

Novosibirsk State Technical University

Algebra and Model Theory 8

Collection of papers
edited by A.G. Pinus, K.N. Ponomarev,
S.V. Sudoplatov and E.I. Timoshenko

Novosibirsk
2011

512(06)

Algebra and Model Theory. Collection of papers. Edited by A.G. Pinus, K.N. Ponomarev, S.V. Sudoplatov and E.I. Timoshenko. Novosibirsk State Technical University, 2011. — 142 p.

ISBN 5-7782-0175-3

The papers in this book are devoted to some problems of algebra and model theory.

Technical editor I.D. Chernykh.

Introduction

Algebra and Model Theory 8

The 9th International Summer School “Problems Allied to Universal Algebra and Model Theory — Erlagol 2011” was held on 22–28 of June 2011 in the camping center “Erlagol” in Altai mountains. The School was organized by Algebra and Mathematical Logic chair of Novosibirsk State Technical University (NSTU) and by Sobolev Institute of Mathematics SB RAS. Professors Viktor D. Mazurov, Aleksandr G. Pinus, and Evgeniy I. Timoshenko were the chairmen of Organizing Committee of School. Professors Aleksandr V. Mikhalev, Evgeniy A. Palyutin, Konstantin N. Ponomaryov, Vladimir N. Remeslennikov, Vitaliy A. Roman’kov, Sergey V. Sudoplatov, and Associate Prof. Evgenii N. Poroshenko were the members of Organizing Committee. Six two-four-hours talks were presented in the School: “Foundations of Algebraic Geometry of Universal Algebra” (by Vladimir N. Remeslennikov — Evelina Yu. Daniyarova, Boris I. Plotkin — Eugene B. Plotkin — Elena V. Aladova, Aleksandr G. Pinus) and “Elementary and Universal Theories of Groups” (by Elena I. Bunina, Vladimir N. Remeslennikov, Vitaliy A. Roman’kov, Evgeniy I. Timoshenko). It was proposed ten plenary talks and many short reports in two sections “Universal Algebra and Model Theory” and “Groups and Others Classical Algebras”.

The School was supported by RFBR (grant N 11-01-06028) and by grant of NSTU, having a special purpose.

The Collection of Papers is composed by some articles of the participants of School, being connected with the subject of School.

The compliers thank Dean of Faculty for External Education of NSTU, Professor Zoya S. Temlyakova for financial support of this edition.

Erlagol 2011

9th International Summer School-Conference
 “PROBLEMS ALLIED TO UNIVERSAL ALGEBRA
 AND MODEL THEORY”
 (June, 23-28)

June, 23.

Plenary talks and lectures. Chairman Vitaly Roman'kov

V. D. Mazurov (*Novosibirsk, Russia*).

Classification of Finite Simple Groups: a Theorem or Still a Conjecture.

V. N. Remeslennikov, E. Y. Daniyarova (*Omsk, Russia*).

Universal Algebraic Geometry.

V. M. Kopytov (*Novosibirsk, Russia*).

On Groups of Finite Malcev Rank.

Chairman Alexander Chekhonadskih

V. A. Churkin (*Novosibirsk, Russia*).

Polar Decomposition of Operators in Minkovski Spaces.

A. T. Nurtazin (*Almaty, Kazakhstan*).

Existentially and Positively Existentially Closed Models.

Short Talks

Section 1. Chairman Alexander Chekhonadskih

A. A. Kuznetsov (*Krasnoyarsk, Russia*).

On Centralizers of Automorphisms of Burnside group $B_0(2, 5)$.

M. V. Kotov (*Omsk, Russia*).

Algebraic Geometry over Some Topological Algebras.

Section 2. Chairman Fedor Dudkin

A. M. Popova (*Novosibirsk, Russia*).

On a Zassenhaus Problem.

E. V. Grachev, A. M. Popova (*Novosibirsk, Russia*).

Automorphisms of the Group of Units of the Group Ring ZA_5 .

June, 24

Plenary talks and lectures. Chairman Sergey Sudoplatov

V. A. Roman'kov (*Omsk, Russia*).

Random Equations in Groups (a lecture from the series “Elementary and Universal Properties of Groups”).

B. S. Baizhanov (*Almaty, Kazakhstan*).

Non-Orthogonality of 1-types in Ordered Structures.

E. Casanovas (*Barcelona, Spain*).

On Finitary Hyperimaginaries.

Chairman Valeriy Churkin

A. G. Pinus (*Novosibirsk, Russia*).

Algebraic and Logic Geometry of Universal Algebras. Unified Approach (a lecture from “Fundamentals of Algebraic and Logic Geometry of Universal Algebras”).

Short Talks

Section 1. Chairman Evgeny Poroshenko

A. V. Chekhonadskih (*Novosibirsk, Russia*).

Extreme Replacements of the Poles of Control Systems with a Small Number of Parameters.

S. I. Mardaev (*Novosibirsk, Russia*).

Properties of Model Formulae Transferable from the Original Formula to the Formulae that Define the Least Fixed Point.

Section 2. Chairman Valeriy Churkin**D. A. Zubko** (*Moscow, Russia*).

Elementary Definability of Linear Groups in the Class of All Groups.

F. A. Dudkin (*Novosibirsk, Russia*).

On the Abstract Commensurator of Baumslag–Soliter Groups.

June, 25**Plenary talks and lectures. Chairman Bektur Baizhanov****B. Poizat** (*Lyon, France*).

Equationnally minimal groups

E. I. Timoshenko (*Novosibirsk, Russia*).

Universal Theories of Partially Commutative Metabelian Groups (a lecture from the series “Elementary and Universal Properties of Groups”).

S. V. Sudoplatov (*Novosibirsk, Russia*).

On Classification of Countable Models of Complete Theories.

June, 26**Plenary talks and lectures. Chairman Alexander Pinus****V. N. Remeslennikov** (*Omsk, Russia*).

Elementary Equivalence of Nilpotent Groups And Algebras (a lecture from the series “Elementary and Universal Properties of Groups”).

E. I. Bunina (*Moscow, Russia*).

Elementary Properties of Chevalley Groups (a lecture from the series “Elementary and Universal Properties of Groups”).

Short Talks**Section 1. Chairman Oleg Bryukhanov****A. Kungozhin** (*Almaty, Kazakhstan*).Positively Existentially-Closed and Maximal Models in h -universal Axiomatizable Theories.

A. A. Mishchenko (*Omsk, Russia*).

Universal Equivalence of Partially commutative Nilpotent R -groups.

A. V. Treyer (*Omsk, Russia*).

Automorphisms of Partially Commutative Nilpotent R -groups.

M. A. Roizner (*Moscow, Russia*).

Elementary Equivalence of the Automorphism for Abelian p -groups.

D. Y. Vlasov (*Novosibirsk, Russia*).

Definitional Axiomatic Extensions of Formal Calculi.

Section 2. Chairman Alexander Pozhidaev

E. N. Poroshenko (*Novosibirsk, Russia*).

Bases of Partially Commutative Lie algebras.

A. S. Krivonogov (*Novosibirsk, Russia*).

On a proportion of Matrices with Real Spectrum in Finitely Dimensional Real Lie Algebras.

D. I. Ozornin (*Moscow, Russia*).

Equivalence of Abelian Groups in the Second Order Logic

A. Borodin (*Gorno-Altaysk, Russia*).

2-structure of rank 3. Algebraic Approach

June, 27

Plenary talks and lectures. Chairwoman Elena Bunina

E. Aladova, B. I. Plotkin, E. Plotkin (*Bar Ilan, Israeli*).

Algebraic Logic and Logical Geometry of Universal Algebras (a lecture from “Fundamentals of Algebraic and Logic Geometry of Universal Algebras”).

A. N. Koryukin (*Novosibirsk, Russia*).

Root Systems, Reduced Words and Complete Relation Systems in Lie Algebras A_n^+ , B_n^+ , C_n^+ , D_n^+ .

Short Talks

Section 1. Chairwoman Asya Popova

V. V. Lodeyschikova (*Barnaul, Russia*).

On Levi Quasivarieties Generated by Nilpotent Groups.

R. A. Popkov (*Novosibirsk, Russia*).

Classification of Countable Models of Complete Theories of Unary Predicates with Permutations of Bounded Orders.

A. Simonov (*Novosibirsk, Russia*).

On Right Neardomains.

A. N. Shevlyakov (*Omsk, Russia*).

Algebraic Geometry over Boolean algebras.

K. A. Baykalova (*Novosibirsk, Russia*).

Limit Models of the Theories of Graphs with Uniform Finite Separability and Abelian Groups.

Section 2. Chairman Valeriy Kopytov

P. P. Semenov (*Moscow, Russia*).

Automorphisms, Endomorphisms, and Elementary Equivalence of semigroups of invertible non-negative matrices.

A. P. Pozhidaev (*Novosibirsk, Russia*).

On Rota–Baxter Algebras.

M. A. Zvezdina (*Novosibirsk, Russia*).

On coincidence of Graphs of Alternating Groups.

N. V. Bayanova (*Barnaul, Russia*).

Weak Identities in Discriminated. L -groups.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ТЕОРИЙ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

К.А. Байкалова*

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: bkristina@bk.ru

В книге [1] приведена классификация теорий абелевых групп по инвариантам Шмелевой. В настоящей работе на основе инвариантов Шмелевой устанавливается критерий малости полной теории абелевой группы, для малых теорий абелевых групп доказываются достаточные условия отсутствия, единственности и бесконечного числа предельных моделей.

Последовательность моделей $(M_n)_{n \in \omega}$ называется *элементарной цепью*, если $M_n \preceq M_{n+1}$ для всех $n \in \omega$.

Напомним [2], что модель M называется *предельной*, если M не является простой моделью ни над каким кортежом и $M = \bigcup_{n \in \omega} M_n$ для некоторой элементарной цепи $(M_n)_{n \in \omega}$ простых моделей над некоторыми кортежами.

Через $\mathbf{Q}$ будем обозначать аддитивную группу рациональных чисел, $\mathbf{Z}(p^n)$ — циклическую группу порядка p^n , R_p — группу несократимых дробей со взаимно простым с p знаменателем, $\mathbf{Z}(p^\infty)$ — группу всех комплексных корней из 1 степени p^n для всех $n \geq 1$. Группы $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}(p^n)$, R_p , $\mathbf{Z}(p^\infty)$ называются *базисными*.

Известно [1], что любая абелева группа A элементарно эквивалентна группе $\oplus_{p,n} \mathbf{Z}(p^n)^{(\alpha_{p,n})} \oplus \oplus_p \mathbf{Z}(p^\infty)^{(\beta_p)} \oplus \oplus_p R_p^{(\gamma_p)} \oplus \mathbf{Q}^{(\varepsilon)}$. Здесь p — простое число, $\alpha_{p,n}$, β_p , γ_p , ε — инварианты Шмелевой и $\alpha_{p,n}$, β_p , γ_p фиксированы для каждой конкретной теории.

Известно [1], что любая формула теории абелевой группы эквивалентна булевой комбинации позитивно примитивных формул, а любая позитивно примитивная формула эквивалентна относительно теории абелевых групп конъюнкции формул вида $\exists x_0 \sum_{i=1}^n m_i x_i \approx p^k x_0$ и $\sum_{i=1}^n m_i x_i \approx 0$,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ, проект НШ-3669.2010.1.

где $m_i \in \mathbf{Z}$, $k \in \omega$, p - простое число.

