадает с $\leqslant_{Mon\,\mathfrak{A}}$ для конечных алгебр $\mathfrak{A}$, вопрос существования Mon-запрещенных квазипорядков имеет смысл лишь для бесконечных множеств A. И ответ на него очевидным образом положительный в силу столь же очевидной необходимости для подобных Mon-квазипорядков $< A; \leqslant >$ обладать следующим свойством:

$(*)$ для любых $a, b \in A$ отношение $a \leqslant b$ равносильно существованию изоморфного вложения φ множества $A; \leqslant$ в себя такого, что $\varphi(b) = a$.

Очевидно так же, что условие $(*)$ является не только необходимым, но и достаточным условием того, что бы квазипорядок $< A; \leqslant >$ был Mon-квазипорядком (совпадал с квазипорядком $\leqslant_{Mon\,\mathfrak{A}}$ для некоторой алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$). Действительно, пусть квазиупорядоченное множество $< A; \leqslant >$ обладает свойством $(*)$. Определим на A функцию $f(x, y)$ следующим образом: для $a, b \in A$

$$f(a,b) = \begin{cases} a, & \text{если } a \leqslant b, \\ b, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что мономорфизмы алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ суть мономорфизмы множества $< A; \leqslant >$. В силу же того, что $< A; \leqslant >$ обладает свойством $(*)$ получаем совпадение квазипорядков $\leqslant$ и $\leqslant_{Mon\,\mathfrak{A}}$.

3

Наконец несколько слов в обосновыние интереса к квазипорядкам $\leqslant_{End\,\mathfrak{A}}$ на алгебрах. Напомним, что примитивными формулами сигнатуры σ называются элементарные формулы вида

$$\exists x_1, \ldots, x_n \Phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m),$$

где Φ некоторая конъюнкция термальных равенств сигнатуры σ. Очевидно, что если $\Phi(y)$ — некоторая примитивная формула сигнатуры σ и для алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ и ее элементов a, b имеют место $\mathfrak{A} \models \Phi(b)$ и $a \leqslant_{End\,\mathfrak{A}} b$, то $\mathfrak{A} \models \Phi(a)$.

Для конечных алгебр $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ верно и обратное: если для любой примитивной формулы $\Phi(y)$ из истинности $\Phi(b)$ в $\mathfrak{A}$ следует $\mathfrak{A} \models \Phi(a)$, то $a \leqslant_{End\,\mathfrak{A}} b$.

Для любого $B \subseteq A$ через $\bar{B}^{pr}_{\mathfrak{A}}$ обозначим множество $\{c \in A|$ для любой примитивной формулы $\Phi(y)$, такой что для каждого $b \in B$ и $\mathfrak{A} \vDash \Phi(b)$ имеет место $\mathfrak{A} \vDash \Phi(c)\}$ — примитивное замыкание множества B в $\mathfrak{A}$. Таким образом, $\overline{\{b\}}^{pr}_{\mathfrak{A}}$ совпадает с главным идеалом порожденным в $< A; \leqslant_{End\,\mathfrak{A}}>$ элементом b для конечных алгебр $\mathfrak{A}$.

Для любой алгебры $\mathfrak{A}$, любой примитивной формулы $\Phi(y)$, любого множества I и любого элемента $f \in \mathfrak{A}^I$ имеем $\mathfrak{A}^I \vDash \Phi(f)$ тогда и только тогда, когда для любого $i \in I$ выполнено $\mathfrak{A} \vDash \Phi(f(i))$.

Описание примитивного замыкание одноэлементных множеств в терминах квазипорядка $\leqslant_{End\,\mathfrak{A}}$ для конечных алгебр (так же как это сделано в [1] для алгебраических замыканий и квазипорядка $\leqslant_{Ihm\,\mathfrak{A}}$) может быть расширено на любые множества $B \subseteq A$ путем перехода к End-квазипорядку на расширении $\mathfrak{A}^A$ алгебры $\mathfrak{A}$.

Фиксируем некоторое вполне упорядочение $\leqslant$ множества A. Для любых $B \subseteq A$ и $a \in A$ пусть d_B, $\bar{a} \in \mathfrak{A}^A$ таковы, что

$$d_B(b) = \begin{cases} b, \text{ если } b \in B, \\ b_0, \text{ если } b \notin B \end{cases}$$

$$\bar{a}(b) = a \text{ для любого } b \in B,$$

здесь b_0 — наименьший элемент множества B относительно порядка $\leqslant$. Тогда, в силу замеченного выше имеет место

Теорема 3. *Для любой конечной алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$, любых $B \subseteq A$ и $a \in A$ включение $a \in \bar{B}^{pr}_{\mathfrak{A}}$ равносильно вхождению $\bar{a}$ в главный идеал квазиупорядоченного множества $< A^A; \leqslant_{End\,\mathfrak{A}^A}>$, порожденный элементом d_B.*

Список литературы

[1] А. Г. Пинус О квазипорядке индуцированном внутренними гомоморфизмами универсальных алгебр и об операторе алгебраического замыкания на алгебрах.- Сиб. матем. журнал, **56**, 3 (2015), 129–136.

[2] А. Г. Пинус, Об Ihm-дозволенных и Ihm-запрещенных квазипорядках, в печати.

[3] А. Г. Пинус, Ihm-квазипорядок и производные структуры универсальных алгебр. 1-Алгебраически полные алгебры.-в печати.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КЛАССИЧЕСКОЙ И АЛЬТЕРНАТИВНОЙ БЕСКОНЕЧНОСТИ

Л. Н. Победин

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: Pobedinle@mail.ru

Настоящая статья является продолжением работы [1].

Последовательным изучением бесконечности занимается теория множеств. В настоящее время мы имеем две таких теории: одна классическая теория множеств (ZF), другая — альтернативная теория множеств (AST). Автором альтернативной теории множеств является чешский математик П. Вопенка, монография которого издана в Институте математики СО РАН в 2004 г. [2]. Наличие двух таких теорий вызывает необходимость их сравнительного анализа.

Классическая теория начинается с того, что позволяет нам мыслить бесконечные объекты как множество. За этим безобидным (внешне) утверждением скрывается достаточно сильное предположение. Действительно первым бесконечным объектом, с которым мы встречаемся в математике, является натуральный ряд чисел. Представить его в виде множества N означает, что мы можем пробежать весь натуральный ряд. Но это невозможно. Тем не менее мы позволяем себе такой мысленный эксперимент, расширяя тем самым наши ресурсные возможности, а вернее, просто не обращаем на них внимание.

Наглядным примером такого безресурсного подхода является концепция обобщенной вычислимости, т. е. вычислимости на машинах Тьюринга с оракулом. Эта концепция интересна еще и тем, что соединяет в себе наиболее конструктивный подход (понятие вычислимости) с наименее конструктивным (оракулом).

Как хорошо известно, первым рекурсивно неразрешимым вопросом является вопрос об остановке машины Тьюринга. В обобщенной вычислимости машина с номером m может задавать вопросы об остановке другой машины x оракулу $F(x)$ и, получив тот или иной ответ (0, 1 — да или нет), продолжить работу дальше по своей программе. Далее можно строить бесконечные иерархии обобщенно вычислимых функций, которые по сути являются иерархиями с бесконечным перебором натуральных чисел. Дальнейшие исследования показали, что более естественно рассматривать иерархии обобщенно вычислимых функций с двуместным оракулом $H(x, y)$ [1]. Такой оракул (по построению) всегда обладает *селекторной функцией* (счетным аналогом аксиомы выбора) и называется *регулярным.*

Итак, любая содержательная теория обобщенно вычислимых функций должна обладать следующими тремя свойствами:

(1). Оракул $H(x, y)$ наделен трансфинитной структурой.

(2). Оракул $H(x, y)$ нормален (т. е. полуразрешает проблему остановки).

(3). Оракул $H(x, y)$ регулярен.

Следует отметить, что построения иерархий обобщенно вычислимых функций нашли приложения в теории рекурсивных функционалов, т. е. справедлива теорема [3].

Теорема 1. *Оракул $H_G(x, y)$ регулярен, где $G(\alpha)$ — функционал типа* 2.

Альтернативная теория множеств предлагает отказаться от могущества, предложенного Г. Кантором, рассматривать натуральный ряд как множество. Автор AST считает такую бесконечность искусственной. Альтернативная теория множеств занимается *естественной бесконечностью*, т. е. такой формой бесконечности, которую мы можем обнаружить в результате, пусть даже мысленного, опыта. Здесь мы предложим свою интерпретацию AST, основанную на понятии *ограниченного ресурса*, предполагая, что даже в мысленных экспериментах такой ресурс необходим для того, чтобы отделить мысль от фантазии.

В AST роль такого ограниченного ресурса играет понятие *горизонта.*

Каждый наш взгляд, куда бы он ни был направлен, всегда чем-то ограничен. Либо на его пути оказывается твердая граница, четко его пресекающая, либо он ограничен горизонтом, в направлении которого утрачивается ясность нашего видения. Сам горизонт признается четким явлением, однако, то, что находится перед горизонтом, выделяется нечетко. Вернее, по направлению к горизонту мы встречаемся с феноменом нечеткости. Вот на эту нечеткость возлагается та роль, которую играет бесконечность в классической теории множеств.

Как могла бы выглядеть теория обобщенной вычислимости в AST? Для этого нам пришлось бы определить понятие горизонта. Пусть это будет достаточно большое натуральное число S. Тогда примем следующее соглашение.

Если машина y останавливается за число тактов своей работы меньшее, чем S, то оракул H на вопрос машины x дает ответ $H(x, y) = 0$. Если же машина y не останавливается за S тактов своей работы, то будем считать, что в этом случае машина y работает бесконечно, и ответ оракула полагаем $H(x, y) = 1$. Тогда мы можем повторить конструкцию построения двуместного оракула $H_G(x, y)$ [3], несколько изменяя семантику вопросов и ответов. Сформулируем этот результат в следующей теореме, которую мы здесь приводим без доказательства.

Теорема 2. *В* AST *существует оракул $H(x, y)$, обладающий следующими свойствами:*

(i). *Оракул $H(x, y)$ наделен трансфинитной структурой.*

(ii). *Оракул $H(x, y)$ нормален.*

(iii). *Оракул $H(x, y)$ регулярен.*

Следует отдельно заметить, что построение оракула $H(x, y)$ в AST может иметь приложения в компьютерной теории, поскольку он реализован в конечном мире. А именно, мы можем мыслить совокупностью машин, работающих в диалоговом режиме. Каждая машина может задавать вопрос о работе другой машины. Общение этих машин осуществляется через оракула. Сам же оракул будет являться накопителем обобщенного знания.

В заключение мы еще раз сформулируем тезис, приведенный в [1].

Рассмотрев одну математическую конструкцию (обобщенную вычислимость) в ZF и AST, мы приходим к следующим выводам, которые сформулируем в виде тезисов. Начнем с AST.

(1). В альтернативной теории множеств понятие конечного является четким понятием, т. е. все то, что ограничено горизонтом, является конечным. Однако, любая теория множеств не может обойтись без понятия бесконечного. В AST роль бесконечности берут на себя объекты, лежащие за горизонтом. Это нечеткие объекты.

(2). Теория множеств ZF является стройной теорией бесконечных множеств. В этой теории понятие бесконечного получает полную четкость. Однако, следует заметить, что понятие конечного в этой теории перестает быть четким. Это требует пояснения. Разумеется, в ZF есть четкое определение конечного множества, но два числа 10^{10} и $10^{10^{10}}$ в этой теории считаются равноконечными. Заметим, что по современным представлениям второе число превышает число атомов во Вселенной. Поэтому, когда мы рассматриваем конечное множество в ZF, то не очень понятно, что мы имеем в виду. Понятие конечного в ZF становится нечетким.

Мы закончим нашу статью следующим тезисом, состоящим из двух пунктов.

П. 1. Можно работать в теории множеств, в которой понятие бесконечного является четким, тогда в этой теории понятие конечного является нечетким (ярким примером является ZF).

П. 2. Если мы желаем работать в теории множеств, в которой понятие конечного является четким, тогда в этой теории понятие бесконечного становится нечетким (пример AST).

Резюме. Понятие конечного и бесконечного взаимосвязаны. Обращая внимание на одно из них, следует внимательно смотреть, что происходит с симметричным понятием.

Список литературы

[1] Л. Н. Победин, Обобщенная вычислимость в классической и альтернативной бесконечности, Algebra and Model Theory 9, Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University, 2013, 33–39.

[2] П. Вопенка, Альтернативная теория множеств. Новый взгляд на бесконечность, Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 2004.

[3] Л. Н. Победин, Вычислимость с двуместным оракулом, Сиб. мат. Ж., **35**, 5 (1994), 1138–1147.

УБЫВАЮЩИЕ ИНВАРИАНТНЫЕ РЯДЫ ПОДГРУПП ПРОКОНЕЧНЫХ ГРУПП

К. Н. Пономарёв*

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: ponomaryov@ngs.ru

В классе проконечных групп применяются понятия теории инвариантных рядов групп (см. глава 13 § 56 в монографии [1]). Установлены результаты о строении убывающих инвариантных рядов бесконечных проконечных групп.

Определение 1. *Убывающим инвариантным рядом подгрупп* топологической группы G называется строго убывающая вполне упорядоченная по убыванию система замкнутых нормальных подгрупп группы G, исходящая из всей группы G, и доходящая до единичной подгруппы.

Для краткости далее под *рядом подгрупп группы* G будем понимать убывающий инвариантный ряд подгрупп этой группы.

Группы ряда подгрупп образуют вполне упорядоченное множество относительно порядка обратного включению: $G_1 \supseteq G_2 \iff G_1 \leqslant G_2$. Это позволяет установить соответствие групп такого ряда ординальным числам, обращающее порядок включения. Будем нумеровать группы ряда подгрупп согласно этому соответствию:

$$\mathfrak{R}: \ G = G_0 > \ldots > G_\alpha > \ldots > G_\delta = e, \ \alpha < \delta. \tag{1}$$

Значит, если ординал $\beta < \delta$ не является предельным, то для предшествующего ему ординала α имеем $\beta = \alpha + 1$. На группе G_α происходит сужение убывающей системы подгрупп: $G_\alpha \supseteq G_{\alpha+1} = G_\beta$ к некоторой подгруппе G_β группы G_α. А если β — предельный ординал, то $\beta = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} \alpha$, в этом случае выполняется соотношение: $G_\beta = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} G_\alpha$. В частности, $\bigcap\limits_{\alpha<\delta} G_\alpha = G_\delta = e$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, по государственному заданию N.2014/138, проект 1052

Определение 2. Ординальное число $\delta = l(\mathfrak{R})$ называем *длиной ряда подгрупп* (1), а *мощностью такого ряда* называем мощность этого ординала, $p(\mathfrak{R}) = |l(\mathfrak{R})|$.

Особую роль среди убывающих рядов проконечных групп имеют инвариантные ряды следующего типа.

Определение 3. Ряд подгрупп (1) бесконечной группы G называется *калиброванным рядом*, если для любого непредельного ординала $\beta = \alpha+1$ фактор-группа сужения G_α/G_β образует конечную группу. Иными словами, на каждом ординале $\alpha < \delta$ происходит сужение группы ряда G_α до ее нормальной подгруппы конечного индекса $G_{\alpha+1}$.

Для этого класса убывающих рядов доказываем

Теорема 4. *Рассмотрим бесконечную проконечную группу G веса $w(G)$.*

Утверждается, что в группе G имеются калиброванные убывающие инвариантные ряды подгрупп $\mathfrak{C}$. При этом мощность любого такого ряда совпадает с весом группы

$$p(\mathfrak{C}) = w(G).$$

Отсюда выводится общее утверждение.

Следствие 5. *Любой убывающий ряд подгрупп бесконечной проконечной группы G уплотняется до некоторого калиброванного ряда $\mathfrak{C}$ мощности $p(\mathfrak{C}) = w(G)$.*

Из следствия 5 выводим основной результат о мощности убывающих рядов проконечных групп:

Теорема 6. *Мощность любого убывающего ряда подгрупп (*1*) бесконечной проконечной группы G не превосходит веса группы:*

$$p(\mathfrak{R}) \leqslant w(G).$$

В качестве применения этих результатов доказываем:

Теорема 7. *Мощность бесконечной проконечной группы G выражается экспонентой ее веса:*

$$|G| = 2^{w(G)}.$$

Отметим, что хотя это утверждение мало известно, оно не является новым, поскольку вытекает из общей теоремы Архангельского о мощности однородных компактных хаусдорфовых топологических пространств. Эта теорема (теорема 1.13 [2]) указана в обзоре [3] как теорема 1.27.

Статья состоит из пяти разделов.

В первом разделе работы напоминаем известные понятия из общей топологии. Инвариантные ряды подгрупп представляют аппарат локального изучения строения группы в окрестности единицы. Изучаются топологические группы, и основным служит понятие локального веса такой группы. Для проконечных групп оно приводит к понятию веса группы.

Второй раздел посвящен выбору системы фундаментальных окрестностей единицы проконечной группы мощности ее веса. Она образована некоторыми открытыми подгруппами этой группы. Этот выбор осуществляется в предложении 12 с помощью теоремы Александрова — Урысона.

Центральной частью статьи является **третий раздел**, в котором изучаются калиброванные убывающие инвариантные ряды и доказывается теорема 4.

Четвертый раздел отведен теории уплотнений нормальных рядов. Из теоремы Куроша о подгруппах выводим утверждение следствия 5 и теоремы 6.

В заключительном **пятом разделе** выводим теорему 7.

В статье используются различные факты теории порядковых и кардинальных чисел, а также сведения из общей топологии. Они изложены в монографии [4]. Разнообразные свойства проконечных групп цитируются по книге [5].

Автор выражает искреннюю признательность А. В. Архангельскому и К. Л. Козлову за консультации по строению однородных топологических пространств. Выражаю особую благодарность Л. Рибесу за консультации по строению проконечных групп.

1 Локальный вес

Будем рассматривать отделимое топологическое пространство T. Топология определяется фильтром открытых множеств, база которого называется *открытой базой пространства* T. Наименьшая мощность открытой базы называется *весом топологического пространства*, она обозначается $w(T)$. Известная теорема Александрова — Урысона утверждает, что в любой открытой базе пространства найдется подмножество мощности $w(T)$, которое также образует открытую базу этого пространства (теорема 20 в главе 4 § 4 [4]).

А в каждой точке $t \in T$ топология определяется фильтром открытых окрестностей этой точки. Он образован открытыми множествами $u \subseteq T$, содержащими эту точку: $u \succ t$. В представлении этого фильтра также используют понятие базы:

Определение 8. Система открытых окрестностей U_t точки t называется *открытой базой топологии в этой точке*, если она образует базу фильтра открытых окрестностей этой точки, *мажорирует семейство открытых окрестностей*:

$$(\forall u \succ t)\ (\exists v \in U_t)\ \ v \subseteq u.$$

Иногда такая система называется *фундаментальной или базисной системой окрестностей точки* $t \in T$.

Обратим внимание на два очевидных свойства базисной системы окрестностей:

Замечание. Любая фундаментальная система окрестностей U_t *направлена вниз по включению:* $(\forall u, v \in U_t)\ (\exists\, w \in U_t)\ w \subseteq u \cap v$. Пространство T предполагается отделимым в точке t, $\bigcap\limits_{u \succ t} u = \{t\}$, поэтому любая базисная система окрестностей *отделяет точку* t: $\bigcap\limits_{u \in U_t} u = \{t\}$.

Определение 9. *Локальным весом топологического пространства* T *в точке* t называют наименьшее кардинальное число $w(T, t)$, выражающее мощность некоторой открытой базы топологии пространства T в точке t:

$$w(T, t) = \min\{|\mathcal{B}|,\ \mathcal{B} \text{ — открытая база пространства } T \text{ в точке } t\}.$$

Будем применять понятие локального веса к отделимым топологическим группам. Пространство топологической группы однородное, поэтому *локальный вес такой группы* (точнее, ее подлежащего топологического пространства) в любой точке совпадает с локальным весом в единице, он определяется по фундаментальным системам окрестностей единицы. Такой вес называется *локальным весом группы.*

Далее будем изучать проконечные группы. Для них известно:

Замечание. Локальный вес проконечной группы совпадает с общим весом ее топологического пространства.

Это доказано в предложении 2.6.1(b) [5].

Через $w(G)$ будем обозначать вес проконечной группы G, он совпадает с локальным весом в любой ее точке. Отметим, что группа G является конечной тогда и только тогда, когда у нее дискретная топология, $w(G) = 1$. А если группа бесконечная, то ее вес выражается некоторым бесконечным кардинальным числом, $w(G) = \aleph_i$.

Из разложения группы в дизъюнктное объединение смежных классов по ее подгруппе выводится свойство топологических групп:

Замечание. Рассмотрим топологическую группу G. Тогда любая открытая подгруппа такой группы оказывается также замкнутой подгруппой. Кроме того, если группа G компактная, то любая ее открытая подгруппа имеет в ней конечный индекс.

Топологическое пространство проконечной группы компактное. Будем часто использовать это замечание в применении к проконечным группам.

Также будем использовать замечание о мощности семейства конечных множеств:

Замечание. Рассмотрим бесконечное кардинальное число $\aleph$ и семейство непустых конечных множеств $U_i,\ i \in I$, мощности $\aleph : |I| = \aleph$. Тогда это семейство в целом образовано числом элементов мощности не более $\aleph$: $|\bigcup\limits_{i\in I} U_i| \leqslant \aleph$.

Предложение 10. *Рассмотрим бесконечное порядковое число γ мощности $\aleph = |\gamma|$. Рассмотрим множество непредельных ординалов меньших γ:*

$$\gamma^{unlim} = \{\beta < \gamma|\ \beta \text{ — \textit{непредельное порядковое число}}\}.$$

Утверждается, что оно имеет ту же мощность, что и исходный ординал: $|\gamma^{unlim}| = \aleph = |\gamma|$.

Доказательство. Вначале рассмотрим случай, когда γ — начальное порядковое число мощности $\aleph$. В этом случае γ — предельный ординал, значит $\gamma = \bigcup\limits_{\beta<\gamma} \beta$. Обозначим множество предельных ординалов, меньших γ :

$$\gamma^{lim} = \{\beta < \gamma|\ \beta \text{ — предельный ординал}\}.$$

В силу структуры порядковых чисел каждый предельный ординал α представляется суммой $\alpha = \beta + \omega$, в которой β — предшествующий предельный ординал, а ω — порядковое число типа натуральных чисел. Отсюда вытекает соотношение мощностей

$$|\gamma^{unlim}| = |\gamma^{lim}| \cdot \aleph_0.$$

Получаем неравенство, $|\gamma^{lim}| \leqslant |\gamma^{unlim}|$, при этом мощность $|\gamma^{unlim}|$ оказывается бесконечной. Понятно, что γ представляется дизъюнктным объединением

$$\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma, \beta\in\gamma^{lim}} (\beta + \omega) = \gamma^{lim} \cup \gamma^{unlim}.$$

Поэтому $\aleph = |\gamma^{lim}| + |\gamma^{unlim}|$. Поскольку $|\gamma^{lim}| \leqslant |\gamma^{unlim}|$ отсюда следует равенство $|\gamma^{unlim}| = \aleph$. Когда γ — начальное порядковое число утверждение справедливо.

В общем случае порядковое число представляется суммой порядковых чисел:

$$\gamma = \delta + \beta,$$

в которой δ — начальное порядковое число мощности $\aleph$. В силу доказанного $|\delta^{unlim}| = \aleph$. Однако, $\gamma^{unlim} \supseteq \delta^{unlim}$, значит

$$\aleph = |\gamma| \geqslant |\gamma^{unlim}| \geqslant |\delta^{unlim}| = \aleph$$

и в общем случае $|\gamma^{unlim}| = \aleph$. Предложение доказано. □

2 Вес проконечной группы

Замечание. По определению проконечной группы в ней имеются фундаментальные системы окрестностей единицы, образованные открытыми (и замкнутыми) подгруппами (конечного индекса).

В классе проконечных групп и открытых окрестностей единицы, образованных подгруппами, необходимые свойства базисной системы окрестностей из замечания 1 оказываются достаточными для того, чтобы такая система окрестностей была фундаментальной.

Лемма 11. *Рассмотрим проконечную группу G и систему открытых подгрупп $\{U_i|\ i \in I\}$ этой группы, которое отделяет единицу, $\cap U_i = e$.*

Пополним эту систему до направленной системы открытых окрестностей единицы, полученных конечными пересечениями этих окрестностей:

$$\{\bigcap_{i\in J} U_i|\ J \text{ — конечное множество индексов}\}.$$

Утверждается, что эта отделимая и направленная система окрестностей единицы образует базисную систему окрестностей единицы.

Это утверждение доказано в предложении 2.1.5(b) монографии [5].

Замечание. Отметим, что если в условиях леммы 11 система открытых подгрупп $\{U_i|\ i \in I\}$ бесконечная, $\aleph = |I| = \infty$, то по замечанию 1 построенная в лемме фундаментальная система окрестностей также имеет мощность $\aleph$.

Предложение 12. *Рассмотрим проконечную группу G веса $w(G)$ и некоторую базисную систему окрестностей единицы, образованную открытыми подгруппами группы.*

Утверждается, что уже в этой системе найдется подсистема мощности $w(G)$, которая также образует фундаментальную систему окрестностей единицы.

Доказательство. Заметим вначале, что если проконечная группа G конечная, то ее топология дискретная. Утверждение очевидно. Далее предполагаем G бесконечной проконечной группой, вес такой группы выражается некоторым бесконечным кардинальным числом.

Для доказательства выберем некоторую фундаментальную систему окрестностей единицы группы G, образованную открытыми подгруппами группы G:

$$\mathcal{U} = \{U_i,\ i \in I\}.$$

Используем сдвиги и образуем открытую базу пространства группы:

$$G\mathcal{U} = \{gU_i|\ g \in G,\ i \in I\}.$$

Для каждой подгруппы $U_i \in \mathcal{U}$ в эту базу попадают все классы смежности этой подгруппы,

$$G\mathcal{U} = \{gU_i|\ g \in G\backslash U_i,\ i \in I\}.$$

Число этих классов смежности для каждой подгруппы U_i конечно в силу замечания 1. Элемент $U \in G\mathcal{U}$ принадлежит $\mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда $e \in U$, когда он образует подгруппу.

По теореме Александрова — Урысона в этой базе $G\mathcal{U}$ найдется подсистема $\mathcal{V}$ мощности $w(G)$, которая также образует базу пространства группы G. Однако она может включать не только подгруппы, а классы смежности. Используем сдвиги и пополним эту базу до новой базы пространства $G\mathcal{V} \subseteq G\mathcal{U}$. По замечанию 1 эта база также имеет мощность $w(G)$.

Выделим все элементы этой базы, которые образуют подгруппы. Образуем систему открытых подгрупп $\mathcal{W}$. По отмеченному выше свойству выполняется включение: $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$. К тому же $|\mathcal{W}| \leqslant |G\mathcal{V}| = w(G)$. Это — некоторая система окрестностей единицы, образованная открытыми подгруппами из $\mathcal{U}$ мощности не выше $w(G)$. Проверим, что она образует фундаментальную систему окрестностей единицы мощности $w(G)$.

В самом деле, убедимся, что $\mathcal{W}$ мажорирует открытый базис единицы $\mathcal{U}$. Рассмотрим произвольную подгруппу $U \in \mathcal{U}$. Поскольку $\mathcal{V}$ база пространства, найдется $gU_i \in \mathcal{V}$, для которого $U \supseteq gU_i$. Тогда $U_i \in G\mathcal{V}$, и по построению $U_i \in \mathcal{W}$.

Замечание. Если для подгрупп U и U_i группы G и элемента $g \in G$ выполняется включение $U \supseteq gU_i$, то $g \in U$ и $U \supseteq U_i$.

В самом деле, из включения следует $g = ge \in U$. Тогда $gU = U \supseteq gU_i$. Значит $U \supseteq U_i$.

Т.о., система открытых подгрупп $\mathcal{W}$ мажорирует фундаментальную систему окрестностей единицы $\mathcal{U}$ группы G. Она является базисной системой окрестностей единицы группы. Поскольку $|\mathcal{W}| \leqslant w(G)$, а $w(G)$ по замечанию 1 совпадает с локальным весом группы, выполняется равенство $|\mathcal{W}| = w(G)$. Предложение доказано. □

Будем применять все эти результаты к системам нормальных подгрупп. Возможность этого следует из таких замечаний.

Лемма 13. *В проконечной группе имеются фундаментальные системы окрестностей единицы, образованные открытыми (и замкнутыми) нормальными подгруппами (конечного индекса).*

Доказательство. В самом деле, в силу замечания 1 любая открытая подгруппа U проконечной группы имеет конечный индекс. Поэтому ее ядро $\bigcap\limits_{g \in G} U^g$ образовано пересечением конечного числа сопряженных подгрупп U^g для системы представителей смежных классов $g \in G \backslash U$. Оно образует нормальную открытую подгруппу.

Используем замечание 2 и выберем некоторую фундаментальную систему окрестностей единицы из открытых подгрупп. Для каждой подгруппы U этой системы определим ее ядро. Все ядра таких подгрупп составят новую базисную систему окрестностей единицы. Она образована нормальными открытыми подгруппами и эквивалентна исходной системе окрестностей. Это доказывает лемму. □

Замечание. Применять лемму 11 будем к системе открытых нормальных подгрупп U_i. Тогда утверждение приводит к фундаментальной системе окрестностей единицы группы G, образованной нормальными открытыми подгруппами. По замечанию 1 это — нормальные замкнутые подгруппы конечного индекса.

Будем использовать очевидное следствие предложения 12 и леммы 13:

Замечание. Рассмотрим проконечную группу G веса $w(G)$.

Утверждается, что в ней найдется базисная система окрестностей единицы мощности $w(G)$, которая образована открытыми нормальными подгруппами.

3 Калиброванные ряды подгрупп проконечных групп

Будем доказывать теорему 4. Рассмотрим бесконечную проконечную группу G веса $w(G)$.

Покажем, что в группе G имеются калиброванные убывающие инвариантные ряды подгрупп. При этом мощность любого такого ряда совпадает с весом группы $w(G)$.

Для доказательства теоремы введем ряд новых понятий.

Используем лемму 13 и рассмотрим фундаментальную систему окрестностей единицы I группы из открытых нормальных делителей группы G конечного индекса. По замечанию 1 эта система подгрупп отделяет единицу группы: $\bigcap I = \bigcap\limits_{i \in I} i = e$. Общее число элементов базы I выражается некоторым кардинальным числом $|I| = \aleph \geqslant w(G) > 1$.

3.1 Исходящий ряд

Покажем как, исходя из базы I, построить убывающий калиброванный инвариантный ряд подгрупп.

Вначале полагаем $G_0 = G$. Далее, предположим, что указанный ряд построен для ординальных чисел α, меньших β. Определим G_β следующим образом в зависимости от типа ординала β:

1. Число β не предельное, $\beta = \alpha + 1$ для некоторого предшествующего $\alpha < \beta$. Если $G_\alpha = e$, то построение ряда завершаем. Далее рассматриваем другой случай: $G_\alpha \neq e$.

   В силу отделимости системы I найдется $i \in I$ для которого $G_\alpha \cap i \neq G_\alpha$. Полагаем $G_\beta = G_\alpha \cap i$, вовлекаем в построение ряда подгруппу $i \in I$, сужаем построенный ряд посредством пересечения с этой окрестностью i.

2. Число β предельное, $\beta = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} \alpha$. Полагаем $G_\beta = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} G_\alpha$.

Продолжаем этот процесс. Строим систему подгрупп G_β, образованных общими частями групп i из базы, $i \in I$. Она вполне определяется последовательностью вовлекаемых в это пересечение подгрупп $\{i_\beta\}$, занумерованных непредельными ординальными числами β. Будем называть такие подгруппы *использованными при построении ряда.* По построению в этой последовательности нет повторяющихся подгрупп, все элементы попарно различны. В силу предложения 10 заключаем:

Замечание. Поскольку $\bigcap I = e$, эта система подгрупп заканчивается на первом ординальном числе γ, для которого получается единичная подгруппа $G_\gamma = e$. Такое число найдется уже среди множества порядковых чисел мощности не выше $\aleph : |\gamma| \leqslant |I| = \aleph$.

А для любого меньшего ординала $\beta < \gamma$ будет выполняться неравенство $G_\beta \neq e$. Значит, в результате этого построения получаем ряд подгрупп длины γ:

$$G = G_0 > G_1 > \ldots > G_\beta > \ldots > G_\gamma = e. \tag{2}$$

Подгруппы G_α получаются пересечением наборов открыто-замкнутых нормальных подгрупп конечного индекса семейства I. Это замкнутые подгруппы проконечной группы G. Подгруппы $i \in I$ конечного индекса в группе G, поэтому для непредельного ординала α на шаге α происходит сужение подгруппы G_β до подгруппы $G_\alpha = G_\beta \cap i$ конечного индекса. Ряд подгрупп (2) является калиброванным. Будем называть его: *построенным исходя из базы* I. Это доказывает существование калиброванного ряда.

3.2 Мощность исходящего ряда

Установим границы мощности исходящего ряда.

Лемма 14. *Рассмотрим произвольный калиброванный ряд подгрупп (2) группы G, построенный исходя из базы I.*

Утверждается, что для мощности этого ряда выполняется двойное неравенство:

$$w(G) \leqslant |\gamma| \leqslant |I|.$$

Доказательство. В самом деле, верхняя граница установлена в замечании 3.1. Чтобы установить нижнюю границу будем рассуждать от противного. Предположим $|\gamma| < w(G)$, мощность ординала γ строго меньше мощности $w(G)$.

Обозначим множество окрестностей из I, использованных при построении инвариантного ряда (2):

$$I_\gamma = \{i_\alpha | \ \alpha \leqslant \gamma, \ \alpha - \text{непредельный ординал,}\}.$$

Из предложения 10 следует, что мощность этого множества не превосходит мощности ординала γ, $|I_\gamma| \leqslant |\gamma|$. Значит оно имеет мощность меньше $w(G)$: $|I_\gamma| < w(G)$.

Поскольку $e = G_\gamma = \cap I_\gamma$, семейство окрестностей I_γ отделяет единицу группы. Используем замечание 2 и дополним систему I_γ до фундаментальной системы окрестностей единицы $\hat{I_\gamma}$ из открытых нормальных делителей группы G конечного индекса. По замечанию 2 эта система имеет ту же мощность: $|\hat{I_\gamma}| = |I_\gamma|$. Поэтому мощность этой системы $|\hat{I_\gamma}| = |I_\gamma|$ также строго меньше $w(G)$. Группа G оказывается группой меньшего веса, чем $w(G)$. Получили противоречие.

Значит, действительно, $|\gamma| \geqslant w(G)$. Лемма доказана. □

Лемма 15. *В любой бесконечной проконечной группе веса $w(G)$ найдется калиброванный убывающий инвариантный ряд подгрупп мощности $w(G)$. Таковым является любой калиброванный ряд, исходящий из базы окрестностей этой группы I минимальной мощности $w(G)$.*

Доказательство. В самом деле, заметим вначале, что по замечанию 2 найдется фундаментальная система открытых окрестностей единицы I мощности $w(G)$, образованная нормальными подгруппами. Исходя из базы I, строим калиброванный ряд подгрупп:

$$G = G_0 > G_1 > \ldots > G_\beta > \ldots > G_\gamma = e. \tag{3}$$

В силу леммы 14 $|\gamma| = w(G)$ он оказывается калиброванным рядом мощности $w(G)$. Лемма доказана. □

Из леммы 15 вытекает первое утверждение теоремы 4. Докажем второе утверждение.

3.3 Калиброванные ряды — исходящие ряды

Рассмотрим произвольный калиброванный ряд подгрупп группы G:

$$G = G_0 > G_1 > \ldots > G_\beta > \ldots > G_\gamma = e. \tag{4}$$

Покажем, что $|\gamma| = w(G)$. Для этого по группе G определим такую (универсальную) базу $J = J(G)$ мощности веса группы, $|J| = w(G)$, исходя из которой строится любой калиброванный ряд подгрупп (4).

По замечанию 2 выберем вначале некоторую открытую базу I единицы группы G из открытых нормальных подгрупп мощности веса группы. Она образована подгруппами конечного индекса. Пополним эту базу конечными пересечениями ее подгрупп до новой базы I' той же мощности в силу замечания 1. В силу замечания 2, она также образована открытыми нормальными подгруппами конечного индекса. Заменяем I на I'. Далее будем считать, что уже сама база I мощности $w(G)$ замкнута относительно пересечений конечного числа ее элементов:

$$(\forall k \in \mathbb{N})\ i_1, \ldots, i_k \in I \Rightarrow i(i_1, \ldots, i_k) = i_1 \cap \ldots \cap i_k \in I.$$

Подгруппы из I являются одновременно открытыми и замкнутыми нормальными подгруппами конечного индекса. Для каждой такой подгруппы $i \in I$ рассмотрим конечное множество J_i нормальных подгрупп этой группы, включающих эту группу:

$$J_i = \{j \lhd G |\ i \leqslant j \leqslant G\}.$$

Отметим: все подгруппы $j \in J_i$ также являются открытыми и замкнутыми нормальными подгруппами конечного индекса.

Поскольку $w(G)$ — бесконечное кардинальное число, то по замечанию 1 общее количество элементов во всех этих множествах совпадает с кардиналом $w(G)$. Пополним базу I этими подгруппами, рассмотрим семейство открытых подгрупп:

$$J = \bigcup_{i \in I} J_i \supseteq I.$$

Нетрудно заметить, что для любых $i_1, \ldots, i_k \in I$ выполняется включение: $J_{i_1} \cap \ldots \cap J_{i_k} \subseteq J_{i_1 \cap \ldots \cap i_k} = J_{i(i_1,\ldots,i_k)}$. Поэтому множество J замкнуто относительно пересечений конечного числа подгрупп.

Это множество по-прежнему отделяет единицу группы. В силу леммы 11 J образует открытую базу окрестностей единицы группы G, мощность этой открытой базы $w(G)$. Семейство нормальных подгрупп J по построению обладает таким свойством:

Замечание. Для любой подгруппы $j \in J$ любая нормальная подгруппа k, содержащая j, также включается в J:

$$j \in J,\ k \lhd G,\ j \subseteq k \Rightarrow k \in J.$$

Рассмотрим произвольную замкнутую нормальную подгруппу $H \lhd G$. Для любой подгруппы $j \in J$ группа Hj образует нормальную замкнутую подгруппу, она содержит группу j. По замечанию 3.3 подгруппа Hj принадлежит J, $Hj \in J$.

Поскольку J образует базу, подгруппа H получается пересечением всех таких замкнутых подгрупп: $H = \bigcap\limits_{j \in J} Hj$ (см. предложение 2.1.4(a) в [5]) Заключаем:

Замечание. Любая замкнутая нормальная подгруппа H получается пересечением некоторого семейства подгрупп из J.

Отметим такое свойство:

Лемма 16. *На любом непредельном ординале $\alpha = \beta + 1$, $\alpha < \gamma$, сужение ряда $G_\beta > G_\alpha$ высекается некоторой подгруппой $s \in J$: для подходящей подгруппы $s \in J$ выполняется тождество*

$$G_\alpha = G_\beta \cap s.$$

Доказательство. В самом деле, G_α — замкнутая нормальная подгруппа. По замечанию 3.3 для некоторого семейства окрестностей $S \subseteq J$ получается $G_\alpha = G_\beta \bigcap\limits_{s \in S} s$.

Эта подгруппа G_α конечного индекса в группе G_β. Поэтому такое семейство S можно выбрать конечным. Тогда в силу замкнутости J относительно конечных пересечений уже для некоторого $s \in J$ получается $G_\alpha = G_\beta \cap s$. Это доказывает лемму. □

Значит, калиброванный ряд (4) строится исходя из базы J.

Заключаем: произвольный калиброванный ряд подгрупп (4) строится исходя из указанной базы J мощности $w(G)$. В силу леммы 15 мощность такого ряда совпадает с весом группы $w(G)$. Это доказывает второе утверждение теоремы 4.

4 Длина убывающего ряда

Установим утверждение следствия 5 и теоремы 6. Предварительно установим два свойства калиброванных рядов групп.

Из теоремы Куроша о подгруппах (см. глава 13 § 56 в монографии [1]) следует

Лемма 17. *Рассмотрим топологическую группу G, в которой определен некоторый калиброванный убывающий нормальный ряд подгрупп:*

$$\mathfrak{R}: \ G = G_0 > \ldots > G_\alpha > \ldots > G_\delta = e, \ \alpha < \delta.$$

Утверждается, что любая замкнутая нормальная подгруппа $A \lhd G$ высекает из членов ряда некоторый калиброванный убывающий нормальный ряд подгрупп группы A:

$$\mathfrak{C}: \ A = A_0 = A \cap G_0 > \ldots > A_\alpha = A \cap G_\alpha > \ldots > A_\delta = A \cap G_\delta = e, \ \alpha < \delta.$$

Вообще говоря, в этом ряду могут появиться повторяющиеся подгруппы. После удаления повторений получается калиброванный ряд подгрупп $\mathfrak{C}'$ группы A длина которого не превосходит длины исходного ряда: $l(\mathfrak{C}') \leqslant l(\mathfrak{R})$.

Лемма 18. *Рассмотрим топологическую группу G, в которой определен некоторый калиброванный убывающий нормальный ряд подгрупп:*

$$\mathfrak{R}: \ G = G_0 > \ldots > G_\alpha > \ldots > G_\delta = e, \ \alpha < \delta.$$

Пусть определен замкнутый эпиморфизм топологических групп $\varphi : G \to H$. Применим его к членам ряда и образуем ряд подгрупп группы H:

$$\mathfrak{C}: \ H = H_0 = \varphi(G) > \ldots > H_\alpha = \varphi(G_\alpha) > \ldots > H_\delta = \varphi(G_\delta) = e, \ \alpha < \delta.$$

Вообще говоря, в этом ряду могут появиться повторяющиеся подгруппы. После удаления повторений получается калиброванный ряд подгрупп $\mathfrak{C}'$ группы A, длина которого не превосходит длины исходного ряда: $l(\mathfrak{C}') \leqslant l(\mathfrak{R})$.

Оба утверждения выводятся из теоремы Лагранжа с учетом того, что подмножество вполне упорядоченного множества также вполне упорядочено относительно индуцированного порядка.

Предложение 19. *Рассмотрим топологическую группу G, в которой определен некоторый калиброванный убывающий нормальный ряд подгрупп:*

$$\mathfrak{R}: \ G = G_0 > \ldots > G_\alpha > \ldots > G_\delta = e, \ \alpha < \delta.$$

Если $B \leqslant A$ — нормальные замкнутые подгруппы группы G, то найдется калиброванный убывающий нормальный ряд подгрупп группы G длины $\zeta \leqslant \delta$, который спускается от группы B до подгруппы A:

$$\mathfrak{R}': \ A = A_0 > \ldots > A_\alpha > \ldots > A_\delta = B, \ \alpha < \zeta.$$

Доказательство. Для доказательства следует вначале использовать лемму 17 и построить калиброванный ряд группы A длины $\varepsilon \leqslant \delta$:

$$\mathfrak{C}: \ A = A_0 = A \cap G_0 > \ldots > A_\alpha = A \cap G_\alpha > \ldots > A_\varepsilon = A \cap G_\varepsilon = e, \ \alpha < \varepsilon.$$

Далее применяем лемму 18 к фактор-гомоморфизму $A \to A/B$ и конструируем калиброванный убывающий нормальный ряд подгрупп фактор-группы A/B длины $\zeta \leqslant \varepsilon \leqslant \delta$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}': \ A/B = (A \cap G_0)/B > \ldots > B(A \cap G_\alpha)/B > \ldots >\\ > B(A \cap G_\zeta)/B = B/B = e, \ \alpha < \zeta.\end{aligned}$$

Значит требуемый ряд образован прообразами:

$$\mathfrak{R}': A = (A \cap G_0) > \ldots > B(A \cap G_\alpha) > \ldots > B(A \cap G_\zeta) = B, \ \alpha < \zeta.$$

Предложение доказано. □

Докажем следствие 5. Покажем, что любой убывающий ряд подгрупп бесконечной проконечной группы

$$G = G_0 > \ldots > G_\alpha > \ldots > G_\delta = e, \ \alpha < \delta$$

уплотняется до некоторого калиброванного ряда $\mathfrak{C}$ мощности $p(\mathfrak{C}) = w(G)$.

В силу теоремы 4 в группе G имеются калиброванные ряды подгрупп. Обозначим $\mathfrak{R}$ какой-нибудь такой ряд группы G. Для доказательства достаточно применить утверждение предложения 19 к каждому сужению $A = G_\alpha > B = G_{\alpha+1}, \ \alpha < \delta$ ряда $\mathfrak{R}$. Получаем калиброванный ряд $\mathfrak{C}$ группы G.

В силу теоремы 4 выполняется равенство $p(\mathfrak{C}) = w(G)$. Это доказывает следствие. Отсюда следует утверждение теоремы 6.

5 Мощность проконечной группы

Докажем теорему 7. Рассмотрим бесконечную проконечную группу G. Используем теорему 4 и определим в этой группе некоторый калиброванный ряд подгрупп мощности w:

$$\mathfrak{C}: \ G = G_0 > \ldots > G_\alpha > \ldots > G_\delta = e, \ \alpha < \delta. \tag{5}$$

Покажем, что мощность группы G выражается экспонентой:

$$|G| = 2^w.$$

Для доказательства индукцией по длине ряда (5) построим биекцию:

$$G \longleftrightarrow \prod_{\alpha<\delta} G_\alpha / G_{\alpha+1}.$$

Построение начнем с известного исходного замечания теории расширений групп. Оно следует из представления группы в виде дизъюнктного объединения классов смежности по подгруппе B.

Лемма 20. *Рассмотрим группу G и ее нормальную подгруппу $B \lhd G$. Обозначим фактор-группу $A = G/B$. Выберем некоторую систему представителей фактор-группы в группе G, она определяет некоторое сечение $\sigma : A \to G$ проекции $\pi : G \to A$. Определим отображение $A \times B \to G$ по формуле:*

$$(a, b) \to \sigma(a)b, \ \textit{для } a \in A, \ b \in B.$$

Утверждается, что это отображение устанавливает биекцию $A \times B \longleftrightarrow G$.

Отметим, что обратное отображение определяется формулой

$$g \to \Pi(g) = (\pi(g), (\sigma \circ \pi)(g)^{-1} g), \ g \in G.$$

Лемма 21. *Предположим, что группа G бесконечная проконечная группа, в ней определен счетный калиброванный ряд подгрупп (5): $G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \ldots \geqslant G_\omega = e$.*

Утверждается, что система этих подгрупп образует базу окрестностей единицы группы G.

Доказательство. Это следует из предложения 2.1.5 (b) в монографии [5]. Там утверждается, что если в проконечной группе G задано семейство открытых подгрупп $U = \{U_i,\ i \in I\}$, которое отделяет единицу: $\bigcap\limits_{i\in I} U_i = e$, то дополнение этого семейства конечными пересечениями подгрупп $\overline{U} = \{\bigcap\limits_{i\in J} U_i |\ J$ — конечное подмножество из $I\}$ приводит к фундаментальной системе окрестностей единицы группы G.

В условиях леммы система подгрупп $U = \{G_i |\ i = 0, 1, \ldots\}$ отделяет единицу. Ее подгруппы образуют линейно упорядоченное по включению множество, поэтому $\overline{U} = U$. Отсюда следует утверждение. □

Вначале рассмотрим базу индукции – случай счетного ряда подгрупп:

$$G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \ldots \geqslant G_\omega = e.$$

Последовательно применяем лемму 20 к группе G_i и ее подгруппе G_{i+1} для $i = 0, 1, 2, \ldots$. Строим разнозначное отображение

$$G \to \prod_{i\in\mathbb{N}} G_i/G_{i+1}.$$

Сюръективность этого отображения следует из леммы 21. Это доказывает базу индукции.

Докажем шаг индукции. Рассмотрим ряд подгрупп группы:

$$G = G_0 > \ldots > G_\alpha > \ldots > G_\delta = e,\ \alpha < \delta.$$

Представим порядковое число δ суммой $\delta = \beta + \omega$, в которой β — предельный ординал. По предположению индукции определим биекцию

$$G/G_\beta \longleftrightarrow \prod_{\alpha<\beta} G_\alpha/G_{\alpha+1}.$$

Подгруппа G_β — замкнутая подгруппа проконечной группы, она также образует проконечную группу. Последовательно применяем лемму 20 к группе $G_{\beta+i}$ и ее подгруппе $G_{\beta+i+1}$ для $i = 0, 1, 2, \ldots$. Применяем лемму 21 к группе G_β, строим биекцию:

$$G_\beta \to \prod_{i\in\mathbb{N}} G_{\beta+i}/G_{\beta+i+1}.$$

По лемме 20 определяем биекцию

$$G \longleftrightarrow (G/G_\beta) \times G_\beta \longleftrightarrow \prod_{\alpha<\delta} G_\alpha/G_{\alpha+1}.$$

В этом представлении фактор – группы образуют конечные группы. Отсюда выводится оценка мощности группы G. Теорема 7 доказана.

Список литературы

[1] А. Г. Курош, Теория групп, Издание третье, дополненное, М.:Наука, 1967.

[2] M. Ismail, Cardinal functions on homogeneous spaces and topological groups, Math. Japonica, 26N.6 (1981), 635–646.

[3] А. В. Архангельский, Топологическая однородность, Топологические группы и их непрерывные образы, УМН, **42** (1987), 2(254), 69–105.

[4] П. С. Александров, Введение в теорию множеств и общую топологию, М.: Наука, 1977.

[5] L. Ribes, P. Zalesskii, Profinite groups, Second ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЧЁТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИЙ ОДНОМЕСТНЫХ ПРЕДИКАТОВ

Р. А. Попков*

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: r-popkov@yandex.ru

В монографии [1] поставлена проблема описания распределения простых над конечными множествами, предельных и остальных счётных моделей для различных естественных классов алгебраических систем. В данной работе устанавливаются значения троек распределения числа счетных моделей для теорий одноместных предикатов.

1 Предварительные сведения

Определение 1. Модель $\mathfrak{M}$ теории T называется простой, если $\mathfrak{M}$ элементарно вкладывается в любую модель теории T.