Теорема 1. *Полная теория абелевой группы A мала тогда и только тогда, когда множество $\{p \mid \exists n \alpha_{p,n}(A) \neq 0 \vee \beta_p(A) \neq 0\}$ конечно.*

Доказательство. Формулы вида $\sum_{i=1}^n m_i x_i \approx 0$ “говорят” о линейной зависимости или независимости элементов x_i и малости теории нарушить не могут, так как дают только счётное число комбинаций.

Если множество $\{p \mid \exists n \alpha_{p,n}(A) \neq 0 \vee \beta_p(A) \neq 0\}$ бесконечно, пронумеруем все его элементы. Для каждого слова ε в алфавите $\{0, 1\}$ построим формулу $\varphi_\varepsilon(x)$ по следующему правилу: $\varphi_\emptyset(x) = (x \approx x)$. Если длина ε равна n , формула $\varphi_\varepsilon(x)$ уже построена, то $\varphi_{\varepsilon 0}(x) = \varphi_\varepsilon(x) \wedge \exists y (py \approx x)$, $\varphi_{\varepsilon 1}(x) = \varphi_\varepsilon(x) \wedge \neg \exists y (py \approx x)$, где p - простое число с номером $n + 1$. Для каждого $\delta \in \{0, 1\}^\omega$ множество формул $S_\delta = \{\varphi_\varepsilon(x) \mid \varepsilon - \text{конечный начальный отрезок } \delta\}$ совместно. Если $\delta \neq \delta'$, то множество $S_\delta \cup S_{\delta'}$ несовместно. Таким образом для разных δ множества S_δ будут разными типами. Всего таких δ будет 2^ω . Значит, имеется 2^ω типов.

Если множество $\{p \mid \exists n \alpha_{p,n}(A) \neq 0 \vee \beta_p(A) \neq 0\}$ конечно, формулы вида $\exists x_0 \sum_{i=1}^n m_i x_i \approx p^k x_0$ тоже дадут только конечное число комбинаций. $\square$

В книге [3] приведен критерий ω -категоричности полной теории абелевой группы на языке порядков элементов. Так как ω -категоричная теория не имеет предельных моделей, этот критерий представляет собой характеризацию отсутствия предельных моделей.

Теорема 2. *Если T — полная теория абелевой группы A , то теория T ω -категорична (и не имеет предельных моделей) тогда и только тогда, когда порядки элементов из A ограничены в совокупности.*

Доказательство. Пусть порядки элементов из A ограничены некоторым числом n . Количество формул вида $\exists x_0 \sum_{i=1}^n m_i x_i \approx p^k x_0$ и $\sum_{i=1}^n m_i x_i \approx 0$, в которых все коэффициенты по модулю не превосходят n , конечно. Тип любого кортежа описывается булевой комбинацией этих формул, так как формулы с коэффициентами, большими порядков элементов этого кортежа, выводятся из формул, коэффициенты которых не превосходят порядков элементов. Таким образом, тип любого элемента будет главным. А значит, теория T ω -категорична и не имеет предельных моделей.

Если порядки элементов из A не ограничены, то по теореме компактности найдется модель теории T , содержащая элемент бесконечного порядка. Тип этого элемента неизолирован, значит, теория T не ω -категорична. $\square$

Лемма. Пусть A — абелева группа и $\varepsilon(A) \neq 0$. Тогда $A \prec A \oplus \mathbf{Q}$.

Доказательство. Рассмотрим множество $p(x)$, состоящее из формул $\neg nx \approx 0$, $\exists y(x \approx ny)$, $\neg nx \approx a$ для всех $n \in \omega \setminus \{0\}$ и всех $a \in A$. Так как $\varepsilon(A) \neq 0$, порядки элементов группы A неограничены, а значит, множество всех формул вида $\neg nx \approx 0$ локально совместно. Так как порядки элементов неограничены, для любых натуральных чисел $n_1, n_2, \dots, n_k$ найдется элемент $a \in A$, порядок которого будет больше, чем $n_1 n_2 \dots n_k$, и элемент $n_1 n_2 \dots n_k a$ будет делиться на каждое из чисел $n_1, n_2, \dots, n_k$, то есть множество всех формул вида $\exists y(x \approx ny)$, $\neg nx \approx 0$ локально совместно. А значит, и все множество $p(x)$ локально совместно. Следовательно, $p(x)$ — тип над множеством A и существует группа $B \succ A$, в которой этот тип реализуется. Любая реализация типа $p(x)$ порождает группу $\mathbf{Q}$, т.е. $A \oplus \mathbf{Q}' \leq B$, где $\mathbf{Q}' \cong \mathbf{Q}$.

Осталось доказать, что $A \prec A \oplus \mathbf{Q}'$. Для этого достаточно показать, что для любой формулы $\varphi(x_0, \bar{x})$ и любого кортежа $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A$, если $A \oplus \mathbf{Q}' \models \exists x_0 \varphi(x_0, \bar{a})$, то найдётся элемент $a_0 \in A$, такой что $A \models \varphi(a_0, \bar{a})$.

Так как A и $A \oplus \mathbf{Q}'$ — абелевы группы, то можно считать, что $\varphi(x_0, \bar{x})$ имеет вид $\sum_{i=1}^n m_i x_i \approx p^k x_0$. Пусть $A \oplus \mathbf{Q}' \models \exists x_0 \varphi(x_0, \bar{a})$. Тогда $\sum_{i=1}^n m_i a_i = a \in A$ и $A \oplus \mathbf{Q}' \models \exists x_0 (a \approx p^k x_0)$. Значит, найдётся элемент $a_0 \in A \oplus \mathbf{Q}'$ для которого верно $a \approx p^k a_0$. Так как $a \in A$, то и $a_0 \in A$. $\square$

Следствие 1. Если T — полная теория абелевой группы A , то теория T ω -категорична тогда и только тогда, когда $\varepsilon(A) = 0$.

Доказательство. Известно [1], что если для абелевой группы A инвариант Шмелевой $\varepsilon(A) = 0$, то для любого простого числа p выполняется $\beta_p(A) = \gamma_p(A) = 0$ и множество $\{(p, n) \mid \alpha_{(p,n)} \neq 0\}$ конечно. А значит, порядки элементов группы A ограничены в совокупности и по теореме 2 теория T ω -категорична. Если $\varepsilon(A) \neq 0$, то по лемме $A \prec A \oplus \mathbf{Q}$, а значит, в модели $A \oplus \mathbf{Q}$ теории T найдётся элемент бесконечного порядка и по теореме 2 теория T не ω -категорична. $\square$

Теорема 3. Если T — малая теория абелевой группы A , порядки элементов из A не ограничены, для каждого простого p инварианты $\beta_p(A)$ и $\gamma_p(A)$ конечны и любая модель теории T представляется в виде прямой суммы базисных групп, то предельная модель единственна.

Доказательство. По условию любая модель A' теории T представляется в виде

$$A \cong \bigoplus_{p,n} \mathbf{Z}(p^n)^{(\alpha_{p,n})} \oplus \bigoplus_p \mathbf{Z}(p^\infty)^{(\beta_p)} \oplus \bigoplus_p R_p^{(\gamma_p)} \oplus \mathbf{Q}^{(\varepsilon)}.$$

Так как порядки элементов неограничены, то $\varepsilon(A) \neq 0$. Тогда по лемме $A \prec A \oplus \mathbf{Q}$. Так как для каждого простого p инварианты $\beta_p(A)$ и $\gamma_p(A)$ конечны, это будет единственным способом расширения модели теории T .

Пусть A_0 — простая модель теории T . Тогда $A_0 \prec A_0 \oplus \mathbf{Q}$ и можем расширять так сколько угодно раз. На конечном шаге будет получаться простая над кортежом модель, а на бесконечном — предельная. Таким образом, предельная модель единственна. $\square$

Напомним [4], что группа G называется *полной* или *делимой*, если для любого натурального $n > 0$ и любого $g \in G$ уравнение $nx = g$ имеет в группе G хотя бы один корень.

Следствие 2. *Если T — малая теория полной абелевой группы A , порядки элементов которой не ограничены и для каждого простого p инварианты $\beta_p(A)$ конечны, то теория T имеет единственную предельную модель.*

Доказательство. По теореме 9.1.6 из [4] любая ненулевая полная абелева группа раскладывается в прямую сумму групп $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Z}(p^\infty)$, быть может, по разным простым числам p . А значит, $\gamma_p(A) = 0$, и по теореме 3 предельная модель теории T единственна. $\square$

Предложение. *Если T — малая теория абелевой группы A и $\beta_p(A) = \omega$ или $\gamma_p(A) = \omega$ для некоторого p , то T имеет бесконечно много предельных моделей.*

Доказательство. Если $\beta_p(A) = \omega$ или $\gamma_p(A) = \omega$, то $\varepsilon(A) \neq 0$ и к простой модели теории T можно добавлять неограниченное количество прямых слагаемых $\mathbf{Z}(p^\infty)$, R_p и $\mathbf{Q}$, а это даёт бесконечное число предельных моделей. $\square$

Список литературы

- [1] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 356 с.
- [2] Судоплатов С. В. Проблема Лахлана. — Новосибирск: НГТУ. — 2009. — 336 с.
- [3] Мустафин Т. Г., Нурмагамбетов Т. А. Введение в рикладную теорию моделей. — Караганда : КарГУ, 1987. — 94 с.
- [4] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. — М.: Наука. — 1982. — 288 с.

ГРУППЫ ВНЕШНИХ АВТОМОРФИЗМОВ ДВУХ СВОБОДНЫХ БЕРНСАЙДОВЫХ ГРУПП

Е.В. Грачев

Институт неорганической химии,
пр. Лаврентьева, 3, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: grachev@niic.nsc.ru

0.1 Постановка задачи

Пусть $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ -конечная группа и $a_1 = e$ - единица группы. Пусть группы G задана таблицей Кэли и $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ такая ее система порождающих, для которой выполняется условие $\forall i = 2, \dots, k$ $g_i \notin G(g_1, \dots, g_{i-1})$. Пусть каждый элемент группы a_i задан словом $W_i(g_1, g_2, \dots, g_k)$ от порождающих элементов. Можем считать, что элементы подгруппы $G(g_1)$ заданы словами только от g_1 , элементы подгруппы $G(g_1, g_2)$ заданы словами только от g_1, g_2 и т.д.

Биекция $\varphi : G \rightarrow G$ называется автоморфизмом группы G , если $\forall a_i, a_j \in G$ выполняется $\varphi(a_i a_j) = \varphi(a_i) \varphi(a_j)$. Автоморфизм φ называется внутренним, если существует такой элемент $b \in G : \varphi(a_i) = b a_i b^{-1}$ для всех элементов группы a_i . Группу всех автоморфизмов группы G обозначим через $Aut(G)$, подгруппу внутренних автоморфизмов через $Int(G)$. Подгруппа $Int(G)$ является нормальной подгруппой группы $Aut(G)$ и фактор $Aut(G)/Int(G)$ называется группой внешних автоморфизмов и обозначается $Out(G)$.

Пусть $C_1, C_2, \dots, C_r$ - сопряженные классы группы G и $C_1 = \{e\}$. Заметим, что всякий автоморфизм φ отображает произвольный сопряженный класс C_i на некоторый сопряженный класс C_j и таким образом реализует перестановку на множестве сопряженных классов. Тогда возникает гомоморфизм группы $Aut(G)$ на группу перестановок, действующую на множестве сопряженных классов $C_1, C_2, \dots, C_r$. Ядром этого гомоморфизма является подгруппа $H \subset Aut(G)$, содержащая подгруппу внутренних автоморфизмов $Int(G)$. В данной работе рассматриваются алгоритмы построения фактора $Aut(G)/H$.

0.2 Описание алгоритма

Пусть $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ порождающие группы G . Разобьем элементы группы на сопряженные классы $C_1, C_2, \dots, C_r$. Для каждого элемента группы a_i вычислим его порядок $o(a_i)$ и порядок сопряженного класса, в котором он находится $o'(a_i)$.

Будем перебирать все инъективные отображения $F : g_i \rightarrow g'_i$ порождающих группы G , где g'_i - произвольные элементы группы, для которых $o(g'_i) = o(g_i)$ и $o'(g'_i) = o'(g_i)$. Для каждого слова $W_i(g_1, g_2, \dots, g_k)$ вычислим соответствующее слово $W_i(g'_1, g'_2, \dots, g'_k)$ для всех элементов группы. Тогда мы получим продолжение отображения F на все элементы группы. Если отображение F не биекция, то это не автоморфизм. Иначе проверяем, выполняется ли $F(g_i a_j) = g'_i F(a_j)$, для $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n$. Если выполняется, то обозначим $\varphi = F$, т.к. F - автоморфизм группы G . Вычислив $\varphi(C_1), \varphi(C_2), \dots, \varphi(C_r)$, получим искомую перестановку.

0.3 Внешние автоморфизмы свободных бернсайдовых групп

Пусть $m, n \in \mathbb{N} : m > 0, n > 1$. Свободной бернсайдовой группой $B(m, n)$ называется группа с порождающими $\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ и генетическим кодом $W^n = e$, где W - произвольное слово от порождающих. В 1902 Бернсайдом был поставлен вопрос при каких m, n такая группа будет конечной [1]. При $m = 1$ группа $B(1, n) \cong C_n$. При $n = 2$ группа $B(m, 2) \cong C_2^m$. При $m > 1, n > 2$ группа $B(m, n)$ некоммутативна. К настоящему времени доказана конечность свободных бернсайдовых групп при $n = 3, 4, 6$ и $m > 1$. До настоящего времени не удается доказать конечность или бесконечность группы $B(2, 5)$, несмотря на то, что эта группа исследуется в нескольких кандидатских и докторских диссертациях.

Мы построили группу $Aut(G)/H$ для двух свободных бернсайдовых групп $B(2, 3)$ и $B(2, 4)$. Для этих групп $H \cong Int(G)$ (вычислено с помощью компьютера авторами статьи). Таким образом, фактор $Aut(G)/H$ изоморфен группе $Out(G)$.

$|Out(B(2, 3))| = 48$. Группа $Out(B(2, 3))$ порождается четырьмя автоморфизмами $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, для которых $\varphi_1(a) = a, \varphi_1(b) = ab, \varphi_2(a) = a, \varphi_2(b) = b^2, \varphi_3(a) = a^2, \varphi_3(b) = b, \varphi_4(a) = b, \varphi_4(b) = a$, где a, b - порождающие группы $B(2, 3)$.

Таблица характеров этой группы представлена ниже.

	$ G $	$ G $	4	6	8	6	8	8
	1A	2A	2B	3A	4A	6A	8A	8B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	1	1	1	-1	-1
χ_3	2	-2	0	-1	0	1	$\sqrt{2}i$	$-\sqrt{2}i$
χ_4	2	-2	0	-1	0	1	$-\sqrt{2}i$	$\sqrt{2}i$
χ_5	2	2	0	-1	2	-1	0	0
χ_6	3	3	-1	0	-1	0	1	1
χ_7	3	3	1	0	-1	0	-1	-1
χ_8	4	-4	0	1	0	-1	0	0

$|Out(B(2, 4))|=3072$. Группа $Out(B(2, 4))$ порождается пятью автоморфизмами $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$, для которых $\varphi_1(a) = a, \varphi_1(b) = ab, \varphi_2(a) = a, \varphi_2(b) = b^3, \varphi_3(a) = a, \varphi_3(b) = bab^2, \varphi_4(a) = a, \varphi_4(b) = b^2ab, \varphi_5(a) = b, \varphi_5(b) = a$.

В группе $Out(B(2, 4))$ имеется нормальная подгруппа изоморфная группе S_2^6 . Обозначим фактор по ней через F_{48} . Таблица характеров группы F_{48} представлена ниже.

	$ G $	$ G $	24	24	12	12	8	8	24	24	8	24	12	12	12
	1A	2A	2B	2C	2D	2E	2F	2G	3A	4A	4B	6A	6B	6C	12A
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	1
χ_3	1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1
χ_5	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1
χ_6	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
χ_7	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1
χ_8	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1
χ_9	2	-2	0	0	2	-2	0	0	2	0	0	-2	0	0	0
χ_{10}	2	-2	0	0	-2	2	0	0	2	0	0	-2	0	0	0
χ_{11}	2	2	-2	2	0	0	0	0	-1	-2	0	-1	1	-1	1
χ_{12}	2	2	-2	-2	0	0	0	0	-1	2	0	-1	1	1	-1
χ_{13}	2	2	2	2	0	0	0	0	-1	2	0	-1	-1	-1	-1
χ_{14}	2	2	2	-2	0	0	0	0	-1	-2	0	-1	-1	1	1
χ_{15}	4	-4	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	2	0	0	0

ЛИТЕРАТУРА

1. Burnside W. On an unsettled question in the theory of distinctinuous groups// J. Pure Appl. Math.– 1902. V. 33, P. 393-399.

ОБ АБСТРАКТНОМ СОИЗМЕРИТЕЛЕ ГРУПП БАУМСЛАГА–СОЛИТЕРА

Ф.А. Дудкин*

Sobolev Institute of Mathematics
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
4 Acad. Koptug avenue, 630090 Novosibirsk Russia
e-mail: DudkinF@ngs.ru

Пусть G – группа. Обозначим через $\Omega(G)$ множество изоморфизмов подгрупп конечного индекса группы G . Два таких изоморфизма $\varphi_1: H_1 \rightarrow H'_1$ и $\varphi_2: H_2 \rightarrow H'_2$ назовем *эквивалентными* (пишем $\varphi_1 \sim \varphi_2$), если существует такая подгруппа конечного индекса H группы G , что оба изоморфизма определены на H и $\varphi_1|_H = \varphi_2|_H$.

Для двух данных изоморфизмов φ_1 и φ_2 из $\Omega(G)$ определим их произведение $\varphi_1\varphi_2: \varphi_1^{-1}(H'_1 \cap H_2) \rightarrow \varphi_2(H'_1 \cap H_2)$ – изоморфизм из $\Omega(G)$. Фактор множество $\Omega(G)/\sim$ наследует умножение $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$ и является группой относительно такой операции. Будем называть такую группу *абстрактным соизмерителем группы G* (англ. *abstract commensurator*) или, для краткости, *соизмерителем группы G* и обозначать $Comm(G)$.

Группа $Comm(G)$, как правило, гораздо больше, чем $Aut(G)$. Например, $Aut(\mathbb{Z}^n) \cong GL(n, \mathbb{Z})$, в то время, как $Comm(\mathbb{Z}^n) \cong GL(n, \mathbb{Q})$.

Соизмерители точно описаны лишь для нескольких классов групп. Для группы MCG_g классов отображений поверхностей Иванов [1] нашел $Comm(MCG_g)$. Фарб и Хэндэль доказали в [2], что $Comm(Out(F_n)) \cong Out(F_n)$ для $n \geq 4$. Лейнингер и Маргалит [3] нашли соизмеритель группы кос B_n на $n \geq 4$ нитях. Для группы Ноттингема соизмеритель подсчитал Ершов [4].

Группа называется *хорфовой*, если всякий её гомоморфизм на себя имеет тривиальное ядро, т.е. является автоморфизмом. Далее будем считать, что p и q взаимно простые целые числа (пишем $p \perp q$), не равные нулю, единице и минус единице. Баумслаг и Солитер [6] впервые

*Работа выполнена при финансовой поддержке АБЦП Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы проект 2.1.1.419, Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ, проект НШ-3669.2010.1, и поддержана грантами РФФИ № 10-01-00391 и ФЦП 14.740.11.0346.

предложили серию примеров нехопфовых групп с двумя порождающими элементами и одним соотношением, они теперь обозначаются

$$BS(p, q) = \langle a, t \mid t^{-1}a^p t = a^q \rangle.$$

Эти группы оказались интересными и с других позиций: геометрических свойств, функций роста, функции Дэна и т.д.

Пусть B_m — граф-цикл с вершинами $c_1, c_2, \dots, c_m$ и ребрами $e_1, e_2, \dots, e_m$. Поставим в соответствие вершинам и ребрам графа B_m бесконечные циклические группы $C_1, C_2, \dots, C_m$ и $E_1, E_2, \dots, E_m$ соответственно. Пусть $\alpha_{e_i}: b_i \rightarrow c_i^q$ и $\omega_{e_i}: b_i \rightarrow c_{i+1}^p$ — вложения реберной группы $E_i = \langle b_i \rangle$ в вершинные группы $C_{i+1} = \langle c_{i+1} \rangle$ и $C_i = \langle c_i \rangle$ вершин c_{i+1} и c_i , инцидентных ребру e_i . Эти вложения обозначены на рис. 1 метками p и q на началах и концах ребер e_i . Таким образом построен граф групп $\mathbb{B}_m$. Обозначим через $H_m = \pi_1(\mathbb{B}_m)$ фундаментальную группу графа групп $\mathbb{B}_m$.

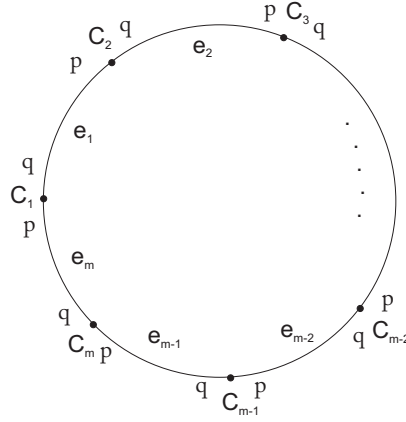


Рис. 1: Граф групп $\mathbb{B}_m$.

По определению фундаментальной группы графа групп

$$H_m = \langle c_1, c_2, \dots, c_m, d \mid d^{-1}c_1^p d = c_m^q, c_i^q = c_{i+1}^p, i = 1, 2, \dots, m-1 \rangle.$$

Заметим, что группа $BS(p, q)$ изоморфна H_1 . В [5] доказано, что всякая подгруппа конечного индекса группы $BS(p, q)$ изоморфна некоторой группе H_m . Так как автоморфизм подгруппы конечного индекса является изоморфизмом, то для описания $Comm(BS(p, q))$ нужно знать $Aut(H_m)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть p и q взаимно простые целые числа, не равные 0, 1, -1, тогда

$$Aut(H_m) \cong \langle S, A, I \mid I^2 = 1, [S, I] = 1, A^I = A^{-1}, A^q = S^{-1}A^p S, \\ [S^m, A]^q = S^{-1}[S^m, A]^p S, [[S^m, A], S^{-k}AS^k] = 1, k = 0, 1, \dots, m-1 \rangle.$$

Обозначим через $\mathbb{Q}_{p,q}$ подгруппу рациональных чисел $\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}, mn \perp pq\}$ относительно умножения. В группе $Aut(H_m)$ есть подгруппа индекса 2, порожденная элементами A и S , обозначим ее через L_m . Мы доказываем, что если $m \mid n$, то группа L_m вкладывается

в L_n . Кроме того описываем действие группы $\mathbb{Q}_{p,q}$ автоморфизмами на прямом пределе групп L_m . Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть p и q взаимно простые целые числа, не равные 0, 1, -1, тогда

$$\text{Comm}(BS(p, q)) \cong \mathbb{Q}_{p,q} \ltimes \varinjlim L_m.$$

В работе [7] О. В. Богопольский доказал, что

$$\text{Comm}(BS(1, n)) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & s \end{pmatrix}, \text{ где } s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, r \in \mathbb{Q} \right\}. \quad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 2 при $p = 1, q = n$, эквивалентна формуле (1).