Определение 2. Модель $\mathfrak{M}$ теории T называется простой над множеством A, где $A \subseteq M$, если модель $\mathfrak{M}_A$, которая получается обогащением модели $\mathfrak{M}$ константами из A, является простой моделью теории T_A, полученной из теории T обогащением константами из A. Модель $\mathfrak{M}$ теории T называется простой над кортежем $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, если она является простой над множеством $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Определение 3. Модель $\mathfrak{M}$ теории T называется предельной, если она является объединением счётной элементарной цепи простых над конечными множествами моделей и не изоморфна никакой простой над конечным множеством модели.

В книге [2] доказано, что для малой теории (т.е. счётной полной теории, имеющей счётное число типов) любая счётная модель является простой над некоторым кортежем или предельной. В работах [1, 3] показано, что существует ряд немалых теорий, имеющих счётные модели, не являющиеся ни простыми над конечными множествами, ни предельными.

*Данные исследования поддержаны грантом КН МОН РК № 0830/ГФ4.

Определение 4. Набор $(P(T), L(T), \mathrm{NPL}(T))$, где через $P(T)$, $L(T)$, $\mathrm{NPL}(T)$ обозначены мощности множеств типов изоморфизма простых над кортежами моделей, предельных и всех остальных счётных моделей соответственно, называется тройкой распределения числа счётных моделей теории T и обозначается через $\mathrm{cm}_3(T)$.

Теорема 5. [1, 3] *В предположении континуум-гипотезы для любой немалой теории T тройка $\mathrm{cm}_3(T)$ принимает одно из следующих значений:*
1) $(2^\omega, 2^\omega, \lambda)$, $\lambda \in \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$;
2) $(0, 0, 2^\omega)$;
3) $(\lambda_1, \lambda_2, 2^\omega)$, *где* $\lambda_1 \geq 1$, $\lambda_1, \lambda_1 \in \{\omega, 2^\omega\}$.
Все указанные значения имеют реализации в классе немалых теорий.

2 Распределения счётных моделей

Напомним [1], что *дизъюнктным объединением* $\bigsqcup\limits_{n\in\omega} \mathfrak{M}_n$ попарно непересекающихся систем $\mathfrak{M}_n$ попарно непересекающихся предикатных сигнатур Σ_n называется система сигнатуры $\bigcup\limits_{n\in\omega} \Sigma_n \cup \left\{ P_n^{(1)} | \, n \in \omega \right\}$ с носителем $\bigsqcup\limits_{n\in\omega} M_n$, $P_n = M_n$ и интерпретациями предикатных символов из Σ_n, совпадающими с их интерпретациями в системах $\mathfrak{M}_n$. *Дизъюнктным объединением теорий* T_n попарно непересекающихся предикатных сигнатур Σ_n называется теория $\bigsqcup\limits_{n\in\omega} T_n \rightleftharpoons \mathrm{Th}\left(\bigsqcup\limits_{n\in\omega} \mathfrak{M}_n\right)$.

Пусть T_0 — малая теория, сигнатура которой состоит только из одноместных предикатных символов. Достаточно рассматривать только 1-типы, так как нет связей между элементами. Возможные тройки распределения для T_0 получены в работе [4]. Пусть T_1 — теория одноместных предикатов с континуумом типов. Если у T_1 есть не простая и не предельная модель, то все её модели являются не простыми и не предельными, так как все модели представимы в виде дизъюнктного объединения. Таким образом, получаем тройку $\mathrm{cm}_3(T_1) = (0, 0, 2^\omega)$. Если T_1 имеет хотя бы одну простую модель $\mathfrak{M}_0$ (примером такой теории является T_{sdup} [1, 3]), то она имеет континуум простых моделей $\mathfrak{M}_i$, $i \in 2^\omega$, так как можно добавлять реализации счётного числа неглавных типов из континуума типов, которые не были реализованы в $\mathfrak{M}_0$. Тогда теория T счётного дизъюнктного объединения $\bigsqcup \mathfrak{M}_i$ имеет и континуум предельных моделей. Если допустить, что у T есть не простые и не предельные модели, приходим к противоречию с существованием простой модели. Теория $T_0 \sqcup T_1$ имеет 2^ω простых и 2^ω предельных моделей, так как все модели теорий T_0 и T_1 являются простыми или предельными. Если $\mathfrak{M}_0 \models T_0$ проста над множеством A, $\mathfrak{M}_1 \models T_1$ проста над B, то $\mathfrak{M} \models T_0 \sqcup T_1$ проста над $A \cup B$. Если хотя бы одна из моделей $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1$ является предельной, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \sqcup \mathfrak{M}_1$ также предельна. Таким образом, получаем все возможные тройки распределений для теорий одноместных предикатов и верна следующая теорема.

Теорема 6. *Для счётных теорий одноместных предикатов возможны следующие значения троек распределения:*
1) $(1, 0, 0)$ *— для малой теории без неглавных* 1*-типов;*
2) $(\omega, 1, 0)$ *— для малой теории с одним неглавным* 1*-типом;*
3) $(\omega, \omega, 0)$ *— для малой теории с конечным* > 1 *числом неглавных* 1*-типов;*
4) $(\omega, 2^\omega, 0)$ *— для малой теории со счетным числом неглавных* 1*-типов;*
5) $(2^\omega, 2^\omega, 0)$ *или* $(0, 0, 2^\omega)$ *— для теории с континуальным числом типов.*

Данная теорема имеет естественное следствие.

Следствие 7. *Если для теории T одноместных предикатов выполняется* $\mathrm{NPL}(T) > 0$*, то* $P(T) = 0$*,* $L(T) = 0$*.*

Список литературы

[1] С. В. Судоплатов, Классификация счётных моделей полных теорий, Ч II, Изд-во НГТУ, Новосибирск, 2014.

[2] С. В. Судоплатов, Проблема Лахлана, Изд-во НГТУ, Новосибирск, 2009.

[3] R. A. Popkov, S. V. Sudoplatov, Distributions of countable models of complete theories with continuum many types, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 267–291., http://semr.math.nsc.ru/v12/p267-291.pdf.

[4] К. А. Байкалова, О некоторых гиперграфах простых моделей и порождаемых ими предельных моделях, Algebra and Model Theory 7, Collection of papers, НГТУ, Новосибирск, 2009, 6-–17.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Е. Н. Порошенко*

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: auto_stoper@ngs.ru

Пусть $X\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ — конечное множество и $G = \langle X, E\rangle$ — неориентированный граф без петель, множеством вершин которого является множество X, а множеством ребер — некоторое симметричное отношение на множестве X, то есть подмножество множества $X \times X$. Таким образом, граф G неориентированный, а значит элементами множества E являются неупорядоченные пары, которые будут обозначаться $\{x, y\}$, где $x, y \in X$.

Частично коммутативной алгеброй Ли над коммутативным кольцом R с единицей называется R-алгебра с множеством порождающих X и множеством определяющих соотношений

$$[x_i, x_j] = 0, \text{ где } \{x_i, x_j\} \in E. \tag{1}$$

(Здесь и далее $[g, h]$ обозначает лиевское произведение элементов g и h). Будем обозначать эту алгебру $\mathcal{L}(X; G)$. Граф G называется *определяющим графом* соответствующей алгебры. Иными словами, $\mathcal{L}_R(X; G) = \mathcal{L}_R(X)/I$, где $\mathcal{L}_R(X)$ — свободная алгебра Ли с множеством порождающих X, а I — идеал, порожденный множеством соотношений (1).

Таким образом, определение частично коммутативных алгебр Ли аналогично определениям других частично коммутативных структур: групп, моноидов и так далее (см. [1]).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15–01–01485), а также Министерства образования и науки РФ (гос. задание № 214/138, проект 1052).

Пусть $H = \langle V; F \rangle$ — произвольный неориентированный граф и пусть $V' \subseteq V$. Через $H(V')$ обозначим подграф графа H, построенный на множестве вершин V'.

В данной работе рассматриваются два класса частично коммутативных алгебр Ли: алгебры, определяющие графы которых являются циклами и алгебры, опредеделяющие графы которых являются деревьями. При рассмотрении обоих случаев нам потребуется описание централизаторов элементов алгебры $\mathcal{L}(X; G)$, полученное в [2].

Пусть C_n — цикл на n вершинах ($n \geqslant 3$). Будем считать, что $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ и операции сложения и вычитания определены естественным (для кольца вычетов $\mathbb{Z}_n$) образом. Тогда для произвольных $r, s \in \mathbb{Z}_n$ через $|r - s|$ обозначим минимальный (в смысле обычного порядка: $0 < 1 < \cdots < n-1$) из элементов $r - s, s - r$.

Рассмотрим формулу

$$\Phi(m) = \exists z_0, z_1, \ldots, z_{m-1} \Theta(z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}),$$

где

$$\Theta(z_0, z_1, \ldots z_{m-1}) = \left(\bigwedge_{i \in \mathbb{Z}_m} [z_i, z_{i+1}] = 0 \wedge \bigwedge_{i,j \in \mathbb{Z}_m : |j-i| > 1} [z_i, z_j] \neq 0 \right), \qquad (2)$$

Имеет место лемма.

Лемма 1. *Формула $\Phi(m)$ истинна в алгебре $\mathcal{L}(X; C_n)$ $(n \geqslant 3)$ тогда и только тогда, когда $m = n$.*

Из этой леммы очевидным образом следует одна из двух основных теорем.

Теорема 2. *Частично коммутативные алгебры $\mathcal{L}(X; C_n)$ и $\mathcal{L}(Y; C_m)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $n = m$.*

Перейдем к второму случаю, то есть рассмотрим частично коммутативные алгебры Ли, определяющие графы которых являются деревьями.

Для дерева G с множеством вершин X через X^* обозначим множество всех вершин G, не являющихся висячими. Назовем граф $G(X^*)$ *внутренностью* дерева G и обозначим его G^*. Нетрудно видеть, что для любого дерева G граф G^* также является деревом.

Если $|X^*| \geqslant 2$, то для каждой висячей вершины графа G^* выберем по одной смежной с ней вершине из $X \backslash X^*$ (если таких вершин несколько, можно взять любую из них). Множество, полученное добавлением всех этих вершин к X^*, обозначим через X'. Если же $|X^*| = 1$, то это означает, что в графе G одна из вершин соединена со всеми остальными (которые, соответственно, являются висячими). В этом случае через X' обозначим множество, полученное из X^* добавлением к единственной вершине этого множества двух смежных с ней вершин. Граф $G(X')$ обозначим через G'. Этот граф также, очевидно, является деревом.

Пусть $G = \langle X; E\rangle$ — некоторое дерево с n вершинами, такое что $|X^*| = k$. Построим по нему формулу

$$\begin{aligned}\Phi(G) = \exists z_0, \ldots, z_{n-1}, &u_0, \ldots, u_{k-1}, v_0, \ldots, v_{k-1}\\ &\Psi(G; z_0, \ldots, z_{n-1}, u_0, \ldots, u_{k-1}, v_0, \ldots, v_{k-1}),\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}\Psi(G; z_0, \ldots, z_{n-1}, u_0, \ldots, u_{k-1}, v_0, \ldots, v_{k-1}) = \bigwedge_{x_i \leftrightarrow x_j} [z_i, z_j] = 0 \wedge\\ \wedge \bigwedge_{x_i \not\leftrightarrow x_j} [z_i, z_j] \neq 0 \ \wedge \bigwedge_{i=0}^{k-1} [[u_i, v_i], z_{t_i}] = 0 \wedge \bigwedge_{i=0}^{k-1} [u_i, v_i] \neq 0.\end{aligned}$$

Тогда справедлива следующая лемма

Лемма 3. *Пусть $G = \langle X; E\rangle$ и $H = \langle Y; F\rangle$ — деревья. Тогда формула $\Phi(G)$ истинна в алгебре $\mathcal{L}(X; G)$ тогда и только тогда, когда $H^* \simeq G^*$.*

Из этой леммы следует результат о частично коммутативных алгебрах Ли, определяющие графы которых являются деревьями.

Теорема 4. *Пусть $G = \langle X; E\rangle$ и $H = \langle Y; F\rangle$ — деревья, причем $|X| \geqslant 2$ и $|Y| \geqslant 2$. Алгебры $\mathcal{L}(X; G)$ и $\mathcal{L}(Y; H)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $G^* \simeq H^*$.*

Список литературы

[1] Duchamp G., Krob D., Free Partially Commutative Structures, Journal of Algebra, **156** (1993), 318–361.

[2] Порошенко Е. Н., Централизаторы в частично коммутативных алгебрах Ли, Алгебра и логика, **51**, 4 (2012), 524–554.

GENERATIVE CLASSES GENERATED BY SETS OF DIAGRAMS

S. V. Sudoplatov*

Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State Technical University,
20, K. Marx avenue, Novosibirsk, 630073, Russia;
Novosibirsk State University,
2, Pirogova street, Novosibirsk, 630090, Russia;
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
125, Pushkina Street, Almaty, 050010, Kazakhstan
e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

To Dear Teacher and Great Mathematician
Evgenii Andreevich Palyutin
in occasion with his 70th anniversary

In a series of papers and books, generic, i. e., generative classes as well as their model-theoretic and related applications are studied by many authors (see [1]–[4] for references). We continue this investigation considering sets of diagrams that can be extended to generative classes. A sufficient condition for this extensibility is proposed. We construct generative classes adapted to given formulas. We also define structural and self-structural diagrams and study properties of these diagrams with respect to themselves as well as for related generative classes.

1 Generative classes and generic limits

Below we write $X, Y, Z, \ldots$ for finite sets of variables, and denote by $A, B, C, \ldots$ finite sets of elements, as well as finite sets in structures, or else the structures with finite universes themselves.

In diagrams, $A, B, C, \ldots$ denote finite sets of constant symbols disjoint from the constant symbols in Σ and $\Sigma(A)$ is the vocabulary with the

*Partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan, Grant No. 0830/GF4.

constants from A adjoined. $\Phi(A), \Psi(B), \mathrm{X}(C)$ stand for Σ-*diagrams* (of sets A, B, C), that is, consistent sets of $\Sigma(A)$-, $\Sigma(B)$-, $\Sigma(C)$-sentences, respectively.

Below we assume that for any considered diagram $\Phi(A)$, if a_1, a_2 are distinct elements in A then $\neg(a_1 \approx a_2) \in \Phi(A)$. This means that if c is a constant symbol in Σ, then there is at most one element $a \in A$ such that $(a \approx c) \in \Phi(A)$.

If $\Phi(A)$ is a diagram and B is a set, we denote by $\Phi(A)|_B$ the set $\{\varphi(\bar{a}) \in \Phi(A) \mid \bar{a} \in B\}$. Similarly, for a language Σ, we denote by $\Phi(A)|_\Sigma$ the restriction of $\Phi(A)$ to the set of formulas in the language Σ.

Definition 1. [2]–[5]. We denote by $[\Phi(A)]^A_B$ the diagram $\Phi(B)$ obtained by replacing a subset $A' \subseteq A$ by a set $B' \subseteq B$ of constants disjoint from Σ and with $|A'| = |B'|$, where $A \setminus A' = B \setminus B'$. Similarly we call the consistent set of formulas denoted by $[\Phi(A)]^A_X$ the type $\Phi(X)$ if it is the result of a bijective substitution into $\Phi(A)$ of variables of X for the constants in A. In this case, we say that $\Phi(B)$ is a *copy* of $\Phi(A)$ and a *representative* of $\Phi(X)$. We also denote the diagram $\Phi(A)$ by $[\Phi(X)]^X_A$.

Remark. If the vocabulary contains functional symbols then diagrams $\Phi(A)$ containing equalities and inequalities of terms can generate both finite and infinite structures. The same effect is observed for purely predicate vocabularies if it is written in $\Phi(A)$ that the model for $\Phi(A)$ should be infinite. For instance, diagrams containing axioms for finitely axiomatizable theories have this property.

By the definition, for any diagram $\Phi(A)$, each constant symbol in Σ appears in some formula of $\Phi(A)$. Thus, $\Phi(A)$ can be considered as $\Phi(A \cup K)$, where K is the set of constant symbols in Σ.

We now give conditions on a partial ordering of a collection of diagrams which suffice for it to determine a structure. We modify some of the conditions for structures by d to signify they are conditions on diagrams not structures.

Definition 2. [2]–[5]. Let Σ be a vocabulary. We say that $(\mathbf{D}_0; \leq)$ (or $\mathbf{D}_0$) is *generic*, or *generative*, if $\mathbf{D}_0$ is a class of Σ-diagrams of finite sets so that $\mathbf{D}_0$ is partially ordered by a binary relation $\leq$ such that $\leq$ is preserved by bijective substitutions, i. e., if $\Phi(A) \leq \Psi(B)$, and $A' \subseteq B'$ such that $[\Phi(A)]^A_{A'} = \Phi(A')$ and $[\Psi(B)]^B_{B'} = \Psi(B')$ are defined then $[\Phi(A)]^A_{A'}$, $[\Psi(B)]^B_{B'}$ are in $\mathbf{D}_0$ and $[\Phi(A)]^A_{A'} \leq [\Psi(B)]^B_{B'}$.[1] Furthermore:

[1]Note that $\mathbf{D}_0$ is closed under bijective substitutions since $\leq$ is preserved by bijective substitutions and $\leq$ is reflexive.

(i) if $\Phi(A) \in \mathbf{D}_0$ then for any quantifier free formula $\varphi(\bar{x})$ and any tuple $\bar{a} \in A$ either $\varphi(\bar{a}) \in \Phi(A)$ or $\neg\varphi(\bar{a}) \in \Phi(A)$;

(ii) if $\Phi \leq \Psi$ then $\Phi \subseteq \Psi$;[2]

(iii) if $\Phi \leq \mathrm{X}$, $\Psi \in \mathbf{D}_0$, and $\Phi \subseteq \Psi \subseteq \mathrm{X}$ then $\Phi \leq \Psi$;

(iv) some diagram $\Phi_0(\emptyset)$ is the least element of the system $(\mathbf{D}_0; \leq)$;

(v) (the *d-amalgamation property*) for any diagrams $\Phi(A), \Psi(B), \mathrm{X}(C) \in \mathbf{D}_0$, if there exist injections $f_0\colon A \to B$ and $g_0\colon A \to C$ with $[\Phi(A)]^A_{f_0(A)} \leq \Psi(B)$ and $[\Phi(A)]^A_{g_0(A)} \leq \mathrm{X}(C)$ then there are a diagram $\Theta(D) \in \mathbf{D}_0$ and injections $f_1\colon B \to D$ and $g_1\colon C \to D$ for which $[\Psi(B)]^B_{f_1(B)} \leq \Theta(D)$, $[\mathrm{X}(C)]^C_{g_1(C)} \leq \Theta(D)$ and $f_0 \circ f_1 = g_0 \circ g_1$; the diagram $\Theta(D)$ is called the *amalgam* of $\Psi(B)$ and $\mathrm{X}(C)$ over the diagram $\Phi(A)$ and witnessed by the four maps (f_0, g_0, f_1, g_1);

(vi) (the *local realizability property*) if $\Phi(A) \in \mathbf{D}_0$ and $\Phi(A) \vdash \exists x\, \varphi(x)$, then there are a diagram $\Psi(B) \in \mathbf{D}_0$, $\Phi(A) \leq \Psi(B)$, and an element $b \in B$ for which $\Psi(B) \vdash \varphi(b)$;

(vii) (the *d-uniqueness property*) for any diagrams $\Phi(A), \Psi(B) \in \mathbf{D}_0$ if $A \subseteq B$ and the set $\Phi(A) \cup \Psi(B)$ is consistent then $\Phi(A) = \{\varphi(\bar{b}) \in \Psi(B) \mid \bar{b} \in A\}$.

A diagram Φ is called a *strong subdiagram* of a diagram Ψ if $\Phi \leq \Psi$.

A diagram $\Phi(A)$ is said to be (*strongly) embeddable* in a diagram $\Psi(B)$ if there is an injection $f\colon A \to B$ such that $[\Phi(A)]^A_{f(A)} \subseteq \Psi(B)$ ($[\Phi(A)]^A_{f(A)} \leq \Psi(B)$). The injection f, in this instance, is called a (*strong) embedding* of diagram $\Phi(A)$ in diagram $\Psi(B)$ and is denoted by $f\colon\Phi(A) \to \Psi(B)$. A diagram $\Phi(A)$ is said to be (*strongly) embeddable* in a structure $\mathcal{M}$ if $\Phi(A)$ is (strongly) embeddable in some diagram $\Psi(B)$, where $\mathcal{M} \models \Psi(B)$. The corresponding embedding $f\colon \Phi(A) \to \Psi(B)$, in this case, is called a (*strong) embedding* of diagram $\Phi(A)$ in structure $\mathcal{M}$ and is denoted by $f\colon \Phi(A) \to \mathcal{M}$.

Let $\mathbf{D}_0$ be a class of diagrams, $\mathbf{P}_0$ be a class of structures of some language, and $\mathcal{M}$ be a structure in $\mathbf{P}_0$. The class $\mathbf{D}_0$ is *cofinal* in the structure $\mathcal{M}$ if for each finite set $A \subseteq M$, there are a finite set B, $A \subseteq B \subseteq M$, and a diagram $\Phi(B) \in \mathbf{D}_0$ such that $\mathcal{M} \models \Phi(B)$. The class $\mathbf{D}_0$ is *cofinal* in $\mathbf{P}_0$ if $\mathbf{D}_0$ is cofinal in every structure of $\mathbf{P}_0$. We denote by $\mathbf{K}(\mathbf{D}_0)$ the class of all structures $\mathcal{M}$ with the condition that $\mathbf{D}_0$ is cofinal in $\mathcal{M}$, and by $\mathbf{P}$ a subclass of $\mathbf{K}(\mathbf{D}_0)$ such that each diagram $\Phi \in \mathbf{D}_0$ is true in some structure in $\mathbf{P}$.

[2]Note that $\Phi(A) \leq \Psi(B)$ implies $A \subseteq B$, since if $a \in A$ then $(a \approx a) \in \Phi(A)$, so $\Phi(A) \leq \Psi(B)$ implies $\Phi(A) \subseteq \Psi(B)$ and we have $(a \approx a) \in \Psi(B)$, whence $a \in B$.

Now we extend the relation $\leq$ from the generative class $(\mathbf{D}_0;\leq)$ to a class of subsets of structures in the class $\mathbf{K}(\mathbf{D}_0)$.

Let $\mathcal{M}$ be a structure in $\mathbf{K}(\mathbf{D}_0)$, A and B be finite sets in $\mathcal{M}$ with $A\subseteq B$. We call A a *strong subset* of the set B (in the structure $\mathcal{M}$), and write $A\leq B$ if there exist diagrams $\Phi(A),\Psi(B)\in\mathbf{D}_0$ such that $\Phi(A)\leq\Psi(B)$ and $\mathcal{M}\models\Psi(B)$.

A finite set A is called a *strong subset* of a set $M_0\subseteq M$ (in the structure $\mathcal{M}$), where $A\subseteq M_0$, if $A\leq B$ for any finite set B such that $A\subseteq B\subseteq M_0$ and $\Phi(A)\subseteq\Psi(B)$ for some diagrams $\Phi(A),\Psi(B)\in\mathbf{D}_0$ with $\mathcal{M}\models\Psi(B)$. If A is a strong subset of M_0 then, as above, we write $A\leq M_0$. If $A\leq M$ in $\mathcal{M}$ then we refer to A as a *self-sufficient set* (in $\mathcal{M}$).

Notice that, by the d-uniqueness property, the diagrams $\Phi(A)$ and $\Psi(B)$ specified in the definition of strong subsets are defined uniquely. A diagram $\Phi(A)\in\mathbf{D}_0$ corresponding to a self-sufficient set A in $\mathcal{M}$ is said to be a *self-sufficient diagram* (in $\mathcal{M}$).

Definition 3. [2]–[5]. A class $(\mathbf{D}_0;\leq)$ possesses the *joint embedding property* (JEP) if for any diagrams $\Phi(A),\Psi(B)\in\mathbf{D}_0$ there is a diagram $\mathrm{X}(C)\in\mathbf{D}_0$ such that $\Phi(A)$ and $\Psi(B)$ are strongly embeddable in $\mathrm{X}(C)$.

Clearly, every generative class has JEP since JEP means the d-amalgamation property over the empty set.

Definition 4. [2]–[5]. A structure $\mathcal{M}\in\mathbf{P}$ has *finite closures* with respect to the class $(\mathbf{D}_0;\leq)$ or is *finitely generated over* Σ, if any finite set $A\subseteq M$ is contained in some finite self-sufficient set in $\mathcal{M}$, i. e., there is a finite set B with $A\subseteq B\subseteq M$ and $\Psi(B)\in\mathbf{D}_0$ such that $\mathcal{M}\models\Psi(B)$ and $\Psi(B)\leq\mathrm{X}(C)$ for any $\mathrm{X}(C)\in\mathbf{D}_0$ with $\mathcal{M}\models\mathrm{X}(C)$ and $\Psi(B)\subseteq\mathrm{X}(C)$. A class $\mathbf{P}$ has finite closures with respect to the class $(\mathbf{D}_0;\leq)$ or is *finitely generated over* Σ, if each structure in $\mathbf{P}$ has finite closures (with respect to $(\mathbf{D}_0;\leq)$).

Clearly, an at most countable structure $\mathcal{M}$ has finite closures with respect to $(\mathbf{D}_0;\leq)$ if and only if $M=\bigcup\limits_{i\in\omega}A_i$ for some self-sufficient sets A_i with $A_i\leq A_{i+1}$, $i\in\omega$.

Note that the finite closure property is defined modulo Σ and does not correlate with the cardinalities of algebraic closures. For instance, if Σ contains infinitely many constant symbols then $\mathrm{acl}(A)$ is always infinite whereas a finite set A can or can not be extended to a self-sufficient set.