Список литературы

1. N. Ivanov, *Automorphisms of complexes of Curves and of Teichmuller spaces*, Inter. Math. Res. Not., N. 14 (1997), 651-666.
2. B. Farb, M. Handel, *Commensurations of $\text{Out}(F_n)$* , Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., 105 (2007), 1-48.
3. C.J. Leininger, D. Margalit, *Abstract commensurators of braid groups*, J. Algebra, 299 (2006), N. 2, 447-455.
4. M. Ershov, *On the commensurator of the Nottingham group*, preprint(accepted), <http://people.virginia.edu/~mve2x/Research/>.
5. Ф.А. Дудкин, *Подгруппы конечного индекса в группах Баумслэга-Солитера*, Алгебра и логика, 49 (2010), №3, с. 310-325.
6. G. Baumslag, D. Solitar, *Some two-generator one-relator non-hopfian groups*, Bull. Amer. Math. Soc., 68(1962), № 3, P. 199-201.
7. O. Bogopolski, *Abstract commensurators of solvable Baumslag-Solitar groups*, preprint, <http://www.mpim-bonn.mpg.de/preblob/4225>.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ КОРНЕЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ТРЁХМАССОВОЙ СИСТЕМЫ

А.Н. Корюкин

А.В. Чехонадских

Новосибирский государственный технический университет,
пр. Карла Маркса, 20, Новосибирск, 630092, Россия
e-mail: koryukin@sibmail.ru e-mail: alchekh@ngs.ru

Введение. Теория автоматического управления с самого начала активно использовала алгебраические идеи и подходы. Исследование линейных систем, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений, под действием преобразования Лапласа принимает форму системы алгебраических уравнений, так что классический критерий Гурвица устойчивости системы имеет чисто алгебраическую форму [1]. В последние десятилетия прошлого века был хорошо разработан синтез систем полного порядка, в которых регулятор (controller) описывается матричной передаточной функцией со строчными степенями в тех же границах, что и управляемый объект; большое количество возникающих случаев изложено в фундаментальной монографии [2]. Тем не менее, в технике и промышленной практике значительное преимущество получили регуляторы малых порядков, в частности, П, ПИ и ПИД (пропорционально-интегрально-дифференциальные).

Изучение ПИД-управления — одна из самых актуальных ныне областей теории автоматического управления, которой посвящено множество статей и монографий последних лет [3-5]. Конструирование и настройка трёхпараметрических ПИД-регуляторов, с одной стороны, оставляют немало содержательных проблем, с другой — допускают применение компьютерного моделирования и вычислений, что приводит к значительному прогрессу в инженерной практике.

Однако синтез систем пониженного порядка с числом параметров выше трёх наталкивается на существенно большие трудности численно-

го анализа; сколько-нибудь универсальных численных методов до сих пор не найдено.

1. Основные понятия и соотношения. Система автоматического управления в классическом случае представляет собой пару *объект-регулятор* с отрицательной обратной связью. Объект предполагается заданным и математически смоделированным; его результатом работы является контролируемая величина, скалярная или векторная, которая в силу тех или иных причин отклоняется от стандартного значения - задания. Регулятор — специальное устройство, управляющее воздействие которого на объект зависит от разности между заданием и текущим значением выхода. В идеале регулятор должен быть построен так, чтобы его управление индуцировало переходный процесс в объекте, возвращающий значение контролируемой величины к стандарту.

Объект описывается соотношением $Dy(t) = Nu(t)$, где y — вектор выхода объекта; u — вектор входных (управляющих) воздействий

($\dim y = \dim u$); D, N — линейные дифференциальные операторы (в стационарном случае — с постоянными коэффициентами).

С помощью преобразования Лапласа получается операторное описание объекта, которое может быть записано в левом и правом разложении: $y(s) = G(s) \cdot u(s) = D_{obj}^{-1}(s)N_{obj}(s) \cdot u(s) = N_r(s)D_r^{-1}(s) \cdot u(s)$.

Аналогично, регулятор (контроллер) описывается соотношением

$$u(s) = C(s) \cdot e(s) = D_{con}^{-1}(s)N_{con}(s) \cdot e(s)$$

(здесь $e = w - y$ — рассогласование между заданием w и выходом y). Отсюда $u(s) = C(s) \cdot (w - G(s)u(s))$, или $u(s) = (E + C(s)G(s))^{-1}C(s) \cdot w$. Матричная передаточная функция системы связывает задание и выход: $y(s) = G(s) \cdot (E + C(s)G(s))^{-1} \cdot C(s) \cdot w$. С помощью этих разложений матрица системы $H_{sys} = G(s) \cdot (E + C(s)G(s))^{-1} \cdot C(s)$ приводится к виду

$$\begin{aligned} H_{sys} &= G \cdot (E + CG)^{-1} \cdot C = \\ &= N_r D_r^{-1} \cdot (D_{con}^{-1} D_{con} D_r D_r^{-1} + D_{con}^{-1} N_{con} N_r D_r^{-1})^{-1} D_{con}^{-1} N_{con} = \\ &= N_r [D_{con} D_r + N_{con} N_r]^{-1} N_{con} \quad (\text{переменная } s \text{ пропущена}). \end{aligned}$$

Здесь явно присутствует характеристическая матрица (“знаменатель системы”) $D_{sys} = D_{con} D_r + N_{con} N_r$.

Характеристический многочлен системы $f(s) = \det(D_{con}(s)D_r(s) + N_{con}(s)N_r(s))$ инвариантен относительно левых и правых представлений. *Полюсами системы* называются корни характеристического многочлена. Расположением полюсов системы определяются её принципиальные свойства. Оно влияет на многие показатели переходных процессов. Упомянутый во введении синтез регулятора полного порядка предусматривает задание знаменателя системы D_{sys} , имеющего нужное расположе-

ние полюсов и обеспечивающего разрешимость *матричного диофантова уравнения* $D_{sys} = X D_r + Y N_r$ относительно полиномиальных матриц “числителя” $X = N_{con}$ и “знаменателя” $Y = D_{con}$ регулятора. Решение сводится к системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов полиномов $x_{ij}(s)$ и $y_{ij}(s)$, причём условия существования технически реализуемых решений также основательно разработаны [2]. При стабилизации такой системы с помощью регулятора пониженного порядка заведомо некорректно произвольное задание правой части $D_{sys}(s)$, поскольку система линейных уравнений для элементов матрицы $(y_{ij}|x_{ij})$ почти всегда оказывается несовместной.

Естественной постановкой задачи оказывается задание некоторой структуры регулятора, как правило, связанной с гарантированной возможностью технической реализации и включающей в себя несколько свободных (настраиваемых) параметров, с последующим выяснением возможностей регулирования.

Прежде всего, целесообразность такого управления определяется возможностью за счёт выбора значений параметров регулятора сделать систему устойчивой, т.е. расположить полюса системы в левой полуплоскости.

Далее, качество управления связано с запасом устойчивости — отклонением влево от мнимой оси самых правых корней $\max \operatorname{Re} z_k$, величиной колебательности $\max |\operatorname{Im} z_k|$, перерегулированием, которое косвенно связано с порядком задачи: числом полюсов и, тем самым, числом слагаемых в операторном решении), и т.д.

Таким образом, естественным методом поиска управления пониженного порядка оказывается задание некоторой целевой области на комплексной плоскости, расположение полюсов в которой позволяет удовлетворить инженерные требования к переходным процессам, и нахождение таких значений коэффициентов полиномов $y_{ij}(s), x_{ij}(s)$, чтобы полюса располагались в этой области.

Предположим, что задана некоторая численная характеристика $E(z_1, \dots, z_n)$ расположения полюсов, зависящая от вектора p параметров регулятора. Например, функция устойчивости по Гурвицу $H(p) = \max_{k=1, \dots, n} \operatorname{Re} z_k$ (нулевое значение которой разделяет области классической устойчивости системы и неустойчивости), или коническая функция $G(p) = \max_{k=1, \dots, n} (\operatorname{Re} z_k + |\operatorname{Im} z_k|)$, учитывающая также колебательную составляющую (её отрицательное значение гарантирует устойчивость вместе с ограничением на осцилляции). Приняв такую функцию в качестве целевой, можно придать задаче оптимизационную форму: найти такое значение вектора p , на котором достигается глобальный минимум этой

функции в пространстве параметров или в его определённой части.

Однако такая постановка задачи сопряжена с рядом оптимизационных трудностей: невыпуклостью, многоэкстремальностью, овражным рельефом, недифференцируемостью с неограниченным субдифференциалом [7,8].

Резюмируя сказанное, можно утверждать, что упрощение структуры регулятора и уменьшение числа его параметров наталкивается, с одной стороны, на отсутствие гарантированного решения диофантова уравнения, и значительную сложность критических многообразий целевых функций — с другой.

2. Критические корневые диаграммы. Серия работ [9-11] посвящена изучению действительных координат для всевозможных корневых наборов действительных многочленов. Наличие целевой функции задаёт предпорядок на корневом множестве: $z_1 \leq_\alpha z_2 \Leftrightarrow E(z_1) \leq E(z_2)$. Поэтому можно пользоваться действительными координатами для корней в корневых зонах — тех областях пространства параметров, где между ними сохраняется неизменное соотношение — так называемая корневая диаграмма. Границы между зонами характеризуются соотношениями, где наряду с неравенствами присутствуют равенства: $z_1 =_\alpha z_2 \Leftrightarrow E(z_1) = E(z_2)$, и соответствующими корневыми диаграммами.

Для действительных корней равенства $z_1 = z_2$, $z_1 =_\alpha z_2$ равносильны, и корневая зона с кратными действительными корнями оказывается границей, где действительная пара переходит в комплексно сопряжённую, причём соотношения между всеми остальными корнями сохраняются.

Точно так же α -равенство, не связанное с наличием кратных корней, задаёт границу двух корневых зон. Так, α -равенство комплексной пары и действительного корня $x_1 \pm i \cdot y_2 =_\alpha x_3$ задаёт границу между зонами $x_1 \pm i \cdot y_2 \leq_\alpha x_3$ и $x_1 \pm i \cdot y_2 \geq_\alpha x_3$. А α -равенство двух комплексных пар $x_1 \pm i \cdot y_2 =_\alpha x_3 \pm i \cdot y_4$ оказывается своего рода “внутренней границей”: линией “склейки” двулистных сегментов действительных координат для таких пар [11].

Существенно, что кусочно-дифференцируемая функция $E(z_1, \dots, z_n)$ задаёт кусочно-гладкие границы между корневыми зонами.

Поскольку значения функций типа $H(p)$ и $G(p)$ определяются самими α -правыми корнями, равенство (кратность) или α -равенство таких корней приводит к недифференцируемости целевой функции [8,10] и, следовательно, к критической точке. Поэтому критические многообразия целевых функций включают границы между зонами с различными α -правыми корнями. Особое значение при этом приобретает размерность соответствующей критической зоны. Каждое α -равенство свя-

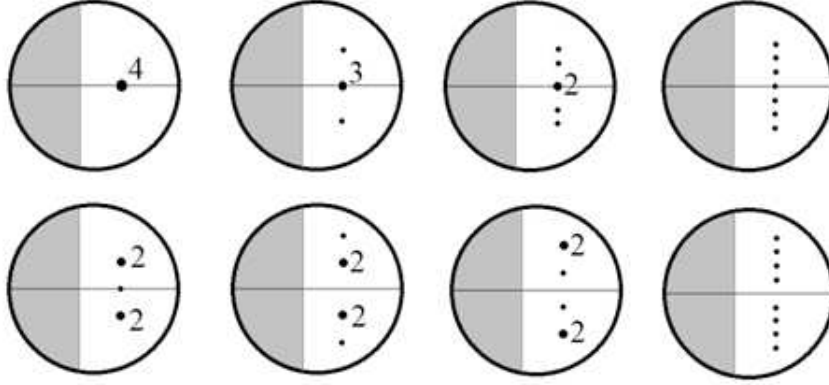


Рис. 1: Критические корневые диаграммы для трёхпараметрической САУ. Кратность корня подписывается рядом с изображающей его точкой. Нахождение корней на одной вертикали указывает на их α -равенство. Расположение прочих корней (помимо α -правых) обозначено тёмным сегментом слева.

зывает одну из степеней свободы в пространстве параметров, будь то кратность действительного корня или α -равенство комплексных пар. Кратность комплексных пар связывает две степени свободы. Пока размерность критического многообразия положительна, на нём сохраняется возможность дальнейшей минимизации — пока не добавляется ещё несколько равенств (т.е. несколько α -правых или просто кратных действительных корней), и размерность не становится нулевой.

Поэтому для трёхпараметрического регулятора (в частности, для ПИД) есть восемь возможностей (рис. 1), при которых справа оказывается от 4 до 8 корней. “Неправые” корни расположены в серой области в левой части диаграммы. Все такие корневые расположения для трёхпараметрического регулятора оказываются нульмерными — т.е. критическими точками в самом обычном смысле. При $k > 3$ параметрах эти же диаграммы описывают $(k - 3)$ -мерные критические многообразия.

Надо подчеркнуть, что во всех этих случаях критическая точка выявляется через недифференцируемость. Хотя снижение размерности и возникновение критических точек на многообразиях положительной размерности возможно и при обращении в нуль градиента по многообразию dE/dK , где K — касательное пространство к критическому многообразию. В последнем случае в критической точке по одним направлениям производная не существует, а по другим обращается в нуль.

Таким образом, поиск в пространстве параметров точек, соответствующих критическим корневым диаграммам и вычисление значений целевой функции в этих точках, в некоторых случаях позволяет находить локальные и глобальный минимумы целевой функции, а в остальных —

продолжить поиск на критическом многообразии положительной размерности, параметризуя его нужным числом координат и решая систему уравнений $dE/dK = 0$. Ниже это демонстрируется

на конкретном примере.

3. Трёхмассовая система.

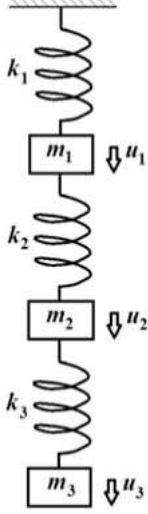


Рис. 2: Трёхмассовый объект, управляемый действиями сил $u_1 - u_3$

В качестве объекта управления возьмем систему из трех тел с массами m_i ($i = 1, 2, 3$), соединенных с неподвижным подвесом и между собой пружинами жесткости k_i ($i = 1, 2, 3$) (рис. 2). Управляющие воздействия — силы u_i , которые могут прикладываться к этим телам вертикально с положительным направлением вниз. Переменными состояния будем считать координаты грузов x_i , отсчитываемые вниз от состояния равновесия. Движение тел сопровождается трением, пропорциональным их скорости с коэффициентом a_i ($i = 1, 2, 3$). При малых колебаниях уравнения системы выглядят так:

$$m_1 \ddot{x}_1 + a_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 \cdot (x_1 - x_2) = u_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + a_2 \dot{x}_2 + k_2 \cdot (x_2 - x_1) + k_3 \cdot (x_2 - x_3) = u_2$$

$$m_3 \ddot{x}_3 + a_3 \dot{x}_3 + k_3 \cdot (x_3 - x_2) = u_3.$$

Эти же уравнения в операторной форме:

$$(m_1 s^2 + a_1 s + k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = u_1$$

$$-k_1 x_1 + (m_2 s^2 + a_2 s + k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 = u_2$$

$$-k_2 x_2 + (m_3 s^2 + a_3 s + k_3)x_3 = u_3.$$

В [12] решается задача стабилизации такого объекта регулятором полного порядка при контролируемых переменных $y_i = x_i$ ($i = 1, 2$), и управляющих воздействиях u_i ($i = 1, 2, u_3 = 0$). Одновременно с этим выполняется требование автономизации каналов управления.

Сложности при этом создаёт совпадение нулей и полюсов объекта, находящихся на мнимой оси, что возникает при $m_i = 1$, $a_i = 0$, $k_1 = k_2 = 2$, $k_3 = 4$. После исключения переменной x_3 объект описывается матричным уравнением

$$\begin{bmatrix} s^2 + 4 & -2 \\ -2(s^2 + 4) & (s^2 + 6)(s^2 + 4) - 16 \end{bmatrix} y(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 + 4 \end{bmatrix} u(s),$$

что соответствует левому полиномиальному разложению объекта

$D_l(s)y(s) = N_l(s)u(s)$. Отсюда возникает матричная передаточная функция $W_{ob}(s) = D_l^{-1}(s)N_l(s)$. Её правое разложение включает такие матрицы [12]: $D_r(s) = \begin{bmatrix} 16(s^2 + 4) & -2(s^2 + 4) \\ -32 & s^4 + 10s^2 + 8 \end{bmatrix}$, $N_r(s) = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & s^2 + 4 \end{bmatrix}$.

Эти матрицы входят в диофантово уравнение для матричного “знаменателя” системы управления $C(s)_{sys} = Y(s)D_r(s) + X(s)N_r(s)$, которое можно записать с помощью прямоугольных матриц:

$$\begin{pmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) & x_{11}(s) & x_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) & x_{21}(s) & x_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16(s^2 + 4) & -2(s^2 + 4) \\ -32 & s^4 + 10s^2 + 8 \\ 16 & 0 \\ 0 & s^2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

В [12] задана диагональная матрица системы $C(s)_{sys}$, соответствующая инженерному свойству системной автономизации, с многочленами четвёртой и восьмой степени на диагонали. У элементов матриц регулятора полного порядка те же степени, что и у соответствующих элементов матриц объекта.

Как указано во введении, синтез регулятора пониженного порядка сводится к возможности расположить полюса системы в некоторой целевой области левой комплексной полуплоскости, а в оптимизационной постановке — возможно левее: минимизируя функцию гурвицевой устойчивости $H(z_1, \dots, z_n) = \max \operatorname{Re}(z_1, \dots, z_n)$.

В [10] рассматривается структура ПД-регулятора

$$E \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}s + d_{11} & c_{12}s + d_{12} \\ c_{21}s + d_{21} & c_{22}s + d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad c_{ij}, d_{ij} \in \mathbb{R}$$

(т.е. $Y = E$, $X = Cs + D$), позволяющая существенно снизить объём вычислений и сложность критических многообразий целевой функции.

Уже в случае диагональной матрицы “числителя” $X = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & c_{22}s + d_{22} \end{pmatrix}$ становится возможным добиться стабилизации системы. При этом гурвицева функция $H(z_1, \dots, z_6)$ оказывается двухэкстремальной:

локальный минимум $F(5.70, 1.57, 1.53) \approx -0.26$ достигается на корневом наборе $\{-0.26 \pm 3.08i, -0.26 \pm 1.12i\}$, где первая пара двухкратна;

глобальный минимум $F(-2.68, 5.05, 2.66) \approx -0.55$ достигается на корнях $\{-2.29; -0.55; -0.55 \pm 1.52i\}$ с также двухкратной комплексной парой.

Задав числитель регулятора $\begin{pmatrix} c_{11}s + d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & c_{22}s + d_{22} \end{pmatrix}$ и положив $d_{12} = d_{21} = 2$, получим верхнетреугольную матрицу $C(s)$, где элемент $C_{11}(s) = s^2 + c_{11}s + d_{11} + 4$ позволяет добиваться любых расположений полюсов по первому каналу, а элемент $C_{22}(s) = s^4 + c_{22}s^3 + (d_{22} + 10)s^2 + 4c_{22}s + 4d_{22} + 8$ допускает существенное упрощение задачи возможно более левого расположения характеристических корней в зависимости от параметров c_{22} , d_{22} . Единственный минимум, общий для нескольких видов целевых

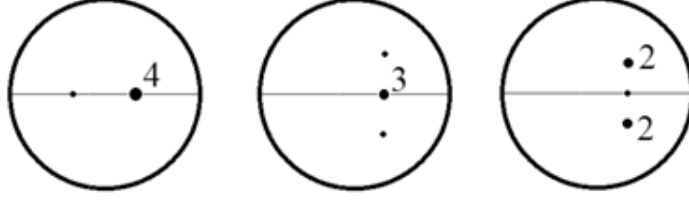


Рис. 3: Корневые диаграммы для многочлена пятой степени, зависящего от трёх параметров.

функций, достигается при $c_{22} = 4$, $d_{22} = 2$ на кратной паре корней $-1 \pm \sqrt{3}i$.

4. Двухканальный ПИД-регулятор и его критические корневые диаграммы. 2×2 ПИД-регулятор предполагает матричный “знаменатель” первой степени $Y(s) = s \cdot \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}$, а “числитель” — второй степени: $X(s) = s \cdot \begin{pmatrix} c_1 s^2 + b_1 s + a_1 & d_1 s \\ d_2 s & c_2 s^2 + b_2 s + a_2 \end{pmatrix}$. Чтобы уменьшить число параметров, сохранив тип регулятора, зададим знаменатель в виде $Y = sE$. Как и выше, значения $d_{1,2} = 2$ позволяют сделать матрицу системы $C(s)$ диагональной.

За счёт этого задача также распадается на две, причём в левом верхнем углу получается элемент $C_{11}(s) = 16 \cdot (s^3 + c_1 s^2 + (b_1 + 4)s + a_1)$, коэффициенты которого могут быть сделаны произвольными, так же как расположение полюсов. В нижнем правом углу получается трёхпараметрическая минимизация многочлена $P(s) = C_{22}(s) = s^5 + c_2 s^4 + (b_2 + 10)s^3 + (a_2 + 4c_2)s^2 + (4b_2 + 8)s + 4a_2$.

Из-за того, что число его корней не более 5, из восьми возможных корневых диаграмм, указанных на рис. 1, остаётся только три (рис. 3).

Рассмотрим эти случаи по очереди, предполагая, что в качестве целевой взята гурвицева функция $H(p) = H(a, b, c) = \max(\text{Re} z_1, \dots, \text{Re} z_5)$. Индекс 2 при параметрах регулятора a, b, c везде ниже опущен.

4.1. Четырёхкратный вещественный корень. Покажем, что этот случай не реализуется, т.е. характеристический многочлен не может иметь четырёхкратных корней. Такие корни были бы общими для многочлена и трёх его производных. Выписав выражения для производных, получим систему алгебраических уравнений

$$P(s) = P'(s) = P''(s) = P'''(s) = 0,$$

линейную по параметрам регулятора a, b, c . Исключив их, получим уравнение относительно переменной s :

$$s^8 + 16s^6 + 112s^4 - 128s^2 + 512 = 0.$$

Численная проверка показывает, что оно не имеет вещественных корней: $s \in \{\pm 1.1897 \pm 3.1850i, \pm 1.1590 \pm 0.7836i\}$, т.е. исходная система несовместна над $\mathbb{R}$.