Besides, for the finite closures of sets A we consider finite self-sufficient extensions B in a given structure $\mathcal{M}$ with respect to $(\mathbf{D}_0;\leq)$ only and B can be both a universe of a substructure of $\mathcal{M}$ or not. Moreover, it is permitted that corresponding diagrams $\Psi(B)$ can have only finite, finite and infinite, or only infinite models.

Thus, for instance, a finitely axiomatizable theory without finite models and with a generative class $(\mathbf{D}_0; \subseteq)$ containing diagrams for all finite sets and with axioms in diagrams has identical finite closures whereas each diagram in $\mathbf{D}_0$ has only infinite models.

Definition 5. [2]–[5]. A structure $\mathcal{M} \in \mathbf{K}(\mathbf{D}_0)$ is $(\mathbf{D}_0; \leq)$-*generic*, or a *generic limit for the class* $(\mathbf{D}_0; \leq)$ and denoted by $\mathrm{glim}(\mathbf{D}_0; \leq)$, if it satisfies the following conditions:

(a) $\mathcal{M}$ has finite closures with respect to $\mathbf{D}_0$;

(b) if $A \subseteq M$ is a finite set, $\Phi(A), \Psi(B) \in \mathbf{D}_0$, $\mathcal{M} \models \Phi(A)$ and $\Phi(A) \leq \Psi(B)$, then there exists a set $B' \leq M$ such that $A \subseteq B'$ and $\mathcal{M} \models \Psi(B')$.

Theorem 6. [5]. *For any generative class* $(\mathbf{D}_0; \leq)$ *there exists a* $(\mathbf{D}_0; \leq)$-*generic structure.*

Theorem 7. [5]. *Every ω-homogeneous structure $\mathcal{M}$ is a* $(\mathbf{D}_0; \leq)$-*generic structure for some generative class* $(\mathbf{D}_0; \leq)$.

Thus any first-order theory has a generic model and therefore can be represented by it.

2 Pre-generative classes

Consider the following modification of the d-amalgamation property for a class $(\mathbf{D}_0; \leq)$:

(v$'$) for any diagrams $\Phi(A)$, $\Psi(B)$, $\mathrm{X}(C) \in \mathbf{D}_0$ if there exist injections f_0: $A \to B$ and g_0: $A \to C$ with $[\Phi(A)]^A_{f_0(A)} \leq \Psi(B)$ and $[\Phi(A)]^A_{g_0(A)} \leq \mathrm{X}(C)$ such that $B \setminus A = B \setminus f_0(A)$, $C \setminus A = C \setminus g_0(A)$, $(B \setminus A) \cap (C \setminus A) = \emptyset$ and $[\Psi(B)]^{f_0(A)}_A \cup [\mathrm{X}(C)]^{g_0(A)}_A$ is consistent, then there are a diagram $\Theta(D) \in \mathbf{D}_0$ and injections f_1: $B \to D$ and g_1: $C \to D$ for which $[\Psi(B)]^B_{f_1(B)} \leq \Theta(D)$, $[\mathrm{X}(C)]^C_{g_1(C)} \leq \Theta(D)$ and $f_0 \circ f_1 = g_0 \circ g_1$.

Note that replacing the d-amalgamation property in the definition of generative class by (v$'$) it suffices to use only identical embeddings for the construction of $(\mathbf{D}_0; \leq)$-generic structure.

A generative class $(\mathbf{D}_0; \leq)$ is *self-sufficient* if the following *axiom of self-sufficiency* holds:

(viii) if $\Phi, \Psi, \mathrm{X} \in \mathbf{D}_0$, $\Phi \leq \Psi$, and $\mathrm{X} \subseteq \Psi$ then $\Phi \cap \mathrm{X} \leq \mathrm{X}$.

By the definition every generative class $(\mathbf{D}_0; \leq)$ is generated by a set $\mathbf{D}'_0$ of diagrams in $\mathbf{D}_0$ such that each $\Phi(A) \in \mathbf{D}_0$ has a copy $\Phi(A') \in \mathbf{D}'_0$.

Let $\mathbf{D}'_0$ be a class (in particular, a set) of diagrams $\Phi(A)$ over finite sets A in a language Σ such that a set of some copies for all elements in $\mathbf{D}'_0$ is consistent and for each $\Phi(A) \in \mathbf{D}'_0$, $\varphi(\bar{a}) \in \Phi(A)$ or $\neg\varphi(\bar{a}) \in \Phi(A)$ for any quantifier-free formula $\varphi(\bar{x})$ and any tuple $\bar{a} \in A$.

Definition 8. [5]. We say that $\mathbf{D}'_0$ is *pre-generic* or *pre-generative* if it is equipped with a partial order $\leq'_0$ satisfying conditions (ii), (iii), (vii) for $(\mathbf{D}'_0; \leq_0)$ as well as the *property of invariance* for $\leq_0$ under bijective substitutions as follows:

if $\Phi(A) \leq_0 \Psi(B)$, $A' \subseteq B'$ and $[\Phi(A)]^A_{A'}, [\Psi(B)]^B_{B'} \in \mathbf{D}'_0$ then $[\Phi(A)]^A_{A'} \leq_0 [\Psi(B)]^B_{B'}$.

In this case, we also say that $(\mathbf{D}'_0; \leq_0)$ is *pre-generic*, or *pre-generative*.

By the definition every generative class is pre-generative but not vice versa.

Having the axiom (viii) for a pre-generative class $(\mathbf{D}'_0; \leq_0)$ we also say that $(\mathbf{D}'_0; \leq_0)$ is *self-sufficient*.

Definition 9. [5]. A (pre-)generative class $(\mathbf{D}'_0; \leq_0)$ is *regular* if for any copies $\Phi_1(A_1), \ldots, \Phi_n(A_n)$ of elements in $\mathbf{D}'_0$ with consistent $\Phi_1(A_1) \cup \ldots \cup \Phi_n(A_n)$, we have $\Phi_1(A_1) \cap \ldots \cap \Phi_n(A_n) = \Phi_i(A_i)|_{(A_1 \cap \ldots \cap A_n)}$, $i = 1, \ldots, n$.

A (pre-)generative class $(\mathbf{D}'_0; \leq_0)$ is *non-refinable* if for any $\Phi(A) \in \mathbf{D}'_0$ and B with $B \subset A$ there is $\Psi(B) \in \mathbf{D}'_0$ such that $\Psi(B) \subset \Phi(A)$ and $\leq_0 = \subseteq$.

By the axiom of d-uniqueness, every non-refinable (pre-)generative class is regular and self-sufficient. Note that each consistent set of complete diagrams, in a given language, is regular and its closure under complete subdiagrams is non-refinable.

Clearly, if $(\mathbf{D}_0; \leq)$ is a generative class then for any $\mathbf{D}'_0 \subseteq \mathbf{D}_0$ the restriction $(\mathbf{D}_0; \leq)|_{\mathbf{D}'_0}$ is pre-generative. At the same time the following theorem holds:

Theorem 10. [5] *Any regular pre-generative class* $(\mathbf{D}'_0; \leq_0)$ *can be extended to a non-refinable generative class* $(\mathbf{D}_0; \leq)$.

Note that the generative class $(\mathbf{D}_0; \leq)$ in the proof of Theorem 2.1 depends only on choice of the set U and its model $\mathcal{M}$. Notice also that if the pre-generative class is not regular then the d-uniqueness property fails in the construction.

At the same time, in the general case, having a pre-generative set $\mathbf{D}'_0$ with a partial order $\leq_0$ we can extend $(\mathbf{D}'_0; \leq_0)$ to a generative class $(\mathbf{D}_0; \leq)$

(guaranteeing Axioms (iv), (v), (vi)) if an appropriate diagram $\Phi_0(\emptyset)$ can be added to $\mathbf{D}'_0$ preserving the pre-generativity as well as appropriate diagrams $\Theta(D)$ can be added preserving the pre-generativity and step-by-step providing both the d-amalgamation property and the local realizability property.

3 Adapted generative classes

Definition 11. [2]–[4]. Let $(\mathbf{D}_0;\leqslant)$ and $(\mathbf{D}'_0;\leqslant')$ be generative classes of languages Σ and Σ' respectively with $\Sigma \subseteq \Sigma'$. We say that the class $(\mathbf{D}'_0;\leqslant')$ *dominates* the class $(\mathbf{D}_0;\leqslant)$ and write $\mathbf{D}_0 \trianglelefteq \mathbf{D}'_0$ if for any diagram $\Phi(A) \in \mathbf{D}_0$ there is a diagram $\Phi'(A') \in \mathbf{D}'_0$ such that $\Phi(A) \subseteq \Phi'(A')$ and the condition of there being some systems, which are extensions over A, together with available information on interrelations of elements in these extensions written in the diagram $\Phi(A)$ implies that the same extensions exist over A and that similar information is available on interrelations of elements in those extensions written in the diagram $\Phi'(A')$.

If $\mathbf{D}_0 \trianglelefteq \mathbf{D}'_0$ and $\mathbf{D}'_0 \trianglelefteq \mathbf{D}_0$ we say that generative classes $(\mathbf{D}_0;\leqslant)$ and $(\mathbf{D}'_0;\leqslant')$ are *domination-equivalent* and write $\mathbf{D}_0 \sim \mathbf{D}'_0$.

It is easy to see that $\sim$ is an equivalence relation, and by uniqueness of homogeneous structures realizing same set of types if generative classes are domination-equivalent then these classes produce isomorphic generic structures. We have the converse implication for quantifier-free generative classes.

At the same time, there are generative classes being not $\sim$-equivalent but forming isomorphic generic structures. For instance, the structure $\langle\mathbb{Q};\leq\rangle$ having a finitely axiomatizable theory with an axiom φ_0 is generated by both the quantifier-free generative class $(\mathbf{D}_0;\leqslant)$ (whose diagrams describe $\leq$-links of elements for finite subsets of $\mathbb{Q}$) and the generative class $(\mathbf{D}'_0;\leqslant')$, where each diagram contains the axiom φ_0. Clearly, $\mathbf{D}_0 \trianglelefteq \mathbf{D}'_0$ and $\mathbf{D}'_0 \ntrianglelefteq \mathbf{D}_0$.

Similar the scolemization of theories we define *special* generative classes adapted to the semantic of given formulae.

Let $(\mathbf{D}_0;\leqslant)$ be a generative class, $\mathcal{M}$ be a $(\mathbf{D}_0;\leqslant)$-generic structure,

$$\varphi(x_1,\ldots,x_m) \rightleftharpoons \mathrm{Q}_1 y_1 \ldots \mathrm{Q}_n y_n \psi(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$$

be a formula in prenex normal form, $\mathrm{Q}_i \in \{\forall,\exists\}$, ψ is a quantifier-free formula, $\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\ldots,a_m)$ for some $a_1,\ldots,a_m \in M$. $(\mathbf{D}_0;\leqslant)$ is called $\varphi(a_1,\ldots,a_m)$*-adapted*, or briefly φ*-adapted*, if it satisfies the following conditions:

(1) if φ is an existential formula then for any diagram $\Phi(A) \in \mathbf{D}_0$, where $A \neq \varnothing$ and $\Phi(A) \cup \{\varphi(a_1, \ldots, a_m)\}$ is consistent there are $a'_1, \ldots, a'_n \in A$ such that $\Phi(A) \vdash \psi(a_1, \ldots, a_m, a'_1, \ldots, a'_n)$;

(2) if φ has the form $\forall y'_1, \ldots, y'_k \exists y''_1, \ldots, y''_l \chi$ and for $\Phi(A) \in \mathbf{D}_0$, $\Phi(A) \vdash \varphi(a_1, \ldots, a_m)$ then for any $\Psi(B) \in \mathbf{D}_0$ with $\Psi(B) \supset \Phi(A)$, and for any $a'_1, \ldots, a'_k \in A$, there are $b_1, \ldots, b_l \in B$ such that

$$\Psi(B) \vdash \chi(a_1, \ldots, a_m, a'_1, \ldots, a'_k, b_1, \ldots, b_l).$$

Theorem 12. *For any generative class* $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$ *of language* Σ *and for any formula* φ *satisfied in a* $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$*-generic structure, there is a* φ*-adapted generative class* $(\mathbf{D}'_0; \leqslant')$ *such that* $\mathbf{D}'_0 \sim \mathbf{D}_0$.

Proof. Denote by $(\mathbf{D}''_0; \leqslant'')$ the generative class obtained from $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$ by addition of formula $\varphi(a_1, \ldots, a_m)$ to all diagrams $\Phi(A) \in \mathbf{D}_0$ over nonempty A, where $a_1, \ldots, a_m \in A$ and $\Phi(A) \cup \{\varphi(a_1, \ldots, a_m)\}$ is consistent.

If φ has the form $\exists y_1, \ldots, y_n \psi$ we take for $(\mathbf{D}'_0; \leqslant')$ the restriction of $(\mathbf{D}''_0; \leqslant'')$ generated by the class of diagrams $\Phi(A) \in \mathbf{D}''_0$ containing

$$\psi(a_1, \ldots, a_m, a'_1, \ldots, a'_n)$$

(i. e., if $A \neq \varnothing$ then $\psi(a_1, \ldots, a_m, a'_1, \ldots, a'_n) \in \Phi(A)$).

If φ has the form $\forall y'_1, \ldots, y'_k \exists y''_1, \ldots, y''_l \chi$ we again take the restriction $(\mathbf{D}''_0; \leqslant'')$ being domination equivalent to $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$. Now we consider representatives $\Phi_r(A_r)$, $\Phi_r(A_r) \subseteq \Phi_{r+1}(A_{r+1})$, $r \in \omega$ of $\mathbf{D}''_0$ satisfying the following condition: if $a'_1, \ldots, a'_k \in A_r$ then there are $a''_1, \ldots, a''_l \in A_{r+1}$ such that

$$\Phi_{r+1}(A_{r+1}) \vdash \chi(a_1, \ldots, a_m, a'_1, \ldots, a'_k, a''_1, \ldots, a''_l).$$

For $(\mathbf{D}'_0; \leqslant')$ we take the generative class generated by set of diagrams $\Phi_r(A_r)$, $r \in \omega$. $\square$

Note that the generative class $(\mathbf{D}'_0; \leqslant')$ can be chosen φ_i-adapted for any finite set of satisfied formulas φ_i. In particular, it allows to control all changes of quantifiers in a given formula.

Notice also that if $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$ is a self-sufficient class with closures $\overline{A}$ whose cardinalities are bounded by $f(|A|)$, where $f \in \omega^\omega$ then for any A_r we can choose a closed set A_{r+1} with $|A_{r+1}| \leq f(|A_r|^m)$.

4 Structural diagrams and canonical structures

Let $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$ be a generative class in a language Σ, $\Phi(A) \in \mathbf{D}_0$.

The diagram $\Phi(A)$ is called *structural* if it satisfies the following modification of the local realizability property:

(vi$'$) if $\Phi(A) \vdash \exists x\, \varphi(x)$ then there is a constant term $t(\bar{a})$, $\bar{a} \in A$ such that $\Phi(A) \vdash \varphi(t(\bar{a}))$.

Note that there exist generative classes containing non-structural diagrams. Indeed, consider a finitely axiomatizable, by an axiom φ_0, complete theory T of relational language and without finite models (for instance, consider the theory of dense linear order without endpoints). Now, take a generative class $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$ for T such that all diagrams in $\mathbf{D}_0$ contain φ_0. Obviously, $\mathbf{D}_0$ does not contain structural diagrams since for any $\Phi(A) \in \mathbf{D}_0$ every model $\mathcal{M} \models \Phi(A)$ is infinite being a model of T whereas constant terms $t(\bar{a})$, $\bar{a} \in A$, can have values only in the finite set A.

Theorem 13. *For any diagram $\Phi(A) \in \mathbf{D}_0$, $A \neq \varnothing$ the following conditions are equivalent:*

(1) $\Phi(A)$ *is structural;*

(2) *there exists a structure $\mathcal{M}$ consisting of some constant terms in the language $\Sigma \cup A$ and such that $\mathcal{M} \models \Phi(A)$.*

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2). Let $\Phi(A)$ be structural. Denote by N the set of all constant terms $t(\bar{a})$, $\bar{a} \in A$ in the language $\Sigma \cup A$. For constant terms t_1 and t_2, we put $t_1 \sim t_2$ if and only if $\Phi(A) \vdash (t_1 \approx t_2)$. Clearly, $\sim$ is an equivalence relation and there is a canonical structure $\mathcal{N}/{\sim}$ having the universe $N/{\sim}$ and satisfying the quantifier-free part of $\Phi(A)$. By (vi$'$) and induction on length of formulas in $\Phi(A)$ we get $\mathcal{N}/{\sim} \models \Phi(A)$. Taking representatives for each $\sim$-class in $N/{\sim}$ we form a required structure $\mathcal{M}$ isomorphic to $\mathcal{N}/{\sim}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). If there exists a required structure $\mathcal{M}$ having the universe M consisting of some constant terms (one representative for each $\sim$-class) in the language $\Sigma \cup A$ and such that $\mathcal{M} \models \Phi(A)$ then, by completeness of the first-order calculus, for any formula $\varphi(x)$ with $\Phi(A) \vdash \exists x\, \varphi(x)$ there is a term $t(\bar{a}) \in M$ such that $\Phi(A) \vdash \varphi(t(\bar{a}))$. Thus, $\Phi(A)$ is structural. $\square$

The structure $\mathcal{N}/{\sim}$ in the proof of Theorem 4.1 is called $\Phi(A)$-*canonical* or simply *canonical* and denoted by $\mathcal{M}_{\Phi(A)}$. The structure $\mathcal{M}$, in the proof, is a *representation* of $\mathcal{M}_{\Phi(A)}$.

By Theorem 4.1, any structural diagram $\Phi(A)$ for $A \neq \varnothing$ defines the algebra with the universe $N/{\sim}$ being the restriction of $\mathcal{N}/{\sim}$ to the functional sublanguage and *finitely* generated by A (relative constant symbols in Σ). At the same time, for quantifier-free diagrams, this condition is sufficient:

Corollary 14. *Any quantifier-free diagram $\Phi(A) \in \mathbf{D}_0$ is structural.*

Lemma 15. *If $\Phi(A)$ and $\Psi(B)$ are structural diagrams and $\Phi(A) \leqslant \Psi(B)$ then $\mathcal{M}_{\Phi(A)}$ is embeddable into $\mathcal{M}_{\Psi(B)}$ preserving $\Phi(A)$ and such that a representation of $\mathcal{M}_{\Phi(A)}$ is identically embeddable into a representation of $\mathcal{M}_{\Psi(B)}$.*

Proof. The construction of required representations $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$ for $\mathcal{M}_{\Phi(A)}$ and $\mathcal{M}_{\Psi(B)}$ respectively (with an identical embedding) consists of choice of same terms $t(\bar{a})$, $\bar{a} \in A$, for $\sim$-classes in $\mathcal{M}_{\Phi(A)}$ and $\mathcal{M}_{\Psi(B)}$ such that these classes have common representatives (with parameters in A). $\square$

By Lemma 4.3 we obtain

Lemma 16 (Amalgamation Lemma). *If a structural diagram $\Theta(D)$ is an amalgam of structural diagrams $\Psi(B)$ and $\mathrm{X}(C)$ over a structural diagram $\Phi(A)$ then there are embeddings f_0:$\mathcal{M}_{\Phi(A)} \to \mathcal{M}_{\Psi(B)}$, g_0: $\mathcal{M}_{\Phi(A)} \to \mathcal{M}_{\mathrm{X}(C)}$, f_1: $\mathcal{M}_{\Psi(B)} \to \mathcal{M}_{\Theta(D)}$, g_1: $\mathcal{M}_{\mathrm{X}(C)} \to \mathcal{M}_{\Theta(D)}$ such that $f_0 \circ f_1 = g_0 \circ g_1$. Moreover, if $\Phi(A) \leqslant \Psi(B)$, $\Phi(A) \leqslant \mathrm{X}(C)$, $\Psi(B) \leqslant \Theta(D)$, and $\mathrm{X}(C) \leqslant \Theta(D)$ then there are representations of $\mathcal{M}_{\Phi(A)}$, $\mathcal{M}_{\Psi(B)}$, $\mathcal{M}_{\mathrm{X}(C)}$, and $\mathcal{M}_{\Theta(D)}$ with identical embeddings corresponding to f_0, g_0, f_1, g_1.*

Theorem 4.1 and Lemma 4.4 imply

Corollary 17. *If a generative class $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$ consists of structural diagrams then the $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$-generic structure is isomorphic to a union of representations of canonical structures for diagrams in $\mathbf{D}_0$.*

By Corollaries 4.2 and 4.5 we have

Corollary 18. *If $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$ is a quantifier-free generative class then the $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$-generic structure is isomorphic to a union of representations of canonical structures for diagrams in $\mathbf{D}_0$.*

Definition 19. A diagram $\Phi(A) \in \mathbf{D}_0$ is called *self-structural* if $A \neq \varnothing$ and $\Phi(A)$ satisfies the following:

(vi$''$) if $\Phi(A) \vdash \exists x\, \varphi(x)$ then there is an element $a \in A$ such that $\Phi(A) \vdash \varphi(a)$.

Clearly, every self-structural diagram is structural but not vice versa: structural diagrams can be over empty set (having a constant in Σ) and it can be written by a formula in $\Phi(A)$ that values $t(\bar{a})$, $\bar{a} \in A$, for some $\varphi(x)$ with $\Phi(A) \vdash \exists x\, \varphi(x)$ differ from all elements in A. At the same time, by the definition, self-structural diagrams are always over nonempty sets and for any constant term $t(\bar{a})$, $\bar{a} \in A$, we have $\Phi(A) \vdash (t(\bar{a}) \approx b)$ for some $b \in A$.

Proposition 20. *For any diagram* $\Phi(A) \in \mathbf{D}_0$, $A \neq \varnothing$, *the following conditions are equivalent:*

(1) $\Phi(A)$ *is self-structural;*

(2) *if* $\Phi(A) \vdash \exists x\, \varphi(x)$ *then* $\Phi(A) \vdash \exists x \left(\varphi(x) \wedge \bigvee\limits_{a \in A} (x \approx a)\right)$;

(3) *there exists a structure* $\mathcal{A}$ *having the universe* A *and such that* $\mathcal{A} \models \Phi(A)$.

Proof. (1) $\Leftrightarrow$ (2) is obvious since A is finite. (1) $\Leftrightarrow$ (3) is implied by Theorem 4.1. $\square$

Note that the structure $\mathcal{A}$ in Proposition 4.7 is unique up to isomorphism and it is isomorphic to the $\Phi(A)$-canonical structure.

Proposition 4.7 implies

Corollary 21. *A quantifier-free diagram* $\Phi(A) \in \mathbf{D}_0$, *where* $A \neq \varnothing$, *is self-structural if and only if for the sublanguage* Σ_F *consisting of all functional symbols in* Σ *there exists an algebra* $\mathcal{A}$ *having the universe* A *and such that* $\mathcal{A} \models (\Phi(A) \upharpoonright \Sigma_F)$.

Corollary 22. *Any quantifier-free diagram* $\Phi(A) \in \mathbf{D}_0$ *in a relational language, where* $A \neq \varnothing$, *is self-structural.*

Corollary 23. *If a generative class* $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$ *in a language* Σ *consists of a diagram* $\Phi_0(\varnothing)$ *and of self-structural diagrams* (*over non-empty sets*) *then* $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$ *is* φ*-adapted for any formula* φ *in the language* Σ.

Proposition 24. *Let* $\mathcal{M}$ *be a* $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$*-generic structure for a quantifier-free generative class* $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$ *such that its restriction to the sublanguage* Σ_F *consisting of all functional symbols in* Σ *is a locally finite algebra. Then* $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$ *is domination-equivalent to a generative class* $(\mathbf{D}'_0; \leqslant')$ *consisting of a diagram* $\Phi_0(\varnothing)$ *and only self-structural diagrams* $\Phi(A)$ *for* $A \neq \varnothing$.

Proof. The required generative class $(\mathbf{D}'_0; \leqslant')$ is generated by quantifier-free diagrams $\Phi(A)$ for finite sets $A \subseteq M$ being universes of finite subalgebras of $\mathcal{M} \upharpoonright \Sigma_f$, $\leqslant\, = \,\subseteq$. By Proposition 4.7, for $A \neq \varnothing$, all $\Phi(A)$ are self-structural and the axioms for the generativity of $(\mathbf{D}'_0; \leqslant')$ hold. $\square$

5 Generative classes for finite structures

Let $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$ is a generative class. If $\Phi(A)$ is a diagram in $\mathbf{D}_0$ having a proper extension in $\mathbf{D}_0$ and such that $A \neq \varnothing$ then removing $\Phi(A)$ and all its copies from $(\mathbf{D}_0;\leqslant)$ we get the generative class $(\mathbf{D}_0;\leqslant)\setminus\{\Phi(A)\}$ domination-equivalent to $(\mathbf{D}_0;\leqslant)$. At the same time, staying in the family of generative classes, we can not remove from $(\mathbf{D}_0;\leqslant)$ the diagram $\Phi_0(\varnothing)$ as well as, preserving the domination-equivalence, a *maximal* diagram $\Phi(A)$ such that it does not have proper extensions in $(\mathbf{D}_0;\leqslant)$. Clearly, maximal diagrams $\Phi(A)$ are self-structural and, moreover, describe $(\mathbf{D}_0;\leqslant)$-generic structures with the universe $A\cup C$, where C is the set of constant symbols. It means that $\Phi_0(\varnothing)$ and copies of $\Phi(A)$ form a *minimal* generative class being domination equivalent to $(\mathbf{D}_0;\leqslant)$. Moreover, the maximal diagram $\Phi(A)$ producing a representation, with the universe $A\cup C$, of $\Phi(A)$-canonical structure can be chosen quantifier-free.