4.2. Трёхкратный вещественный корень на одной вертикали с комплексной парой. Пусть x — трёхкратный вещественный корень; $y > 0$ — мнимая часть простой комплексной пары; $q = x^2 + y^2$. Полином $p(s)$ с этими корнями имеет вид $(s - x)^3(s^2 - 2xs + q) = s^5 - 5xs^4 + (9x^2 + q)s^3 - (7x^3 + 3qx)s^2 + (2x^4 + 3qx^2)s - qx^3$.

Приравнявая коэффициенты полиномов $P(s)$ и $p(s)$, получим систему из пяти уравнений для неизвестных a, b, c, x, q : $c = -5x$,

$$b + 10 = q + 9x^2, a + 4c = -7x^3 - 3qx, 4b + 8 = 2x^4 + 3qx^2, 4a = -qx^3.$$

Первое, второе и пятое уравнения содержат готовые выражения параметров регулятора a, b и c через значения x и q . Подставляя их в два оставшихся, получим связи между x и q :

$$x(qx^2 - 28x^2 - 12q + 80) = 0, 2x^4 - 36x^2 - 4q + 32 = 0.$$

Считая, что $x \neq 0$, с помощью первого из двух последних равенств можно выразить q через x : $q = \frac{4(7x^2 - 20)}{x^2 - 12}$. После этого остаётся уравнение для неизвестного x : $x^6 + 12x^4 + 56x^2 - 32 = 0$.

Оно имеет два вещественных корня $x \approx \pm 0.716$. Взяв $x \approx -0.716$, получим $q \approx 5.714$, $a \approx 0.524$, $b \approx 0.328$, $c \approx 3.580$. Подставляя найденные параметры управления в характеристическое уравнение, можно проверить, что оно действительно имеет вещественный трёхкратный корень и комплексную пару на той же вертикали.

Итак, для данной корневой диаграммы получается единственное значение параметров управления, при которых корни лежат на одной вертикали в левой полуплоскости.

4.3. Вещественный корень на одной вертикали с кратной комплексной парой.

Рассмотрим полином с кратной комплексной парой $x \pm yi$ и действительным корнем x на одной вертикали: $g(s) = (s - x)(s^2 - 2xs + q)^2 = s^5 - 5xs^4 + (2q + 8x^2)s^3 - x(6q + 4x^2)s^2 + (4qx^2 + q^2)s - q^2$.

Приравняв коэффициенты этого и характеристического многочленов. Получим систему из пяти уравнений, линейную относительно параметров регулятора. Исключив их, получим: $a = -\frac{1}{4}xq^2$, $b = 8x^2 + 2q - 10$, $c = -5x$, $-32 + 32x^2 + 8q - 4qx^2 - q^2 = 0$, $x \cdot (q^2 + 80 - 24q - 16x^2) = 0$.

Для $x < 0$ и $q > 0$ два последних уравнений равносильны тому, что $x = -\frac{1}{4}\sqrt{q^2 - 24q + 80}$, $-512 + 240q - 28q^2 + q^3 = 0$.

Последнее уравнение имеет только один положительный корень $q \approx 3.1777$. Теперь из приведённых выше формул вычислим значения остальных неизвестных: $x \approx -0.9298$, $y \approx 1.520$, $a \approx 2.347$, $b \approx 3.271$, $c \approx 4.649$.

Поскольку здесь указывается минимальное из достигнутых значений целевой функции, рассмотрим многообразие α -равных корней особо (ниже в п.6).

5. Многообразие двукратной комплексной пары. Исследуем теперь вопрос: где достигается минимум целевой функции Гурвица для параметров регулятора, при которых среди корней характеристического многочлена есть двукратная комплексная пара?

Из пяти корней характеристического многочлена четыре образуют двукратную комплексную пару (обозначим эти корни $x \pm iy$). Остаётся один некрайний вещественный корень. Обозначим его через t .

Многочлен пятой степени, имеющий двукратную комплексную пару корней $x \pm iy$ и простой действительный корень t , имеет вид:

$(s - t)(s^2 - 2xs + q)^2 = s^5 + (-t - 4x)s^4 + (4tx + 2q + 4x^2)s^3 + (-t(2q + 4x^2) - 4qx)s^2 + (4tqx + q^2)s - tq^2$. Здесь по прежнему $q = x^2 + y^2$. Приравняем коэффициенты этого и характеристического многочленов. Получим систему из пяти уравнений для шести неизвестных a, b, c, t, x, q : $c + t + 4x = 0$, $b + 10 - 4tx - 2q - 4x^2 = 0$, $a + 4c + q(2t + 4x) + 4tx^2 = 0$, $4b + 8 - 4qtx - q^2 = 0$, $4a + tq^2 = 0$.

Эта система линейна по параметрам управления a, b и c . Первое из уравнений системы не зависит от q , второе и третье уравнение линейно по q , два последних уравнения второй степени по q . Отсюда видно, что неизвестные a, b, c, q можно исключить. В итоге получим:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{4t(-2t + t^2x + 4x^3 + x^3t^2)}{(4 + t^2)x}, \\ b &= -\frac{2(8tx^2 + 2t^3x^2 - 4t - 4x - t^2x + 8x^3 + 2x^3t^2)}{(4 + t^2)x}, \\ c &= -t - 4x, \\ q &= 4 \cdot \left(1 - \frac{t}{(4 + t^2)x}\right), \\ -t^2 - 16x^2 - 4t^2x^2 + 16x^4 + 8t^2x^4 + t^4x^4 &= 0. \end{aligned}$$

Помимо равенств, выражающих неизвестные, осталось последнее уравнение, связывающее переменные t и x . Его можно переписать в виде $(x^2(t^2 + 4) - 2)^2 = t^2 + 4$, или $x^2(t^2 + 4) = 2 \pm \sqrt{t^2 + 4}$. Левая часть последнего равенства неотрицательная. Значит, $x^2(t^2 + 4) = 2 + \sqrt{t^2 + 4}$. Полагая, что главный интерес представляют устойчивые решения, т.е. $x < 0$, получим

$$x = -\sqrt{\frac{2}{t^2 + 4} + \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4}}}.$$

Итак, достигнута параметризация всех неизвестных переменной t

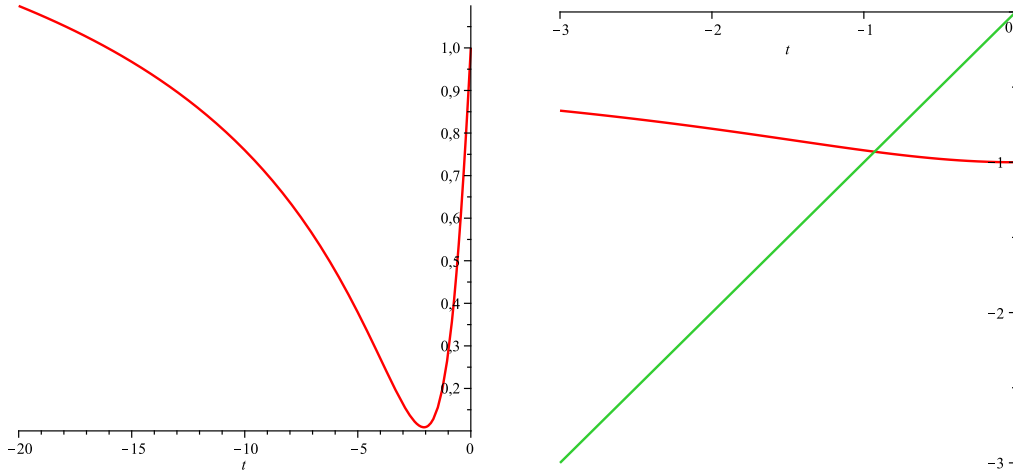


Рис. 4: Слева функция $q - x^2 - 2$ на интервале $-20 < x < 0$, справа — вещественная часть кратной комплексной пары в зависимости от вещественного корня x

— простым корнем характеристического многочлена. Основной интерес представляют её отрицательные значения.

Нарисуем график функции $q - x^2 - 2$ (рис. 4 слева) и его помощью убедимся, что для отрицательных t выполнено неравенство $q - x^2 > 0$, обеспечивающее смысл переменной $q = x^2 + y^2$, и даже выполнено неравенство $q - x^2 > 2$.

Изобразим теперь график функции $x = -\sqrt{\frac{2}{t^2+4} + \frac{1}{\sqrt{t^2+4}}}$ и прямую $x = t$ (рис. 4 справа). Из формулы $x = x(t)$ видно, что при $t < 0$ функция $x(t)$ монотонно убывает до значения $x(0) = -1$. Таким образом, есть единственная точка, где действительная часть комплексной пары совпадает с действительным корнем: $t = x$. Значит, минимум гурвицевой функции $H(a, b, c) = \max(t, x)$ достигается в точке пересечения графиков, а это и означает, что все корни многочлена находятся на одной вертикали. Численное решение уравнения $x(t) = t$ приводит к значению $x = t \approx -0.9298$.

Используя найденное значение параметра t , найдём значения остальных переменных: параметры регулятора $a \approx 2.347$, $b \approx 3.271$, $c \approx 4.649$; мнимая часть кратной пары корней $y \approx 1.520$.

Замечание. Поскольку $|y| = \sqrt{q - x^2} > \sqrt{2}$, “коническая” функция $G(p)$ оказывается в данном случае неэффективной:

$G(a, b, c) = \max_{k=1,\dots,5}(\operatorname{Re} z_k + |\operatorname{Im} z_k|) > 0.4$, что не позволяет разделять

области устойчивости и неустойчивости.

Таким образом, точку, реализующую правую корневую диаграмму рис. 3, можно найти непосредственно, как в п.4.3. Однако рассмотрение этого пункта позволило указать в пространстве параметров управления $\{(a, b, c)\}$ параметризацию многообразия, на котором характеристический многочлен имеет кратную комплексную пару — т.е. получить конкретную алгебраическую кривую — и гарантировать, что найденная точка доставляет минимум гурвицевой функции на этой кривой.

6. Все корни на одной вертикали при отсутствии кратных.

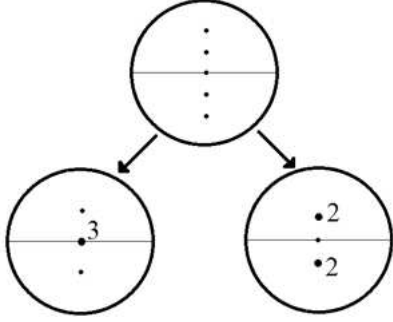


Рис. 5: Корневые диаграммы одномерного критического многообразия и его нульмерных концов.

Обе нульмерные корневые диаграммы, реализуемость которых установлена в п.4, являются частными случаями расположения пяти корней на одной вертикали (рис. 5), которое задаётся двумя равенствами:

$$x_1 = \operatorname{Re}(z_{2,3}) = \operatorname{Re}(z_{4,5}),$$

и, тем самым, связывает две степени свободы, задавая одномерное многообразие, заведомо непустое.