Thus we get

Theorem 25. *For a generative class $(\mathbf{D}_0;\leqslant)$ with a language having a finite set C of pairwise distinct constants, the following conditions are equivalent:*

(1) *the $(\mathbf{D}_0;\leqslant)$-generic structure is finite;*

(2) *$(\mathbf{D}_0;\leqslant)$ has maximal diagrams;*

(3) *$(\mathbf{D}_0;\leqslant)$ is domination-equivalent to a minimal generative class consisting of a diagram $\Phi_0(\varnothing)$ and of copies of a self-structural diagram $\Phi(A)$;*

(4) *the $(\mathbf{D}_0;\leqslant)$-generic structure is isomorphic, for a quantifier-free diagram $\Phi(A)$, to a representation, with the universe $A\cup C$, of $\Phi(A)$-canonical structure.*

References

[1] J. T. Baldwin, N. Shi, Stable generic structures, Ann. Pure and Appl. Logic, **79** (1996), 1, 1–35.

[2] S. V. Sudoplatov, Syntactic approach to constructions of generic models, Algebra and Logic, **46** (2007), 2, 134–146.

[3] S. V. Sudoplatov, The Lachlan problem, Novosibirsk: NSTU, 2009.

[4] S. V. Sudoplatov, Classification of Countable Models of Complete Theories, Novosibirsk: NSTU, 2014.

[5] S. V. Sudoplatov, Generative and pre-generative classes, Proceedings of the 10th Panhellenic Logic Symposium, June 11–15, 2015, Samos, Greece, University of Aegean, University of Crete, and University of Athens, 2015, 30—34.

A NOTE ON HOMOLOGICAL DIMENSION OF A FAMILY OF COHERENT SHEAVES

N. V. Timofeeva

Yaroslavl' State University
Sovetskaya str. 14, 150000 Yaroslavl', Russia
e-mail: ntimofeeva@list.ru

To the blessed memory of my Mum.

The problem we solve in the present note is

how to conclude about homological dimension of the family of coherent sheaves of modules on the family of schemes if it is known about homological dimension of the family restricted to the reduction?

As usually if T is an algebraic scheme with structure sheaf $\mathcal{O}_T$ then its *reduction* is a scheme consisting of the same topological space but with structure sheaf equal to $\mathcal{O}_{T_{red}} := \mathcal{O}_T/Nil(\mathcal{O}_T)$ where $Nil(\mathcal{O}_T)$ is nilradical of $\mathcal{O}_T$. This is called for brevity a *reduced scheme structure*. The $\mathcal{O}_T$-module epimorphism onto the quotient module sheaf $\mathcal{O}_T \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{T_{red}}$ induces a canonical closed immersion $T_{red} \hookrightarrow T$ of schemes. From now, T is a base scheme of a flat morphism of finite type $f : X \to T$ of Noetherian schemes. We introduce notation $X_{red} := X \times_T T_{red}$, $f_{red} : X_{red} \to T_{red}$, i.e. X_{red} is a restriction of the family X to the reduction T_{red} as to a closed subscheme in T. Actually the scheme X_{red} can be non-reduced but f_{red} is flat morphism as a morphism obtained by a base change of a flat morphism. Now let $\mathbb{E}$ be a coherent $\mathcal{O}_X$-module and let $\mathbb{E}$ be flat as $\mathcal{O}_T$-module. This is a standard situation in various problems of algebraic geometry when families of sheaves are considered, especially in moduli-of-sheaves problems. Use the notation $\mathbb{E}_{red} = \mathbb{E} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_{T_{red}}$.

Let A be a commutative ring, M an A-module. Also introduce parallel algebraic notation: a *reduction* $A_{red} := A/NilA$ of the ring A is its quotient ring over its nilradical. If a commutative ring B is an A-algebra then we denote $B \otimes_A A_{red} =: B_{red}$. Hence B_{red} **is not obliged to be reduced** but it is A_{red}-flat whenever B is A-flat by well-known change-of-ring theorem. Also we use the notation $M \otimes_A A_{red} =: M_{red}$.

We say that M has *homological dimension not greater then* n (notation: $\mathrm{hd}_A M \leq n$) if one of following equivalent conditions holds [3, ch. 7, theorem 1.1]:

(1). $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M, N) = 0$ for all A-modules N;

(2). in any exact A-sequence $0 \to E_n \to E_{n-1} \to \cdots \to E_0 \to M \to 0$ if E_j are projective for $0 \leq j \leq n-1$ then E_n is also projective;

(3). there is a projective A-resolution of length n, i.e. there exists an exact sequence

$$0 \to E_n \to \cdots \to E_1 \to E_0 \to M \to 0$$

with E_j projective for $0 \leq j \leq n$.

Since if A is local ring then any projective A-module is free [1, theorem 19.2 and comment thereafter]. Then when working with coherent sheaves on schemes we speak of locally free resolutions instead of projective ones.

As usually the symbol $\mathrm{hd}_X \mathbb{E}$ means homological dimension of the coherent sheaf $\mathbb{E}$ as $\mathcal{O}_X$-module.

We prove the following well-expected result.

Theorem 1 (Algebraic version). *Let $f^\sharp : A \to B$ be local homomorphism of local Noetherian rings and B be flat as an A-algebra. Let M be B-module of finite type which is flat over A. Then following assertions are equivalent:*

(1). *$\mathrm{hd}_B M \leq n$;*

(2). *$\mathrm{hd}_{B_{red}} M_{red} \leq n$.*

Theorem 2 (Sheaf version). *Let $f : X \to T$ be a flat morphism of Noetherian schemes, $\mathbb{E}$ coherent $\mathcal{O}_X$-module which is flat over T. Then the following assertions are equivalent:*

(1). *$\mathrm{hd}_X \mathbb{E} \leq n$;*

(2). *$\mathrm{hd}_{X_{red}} \mathbb{E}_{red} \leq n$.*

Remark. The case $n = 1$ for a trivial family of schemes over a field was considered in the author's paper [5].

Remark. Since both theorems are just versions of the same result their proofs are transferred literally to each other and we prove an algebraic version.

Proof of Theorem 1. For the implication $1 \Rightarrow 2$ we do not need locality and consider B-exact sequence

$$0 \to E_n \to E_{n-1} \to \cdots \to E_1 \to E_0 \to M \to 0$$

with E_j free for $j \geq 0$. Cutting it into triples we have

$$\begin{gathered} 0 \to E_n \to E_{n-1} \to M^{(n-1)} \to 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 0 \to M^{(j+1)} \to E_j \to M^{(j)} \to 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 0 \to M^{(1)} \to E_0 \to M \to 0. \end{gathered}$$

Since M and E_j for $j \geq 0$ are flat A-modules [4, ch. 3, sect. 7, transitivity (1)] we have $M^{(j)}$ are A-flat for $j \geq 1$. Hence tensoring by $\otimes_B B_{red} = \otimes_A A_{red}$ ("cancelation formula") we obtain $\mathrm{Tor}_i^A(M^{(j)}, A_{red}) = \mathrm{Tor}_i^A(M, A_{red}) = 0$ and come to exact sequence

$$0 \to E_{n\,red} \to E_{(n-1)\,red} \to \cdots \to E_{1\,red} \to E_{0\,red} \to M_{red} \to 0$$

with $E_{j\,red}$ free as B_{red}-modules for $0 \leq j \leq n$.

For the opposite implication we proceed by induction on n. Assume that the theorem is true for coherent B-sheaves of homological dimension not greater then $n-1$. Let us be given an B-module epimorphism $E_0 \twoheadrightarrow M$, where E_0 is free and let $M' := \ker(E_0 \twoheadrightarrow M)$. Let $\mathrm{hd}_{B_{red}} M_{red} \leq n$. We are to conclude that $\mathrm{hd}_B M \leq n$. M is A-flat. So, by the exact B-triple

$$0 \to M' \to E_0 \to M \to 0$$

and tensoring by $\otimes_B B_{red} = \otimes_A A_{red}$ we obtain $\mathrm{Tor}_i^A(M, A_{red}) = 0$ for $i > 0$ and hence we come to the exact A_{red}-triple

$$0 \to M'_{red} \to E_{0\,red} \to M_{red} \to 0,$$

where $\mathrm{hd}_{A_{red}} M'_{red} \leq n-1$. By flatness of E_0 as a B-module and by the homomorphism $f^\sharp$ the term E_0 is A-flat [4, ch. 3, sect. 7, transitivity (1)] and hence M' is also flat as an A-module. By the inductive assumption $\mathrm{hd}_B M' \leq n-1$ and hence $\mathrm{hd}_B M \leq n$.

For the base of induction set $n = 0$. This means that M is flat as an A-module and M_{red} is free as an A_{red}-module.

Apply the following result from A. Grothendieck's SGA:

Proposition 3. [2, ch. IV, Corollaire 5.9] *Let $A \to B \to C$ be local homomorphisms of local Noetherian rings, M be a C-module of finite type. Assume that B is flat over A and k is a residue field of A. Then the following assertions are equivalent:*

(1). *M is B-flat;*

(2). *M is A-flat and $M \otimes_A k$ is $B \otimes_A k$-flat.*

For our purposes set $B \to C$ to be the identity isomorphism, M is flat over A and M_{red} is free (i.e. flat) as an A_{red}-module. Then $M \otimes_A k = M_{red} \otimes_{A_{red}} k$, $B \otimes_A k = B_{red} \otimes_{A_{red}} k$, and $M_{red} \otimes_{A_{red}} k$ is flat over $B_{red} \otimes_{A_{red}} k$ because M_{red} is free over B_{red}. From this we conclude that M is free as a B-module. This completes the proof of the theorem 1. $\square$

References

[1] D. Eisenbud, Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry. Graduate Texts in Math, 150, Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] A. Grothendieck, Seminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, 1960–61. I: Revêtements étales et groupe fondamental, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971.

[3] S. Maclane, Homology. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 114, Springer–Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1963.

[4] H. Matsumura, Commutative Ring Theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.

[5] N. V. Timofeeva, On a morphism of compactifications of moduli scheme of vector bundles, SEMR, **12** (2015), 577–591.

О ВЛОЖЕНИИ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНОЙ МЕТАБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ В ГРУППУ МАТРИЦ

Е. И. Тимошенко*

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: eitim45@gmail.com

1 Введение

Известное вложение Магнуса (см., например, [1, 2])позволяет считать свободную метабелеву группу S подгруппой группы матриц M. Оно индуцирует вложение частично коммутативной метабелевой группы S_Γ с определяющим графом Γ в группу матриц M_Γ, являющуюся полупрямым произведением свободной абелевой группы конечного ранга A и абелевой нормальной подгруппы T_Γ, на которой определена структура $\mathbb{Z}[A]$-модуля.

Интерес к группам M_Γ связан с тем, что универсальная теория свободной 2-ступенно разрешимой группы S совпадает с универсальной теорией группы матриц M. Это позволило Шапью [3] доказать разрешимость универсальной теории свободной метабелевой группы. Вопрос о разрешимости универсальной теории частично коммутативной метабелевой группы открыт и включен в "Коуровскую тетрадь" [4] под номером 17.104.

Частично коммутативная метабелева группа S_Γ получается из (свободной) частично коммутативной группы F_Γ добавлением к определяющим соотношениям тождества $[[x, y], [u, v]] = 1$, задающего многообразие метабелевых групп. Свойства групп S_Γ и их универсальные теории исследовались в [5]–[9].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-01485), а также при финансовой поддержке Министерства образования и науки (государственное задание №2014/138, проект 1052)

Мы изучаем свойства группы M_Γ и её универсальную теориию. Отметим, что в [5] доказана разрешимость универсальной теории группы M_Γ.

В статье рассматриваются некоторые преобразования определяющего графа Γ и доказывается, что при этих преобразованиях универсальная теория группы M_Γ не меняется (теорема 3). Затем это наблюдение используется для исследования универсальной теории графового произведения групп ("graph product"), которое является обобщением (свободной) частично коммутативной группы. Впервые понятие графового произведения появилось в работе [10], а затем исследовалось в ряде работ (см., например, [11, 12]). По аналогии с частично коммутативными группами из многообразий, можно изучать графовые произведения в многообразиях групп. Мы рассмотрим графовое произведение $S(\Gamma, A_1, \ldots, A_m)$ свободных абелевых групп $A_1, \ldots, A_m$ в многообразии метабелевых групп. Эти группы вложены в группы матриц, обозначаемые $M(\Gamma, A_1, \ldots, A_m)$. Вложение индуцировано вложением Магнуса. Из теоремы 3 получаем, что все группы матриц $M(\Gamma, A_1, \ldots, A_m)$ имеют одинаковые универсальные теории (следствие).

Однако, для вложения частично коммутативной метабелевой группы в группу матриц универсальные теории групп S_Γ и M_Γ, вообще говоря, разные. Используя понятие централизаторной размерности устанавливаем, что универсальные теории частично коммутативной метабелевой группы S_{L_3}, определенной линейным графом длины 3, и группы матриц M_{L_3} не совпадают (предложение).

Тем не менее теорема 6 устанавливает общие свойства универсальных теорий групп S_Γ и M_Γ. Она утверждает, что любое уравнение с одним неизвестным и коэффициентами из группы S_Γ тогда и только тогда разрешимо в S_Γ, когда оно разрешимо в M_Γ.

Заметим, что аналогичный результат для групп вида $F/[R, R]$, где F — свободная группа, а R — её нормальная подгруппа, для которой кольцо $\mathbb{Z}[F/R]$ не имеет делителей нуля, доказан в [13].

2 Предварительные сведения и обозначения

Обозначения, введенные в этом параграфе, будут использоваться в дальнейшем без дополнительных пояснений.

Пусть $V = \{v_1, \ldots, v_r\}$ — множество вершин некоторого графа Γ, а E — множество его ребер. В статье рассматриваются только конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Пусть A свободная абелева группа ранга r с базисом $\{a_1, \ldots, a_r\}$, тогда $\mathbb{Z}[A]$ — целочисленное групповое кольцо группы A. Обозначим через T свободный $\mathbb{Z}[A]$-модуль с базисом $\{t_1, \ldots, t_r\}$ а через

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$$

группу матриц.

Подмодуль $\widetilde{T}_\Gamma$ модуля T порожден теми элементами

$$t_{ij} = t_i(a_j - 1) + t_j(1 - a_i),$$

для которых вершины v_i и v_j графа Γ смежны и $i < j$, T_Γ — фактор-модуль $T/\widetilde{T}_\Gamma$.

Пусть S — свободная метабелева группа ранга r с базисом $\{s_1, \ldots, s_r\}$. Напомним, что частично коммутативная метабелева группа S_Γ с определяющим графом Γ изоморфна фактор-группе S/R, где R порождена как нормальная подгруппа теме коммутаторами $[s_i, s_j] = s_i^{-1}s_j^{-1}s_is_j$, для которых $(v_i, v_j) \in E$.

Вложение Магнуса μ группы S в группу матриц M продолжает отображение

$$s_i \longmapsto \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ t_i & 1 \end{pmatrix}, \ \ i = 1, \ldots, r.$$

Определим эпиморфизм d модуля T на разностный идеал Δ кольца $\mathbb{Z}[A]$:

если $t = t_1t^{(1)} + \ldots + t_rt^{(r)}$ — элемент из T, то

$$d(t) = (a_1 - 1))t^{(1)} + \ldots + (a_r - 1)t^{(r)}.$$

Известно [1], что матрица

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

лежит в образе группы S при вложении Магнуса тогда и только тогда, когда

$$d(t) = a - 1.$$

В частности, матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

принадлежит образу коммутанта $[S, S]$ в группе S тогда и только тогда, когда

$$d(t) = 0. \tag{1}$$

Легко подсчитать, что при вложении Магнуса коммутатор $[s_i, s_j]$ отображается в матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_{ij} & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому подгруппа R отображается на подгруппу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \widetilde{T}_\Gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, вложение Магнуса μ индуцирует вложение μ_Γ группы S_Γ в группу матриц

$$M_\Gamma = \begin{pmatrix} A & 0 \\ T_\Gamma & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ t + \widetilde{T}_\Gamma & 1 \end{pmatrix} \in M_\Gamma, \;\; \beta_i \in \mathbb{Z}[A],$$

принадлежит образу группы S_Γ в группе матриц (2) тогда и только тогда, когда

$$d(t) = a - 1. \tag{3}$$

Заметим, что выполнение условие условия (3) не зависит от того, какой элемент t выбран в качестве представителя смежного класса в модуле T_Γ.

В дальнейшем будем отождествлять элементы из S_Γ и их образы в M_Γ.

3 Универсальная эквивалентность групп M_Γ

Граф Γ_0 получен из графа Γ добавлением вершины v_0 и ребер, соединяющих v_0 с v_1 и теми вершинами из V, с которыми смежна вершина v_1. Таким образом, множество V_0 вершин графа Γ_0 есть $V \bigsqcup \{v_0\}$, множество ребер графа Γ_0 обозначим E_0.

В [7] вершины v_0 и v_1 названы эквивалентными и доказано, что универсальные теории частично коммутативных метабелевых групп S_Γ и S_{Γ_0} совпадают.

Будем писать $v_0 \sim_\perp v_1$, если вершины v_0 и v_1 эквивалентны.

Пусть A_0 — свободная абелева группа с базисом $\{a_0, a_1, \ldots, a_r\}$, содержащая группу A в качестве подгруппы, T_0 — свободный $\mathbb{Z}[A_0]$-модуль с базисом $\{t_0, t_1, \ldots, t_r\}$,

$$M_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ T_0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{\Gamma_0} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ T_{\Gamma_0} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть n — некоторое натуральное число. Рассмотрим отображение ψ_n группы M_0 в группу M, при котором матрице

$$\mathfrak{m}_0 = \begin{pmatrix} a_0^{l_0} a_1^{l_1} \dots a_r^{l_r} & 0 \\ \sum_{i=1}^r t_i \alpha_i(a_0, \dots, a_r) & 1 \end{pmatrix} \in M_0$$

ставится в соответствие матрица $\mathfrak{m} \in M$, равная

$$\begin{pmatrix} a_1^{nl_0+l_1} a_2^{l_2} \dots a_r^{l_r} & 0 \\ t_1(\frac{a_1^n-1}{a_1-1}\alpha_0(a_1^n, a_1, \dots, a_r) + \alpha_1(a_1^n, a_1, \dots, a_r)) + \sum_{i=2}^r t_i \alpha_i(a_1^n, a_1 \dots, a_r) & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Отображение ψ_n определяет ретракцию группы M_0 на группу M, причем $\widetilde{T}_0\psi_n = \widetilde{T}$.*

Доказательство. Для краткости будем обозначать

$$\alpha_i = \alpha_i(a_0, a_1, \dots, a_r), \;\; \alpha_i' = \alpha_i(a_1^n, a_1, \dots, a_r),$$

$$\beta_i = \beta_i(a_0, a_1, \dots, a_r), \;\; \beta_i' = \beta_i(a_1^n, a_1, \dots, a_r).$$

Пусть

$$\mathfrak{n}_0 = \begin{pmatrix} a_0^{q_0} a_1^{q_1} \dots a_r^{q_r} & 0 \\ \sum_{i=1}^r t_i \beta_i & 1 \end{pmatrix} \in M_0.$$

Тогда

$$\mathfrak{m}_0\psi_n = \begin{pmatrix} a_1^{nl_0+l_1} a_2^{l_2} \dots a_r^{l_r} & 0 \\ t_1(\frac{a_1^n-1}{a_1-1}\alpha_0' + \alpha_1') + \sum_{i=2}^r t_i \alpha_i' & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{n}_0\psi_n = \begin{pmatrix} a_1^{nq_0+q_1} a_2^{q_2} \dots a_r^{q_r} & 0 \\ t_1(\frac{a_1^n-1}{a_1-1}\beta_0' + \beta_1') + \sum_{i=2}^r t_i \beta_i' & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{m}_0\mathfrak{n}_0 = \begin{pmatrix} a_0^{l_0+q_0} a_1^{l_1+q_1} \dots a_r^{l_r+q_r} & 0 \\ \sum_{i=0}^r t_i(\alpha_i a_0^{q_0} \dots a_r^{q_r} + \beta_i) & 1 \end{pmatrix}.$$

Применяя к этому элементу отображение ψ_n, получим

$$(\mathfrak{m}_0\mathfrak{n}_0)\psi_n = \begin{pmatrix} a_1^{n(l_0+q_0)+l_1+q_1} a_2^{l_2+q_2} \dots a_r^{l_r+q_r} & 0 \\ \tau & 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где

$$\tau = t_1(\frac{a_1^n-1}{a_1-1}(\alpha_0' a_1^{nq_0+q_1} a_2^{q_2} \dots a_r^{q_r} + \beta_0') + \alpha_1' a_1^{nq_0+q_1} a_2^{q_2} \dots a_r^{q_r} + \beta_1')$$

$$+ \sum_{i=2}^r t_i(\alpha_i' a_1^{nq_0+q_1} a_2^{q_2} \dots a_r^{q_r} + \beta_i').$$

Вычислим теперь элемент, расположенный на месте 2×1 в матрице $(\mathfrak{m}_0\psi_n)(\mathfrak{n}_0\psi_n)$. Он совпадает с элементом τ. Сравнивая матрицы $(\mathfrak{m}_0\mathfrak{n}_0)\psi_n$ и $(\mathfrak{m}_0\psi_n)(\mathfrak{n}_0\psi_n)$, убеждаемся в их равенстве.

Итак, ψ_n — гомоморфизм, действующий тождественно на M, другими словами, ψ_n — ретракция.

Проверим, что $\widetilde{T}_0\psi_n = \widetilde{T}$.

Если $i \neq 0$, то $t_{ij}\psi_n = t_{ij}$. Рассмотрим образы элементов t_{0j} при гомоморфизме ψ_n. Получим

$$t_{01}\psi_n = (t_0(a_j - 1) + t_1(1 - a_0))\psi_n = t_1(\frac{a_1^n - 1}{a_1 - 1}(1 - a_1) + a_1^n - 1) = 0.$$

При $i \neq 1$ имеем

$$t_{0i}\psi_n = (t_0(1-a_1)+t_i(a_0-1))\psi_n = t_1\frac{a_1^n - 1}{a_1 - 1}(1-a_i)+t_i(a_1^n-1) = \frac{a_1^n - 1}{a_1 - 1}t_{1i}.$$

Но если $(v_0, v_i) \in E_0$, то $(v_1, v_i) \in E$. Поэтому $t_{0i}\psi_n$ принадлежит $\widetilde{T}$. Лемма доказана. $\square$

Отождествим группы S_Γ и S_{Γ_0} с их образами в M_Γ и M_{Γ_0} соответственно.

Из леммы следует, что гомоморфизм ψ_n индуцирует гомоморфизм φ_n группы M_{Γ_0} на группу M_Γ.

Лемма 2. *Гомоморфизм φ_n обладает следующими свойствами:*

1. φ_n есть ретракция;

2. φ_n отображает S_{Γ_0} на S_Γ;

3. для любого элемента $1 \neq g \in M_{\Gamma_0}$ найдется значение n_0 такое, что при всех $n \geq n_0$ элемент $g\varphi_n$ также не равен 1.

Доказательство. Первое утверждение сразу следует из определения гомоморфизма ψ_n.

Проверим второе утверждение. Пусть S_0 — свободная метабелева группа с базисом $\{s_0, s_1, \ldots, s_r\}$, и S — её подгруппа, порожденная элементами $s_1, \ldots, s_r$, R_0 — нормальное замыкание в S_0 тех коммутаторов $[s_i, s_j]$, для которых $(v_i, v_j) \in E_0$ и $0 \leq i < j \leq r$.

Имеем

$$s_0R_0 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ t_0 + \widetilde{T}_0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\varphi_n} \begin{pmatrix} a_1^n & 0 \\ \frac{a_1^n-1}{a_1-1}t_1 + \widetilde{T} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ t_1 + \widetilde{T} & 1 \end{pmatrix}^n = (s_1R)^n.$$

Очевидно, что $(s_iR_0)\varphi_n = s_iR$ при $1 \leq i \leq r$. Значит, $S_{\Gamma_0}\psi_n = S_\Gamma$.

Переходим к третьему утверждению.

Пусть

$$1 \neq g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ t_0\alpha_0 + \ldots + t_r\alpha_r + \widetilde{T}_0 & 1 \end{pmatrix},\ a \in A_0,\ \alpha_i \in \mathbb{Z}[A_0].$$

Случай 1: $a \neq 1$.

Если a не зависит от a_0, то в качестве n можно взять любое положительное целое.

Если a зависит от a_0, то есть $a = a_0^{l_0}\ldots a_r^{l_r},\ l_0 \neq 0$, то выберем n_0 так, что $l_0n_0 + l_1 > 0$, если $l_0 > 0$ и $l_0n_0 + l_1 < 0$, если $l_0 < 0$. Очевидно, что при всех $n \geq n_0$ получим $g\varphi_n \neq 1$.

Случай 2: $a = 1,\ \ \sum_{i=0}^r \alpha_i(a_i - 1) = 0$.