Пусть $x < 0$ — действительная часть всех корней; $y_1 = |\operatorname{Im} z_{2,3}|$, $y_2 = |\operatorname{Im} z_{4,5}|$;

$$q_k = x^2 + y_k^2; p = q_1 + q_2, q = q_1 q_2.$$

$$\begin{aligned} \text{Полином с корнями } x, z_{2,3}, z_{4,5} \text{ имеет вид: } p(s) &= \\ &= (s - x)(s^2 - 2xs + x^2 + y_1^2)(s^2 - 2xs + x^2 + y_2^2) = \\ &= (s - x)(s^2 - 2xs + q_1)(s^2 - 2xs + q_2) = \\ &= (s - x)[(s^2 - 2xs)^2 + p \cdot (s^2 - 2xs) + q] = \\ &= s^5 - 5xs^4 + (p + 8x^2)s^3 - x \cdot (3p + 4x^2)s^2 + (q + 2px^2)s - qx. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты этого и характеристического полиномов, получим систему из пяти уравнений относительно шести переменных a, b, c, x, p, q , нелинейную только по x . Исключим из неё неизвестные a, b, c : $a = -\frac{1}{4}xq$, $b = 8x^2 + p - 10$, $c = -5x$. После этого остаётся два соотношения, связывающие переменные x, p, q :

$$-32 + 32x^2 + 4p - 2px^2 - q = 0, \quad x \cdot (q + 80 - 12p - 16x^2) = 0.$$

Сократив на x , получим:

$$p = \frac{8(3 + x^2)}{4 + x^2}, \quad q = \frac{16(-2 + 5x^2 + x^4)}{4 + x^2}.$$

Итак, все переменные параметризованы действительным корнем x .

Выпишем теперь ограничения на параметры x , q_1 , q_2 . Прежде всего, q_1 , q_2 являются различными действительными корнями квадратного уравнения $t^2 - pt + q = 0$. Значит, его дискриминант должен быть больше нуля: $p^2 - 4q > 0$.

Кроме того, $q_1 > x^2$, $q_2 > x^2$. Это равносильно неравенствам

$$(q_1 - x^2) + (q_2 - x^2) > 0, (q_1 - x^2)(q_2 - x^2) > 0,$$

что, в свою очередь, можно переписать в виде $p - 2x^2 > 0$, $q - px^2 + x^4 > 0$.

Итак, переменные x , p , q удовлетворяют неравенствам $p^2 - 4q > 0$, $p - 2x^2 > 0$, $q - px^2 + x^4 > 0$. Первое из этих неравенств гарантирует существование различных вещественных чисел q_1 , q_2 таких, что $q_1 + q_2 = p$, $q_1 q_2 = q$. Неравенства $p - 2x^2 > 0$, $q - px^2 + x^4 > 0$ гарантируют, что $q_1 > x^2$, $q_2 > x^2$, что обеспечивает существование двух комплексных пар на вертикали x .

Посмотрим теперь, когда выполняются эти три неравенства, обеспечивающие существование вещественного корня и двух комплексных пар на вертикали x .

Подставляя в неравенство $p^2 - 4q > 0$ выражения p и q через x , получим:

$$\frac{64(3 + x^2)^2}{(4 + x^2)^2} - \frac{64(-2 + 5x^2 + x^4)}{4 + x^2} > 0.$$

Знаменатель левой части последнего неравенства положителен. Избавимся от знаменателя и получим: $1088 - 768x^2 - 512x^4 - 64x^6 > 0$. Полином в левой части последнего неравенства имеет только два вещественных корня $x \approx \pm 0.9298$. Значит, ось x разбивается на три интервала, в каждом из которых полином не меняет знак. Ясно, что только в интервале между этими своими вещественными корнями этот полином положителен.

Итак, для $x < 0$ неравенство $p^2 - 4q > 0$ равносильно тому, что $x_1 < x < 0$, где $x_1 \approx -0.9298$ — единственный отрицательный нуль функции $p^2 - 4q$.

Заметим, что значение $x_1 \approx -0.9298$ соответствует правой корневой диаграмме рис. 5. Действительно, при $p^2 - 4q = 0$ получаем $q_1 = q_2$, то есть получаем кратную комплексную пару.

Посмотрим теперь, когда $x < 0$, $p - 2x^2 > 0$. Так как $p - 2x^2 = 2\frac{12 - x^4}{4 + x^2}$, то при $x < 0$ неравенство $p - 2x^2 > 0$ равносильно тому, что $12 - x^4 > 0$, то есть $-1.8612 \approx -\sqrt[4]{12} < x < 0$. Значит, неравенства $x < 0$, $p^2 - 4q > 0$, $p - 2x^2 > 0$ совместно равносильны тому, что $-0.9298 \approx x_1 < x < 0$.

Наконец, посмотрим, когда выполняется неравенство $q - px^2 + x^4 > 0$

при $x < 0$. Вычислим $q - px^2 + x^4$ как функцию от x . Получим

$$q - px^2 + x^4 = \frac{-32 + 56x^2 + 12x^4 + x^6}{4 + x^2}.$$

Полином $-32 + 56x^2 + 12x^4 + x^6$ имеет единственный отрицательный корень $x_2 \approx -0.716$, причём он при $x = -1$ положителен и при $x = 0$ отрицателен. Значит, неравенство $q - px^2 + x^4 > 0$ при $x < 0$ равносильно тому, что $x < x_2 \approx -0.716$.

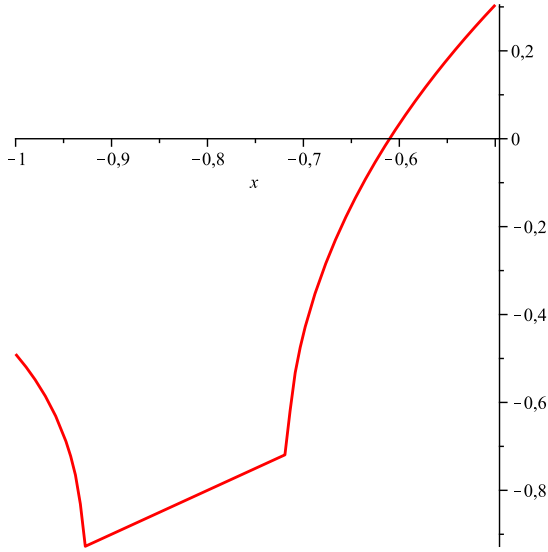


Рис. 6: График целевой функции Гурвица на интервале $-1 < x < -0.5$ при параметризации одномерного многообразия вертикальной пятёрки корней вертикалью x

Так как $q - px^2 + x^4 = (q_1 - x^2)(q_2 - x^2) = y_1^2 y_2^2$, то равенство $q - px^2 + x^4 = 0$ равносильно тому, что $y_1 y_2 = 0$. Т.е. при

$$x = x_1 \approx -0.716$$

комплексная пара характеристических корней сливается с действительным корнем, образуя трёхкратную пару и реализуя левую корневую диаграмму рис. 5 точку, указанную в п.4.2.

Резюмируя сказанное, можно утверждать, что отрезок

$$(x_1, x_2) \approx (-0.9298, -0.7160)$$

переменной x , имеющей смысл действительного характеристического корня, переходит в аналитическую кривую $\{(a(x), b(x), c(x))\}$ в пространстве параметров регулятора

$$a = -\frac{1}{4}xq = -\frac{4x(-2 + 5x^2 + x^4)}{4 + x^2},$$

$$b = 8x^2 + p - 10 = 8x^2 - 10 + \frac{8(3 + x^2)}{4 + x^2}, \quad c = -5x,$$

все точки которой реализуют верхнюю корневую диаграмму рис. 5, а концевые точки — левую (при $x \approx -0.7160$) и правую (при $x \approx -0.9298$) диаграммы рис. 5. В силу этого очевидно, что точка из пункта 4.2 не

является точкой минимума целевой функции Гурвица: вдоль указанной кривой происходит снижение значения равных между собой действительных частей корневого набора вплоть до точки из пункта 4.3. Это наглядно подтверждается графиком целевой функции Гурвица на указанной кривой (рис.6).

7. Минимум целевой функции Гурвица в многообразии двукратных вещественных корней.

Остаётся рассмотреть возможность, предложенную в конце п.2. Условие кратности действительных корней связывает одну степень свободы и задаёт поверхность в пространстве параметров регулятора. Попробуем минимизировать целевую функцию на этом двумерном многообразии, допуская как несуществование градиента, так и обращение его в нуль. Наличие двукратного действительного корня x характеристического многочлена равносильно тому, что характеристический многочлен и его производная в точке x обращаются в нуль, то есть равносильно равенствам

$$\begin{aligned} x^5 + cx^4 + (b + 10)x^3 + (a + 4c)x^2 + (8 + 4b)x + 4a &= 0 \\ 5x^4 + 4cx^3 + 3(b + 10)x^2 + 2(a + 4c)x + 8 + 4b &= 0. \end{aligned}$$

Выразив переменные a, b , получим:

$$\begin{aligned} a &= \frac{x^2(2x^5 + cx^4 + 16x^3 + 8cx^2 + 64x + 16c)}{(x^2 + 4)^2} \\ b &= -\frac{3x^6 + 2cx^5 + 30x^4 + 16cx^3 + 112x^2 + 32cx + 32}{(x^2 + 4)^2}. \end{aligned}$$

Теперь многообразие двукратных вещественных корней параметризовано независимыми переменными x, c . Подставив в характеристический многочлен эти выражения параметров a и b , получим многочлен с параметрами x, c : $P_{c,x}(s) = (x^2 + 4)^{-2}(s - x)^2[(x^2 + 4)^2 s^3 + (2x^5 + cx^4 + 16x^3 + 8cx^2 + 32x + 16c)s^2 + (4x^4 + 16x^2 + 128)s + 8x^5 + 4cx^4 + 64x^3 + 32cx^2 + 256x + 64c]$.

Обозначим множитель в квадратных скобках через $q(s)$:

$$q(s) = (x^2 + 4)^2 s^3 + (2x^5 + cx^4 + 16x^3 + 8cx^2 + 32x + 16c)s^2 + (4x^4 + 16x^2 + 128)s + 8x^5 + 4cx^4 + 64x^3 + 32cx^2 + 256x + 64c.$$

7.1. Предположим, что многочлен $q(s)$ имеет двукратный корень y . Так как это многочлен степени 3, то корень y — действительный. Подставив в многочлен $q(s)$ и его производную вместо s корень y , получим: $(x^2 + 4)^2 y^3 + (2x^5 + cx^4 + 16x^3 + 8cx^2 + 32x + 16c)y^2 + (4x^4 + 16x^2 + 128)y + 8x^5 + 4cx^4 + 64x^3 + 32cx^2 + 256x + 64c = 0$,

$$3(x^2 + 4)^2 y^2 + 2(2x^5 + cx^4 + 16x^3 + 8cx^2 + 32x + 16c)y + (4x^4 + 16x^2 + 128) = 0.$$

После исключения параметра c получаем уравнение: $16x^4 + 8y^2 x^4 + y^4 x^4 + 8y^4 x^2 + 80y^2 x^2 + 64x^2 - 256yx + 64y^2 + 16y^4 + 512 = 0$.

Выделив полные квадраты, легко убедиться, что левая часть строго положительна: $16(x^2 - 2)^2 + 16(y^2 - 2)^2 + 128(x - y)^2 + 8y^2x^4 + y^4x^4 + 8y^4x^2 + 80y^2x^2 + 384 > 0$. Значит, двукратных корней многочлен $q(s)$ не имеет, и его корни всегда либо все вещественные, либо это комплексная пара и вещественный корень.

При $x = c = 0$ получим $q(s) = 16s^3 + 128s$. Следовательно, при любых параметрах x, c корни многочлена $q(s)$ — это комплексная пара и вещественный корень.

7.2. Обозначим этот вещественный корень через z . Подставим в полином $q(s)$ вместо переменной s его корень z . Получим уравнение

$(x^2 + 4)^2 z^3 + (c(x^2 + 4)^2 + 2x^5 + 16x^3 + 32x)z^2 + (4x^4 + 16x^2 + 128)z + (4x^4 + 32x^2 + 64)c + 8x^5 + 64x^3 + 256x = 0$, линейное относительно параметра c . Выражая его, получим

$$c = -(z + 2x) + 16 \frac{zx^2 - 4(z + 2x)}{(z^2 + 4)(x^2 + 4)^2}.$$

Благодаря последнему равенству получена параметризация тройки a, b, c двумя независимыми переменными x, z (двукратным и однократным корнями характеристического многочлена).