Тогда матрица g принадлежит коммутанту группы S_{Γ_0}. Гомоморфизм φ_n индуцирует гомоморфизм $\overline{\varphi}_n$ группы S_{Γ_0} на группу S_Γ, при котором

$$s_0R_0 \longmapsto s_1^nR,\ \ s_iR_0 \longmapsto s_iR,\ i = 1, \ldots, r.$$

В [1] доказано, что можно выбрать n_0 так, что для всех $n \geq n_0$ образ элемента $g \in [S_{\Gamma_0}, S_{\Gamma_0}]$ будет неединичным. Это значение n_0 удовлетворяет условию леммы.

Случай 2: $a = 1,\ \ \sum_{i=0}^r \alpha_i(a_i - 1) \neq 0$.

Обозначим $\alpha = \sum_{i=0}^r \alpha_i(a_i - 1)$. Выберем n_0 так, что образ элемента α при гомоморфизме $\chi_n : \mathbb{Z}[A_0] \longrightarrow \mathbb{Z}[A]$, определенном на базисе группы A_0 следующим образом

$$\chi_n = \{a_0 \longmapsto a_1^n, a_1 \longmapsto a_1, \ldots, a_r \longmapsto a_r\},$$

остается ненулевым. Покажем, что при всех $n \geq n_0$ элемент $g\varphi_n$ неединичный.

Имеем

$$g\varphi_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_1(\frac{a_1^n - 1}{a_1 - 1}\alpha'_0 + \alpha'_1) + t_2\alpha'_2 + \ldots + t_r\alpha'_r & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим

$$(a_1 - 1)(\frac{a_1^n - 1}{a_1 - 1}\alpha'_0 + \alpha'_1) + (a_2 - 1)\alpha'_2 + \ldots + (a_r - 1)\alpha'_r =$$

$$(a_1^n - 1)\alpha'_0 + (a_1 - 1)\alpha'_1 + \ldots + (a_r - 1)\alpha'_r = \alpha\chi_n \neq 1.$$

Лемма доказана. $\square$

Группа G *дискриминируется* группой H, если для любого конечного множества неединичных элементов $\{g_1, \ldots, g_n\}$ из группы G найдется гомоморфизм $\varphi : G \longrightarrow H$, такой что $\varphi(g_i) \neq 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Хорошо известно, что если группа G дискриминируется группой H, а группа H дискриминируется группой G, то универсальные теории групп G и H совпадают.

Теорема 3. *Пусть в графе Γ_0 вершины v_0 и v_1 эквивалентны $v_0 \sim_\perp v_1$, граф Γ получается из Γ_0 удалением вершины v_0 и всех инцидентных ей ребер. Тогда универсальные теории групп M_Γ и M_{Γ_0} совпадают.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что группа M_Γ вложена в группу M_{Γ_0}, а по лемме 2 группа M_{Γ_0} дискриминируется группой M_Γ. □

Пусть G_x — семейство нетривиальных групп, индексированных вершинами $x \in X$ графа Γ и E — множество ребер графа. Тогда их *графовым произведением* называется фактор-группа свободного произведения $\prod^*_{x \in X} G_x$ по нормальной подгруппе порожденной теми коммутантами $[G_x, G_y]$, для которых $(x, y) \in E$.

При изучении частично коммутативных метабелевых групп определяется аналогичное понятие — *метабелевое графовое произведение.* Оно возникает из графового произведения заменой свободного произведения групп на метабелево произведение. Дадим и будем использовать это определение для случая, когда сомножители — свободные абелевы группы.

Пусть $A_i = A_{x_i}$ — свободные абелевы группы, индексами x_i которых являются вершины графа Γ.

Метабелевым произведением $\mathfrak{A}^2 \prod A_i$ называется фактор-группа свободного произведения $F = \prod^* A_i$ по второму коммутанту

$$F^{(2)} = [[F, F], [F, F]].$$

Метабелевое графовое произведение $S(\Gamma, A_i)$ определяется как фактор-группа $\mathfrak{A}^2 \prod A_i$ по нормальной подгруппе, порожденной теми коммутантами $[A_i, A_j]$, для которых $(x_i, x_j) \in E$.

Метабелевое графовое произведение свободных абелевых групп конечных рангов можно получить следующим образом. Пусть ранг группы A_i равен $ri \geq 2$. Тогда добавим к множеству вершин V графа Γ вершины $v_{i_2}, \ldots, v_{i_r i}$, соединим все вершины $v_i, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{ri}}$ между собой, а новые вершины соединим с теми вершинами из V, с которыми смежна вершина v_i. Полученный граф обозначим Δ. Очевидно, что группы S_Δ и $S(\Gamma, A_i)$ изоморфны.

Обозначим M_Δ через $M(\Gamma, A_i)$.

Так как новые вершины $v_{i_2}, \ldots, v_{i_{ri}}$ эквивалентны вершине v_i, то из теоремы 3 получаем

Следствие 4. *Пусть A_i, $i = 1, \ldots, r$, — свободные абелевы группы конечных рангов, Γ — некоторый граф. Тогда универсальные теории групп M_Γ и $M(\Gamma, A_i)$ совпадают.*

Рассмотрим в качестве Γ вполне несвязный граф. Тогда S_Γ — свободная метабелева группа ранга r, а M_Γ — дискретное сплетение двух свободных абелевых групп ранга r. Известно [3], что универсальные теории групп S_Γ и M_Γ совпадают. Однако можно указать граф Γ, для которого универсальные теории групп S_Γ и M_Γ не совпадают.

Утверждение 5. *Пусть $\Gamma = L_3$ — линейный граф на трёх вершинах. Тогда универсальные теории групп S_Γ и M_Γ не совпадают.*

Доказательство. Как следует из определения, *централизаторная размерность $CdimG$* некоторой группы G равна n, если в G найдутся подмножества

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n,$$

централизаторы которых

$$C(A_1) > C(A_2) \ldots > C(A_n)$$

строго убывают и n — наибольшее число с этим свойством.

Если наибольшего n не существует, то $Cdim(G) = \infty$.

Отметим, что из совпадения универсальных (равносильно, экзистенциальных) теорий двух групп следует совпадение их централизаторных размерностей.

Вычислим централизаторную размерность группы S_Γ, которая изоморфна прямому произведению свободной метабелевой группы $S_2\langle x_1, x_3\rangle$ ранга 2 и бесконечной циклической группы $\langle x_2\rangle$. В [14] доказано, что ценрализаторная размерность прямого произведения двух групп вычисляется по формуле

$$Cdim(S_2 \times \langle x\rangle) = Cdim(S_2) + Cdim(\langle x\rangle) - 1.$$

Нетрудно заметить, что $Cdim(S_\Gamma) = 3$.

Вычислим $Cdim(M_\Gamma)$. Пусть

$$\widehat{t}_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_1(a_3 - 1) + t_3(1 - a_1) + \widetilde{T}_\Gamma & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{t}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_1 + \widetilde{T}_\Gamma & 1 \end{pmatrix}, \ \widehat{t}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_2 + \widetilde{T}_\Gamma & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ \widetilde{T}_\Gamma & 1 \end{pmatrix}, \ \widehat{a}_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ \widetilde{T}_\Gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим цепочку централизаторов

$$M_\Gamma \overset{\widehat{a}_1}{>} C(\widehat{t}_{13}) \overset{\widehat{a}_2}{>} C(\widehat{t}_{13}, \widehat{t}_2) \overset{\widehat{t}_1}{>} C(\widehat{t}_{13}, \widehat{t}_2, \widehat{a}_2).$$

Сделаем пояснения:

1. $[\widehat{a}_1, \widehat{t}_{13}] = [x_1, [x_1, x_3]] \neq 1$ в группе S_2.

2. $[\widehat{a}_2, \widehat{t}_{13}] = [x_2, [x_1, x_3]] = 1$. Если $[\widehat{a}_2, \widehat{t}_2] = 1$, то $t_2(a_2 - 1)$ лежит в подмодуле $\widetilde{T}_\Gamma$ свободного модуля T, порожденного элементами

$$(a_1 - 1)t_2 + (1 - a_2)t_1, \ (a_3 - 1)t_2 + (1 - a_2)t_3.$$

Но это невозможно.

3. По той же причине элемент $\widehat{t}_1$ принадлежит последнему скачку.

Значит $Cdim(M_\Gamma) \geq 4$. Предложение доказано. □

4 Уравнения с одним неизвестным

Теорема 6. *Уравнение*

$$g_1 x^{m_1} \ldots x^{m_l} g_l = 1, \ g_i \in S_\Gamma, \tag{5}$$

разрешимо в группе S_Γ тогда и только тогда, когда оно разрешимо в группе M_Γ.

Доказательство. Пусть

$$\mu_\Gamma : g_j \longmapsto \widehat{g}_j = \begin{pmatrix} b_j & 0 \\ \tau_j + \widetilde{T}_\Gamma & 1 \end{pmatrix}, \ j = 1, \ldots, l, \ b_j \in A, \ \tau_j \in T.$$

Предположим, что уравнение (5) разрешимо в M_Γ и

$$\widehat{x} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ \tau & 1 \end{pmatrix}$$

его решение.

Нетрудно подсчитать, что левая часть уравнения равна матрице

$$\begin{pmatrix} b_1 \ldots b_l x^{m_1 + \ldots + m_l} & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\gamma = \tau_l x^{m_l} + \sum_{j=1}^{l-1} \tau_j b_{j+1} \dots b_l x^{m_j + \dots + m_l} +$$

$$\tau\left(\frac{x^{m_l}-1}{x-1} + \sum_{j=1}^{l-1} b_{j+1} \dots b_l \frac{x^{m_j}-1}{x-1} x^{m_{j+1}+\dots+m_l}\right) + \widetilde{T}_\Gamma,$$

причем $\frac{x^m-1}{x-1} = m$ при $x = 1$.

Разрешимость уравнения (5) в группе M_Γ равносильна разрешимости системы уравнений

$$b_1 \dots b_l x^{m_1 + \dots + m_l} = 1 \ \bigwedge \ \gamma = 0 \qquad (5)$$

относительно $\tau \in T$ и $x \in A$.

Обозначим

$$V = d(\tau),\ B = \frac{x^{m_l}-1}{x-1} + \sum_{j=1}^{l-1} b_{j+1} \dots b_l \frac{x^{m_j}-1}{x-1} x^{m_{j+1}+\dots+m_l}.$$

Так как d — гомоморфизм модулей и $d(\tau_j) = b_j - 1$, то

$$d(\gamma) = (b_l - 1)x^{m_l} + \sum_{j=1}^{l-1} (b_j - 1) b_{j+1} \dots b_l x^{m_j + \dots + m_l} + d(\tau)B.$$

Так как x и τ — решение системы (6), получим

$$B(x-1) + (b_l - 1)x^{m_l} + \sum_{j=1}^{l-1} (b_j - 1) b_{j+1} \dots b_l x^{m_j + \dots + m_l} = 0,$$

$$Bd(\tau) + (b_l - 1)x^{m_l} + \sum_{j=1}^{l-1} (b_j - 1) b_{j+1} \dots b_l x^{m_j + \dots + m_l} = 0.$$

Значит $B(x-1) = Bd(\tau)$.

Если $B = 0$, то система уравнений (6) не зависит от τ. Поэтому при любом $y \in T_\Gamma$ матрица

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

будет решением уравнения (6). Очевидно, что для $x \in A$ можно подобрать y так, что получим матрицу из S_Γ.

Если $B \neq 0$, то $d(\tau) = x - 1$, то есть матрица $\widehat{x}$ лежит в S_Γ. Теорема доказана. □

Список литературы

[1] В. Н. Ремесленников, В. Г. Соколов, Некоторые свойства вложения Магнуса, Алгебра и логика, **9**, 5 (1970), 566–578.

[2] Е. И. Тимошенко, Эндоморфизмы и универсальные теории разрешимы групп, Новосибирск: НГТУ, 2011, 327 с. (серия “Монографии НГТУ”)

[3] O. Chapuis, Universal theory of certain solvable groups and bounded Ore group rings, J.Algebra, **176**, 2 (1995), 368–391.

[4] Нерешенные вопросы теории групп, Коуровская тетрадь, издание 17, 2011.

[5] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, Частично коммутативные метабелевы группы: централизаторы и элементарная эквивалентность, Алгебра и логика, **48**, 3 (2009), 309–341.

[6] Е. И. Тимошенко, Универсальная эквивалентность частично коммутативных метабелевых групп, Алгебра и логика, **49**, 2 (2010), 263–290.

[7] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, Об универсальных теориях частично коммутативных метабелевых групп, Алгебра и логика, **50**, 1 (2011), 3–25.

[8] Е. И. Тимошенко, Мальцевская база частично коммутативной нильпотентной метабелевой группы, Алгебра и логика, **50**, 5 (2011), 647–658.

[9] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, Свойства и универсальные теории частично коммутативных метабелевых нильпотентных групп, Алгебра и логика, **51**, 4 (2012), 429–457.

[10] E. R. Green, Graph products of groups, PhD Thesis of Newcastleupon-Tyne, 2006.

[11] L. J. Corredor, M. A. Gutierrez, A generating set for the automorphism group of a graph product of abelian groups, arXiv:0911.0576v1[math.GR], 2009.

[12] R. Charney, K. Ruane, N. Stambaugh, A. Vijayan, The automorphisms group of a graph product with no SIL, arXiv:0910.4886, 2009.

[13] Е. И. Тимошенко, Метабелевы группы с одним определяющим соотношением и вложение Магнуса, Математические заметки, **57**, 4 (1995), 597–605.

[14] A. Myasnikov, P. Shumyatsky, Discriminating groups and c-dimension, Journal of Group Theory, 7 (2004), 135–142.

COMBINING STABILITY AND QUANTIFIER ELIMINATION

V. V. Verbovskiy

Suleyman Demirel University,
Abylaikhan St., 1/1, Kaskelen, 040900, Kazakhstan
e-mail: viktor.verbovski@sdu.edu.kz

Stability seems to be one of the most important notion in Model Theory. Since it has been introduced by S. Shelah [8] after works by M. Morley [6], stability has been playing the major role in developing of Model Theory. In 80-th of XX century specialists in Model Theory started to find ways of generalizations of stability. Such notion as a simple theories appeared [3]. Another way of applying notions which appeared in studying stability is o-minimality and its various generalizations, like weak o-minimality [4], quasi-o-minimality [2], C-minimality, and variants of o-minimality [5]. Combining o-minimality and stability B. S. Baizhanov and the author suggested notion of o-stability [1]. Later the author introduced notion of stability up to Δ, which generalizes notion of o-stability. In this paper, I introduce a more general notion of stability, which surprisingly as a partial case implies quantifier elimination, that is this notions combines both stability and quantifier elimination.

This paper is rather methodological, then solves some problems.

Let Δ consist of formulae of the form $\varphi(x_1, \ldots, x_n; \bar{y})$. As usual $S^n_\Delta(A)$ stands for the set of all Δ-types over the set A.

Let s be a partial n-type, A a set, Δ a collection of formulae in n free variables. Then

$$S^n_{\Delta,s}(A) \triangleq \{p \in S^n_\Delta(A) : p \cup s \text{ is consistent}\}$$

If $\Delta = \mathcal{L}$ I omit it and write S^n_s. Note, s need not be a partial type over A.

Definition 1. Let $\mathcal{M}$ be an arbitrary structure, and $I \subset \mathbb{N}$. Let Δ_n be sets of formulae of the form $\varphi(x_1, \ldots, x_n; \bar{y})$ for each $n \in I$. Let λ be a cardinal and $\langle \mu_n : n \in I \rangle$ a sequence of cardinals.

(1). The structure $\mathcal{M}$ is *set-stable up to the sequence* $\langle \Delta_n : n \in I \rangle$ in λ and $\langle \mu_n : n \in I \rangle$ if for all $A \subseteq M$ with $|A| \leq \lambda$, for any Δ_n-type p_n over

A there are at most μ_n types over A which are consistent with p_n, i. e. $|S^n_{p_n}(A)| \le \mu_n$.

(2). The model $\mathcal{M}$ is acl^{eq}*-set-stable up to the sequence* $\langle \Delta_n : n \in I\rangle$ in λ if for all $A \subseteq M$ with $|A| \le \lambda$, for any Δ_n-type p_n over $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ there are at most μ_n types over $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ which are consistent with p_n, i.e. $|S^n_{p_n}(\mathrm{acl}^{eq}(A))| \le \mu_n$.

(3). The model $\mathcal{M}$ is *model-stable up to the sequence* $\langle \Delta_n : n \in I\rangle$ in λ if for all $A \subseteq M$ with $|A| \le \lambda$, for any Δ_n-type p_n over M there are at most μ_n types over $\mathcal{M}$ which are consistent with p_n, i. e. $|S^n_{p_n}(\mathcal{M})| \le \mu_n$.

(4). If $\mu_n = \lambda$ for each $n \in I$, then we omit $\langle \mu_n : n \in I\rangle$ and write than $\mathcal{M}$ is $\star$-stable up to $\langle \Delta_n : n \in I\rangle$ in λ, where $\star \in \{\text{set}, \mathrm{acl}^{eq}\text{-set}, \text{model}\}$.

The most natural way for defining μ_n is to put it to be equal 1 or λ. Also an interesting combinatorial problem is investigate possible finite values for μ_n.

Having definition of stability in λ of a structure in the standard way one can define notions of stability and superstability.

Definition 2. Let $\star \in \{\text{set}, \mathrm{acl}^{eq}\text{-set}, \text{model}\}$.

(1). The theory T is $\star$*-stable up to* $\langle \Delta_n : n \in I\rangle$ in λ if every model of T is. Sometimes I write T is λ-$\star$-stable up to $\langle \Delta_n : n \in I\rangle$.

(2). T is $\star$*-stable up to* $\langle \Delta_n : n \in I\rangle$ if there exists a λ in which T is $\star$-stable up to $\langle \Delta_n : n \in I\rangle$. I write T is *model-stable up to* φ meaning that T is model-stable up to $\Delta_1 = \{\varphi\}$.

(3). T is $\star$*-superstable up to* $\langle \Delta_n : n \in I\rangle$ if there exists a λ such that T is $\star$-stable up to $\langle \Delta_n : n \in I\rangle$ in all $\mu \ge \lambda$.

Lemma 3. *Let sets Δ_n consists of all quantifier-free formulae of the form $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ and $I = \mathcal{N}$. Assume that a structure $\mathcal{M}$ is set-stable up to the sequence $\langle \Delta_n : n \in I\rangle$ in $\lambda = 0$ and $\mu_1 = 1$. Then the elementary theory of $\mathcal{M}$ admits quantifier elimination.*

Proof. In this case set-stability in 0 means that each quantifier-free type over $\emptyset$ has a unique extension up to a complete type over $\emptyset$, which is equivalent to quantifier elimination. □

Lemma 4. *Let sets Δ_1 consists of $\varphi(x_1; y) \triangleq x_1 = y$ and $I = \{1\}$. Assume that a structure $\mathcal{M}$ is set-stable up to the sequence $\langle \Delta_n : n \in I\rangle$ in $\lambda \ge \aleph_0$. Then $\mathcal{M}$ is stable in λ.*

Proof. In this case set-stability in λ implies that the unique non-algebraic type over A has at most λ extension up to a complete type over A, which is stability in λ. $\square$

Definition 5. A totally ordered structure $\mathcal{M}$ is called *o-stable in* λ, if for any set $A \subseteq M$ of cardinality λ and for each cut $\langle C, D\rangle$ in $\mathcal{M}$ there exist at most λ 1-types over A, which are consistent with the cut $\langle C, D\rangle$, that is $|S^1_{\langle C,D\rangle}(A)| \leq \lambda$.

Lemma 6. *Let sets* Δ_1 *consists of* $\varphi_1(x_1; y) \triangleq x_1 < y$, $\varphi_2(x_1; y) \triangleq x_1 > y$ *and* $I = \{1\}$. *Assume that a structure* $\mathcal{M}$ *is model-stable up to the sequence* $\langle \Delta_n : n \in I\rangle$ *in* $\lambda \geq \aleph_0$. *Then* $\mathcal{M}$ *is o-stable in* λ.

Proof. Recall that each cut $\langle C, D\rangle$ correspond to the following partial type $\{c < x < d : c \in C, d \in D\}$. So, in this case model-stability in λ implies that teach cut in the model has at most λ complete types over A which are consistent with the given type. So, $\mathcal{M}$ is o-stable in λ. $\square$

A subset A of a linearly ordered set M is called *convex*, if for any a and $b \in A$ the segment $[a, b]$ is in A. We define *the convex hull* A^c of a set A in the following way: $A^c = \{b \in M : \exists a_1, a_2 \in A(a_1 \leq b \leq a_2)\}$, that is it is the least convex set containing A.

A formula $\phi(x, \bar{b})$ is called *convex*, if the set of all its realizations is convex.

Note that is a set is definable then its convex hull is definable over the same parameters. So, we shall write $F^c(x)$ for the convex hull of $F(x)$. It is clear that

$$F^c(x) = \exists y \exists z (F(y) \wedge F(z) \wedge y \leq x \leq z).$$

Let p be some 1-type over A. *The convex hull* of p is p^c:

$$p^c = \{F^c(x) : F(x) \in p\}$$

Now we give the second definition of o-stability, which is equivalent to the first one.

Definition 7 (B. S. Baizhanov). A linearly ordered structure $\mathcal{M}$ is called *o-stable* in λ, if for each subset $A \subseteq M$ of cardinality at most λ, for each complete 1-type p over A the following holds $|S_{p^c}(A)| \leq \lambda$.

Lemma 8. *Let sets* Δ_1 *consist of* $\varphi(x_1; \bar{y})^c$ *for each formula* φ *and* $I = \{1\}$. *Assume that a structure* $\mathcal{M}$ *is set-stable up to the sequence* $\langle \Delta_n : n \in I\rangle$ *in* $\lambda \geq \aleph_0$. *Then* $\mathcal{M}$ *is o-stable in* λ.

Proof. It is clear. □

Now let $\mathcal{M}$ be a linearly ordered structure and U be a definable convex set. Let $a \in U$ and $U_1 \triangleq U \cup (-\infty, a)$. Then we can introduce the imaginary elements for the equivalence relation $(x \in U_1 \wedge y \in U_1) \vee (x \notin U_1 \wedge y \notin U_1)$. Assume that α is the imaginary element for U_1 and β is the imaginary element for V_1, where V_1 is obtained similar to U_1. Then we say that $\alpha < \beta$ if $U_1 \subset V_1$. Then the following lemma is obvious.

Lemma 9. *Let sets Δ_1 consist of $\varphi_1(x_1; y) \triangleq x_1 < y$, $\varphi_2(x_1; y) \triangleq x_1 > y$, and $I = \{1\}$. Assume that a structure $\mathcal{M}$ is* acl^{eq}*-stable up to the sequence $\langle \Delta_n : n \in I \rangle$ in $\lambda \geq \aleph_0$. Then $\mathcal{M}$ is o-stable in λ.*

Definition 10 (A. Pillay, Ch. Steinhorn [7]). A linearly ordered structure $\mathcal{M}$ is called *o-minimal*, if for each definable subset is equal to the finite union of intervals and points.

The following lemma is clear.

Lemma 11. *Let sets Δ_1 consists of $\varphi_1(x_1; y) \triangleq x_1 < y$, $\varphi_2(x_1; y) \triangleq x_1 > y$, and $I = \{1\}$. Assume that a structure $\mathcal{M}$ is model-stable up to the sequence $\langle \Delta_n : n \in I \rangle$ in λ and $\mu_1 = 1$. Then $\mathcal{M}$ is o-minimal.*

Definition 12 (O. V. Belegradek, et al. [2]). A linearly ordered structure $\mathcal{M}$ is called *quais-o-minimal*, if for each definable subset is equal to the finite union of intervals intersected with -definable subsets.

The following lemma is obvious.

Lemma 13. *Let sets Δ_1 consist of $\varphi_1(x_1; y) \triangleq x_1 < y$, $\varphi_2(x_1; y) \triangleq x_1 > y$ and of unary predicates, and $I = \{1\}$. Assume that a structure $\mathcal{M}$ is model-stable up to the sequence $\langle \Delta_n : n \in I \rangle$ in λ and $\mu_1 = 1$. Then $\mathcal{M}$ is quasi-o-minimal.*

The following notion was suggested by D. Macpherson and Ch. Steinhorn in [5]. Suppose $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}^+$ are languages, and $\mathcal{K}$ is an elementary class of $\mathcal{L}$-structures. We say that an $\mathcal{L}^+$-structure $\mathcal{M}$ is $\mathcal{K}$-minimal if the reduct $\mathcal{M} \mid \mathcal{L} \in \mathcal{K}$ and every $\mathcal{L}^+$-definable subset of M is definable by a quantifier-free $\mathcal{L}$-formula. A complete $\mathcal{L}^+$-theory is $\mathcal{K}$-minimal if all its models are.

The following lemma is obvious.

Lemma 14. *Suppose $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}^+$ are languages. Let sets Δ_1 consist of quantifier-free $\mathcal{L}$-formulae of the form $\varphi(x_1; \bar{y})$, and $I = \{1\}$. Assume that a structure $\mathcal{M}$ is model-stable up to the sequence $\langle \Delta_n : n \in I \rangle$ in λ and $\mu_1 = 1$. Then $\mathcal{M}$ is $\mathcal{K}$-minimal.*

From the above proved lemmata the following theorem is immediate.

Theorem 15. *Definition* 1 *combines all of the following notions: stability, quantifier elimination, o-minimality, o-stability, quasi-o-minimality, variants of o-minimality, stability up to* Δ.

References

[1] B. Baizhanov, V. Verbovskiy, *O*-stable theories, Algebra and Logic, **50**, 3 (2011), 211–225.

[2] O. V. Belegradek, A. P. Stolboushkin, M. F. Taitslin, Generic queries over quasi-*o*-minimal domains, Logical Foundations of Computer Science, (Proc. 4th International Sypmosium LFCS'97, Yaroslavl, Russia, June 1997, Eds. S. Adian and A. Nerode), Lecture Notes in Computer Science 1234, Springer-Verlag, 1997, 21–32.

[3] B. Kim, A. Pillay, Simple theories, Ann. Pure and Appl. Logic, **88** (1997), 149–164.

[4] D. Macpherson, D. Marker, Ch. Steinhorn, Weakly *o*-minimal structures and real closed fields, Transactions of The American Mathematical Society, **352** (2000), 5435–5483.

[5] D. Macpherson, Ch. Steinhorn, On Variants of *o*-Minimality, Ann. Pure Appl. Logic, 79(2) (1996), 165–209.

[6] M. Morley, Categoricity in Power, Transactions of the American Mathematical Society, **114** (1965), 514–538.

[7] A. Pillay, Ch. Steinhorn, Definable sets in ordered structures 1, Trans. Amer. Math. Soc, **295** (1986), 565–592.

[8] S. Shelah, Stable theories, Israel Journal of Mathematics, **7** (1969), 187–202.

НОВЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ РАССТОЯНИЯ И МЕРЫ ДОСТОВЕРНОСТИ ФОРМУЛ ЛОГИКИ ЛУКАСЕВИЧА В АВТОМАТИЧЕСКОЙ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ БАЗ ЗНАНИЙ

А. А. Викентьев

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга 4,
Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: vikent@math.nsc.ru

В. В. Фефелова

Новосибирский государственный
университет, Пирогова д. 2,
г. Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: lexsiyaren@yandex.ru

1 Введение

На сегодняшний день задача анализа многозначной экспертной информации является актуальной. В данной работе рассматриваются логические высказывания (экспертов), представленные в виде логических формул n-значной логики Лукасевича базы знаний. Понятно, что различные высказывания несут в себе разное количество информации. Тем самым возникает вопрос о сравнение (экспертных) высказываний по информативности и, как следствие, их ранжирования и выделение похожих высказываний. Для этого необходимо ввести расстояние между высказываниями, а также меру информативности. Полученные величины можно использовать в кластеризации множеств высказываний.

2 Теоретические проблемы

2.1 Постановка задачи

Основной задачей данной работы является введение новых расстояний и мер недостоверности для формул n-значной логики Лукасевича, уточняющих [1, 2, 6], причем так, чтобы выполнялось как можно больше свойств, характерных для данных величин в известных случаях. Показать применения полученных величин в кластеризации.

2.2 Расстояния между формулами Ł$_n$

Теоретико-модельные понятия, используемые в данной работе, определены в [1, 3, 6]. Обозначим через $M\left(\frac{k}{n-1}\right) = \left|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}\right|$ количество моделей, на которых формула φ принимает значение $\frac{k}{n-1}$, а через $M\left(\frac{k}{n-1}, \frac{l}{n-1}\right) = \left|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}\left((\varphi)_{\frac{k}{n-1}} \& (\psi)_{\frac{l}{n-1}}\right)\right|$ обозначим количество моделей, на которых формула φ принимает значение $\frac{k}{n-1}$, а формула ψ — значение $\frac{l}{n-1}$.

Для определения расстояния мы учитываем разницу между значениями двух формул на каждой модели. Объединим модели с одинаковыми модулями разности между значениями формул ϕ и ψ и возьмем их с некоторым весом, учитывающим близость логических значений.

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\rho}(\varphi,\psi) = \\
=&\alpha_0\Big(M(0,0) + M\Big(\frac{1}{n-1},\frac{1}{n-1}\Big) + \cdots + M\Big(\frac{n-2}{n-1},\frac{n-2}{n-1}\Big) + M(1,1)\Big) + \\
&+\alpha_1\Big(M\Big(0,\frac{1}{n-1}\Big) + M\Big(\frac{1}{n-1},0\Big) + M\Big(\frac{1}{n-1},\frac{2}{n-1}\Big) + \\
&+M\Big(\frac{2}{n-1},\frac{1}{n-1}\Big) + \cdots + M\Big(\frac{n-2}{n-1},1\Big) + M\Big(1,\frac{n-2}{n-1}\Big)\Big) + \cdots \\
+&\alpha_{n-2}\Big(M\Big(0,\frac{n-2}{n-1}\Big) + M\Big(\frac{n-2}{n-1},0\Big) + \\
+&M\Big(1,\frac{1}{n-1}\Big) + +M\Big(\frac{1}{n-1},1\Big)\Big) + \alpha_{n-1}(M(0,1) + M(1,0))\Big).
\end{aligned}
$$

Очевидно, что модели, на которых значения формул совпадают, рассматривать не нужно, поэтому полагаем $\alpha_0 = 0$. Модели, на которых формула ϕ принимает значение 0, а формула ψ принимает значение 1 (и наоборот) берем с весом $\alpha_{n-1} = 1$. Полагаем, что чем меньше модуль разности между значениями формул ϕ и ψ на модели, тем они ближе на данной модели, и потому их нужно брать с меньшим весом, поэтому $\alpha_i \leqslant \alpha_{i+1}$ для $i = 0, \ldots, n-1$. Остается нормировать величину $\widetilde{\rho}(\varphi,\psi)$.

2.2.1 Определение

Расстоянием между формулами φ и ψ n-значной логики $Ł_n$ при $S(\varphi) \cup S(\psi) \subseteq S(\Sigma)$ на множестве $P(S(\Sigma))$ назовём величину

$$\rho(\varphi, \psi) = \frac{1}{n^{|S(\Sigma)|}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{|k-l|} M\left(\frac{k}{n-1}, \frac{l}{n-1}\right), \tag{1}$$

где α_i удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} 0 = \alpha_0 \leqslant \alpha_i \leqslant \alpha_{n-1} = 1, \\ \alpha_i \leqslant \alpha_{i+1},\ i = 0, \ldots, n-1, \\ \alpha_i + \alpha_{n-1+i} = 1,\ i = 0, \ldots, \dfrac{n-1}{2} \end{cases}$$

2.2.2 Теорема

Расстояние между формулами $Ł_n$, определенное равенством (1), для любых $\varphi, \psi, \tau \in \Sigma$ удовлетворяет следующим свойствам:

(1). $0 \leqslant \rho(\varphi, \psi) \leqslant 1$;

(2). $\rho(\varphi, \psi) = 0 \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi$;

(3). $\rho(\varphi, \psi) = \rho(\psi, \varphi)$;

(4). $\rho(\varphi, \psi) \leqslant \rho(\varphi, \tau) + \rho(\tau, \psi)$;

(5). $\varphi \equiv \varphi_1,\ \psi \equiv \psi_1 \Rightarrow \rho(\varphi, \psi) = \rho(\varphi_1, \psi_1)$;

(6). $\rho(\varphi, \psi) = \rho(\neg\varphi, \neg\psi)$;

(7). $\rho((\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi)) = (\varphi \wedge \psi)$.

Доказательство. Для удобства доказательства перепишем формулу для нахождения расстояния в следующем виде:

$$\rho(\varphi, \psi) = \frac{1}{|S(\Sigma)|} \left(0 \cdot A_0 + \alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_2 \cdot A_2 + \cdots + \alpha_{n-2} \cdot A_{n-2} + 1 \cdot A_{n-1}\right).$$

1) В формуле для вычисления расстояния участвуют все модели с коэффициентами от 0 до 1. $\rho(\varphi, \psi) = 0$, если все модели лежат в A_0, то есть когда $\varphi \equiv \psi$; $\rho(\varphi, \psi) = 1$, если все модели содержатся в A_{n-1}, то есть когда $\varphi \equiv \neg\psi$ и φ и ψ принимают на моделях только значения 0 и 1. Значит, $0 \leqslant \rho(\varphi, \psi) \leqslant 1$.

2) Необходимость. Следует из доказательства свойства (1). Достаточность. Следует из определения эквивалентности [1, 3]
3) Следует из того, что пары $M\left(\frac{k}{n-1}, \frac{l}{n-1}\right) \neq M\left(\frac{l}{n-1}, \frac{k}{n-1}\right)$ умножаются на один и тот же коэффициент.
4)

$$\begin{aligned}
\rho(\varphi,\psi) =& \frac{1}{n^{|S(\Sigma)|}}\Big(\alpha_0\Big(M(0,0)+M\Big(\frac{1}{n-1},\frac{1}{n-1}\Big)+\cdots+\\
&+M\Big(\frac{n-2}{n-1},\frac{n-2}{n-1}\Big)+M(1,1)\Big)+\alpha_1\Big(M\Big(0,\frac{1}{n-1}\Big)+\\
&+M\Big(\frac{1}{n-1},0\Big)+M\Big(\frac{1}{n-1},\frac{2}{n-1}\Big)+\\
&+M\Big(\frac{2}{n-1},\frac{1}{n-1}\Big)+\cdots+M\Big(\frac{n-2}{n-1},1\Big)+M\Big(1,\frac{n-2}{n-1}\Big)\Big)+\cdots+\\
&+\alpha_{n-2}\Big(M\Big(0,\frac{n-2}{n-1}\Big)+M\Big(\frac{n-2}{n-1},0\Big)+M\Big(1,\frac{1}{n-1}\Big)+\\
&+M\Big(\frac{1}{n-1},1\Big)\Big)+\alpha_{n-1}(M(0,1)+M(1,0))\Big)=\\
=&\frac{1}{n^{|S(\Sigma)|}}\Big(0+\alpha_1\Big(\Big(\varphi_0\Delta\psi_{\frac{1}{n-1}}\Big)+\\
&+\Big(\varphi_{\frac{1}{n-1}}\Delta\psi_{\frac{1}{n-1}}\Big)+\cdots+\Big(\varphi_{\frac{n-2}{n-1}}\Delta\psi_1\Big)+\cdots+\\
&+\alpha_{n-2}\Big(\Big(\varphi_0\Delta\psi_{\frac{n-2}{n-1}}\Big)+\Big(\varphi_1\Delta\psi_{\frac{1}{n-1}}\Big)\Big)+\Big(\varphi_0\Delta\psi_1\Big).
\end{aligned}$$

Каждое слагаемое является нормированной симметрической разностью, взятой с некоторым весом. В работе [3] доказано, что нормированная симметрическая разность, взятая с некоторым весом, является расстоянием. Так как сумма расстояний тоже является расстоянием, то неравенство треугольника выполняется.
5) Следует из определения эквивалентности двух формул.
6) Следует из соотношения:

$$\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}\Big((\neg\varphi)_{\frac{k}{n-1}}\&(\neg\psi)_{\frac{l}{n-1}}\Big)=\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}\Big((\varphi)_{\frac{(n-1)-k}{n-1}}\&(\psi)_{\frac{(n-1)-l}{n-1}}\Big),$$

$k = 0, \ldots, 1$ [3].
7) Следует из соотношений работы [3]

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi\&\psi)_{\frac{k}{n-1}} \quad = \quad & \bigcup_{l=k}^{n-1}\Big(\Big(\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{l}{n-1}}\cap\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}\Big)\cup\\
&\cup\Big(\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}\cap\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{l}{n-1}}\Big)\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi\&\psi)_{\frac{k}{n-1}} \quad &= \quad \bigcup_{l=k}^{n-1}\left(\left(\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{l}{n-1}} \cup \mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}\right) \cup \right.\\ &\left.\cup \left(\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}} \cup \mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{l}{n-1}}\right)\right).\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

2.2.3 Замечание

Свойства 2)–4) — это свойства метрики. Таким образом, мы получили метрическое пространство на классах эквивалентности высказываний.

2.2.4 Замечание

Расстояние, заданное формулой (1) — это расстояние для случая, когда все значения переменных заранее не известны. Допустим, что теперь не известны истинностные значения некоторых переменных. Пусть переменные $x-1,\dots,x_r$, $x_i \in S(\varphi)\cup S(\psi)$, $i=1,\dots,r$, $r=|S(\varphi)\cup S(\psi)|$ соответственно принимают $d_1,\dots,d_r$, $d_i \leqslant n$ истинностных значений. Тогда формула для нахождения расстояния между формулами φ и ψ имеет вид:

$$\widehat{\rho}(\varphi,\psi) = \frac{1}{d_1\cdot\ldots\cdot d_r}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{|k-l|}M\left(\frac{k}{n-1},\frac{l}{n-1}\right), \qquad (2)$$

где α_i удовлетворяют условиям:

$$\left\{\begin{array}{c} 0=\alpha_0\leqslant\alpha_i\leqslant\alpha_{n-1}=1,\\ \alpha_i\leqslant\alpha_{i+1},\ i=0,\dots,n-1,\\ \alpha_i+\alpha_{n-1+i}=1,\ \forall i=0,\dots,\frac{n-1}{2}.\end{array}\right.$$

Теорема 2.2.2 верна для $\widehat{\rho}(\varphi,\psi)$.

2.2.5 Пример

Рассмотрим формулы $\varphi=(x\to y)\vee z$, $\psi=(x\wedge y)\to z$. Для начала рассмотрим случай $n=3$. Возьмем $\alpha_0=0$, $\alpha_1=3$, $\alpha_2=1$. Тогда $\rho(\varphi,\psi)=0,16$.

Пусть теперь переменные, входящие в эти формулы, принимают следующие значения: $x\in\left\{\frac{1}{2},1\right\}$, $y\in\{1\}$, $z\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$. Тогда $\widehat{\rho}(\varphi,\psi)=$ 0,28.

Теперь рассмотрим случай, когда $n = 7$. Возьмем $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \frac{1}{7}$, $\alpha_2 = \frac{1}{5}$, $\alpha_3 = \frac{1}{2}$, $\alpha_4 = \frac{4}{5}$, $\alpha_5 = \frac{6}{7}$, $\alpha_6 = 1$. Тогда $\rho(\varphi, \psi) = 0{,}163$.

Пусть теперь переменные, входящие в эти формулы, принимают следующие значения: $x \in \left\{\frac{3}{6}\right\}$, $y \in \left\{\frac{1}{6}, \frac{2}{6}\right\}$, $z \in \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1\right\}$. Тогда $\widehat{\rho}(\varphi, \psi) = 0{,}129$.

2.3 Мера недостоверности

В классической логике под информативностью высказывания понимают относительное число моделей, на которых высказывание эксперта ложно. Другими словами, это расстояние от высказывания до тождественно истинной формулы. Чем меньше моделей, на которых высказывание истинно, тем оно информативней, то есть менее достоверно. Поэтому, вместо термина “мера информативности” будем использовать термин “мера недостоверности”.

В работе [5] введена формула для меры недостоверности в случае $n = 6$. Обобщим эту формулу для случая конечнозначной логики Ł_n. Так как в Ł_n истинностных значений, отличных от 1, $(n-2)$, нужно учитывать модели, на которых формула принимает значение $\frac{k}{n-1}$. Также нужно учесть насколько близко значение формулы к 1. Понятно, что коэффициент при модели, на которой формула принимает значение $\frac{k}{n-1}$ должен быть больше, чем коэффициент при модели, на которой формула принимает значение $\frac{l}{n-1}$ при $l > k$, так как $\frac{l}{n-1}$ ближе к 1.

2.3.1 Определение

Мера недостоверности $I(\varphi)$ для формул n-значной логики Лукасевича при $S(\varphi) \subseteq S(\Sigma)$ на множестве $P(S(\Sigma))$ задается следующим образом:

$$I(\varphi) = \frac{1}{n^{|S(\Sigma)|}} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{|(n-1)-k|} M\left(\frac{k}{n-1}\right), \tag{3}$$

где α_i удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} 0 = \alpha_0 \leqslant \alpha_i \leqslant \alpha_{n-1} = 1, \\ \alpha_i \leqslant \alpha_{i+1},\ i = 0, \dots, n-1, \\ \alpha_i + \alpha_{n-1+i} = 1,\ \forall i = 0, \dots, \frac{n-1}{2}. \end{cases}$$

2.3.2 Теорема

Мера недостоверности, определенная равенством (3), для любых формул φ, ψ, τ удовлетворяет следующим свойствам:

(1). $0 \leq I(\varphi) \leqslant 1$;

(2). $I(\varphi) + I(\neg\varphi) = 1$;

(3). $I(\varphi \wedge \psi) \geqslant \max\{I(\varphi), I(\psi)\}$;

(4). $I(\varphi \vee \psi) \geqslant \min\{I(\varphi), I(\psi)\}$;

(5). $I(\varphi \wedge \psi) + I(\varphi \vee \psi) \geqslant I(\varphi) + I(\psi)$;

Доказательство. 1) Очевидно, так как $I(\varphi) = \rho(\varphi, 1)$.
2) $I(\varphi) + I(\neg\varphi) = \frac{1}{n^{|S(\Sigma)|}}(\alpha_{n-1}M(0) + \alpha_{n-2}M(\frac{1}{n-1}) + \alpha_{n-3}M(\frac{2}{n-1}) + \cdots + \alpha_2 M(\frac{n-3}{n-1}) + \alpha_1 M(\frac{n-2}{n-1}) + \alpha_0 M(1) + \alpha_{n-1}M(1) + \alpha_{n-2}M(\frac{n-2}{n-1}) + \alpha_{n-3}M(\frac{n-3}{n-1}) + \cdots + \alpha_2 M(\frac{2}{n-1}) + \alpha_1 M(\frac{1}{n-1}) + \alpha_0 M(0) = \frac{1}{n^{|S(\Sigma)|}}\Big(M(0) + M(\frac{1}{n-1}) + M(\frac{2}{n-1}) + \cdots + M(\frac{n-2}{n-1}) + M(1)\Big) = \frac{1}{n^{|S(\Sigma)|}} n^{|S(\Sigma)|} = 1$.

Доказательства свойств 3)–5) аналогичны доказательствам свойств 3)–5) меры недостоверности работ [1, 6]. □

2.3.3 Пример

Рассмотрим формулы $\varphi = (x \to y) \vee z$, $\psi = (x \wedge y) \to z$. Пусть $n = 7$. Возьмем $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \dfrac{1}{7}$, $\alpha_2 = \dfrac{1}{5}$, $\alpha_3 = \dfrac{1}{2}$, $\alpha_4 = \dfrac{4}{5}$, $\alpha_5 = \dfrac{6}{7}$, $\alpha_6 = 1$.

Тогда $I(\varphi) = 0{,}117$, $I(\psi) = 0{,}087$.

2.4 Кластеризация множеств высказываний

Кластеризация — это разбиение исходного множества объектов на подмножества (кластеры), при котором каждый объект может быть отнесен к одному или нескольким заранее неизвестным классам. Внутри каждого кластера должны оказаться схожие объекты, а объекты разных кластеров должны как можно больше отличаться [4].

Для множеств высказываний известны только расстояния между формулами и меры недостоверности. В данной работе используется иерархический алгоритм кластеризации для реализации которого достаточно знать попарные расстояния между объектами.

2.4.1 Иерархический алгоритм кластеризации для формул $Ł_n$

Для начала задаем конечное множество формул $Ł_n$.

(1). Строим матрицу расстояний для набора формул.

(2). Ищем наименьшее расстояние и объединяем эти 2 формулы в один кластер.

(3). Объединяем кластеры по методу ближайшего соседа. Матрица расстояний пересчитывается по правилу:

$$\rho(\varphi_k, \varphi_{ij}) = \min\{\rho(\varphi_k, \varphi_i), \rho(\varphi_k, \varphi_j)\}.$$

(4). Повторяем пункты 2 и 3, пока не выполнится критерий остановки.

Критерий остановки: работа алгоритма останавливается, когда максимальная разница между мерами недостоверности элементов одного кластера (обозначается d) достигает значения, заданного перед началом работы алгоритма.

2.4.2 Пример

Рассмотрим множество формул:

(1). $\varphi_1 = x \to y$;

(2). $\varphi_2 = (x \to y) \vee (z \wedge v)$;

(3). $\varphi_3 = \neg(x \to y)$;

(4). $\varphi_4 = (x \vee y) \vee z$;

(5). $\varphi_5 = (x \wedge y) \wedge z) \to w$;

(6). $\varphi_6 = (\neg x \wedge y) \vee z$;

(7). $\varphi_7 = (x \vee y) \wedge z$;

(8). $\varphi_8 = \neg(x \vee y) \wedge z$;

В первом случае возьмем $n = 4$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \dfrac{1}{3}$, $\alpha_2 = \dfrac{2}{3}$, $\alpha_3 = 1$.

Таблица 1. Матрица расстояний для первого случая.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0.035	0.792	0.302	0.240	0.344	0.521	0.302
2		0	0.770	0.267	0.204	0.309	0.493	0.275
3			0	0.604	0.732	0.542	0.344	0.604
4				0	0.224	0.208	0.417	0.292
5					0	0.398	0.594	0.128
6						0	0.208	0.396
7							0	0.563
8								0

Таблица 2. Матрица мер недостоверности для первого случая.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$l(\varphi_i)$	0.208	0.173	0.792	0.188	0.060	0.396	0.604	0.188

Во втором случае возьмем $n = 4$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \dfrac{1}{45}$, $\alpha_2 = \dfrac{44}{45}$, $\alpha_3 = 1$.

Таблица 3. Матрица расстояний для второго случая.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0.024	0.694	0.239	0.206	0.285	0.501	0.239
2		0	0.689	0.200	0.159	0.250	0.478	0.212
3			0	0.624	0.752	0.547	0.300	0.624
4				0	0.157	0.174	0.378	0.224
5					0	0.369	0.597	0.067
6						0	0.160	0.333
7							0	0.501
8								0

Таблица 4. Матрица мер недостоверности для второго случая.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$l(\varphi_i)$	0.189	0.143	0.811	0.129	0.037	0.376	0.624	0.129

В третьем случае возьмем $n = 7$, $a_0 = 0$, $a_1 = \dfrac{1}{6}$, $a_2 = \dfrac{2}{6}$, $a_3 = \dfrac{3}{6}$, $a_4 = \dfrac{4}{6}$, $a_5 = \dfrac{5}{6}$, $a_6 = 1$.

Таблица 5. Матрица расстояний для третьего случая.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0.026	0.755	0.284	0.216	0.337	0.498	0.284
2		0	0.743	0.258	0.190	0.310	0.478	0.265
3			0	0.595	0.753	0.516	0.337	0.595
4				0	0.234	0.190	0.381	0.280
5					0	0.394	0.573	0.158
6						0	0.190	0.356
7							0	0.501
8								0

Таблица 6. Матрица мер недостоверности для третьего случая.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$l(\varphi_i)$	0.190	0.164	0.810	0.214	0.056	0.405	0.595	0.214

В четвертом случае возьмем $n = 7$, $a_0 = 0$, $a_1 = \dfrac{1}{32}$, $a_2 = \dfrac{1}{5}$, $a_3 = \dfrac{3}{6}$, $a_4 = \dfrac{4}{5}$, $a_5 = \dfrac{31}{32}$, $a_6 = 1$.

Таблица 7. Матрица расстояний для четвертого случая.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0.019	0.755	0.238	0.190	0.293	0.492	0.238
2		0	0.740	0.208	0.156	0.268	0.473	0.214
3			0	0.612	0.771	0.517	0.301	0.612
4				0	0.181	0.168	0.348	0.223
5					0	0.373	0.583	0.104
6						0	0.153	0.324
7							0	0.490
8								0

Таблица 8. Матрица мер недостоверности для четвертого случая.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$l(\varphi_i)$	0.174	0.141	0.826	0.165	0.039	0.388	0.612	0.165

Результаты кластеризации иерархическим алгоритмом запишем в таблицы 9–12.

Таблица 9. Результаты кластеризации иерархическим алгоритмом.

Номер итерации	Кластеры (случай 1)	d
1	$(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$	0.035
2	$(\varphi_1, \varphi_2), (\varphi_5, \varphi_8), \varphi_3, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_7$	0.128
3	$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8), \varphi_3, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_7$	0.148
4	$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8), (\varphi_6, \varphi_7), \varphi_3, \varphi_4$	0.208
5	$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8), (\varphi_6, \varphi_7, \varphi_4), \varphi_3$	0.416
6	$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_4), \varphi_3$	0.544
7	$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_4, \varphi_3$	0.732

Таблица 10. Результаты кластеризации иерархическим алгоритмом.

Номер итерации	Кластеры (случай 2)	d
1	$(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$	0.046
2	$(\varphi_1, \varphi_2), (\varphi_5, \varphi_8), \varphi_3, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_7$	0.092
3	$(\varphi_1, \varphi_2), (\varphi_5, \varphi_8, \varphi_4), \varphi_3, \varphi_6, \varphi_7$	0.092
4	$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8, \varphi_4), \varphi_3, \varphi_6, \varphi_7$	0.152
5	$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8, \varphi_4), (\varphi_6, \varphi_7), \varphi_3$	0.248
6	$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_7), \varphi_3$	0.587
7	$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_3)$	0.744

Таблица 11. Результаты кластеризации иерархическим алгоритмом.

Номер итерации	Кластеры (случай 3)	d
1	$(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$	0.026
2	$(\varphi_1, \varphi_2), (\varphi_5, \varphi_8), \varphi_3, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_7$	0.158
3	$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8), \varphi_3, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_7$	0.158
4	$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8), (\varphi_4, \varphi_6), \varphi_3, \varphi_7$	0.191
5	$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8), (\varphi_4, \varphi_6, \varphi_7), \varphi_3$	0.381
6	$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_7), \varphi_3$	0.539
7	$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_3)$	0.754

Таблица 12. Результаты кластеризации иерархическим алгоритмом.

Номер итерации	Кластеры (случай 4)	d
1	$(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$	0.033
2	$(\varphi_1, \varphi_2), (\varphi_5, \varphi_8), \varphi_3, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_7$	0.126
3	$(\varphi_1, \varphi_2), (\varphi_5, \varphi_8), (\varphi_6, \varphi_7), \varphi_3, \varphi_4$	0.224
4	$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8), (\varphi_6, \varphi_7), \varphi_3, \varphi_4$	0.224
5	$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8), (\varphi_6, \varphi_7, \varphi_4), \varphi_3$	0.447
6	$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_4), \varphi_3$	0.573
7	$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_4, \varphi_3)$	0.787

Возьмем $d = 0{,}15$. Тогда получим следующие кластеры.

Случай 1 $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8), \varphi_3, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_7$.
Случай 2 $(\varphi_1, \varphi_2), (\varphi_5, \varphi_8), \varphi_3, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_7$
Случай 3 $(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$
Случай 4 $(\varphi_1, \varphi_2), (\varphi_5, \varphi_8), \varphi_3, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_7$

Как видно из примера, для разных n и разных весов мы получаем различные кластеры. Следовательно, мы можем выбрать наилучшую кластеризацию. Под наилучшей кластеризацией будем понимать следующее: элементы одного кластера должны быть как можно ближе друг к другу, а расстояние между кластерами должно быть наибольшим. Пусть s_1 — это сумма диаметров кластеров, а s_2 — сумма расстояний между кластерами. Обозначим $s = \frac{s_1}{s_2}$. Чем меньше s (индекс качества), тем кластеризация является лучшей.

Посчитаем s для нашего примера. В первом случае $s = 0{,}076$, во втором — $s = 0{,}016$, в третьем — $s = 0{,}003$, в четвертом — $s = 0{,}022$. Следовательно, при $d = 0{,}15$ кластеризация $(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$, полученная в третьем случае, является наилучшей.

3 Заключение

Введены новые расстояния (с помощью теории моделей) и меры недостоверности для формул n-значной логики Лукасевича, также доказаны свойства полученных величин. На их основе разработаны и исследованы методы кластеризации логических высказываний, учитывающих как меру различия (по расстоянию), так и меру нетривиальности формул, включаемых в кластер (должны мало отличаться). Разработан способ задания индекса качества кластеризации формул на основе разработанных выше методов. Сложность алгоритма вычисления расстояний между формулами – экспоненциальная. Адаптирован иерархический алгоритм кластеризации, также продемонстрирован выбор наилучшей кластеризации.

Полученные величины можно использовать при анализе баз знаний, их кластеризации, создании экспертных систем, а также при построении логических решающих функций в распознавании.

Список литературы

[1] А. А. Викентьев, Р. А. Викентьев, Расстояния и меры недостоверности на высказываниях n-значной логики, Вестник НГУ, серия: математика, механика, информатика. Новосибирск: из-во НГУ, **11**, 2 (2011), 51–64.

[2] Е. С. Кабанова, Расстояния между формулами пятизначной логики Лукасевича и мера недостоверности высказываний экспертов, Материалы 50-й юбилейной МНСК "Студент и научно-технический прогресс", Новосибирск: изд-во НГУ, 2012.

[3] Г. С. Лбов, Н. Г. Старцева, Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. Новосибирск: Из-во ин-та математики, 1999, 212 с.

[4] Б. Г. Миркин, Методы кластер-анализа для поддержки принятия решений: обзор, М: Изд. Дом ВШЭ, 2011, 88 с.

[5] В. В. Фефелова, Расстояния между формулами шестизначной логики Лукасевича и мера недостоверности высказываний в кластеризации множеств высказываний, Выпускная квалификационная работа бакалавра, Новосибирск, НГУ, 2014, 40 с.

[6] A. A. Vikent'ev, Concerning distances and degrees of uncertainty for many-valued expert statements and application of those concepts in pattern recognition and clustering, Pattern Recognition and Image Analysis, **24**, 4 (2014), 489–501.

О КОНГРУЭНЦИЯХ ГРУПП МОНОТОННЫХ ПОДСТАНОВОК

А. В. Зенков

Алтайский Государственный Аграрный Университет
Россия, 656049, Барнаул, пр. Красноармейский, 98
e-mail: alexey_zenkov@yahoo.com

1 Введение

Данная работа представляет собой обзор результатов автора по изучению конгруэнций представлений m-групп. Эти результаты опубликованы в [1]–[3].

Напомним, что *m-группой* называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, \_* \rangle$, где $\langle G, \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge \rangle$ является ℓ-группой и одноместная операция $_*$ есть автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e, ^{-1} \rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$, т.е. для любых $x, y \in G$ верны соотношения $(xy)_* = x_* y_*, (x_*)_* = x, (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*$.

В дальнейшем m-группу G с фиксированным автоморфизмом $_*$ записываем *как пару* $(G,_*)$. Пусть Ω — некоторое линейно упорядоченное множество и a — реверсивный автоморфизм 2-го порядка Ω, то есть для любых $\omega, \omega' \in \Omega$ верно $((\omega)a)a = \omega$ и $\omega < \omega' \Leftrightarrow (\omega)a > (\omega')a$. Через $Aut(\Omega)$ обозначим группу (относительно суперпозиции) всех порядковых подстановок Ω. Группа $Aut(\Omega)$ может быть превращена в m-группу, если операция $_*$ задается при помощью равенства $g_* = aga$ для всякого $g \in Aut(\Omega)$. Стандартно, представлением m-группы $(G,_*)$ порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества Ω является m-гомоморфизм $\nu : G \to Aut(\Omega)$. Если ν есть изоморфизм, то представление называется *точным* и тогда пишем (G, Ω, a). Пусть $L = \{w \in \Omega \mid (w)a > w\}$, $R = \{(\ell)a \mid \ell \in L\}$ и o — неподвижная относительно a точка Ω. Заметим, что существуют как представления, содержащие неподвижную точку, так и не содержащие таковой. Множество Ω представимо в виде $\Omega = L \overleftarrow{\bigcup} \{o\}^{\varepsilon} \overleftarrow{\bigcup} R$, где $\varepsilon = 1$, если неподвижная точка существует, и $\varepsilon = 0$ в противном случае. Представление (G, Ω, a) назовем m-транзитивным, если для всех $w, w' \in \Omega$, быть может за исключением точки o, существует $x \in G_* = gr.(G, a)$, такой что $(w)x = w'$.

Здесь и далее фраза "быть может за исключением точки o" означает, что o исключается из рассмотрения, если она "глобально неподвижна", т.е. ее стабилизатор $St_G(o) = G$. В работе рассматриваются только m-транзитивные представления.

2 Основные свойства конгруэнций

Рассмотрим (G, Ω, a). Отношение эквивалентности Θ, определенное на Ω, будем называть отношением *m-эквивалентности (m-конгруэнтности)*, если оно является выпуклым и $w\Theta w' \Leftrightarrow (w)x\Theta(w')x$ для любого $x \in G_*$. Множество $\mathcal{K}$ всех m-эквивалентностей, определенных на Ω, очевидно, непусто и, более того, на $\mathcal{K}$ можно ввести отношение частичного порядка $\preceq$, полагая $\Theta_1 \preceq \Theta_2 \Leftrightarrow w\Theta_1 w' \Rightarrow w\Theta_2 w'$.

Пусть $\Theta \in \mathcal{K}$ и $\triangle = \ell\Theta$ — класс эквивалентности, содержащий произвольную, но фиксированную, точку $\ell \in L$. Множество $\triangle$ является m-блоком, т.е. $(\triangle)x \cap \triangle = \emptyset$, либо $(\triangle)x = \triangle$ для любого $x \in G_*$. Обратно, если $\triangle$ — m-блок, то отношение Θ, определенное на Ω по правилу $w = w'$, либо $w, w' \in (\triangle)x$ для подходящего $x \in G_*$, будет отношением m-эквивалентности.

Пусть $\triangle = \ell\Theta$. Тогда $St_G(\triangle)$ — выпуклая ℓ-подгруппа, содержащая $St_G(\ell)$. Обратно, если H — выпуклая ℓ-подгруппа, содержащая $St_G(\ell)$, то выпуклое замыкание $\triangle$ в Ω орбиты $(\ell)H$ есть m-блок ([1]). Таким образом, существует соответствие между $\mathcal{K}$ и множеством $\mathcal{H}$ всех выпуклых ℓ-подгрупп, содержащих $St_G(\ell)$. Множество $\mathcal{H}$ является линейно упорядоченным относительно теоретико множественного включения и все группы этого множества — спрямляющие. Следующие примеры показывают, что указанное выше соответствие не является взаимнооднозначным.

Пример 1. (Собственное представление). Представление (G, Ω, a) является собственным, если для любого $g \in G$ верно $(L)g = L$. В этом случае сама группа G определяет на Ω две конгруэнции.

Пример 2. [2]. Рассмотрим группу

$$S_2 = \langle a_1, a_2, b |\ [a_1, a_2] = e, a_1^b = a_2, a_2^b = a_1 \rangle.$$

Если $g \in S_2$, то g представим, причем единственным способом, в виде $g = a_1^m a_2^n b^k$, где $k, m, n \in \mathbb{Z}$. Относительно лексикографического порядка, т.е. $g \geq e \Leftrightarrow k > 0$ или $k = 0, m \geq 0, n \geq 0$, S_2 является ℓ–группой. Определим отображение $\varphi : S_2 \to S_2$ по правилу:

$$(g)\varphi = a_1^{-m} a_2^{-n} b^{-k}.$$

Тогда (S_2, φ) будет m-группой. Пусть $A_1 = \langle a_1 \rangle, A_2 = \langle a_2 \rangle$. Эти выпуклые ℓ-подгруппы являются спрямляющими, т.е. множества правых смежных классов $X = R(S_2 : A_1), Y = R(S_2 : A_2)$ линейно упорядочены относительно естественно вводимого упорядочения множества правых смежных классов. Рассмотрим $\triangle_1 = \{A_1 a_2^n\}$, $\triangle_2 = \{A_2 a_1^m\}$. Тогда $X = \overleftarrow{\bigcup} \triangle_1 b^k$, $Y = \overleftarrow{\bigcup} \triangle_2 b^k$. Построим новое линейно упорядоченное множество Ω полагая $\triangle_1 b^k < \triangle_2 b^k \triangle_1 b^{k+1}$. Очевидно, множество Ω сохраняет линейные порядки исходных множеств. Определим отображение $a : \Omega \to \Omega$ по правилу $(A_1 a_2^n b^k)a = A_2 a_1^{-n} b^{1-k}$ и $(A_2 a_1^m b^k)a = A_1 a_2^{-m} b^{1-k}$. Из определения следует, что a —реверсивный автоморфизм 2-го порядка Ω. Правое регулярное представление (S_2, φ) порядковыми подстановками Ω является точным и m-транзитивным, но не транзитивным. Ясно, что оно не содержит неподвижной точки. Итак, можно рассмотреть представление (S_2, Ω, a).

Из сказанного выше следует, что

$$\nabla^- = \triangle_1 \overleftarrow{\cup} \triangle_2, \triangle_2, \quad \nabla^+ = \triangle_2 \overleftarrow{\cup} \triangle_1 b$$

являются m-блоками и, более того, $St_{\triangle_2}(S_2) = St_{\nabla^+}(S_2) = St_{\nabla^-}(S_2) = A_1 \times A_2$. Таким образом рассматриваемый стабилизатор определяет три различных эквивалентности. Здесь же отметим, что всякая группа из $\mathcal{H}$ определяет не более трех конгруэнций.

Итак, возможны следующие случаи: 1) соответствие между между $\mathcal{K}$ и $\mathcal{H}$ взаимнооднозначно; 2) существует $H \in \mathcal{H}$, определяющая две конгруэнции; 3) существует $H \in \mathcal{H}$, определяющая три конгруэнции.

Для каждой $H_\gamma \in \mathcal{H}$ через $\Theta_\gamma, \Theta_\gamma^+, \Theta_\gamma^-$ обозначим конгруэнции, соответственно определяемые m-блоками

$$\triangle_\gamma = conv_\Omega((\ell)H_\gamma), \nabla_\gamma^+ = \triangle_\gamma \overleftarrow{\cup} (\triangle_\gamma)at, \ \nabla_\gamma^- = (\triangle_\gamma)at' \overleftarrow{\cup} \triangle_\gamma,$$

где $t, t' \in G$ и $ata = t^{-1}, at'a = t'^{-1}$. Очевидно, $\Theta_\gamma = \Theta_\gamma^+ \cap \Theta_\gamma^-$. Следующая теорема описывает строение $\mathcal{K}$ как частично упорядоченного множества.

Теорема 3. [2] *Пусть (G, Ω, a) — произвольное m-транзитивное представление и $\mathcal{K}$ — множество всех m-эквивалентностей, определенных на Ω. Тогда $\mathcal{K}$ есть линейно упорядоченное множество относительно ранее введенного порядка (случаи 1),2)) либо существует и единственная $H_\alpha \in \mathcal{H}$, такая что $\Theta_\alpha \preceq \Theta_\alpha^+, \Theta_\alpha^- \preceq \Theta_{\alpha+1}$ и $\mathcal{K}$ линейно упорядочено при $H_\beta \subseteq H_\alpha$ и $H_{\alpha+1} \subseteq H_\beta$.*

3 Примитивные и 2-транзитивные представления

Рассмотрим представление (G, Ω, a). Следующие m-эквивалентности назовем *тривиальными*:
A) эквивалентность, когда все классы эквивалентности одноэлементны;
B) эквивалентность, когда все классы эквивалентности двухэлементны;
C) эквивалентность, имеющая три (либо два) класса эквивалентности $L, \{o\}, R\,(L, R)$;
D) эквивалентность, имеющая единственный класс эквивалентности Ω.
Представление (G, Ω, a) *m-примитивно*, если оно не допускает нетривиальной m-эквивалентности.

Следующая теорема дает описание примитивных представлений в терминах стабилизаторов точек.

Теорема 4. [1] *Произвольное m-транзитивное представление (G, Ω, a) является m-примитивным тогда и только тогда, когда для любой точки $w \in \Omega$, быть может за исключением точки o, стабилизатор $St_G(w)$ есть максимальная выпуклая ℓ-подруппа G.*

Пусть $(G, \geq)$ — некоторая ℓ-группа. Через G^* обозначим ℓ-группу G, решеточно упорядоченную относительно обратного порядка. Относительно координатного порядка прямое произведение $G \times G^*$ является ℓ-группой. Определим отображение $Exch : G \times G^* \to G \times G^*$ по правилу $(x, y)Exch = (y, x)$. Тогда пара $(G \times G^*, Exch)$ является m-группой. Следующее предложение описывает строение m-групп, допускающих собственное представление.

Утверждение 5. *Всякое m-транзитивное представление (G, Ω, a) собственно m-транзитивно тогда и только тогда, когда G изоморфна прямому произведению $G_L \times G_L^*$ для подходящей транзитивной ℓ-группы подстановок G_L, подходящего линейно упорядоченного множества L и $\Omega = L\overleftarrow{\bigcup}\{o\}^{\varepsilon}\overleftarrow{\bigcup}L^*$.*

Следствие 6. *Собственно m-транзитивное представление*

$$(G_L \times G_L^*, \Omega, a)$$

собственно m-примитивно тогда и только тогда, когда транзитивное представление $(G_L,\ L)$ примитивно.

Следствие 7. *Всякая m-группа $(G,_*)$, допускающая собственно m-транзитивное представление, не является упорядоченной.*

Напомним, что m-группа является нормальнозначной, если на ней выполнено тождество $|x||y| \wedge |y|^2|x|^2 = |x||y|$.

Теорема 8. [2] *Пусть* (G, Ω, a) — *m-примитивное представление нормальнозначной m-группы* $(G,_{*})$. *Тогда: 1)* (G, Ω, a) *есть правое регулярное представление подгруппы аддитивной группы R действительных чисел, более того, если это представление допускает эквивалентность B), то эта подгруппа циклическая; 2) представление является собственным и $G = G_L \times G_L^*$, где G_L — подходящая подгруппа аддитивной группы R действительных чисел.*

Представление (G, Ω, a), где $\Omega = L\overleftarrow{\bigcup}\{o\}^{\varepsilon}\overleftarrow{\bigcup}R$, назовем *$m$-2-транзитивным*, если для любых $\ell_1 < \ell_2 \leq o < r_3 < r_4 \in \Omega$, быть может за исключением точки o, существует $g \in G$, такой что:

$$1)\ (\ell_1)g = r_3,\ (\ell_2)g = r_4, \text{либо}$$

$$2)\ (\ell_1)ag = r_4,\ (\ell_2)ag = r_3.$$

Доказательство следующего утверждения непосредственно следует из определений.

Утверждение 9. *Если представление* (G, Ω, a) *m-2-транзитивно, то оно m-транзитивно и m-примитивно.*

Представление (G, Ω, a), где $\Omega = L\overleftarrow{\bigcup}\{o\}^{\varepsilon}\overleftarrow{\bigcup}R$ назовем *m-полутранзитивным*, если для всех $\ell_1 < \ell_2 < \ell \in L$ существует $g \in St_G(\ell)$, такой что $(\ell_1)g = \ell_2$.

Теорема 10. [1] *Представление* (G, Ω, a) *m-2-транзитивно тогда и только тогда, когда оно m-транзитивно и m-полутранзитивно.*

Следствие 11. *Если представление* (G, Ω, a) *m-2-транзитивно, то оно транзитивно, либо собственно m-примитивно.*

Список литературы

[1] Зенков А. В. О конгруэнциях m-групп, Сиб. матем. журнал, **54**, 6 (2013), 1280–1288.

[2] Зенков А. В. О конгруэнциях m-групп 2, Сиб. матем. журнал, **56**, 5 (2015), 841–843.

[3] Зенков А. В., Исаева О. В. Два вопроса теории m-групп , Сиб. матем. журнал, **55**, 6 (2014), 1279–1282.

Abstracts

K. A. Baikalova. *Distribution of the number of countable models of the acyclic graph theories.*

The paper describes the distribution triples of countable models of acyclic graphs. It is shown that for the small theory distribution triple take one of the values $(1, 0, 0)$, $(\omega, 1, 0)$, $(\omega, \omega, 0)$, $(\omega, 2^{\omega}, 0)$.

B. S. Baizhanov. *Condition for the existence of conservative extension of a model of complete theory.*

We prove that under some conditions any model of a complete theory has a conservative extension. A criterion of the existence of D-ω-saturated conservative extension of a model of theory is found.

M. I. Bekenov. *The concept of elementary embeddability in the class of models of a countable 1st-order language.*

The results of researches in the model theory from the perspective of similarity of models by elementary embeddability are given. Some algebraic aspect of the study of a class of models and theories is considered.

A. V. Chekhonadskikh. *On expression of SISO system control parameters through the system pole coordinates.*

The note clarifies the theoretical aspect of the algebraic design method of low-order linear SISO control systems. A polynomial approach to finding the optimal control algorithm for such a system bases on a geometric interpretation of the engineering concepts of maximal system stability. The optimal pole location means the presence in the characteristic polynomial of a specific factor. It is the root polynomial. The characteristic polynomial coefficients depend linearly on the control parameters; the root polynomial coefficients depend on the root coordinates. Equating to zero the residue of the characteristic polynomial to the root one division, we can obtain an equation system connecting the control parameters and root coordinates; it allows us to express the first ones through the latter, and to find the optimal control parameters. Such a possibility was previously proved with the degree relation of the characteristic and root polynomials; below this condition is eliminated.

Yu. A. Chirkunov. *Generalized equivalence transformations and their role in the construction of submodels.*

For any system of differential equations we introduce the concept of generalized transformations of equivalence, for which the transformations of equivalence, which were considered by academician L. V. Ovsyannikov are universal equivalence transformations. We offer new algorithm of group classification of any system of differential equations with a help of generalized equivalence transformations. On the examples of equations of gas dynamics, and equations of nonlinear longitudinal oscillations of viscoelastic rod in Kelvin's model we showed the effectiveness and advantages of the algorithm.

D .Y. Emelyanov. *Algebras of distributions of binary isolating formulas for embedded equivalence relations.*

We describe algebras of distributions of binary isolating formulas for complete 1-types consisting of sequentially embedded equivalence relations.

S. S. Goncharov, B. N. Drobotun, A. A. Nikitin. *To a problem of content of a logical component for a school mathematical education.*

In this work the principle of methodological conditionality of pedagogical reflection is formulated and its didactic opportunities on the example of selection of the content of a logical component of school mathematical education are demonstrated.

E. V. Grachev, A. M. Popova. *About Automorphism group of ring ZS_4.*

We present the description of the group of automorphisms of the ring ZS_4 in the terms of semi-direct products

E. V. Grachev, A. M. Popova. *Automorphisms of integer group rings.*

We present the description of the group of automorphisms of integer group rings.

Y. Kiouvrekis, P. Stefaneas. *Topological Semantics in Institutions with Proofs.*

We introduce the concept of the (entailment) topological semantic of a proof system and we indicate that every Institution with proof system is complete.

B. Sh. Kulpeshov. *Countably categorical weakly o-minimal theories of convexity rank 2.*

We present a complete description of countably categorical weakly o-minimal theories of comvexity rank 2

K. A. Meirembekov. *Definably minimal fields of characteristic zero.*

In 1971, A. Macintyre investigated strongly minimal fields and proved that all these fields are algebraically closed. In 1975 L. Podewski conjectured that that conclusion holds for fields M with finite finite or cofinite solution-sets of formulas with parameters.

In 2000, F. Wagner gave an affirmative answer to the Podewski conjecture for in the case of fields of positive characteristic. In 2014, F. Wagner, K. Krupinski, and P. Tanovic gave a positive solution for the case of stable fields of characteristic 0. In this paper we prove the Podewski conjecture for unstable fields of characteristic 0 and the question is closed.

E. A. Palyutin. *Elementary theories of Abelian groups with distinguished subgroups.*

The paper is a survey of results on generalized stability for elementary theories of Abelian groups.

A. G. Pinus. *Quasiorders and monoids of sets (algebras) transformations.*

The communication between the quasiorders and monoids of sets (algebras) transformations is studied.

L. N. Pobedin. *Comparative analysis of the classical infinity and the alternative one.*

We analyze comparatively the classical infinity and the alternative one.

K. N. Ponomarev. *Descending invariant subgroup series of a profinite group.*

Let $w(G)$ denote the weight of an infinite profinite group G. We prove that the power $\#G\# = |G|$ equals to $2^{w(G)}$.

R. A. Popkov. *Distributions of countable models of theories of unary predicates.*

For the theories of unary predicates we evaluate the triples of distributions of numbers of countable models

E. N. Poroshenko. *Universal equivalence in some classes of partially commutative Lie algebras.*

Universal theories of partially commutative Lie algebras whose defining graphs are cycles and trees are considered in this work. In each of these two classes of Lie algebras the necessary and sufficient conditions of coincidence of universal theories are found.

S. V. Sudoplatov. *Generative classes generated by sets of diagrams.*

We consider an influence of sets of diagrams to generations of generative classes. It is shown that there are generative classes adapted for a given formula. Structural and self-structural diagrams are defined and properties of these diagrams as well as for related generative classes are studied.

N. V. Timofeeva. *A note on homological dimension of a family of coherent sheaves.*

We prove a theorem on how a conclusion on homological dimension of the family of coherent sheaves on an algebraic scheme can be done from homological dimension of the restriction of this family to the reduction of the base.

E. I. Timoshenko. *On an embedding of partially commutative metabelian group in a group of matrices.*

The Magnus embedding of a free metabelian group induces the embedding of partially commutative metabelian group S_Γ in a group of matrices M_Γ. Properties and universal theory of the group M_Γ are studied.

V. V. Verbovskiy. *Combining stability and quantifier elimination.*

In this paper I introduce a notion which generalizes quantifier elimination, stability, o-minimality, quasi-o-minimality, variants of o-minimality, and o-stability.

A. A. Vikentiev, V. V. Fefelova. *The concept of elementary embeddability in the class of models of a countable 1st-order language.*

We consider logical statements of experts that can be represented by logical formulas in the n-valued Lukasiewicz's logic. Using model-theoretical approach we introduces new distances between formulas and measures unreliability of formulas. We study properties of these values. It is also provided by calculation and application of the values entered for the clustering of groups of formulas for the n-valued Lukasiewicz logic and finding the best.

A. V. Zenkov. *On congruences of m-groups..*

This article is a survey of the recent results in the study of congruences representations of m-groups and their applications to the theory of m-groups varieties.

Contents

ALGEBRA AND MODEL THEORY 10

Collection of papers

Edited by *A. G. Pinus, K. N. Ponomarev, S. V. Sudoplatov, E. I. Timoshenko*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции.
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано к печати 10.11.2015. Формат 70 × 108 1/16. Бумага офсетная
Тираж 140 экз. Уч.-изд. л. 19,25. Печ. л. 13,75. Изд. № 252. Заказ № 1557.

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20