Как показано в п.7.1, корни многочлена $q(s)$ — это комплексная пара и вещественный корень z . То есть корни характеристического многочлена $P(s) = s^5 + cs^4 + \dots$ — это комплексная пара, простой вещественный корень z и двукратный вещественный корень x . Обозначим через r вещественную часть комплексной пары. Коэффициент приведённого многочлена $P(s)$ при четвёртой степени $c = -(z + 2x + 2r)$. Теперь из последнего равенства и полученной ранее параметризации параметра c переменными x, z получим заведомо гладкую функцию

$$r = -8 \frac{zx^2 - 4(z + 2x)}{(z^2 + 4)(x^2 + 4)^2}.$$

График функции $r(x, z)$ в квадрате $-6 < x, z < 0$ изображен на рис. 7.

7.3. Из графика видно, что в этом квадрате функция $r(x, z)$ имеет минимум, и этот минимум достигается не на границе квадрата. Понятно, что этот минимум гладкий.

Найдём теперь экстремумы функции $r(x, z)$. Для этого вычислим частные производные функции $\frac{1}{8}r(x, z)$ и приравняем их к нулю:

$$-\frac{2zx - 8}{(z^2 + 4)(x^2 + 4)^2} + \frac{4(zx^2 - 4(z + 2x))x}{(z^2 + 4)(x^2 + 4)^3} = 0,$$

$$-\frac{x^2 - 4}{(z^2 + 4)(x^2 + 4)^2} + \frac{2(zx^2 - 4(z + 2x))z}{(z^2 + 4)^2(x^2 + 4)^2} = 0.$$

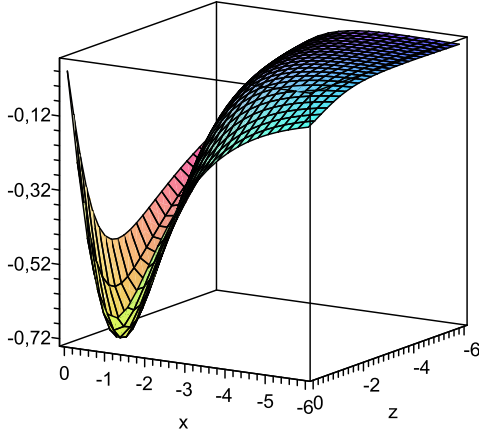


Рис. 7: График действительной части комплексных характеристических корней как функции действительных корней: двукратного x и простого z

$4x - 4$ — это $2 \cdot (-1 \pm \sqrt{2})$, или численно: $x \approx -4.8284, 0.8284$. Корни полинома $x^2 - 4x - 4$ — это $2 \cdot (1 \pm \sqrt{2})$, или численно: $x \approx 4.8284, -0.8284$. Отрицательные корни: $2 \cdot (-1 - \sqrt{2})$, $2 \cdot (1 - \sqrt{2})$, или численно: $x \approx -4.8284, -0.8284$.

Для $x = -4.8284$ получим $z \approx -4.8284$, то есть $z \approx x$. Для $x = z = -4.8284$ получим $r(x, z) \approx 0.0214 > 0$, что не обеспечивает устойчивость системы: комплексная пара находится в правой полуплоскости. Из графика 7 видно, что это точка максимума функции r .

Для $x = -0.8284$ получим $z \approx -0.8284$, то есть $z \approx x$. Для $x = z = -0.8284$ получим $r(x, z) \approx -0.7285 < 0$, что обеспечивает устойчивость системы. Из графика 7 видно, что это точка минимума функции r .

Итак, экстремумы функции $r(x, z)$ достигаются при $x = z$. Приведем теперь график функции $r(x, z)$ при $x = z$ (рис. 8). Это график положения вертикали комплексной пары корней характеристического многочлена в многообразии трёхкратных корней в зависимости от трёхкратного корня x .

Таким образом, $z = x \approx -0.8284$ — трёхкратный корень характеристического многочлена, обеспечивающий минимум $r \approx -0.7285 < 0$

Избавимся от знаменателей:

$$(x^3 - 12x)z - 12x^2 + 16 = 0,$$

$$(x^2 - 4)z^2 - 16zx - 4x^2 + 16 = 0.$$

Выразим z из первого уравнения: $z = \frac{4(3x^2 - 4)}{x(x^2 - 12)}$. Подставив теперь полученное выражение для z во второе уравнение, получим:

$$x^8 - 16x^6 - 160x^4 - 256x^2 + 256 = 0.$$

Найдём разложение полинома из левой части последнего равенства над полем вещественных чисел:

$$x^8 - 16x^6 - 160x^4 - 256x^2 + 256 = (x^2 + 4x - 4)(x^2 - 4x - 4)(x^2 + 4)^2.$$

Нас интересуют только вещественные корни этого полинома. Найдём их. Корни полинома $x^2 +$

целевой функции в многообразии двукратных вещественных корней.

Вычислим для него параметры управления:

$$a \approx 0.740, \quad b \approx 0.887, \quad c \approx 3.942.$$

Для этих параметров управления вычислим характеристический многочлен: $P(s) \approx s^5 + 3.942s^4 + 10.887s^3 + 16.509s^2 + 11.549s + 2.960$. Для этого многочлена вычислим корни: $-0.828 \pm 0.0009i, -0.827, -0.728 \pm 2.162i$. В итоге максимум вещественных частей этих корней — это $r \approx -0.728 < 0$.

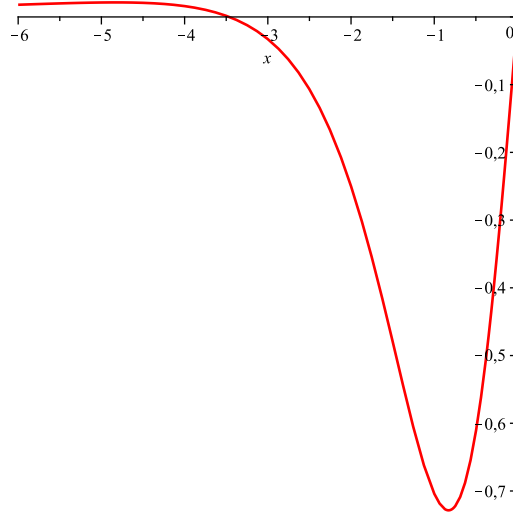


Рис. 8: Функция $r(x, z)$ при $x = z$

Таким образом, в области устойчивости минимум целевой функции на многообразии двукратных вещественных корней, как и минимум на многообразии трёхкратных вещественных корней, оказывается U -образным и определяется тем, что в этой точке градиент равен нулю.

8. Заключение. Итак, задача стабилизации трёхмассовой системы двухканальным ПИД-регулятором решена как задача минимизации функции гурвицевой устойчивости $H(p) = \max_{k=1, \dots, n} \operatorname{Re} z_k$, обеспечивающей самое левое расположение полюсов регулятора, возможное при выбранной структуре регулятора.

Конструкция корневых симплексов указывает критические корневые диаграммы (рис. 1, 3), т.е. такие расположения полюсов на комплексной плоскости, при которых не существует частных производных целевой функции. В таком нульмерном многообразии (одной или нескольких точках) может достигаться экстремум целевой функции.

Все такие возможности были исследованы, и для одной из них (правой на рис. 3 и 5) достигается наименьшее из обнаруженных целевых значений. Ещё одна возможность (левая на рис. 3, с четырёхкратным действительным корнем справа) оказалась неосуществимой.

Выяснилось, что третья из этих точек (центральная на рис. 3) не является точкой локального минимума.

Таким образом, представленный здесь подход реализует более эффективную и гибкую схему поиска экстремумов, чем градиентные методы, использовавшиеся во множестве работ, в т.ч. [14,15,16].

Особо следует отметить, что достижение экстремума в точке максимальной кратности, отмеченное в работе [14] как “интересный феномен” (там это был пятикратный полюс) здесь невозможно, поскольку четырёхкратных корней заданная структура регулятора вообще не допускает. Ближайшая из осуществимых возможностей — трёхкратные корни — реализуется как алгебраическая кривая в пространстве параметров. Однако минимум на ней достигается в критической точке другого типа: там, где на многообразии градиент обращается в нуль, а не там, где он не существует.

Две эти точки (несуществования и обращения в нуль градиента) расположены по соседству: разности координат в пространстве параметров порядка 0.1, а значений целевой функции — порядка 0.01. Тем не менее, различие этих точек устанавливается с большим запасом точности, а локальный экстремум даёт пример U -образного минимума целевой функции.

Далее, идея корневых координат, побудившая развитие конструкции корневого симплекса [9-11], оказалась здесь достаточно эффективной: сами значения корней (их действительная и мнимая части) позволили рационально параметризовать многообразия с заданным корневым портретом.

Естественно, такая эффективность обусловлена тем, что в качестве целевой функции взята самая простая. Реализация других конструкций целевой функции позволяет предположить дополнительные трудности, не носящие, однако, принципиального характера.

То же самое можно сказать и о числовых особенностях выбранного примера. Почти нигде авторы не пользовались тем, что характеристики объекта заданы именно такими. Для любых других параметров системы ситуацию можно анализировать и просчитывать аналогично. Например, неравенство в п.7.1, доказанное выделением полных квадратов, легко устанавливается численно; вместо аналитического вычисления корней п.7.3 можно ограничиться их приближённым расчётом; численные сведения п.6 можно легко извлечь из графиков, и т.д.

Сравнение значений целевой функции в п.4.3 и п.7 нельзя считать доказательством того, что в п.4.3 найден глобальный минимум функции $H(p)$. Строго говоря, для этого требуется полное исследование на экстремум всех сегментов корневого симплекса — ведь, как показывает пример п.7, экстремум может достигаться и в том случае, если справа находится всего одна пара (или один действительный корень).

Однако нахождение точек с критическими корневыми портретами и в этом случае даёт надёжный ориентир. Пункт 7 иллюстрирует и метод,

с помощью которого можно искать экстремумы на “дне” оврагов с Y -образным поперечным сечением”, поскольку само это “дно” гладкое, и градиент на параметризованном многообразии существует.

Дальнейшее развитие предложенного метода, разработка вычислительного аппарата и обобщение использованных выше приёмов оставляют широкое поле проблем.

Авторы считают приятным долгом поблагодарить проф. А.А. Воеводу за ценные обсуждения рассмотренной в статье системы и общее научное руководство.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Постников М.М. Устойчивые многочлены // М.: Наука.- 1981 г.
- [2] Chen C.-T. Linear system theory and design.- NY: Holt, Rinehart and Winstone.- 1984.
- [3] Datta A., Ho M.-T., Bhattacharyya S.R. Structure and Synthesis of PID Controllers/ N.Y.: Springer.- 2000.
- [4] Saeki M., Aimoto K. PID controller optimization for H-control by linear programming / International Journal of Robust and Nonlinear Control.- 2000.- No.10.- Pp.83-99.
- [5] Bajcinca N. Design of robust PID controllers using decoupling at singular frequencies // Automatica.- 2006.- V.42.- Pp.1943-1949.
- [6] Soylemes M.T., Munro N., Baki H. Fast calculation of stabilizing PID controllers // Automatica.- 2003.- V.39.- Pp.121-126.
- [7] Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к их решению/ Автоматика и телемеханика.- 2005.- № 5.- С. 7-46.
- [8] Chekhonadskikh A.V., Voevoda A.A. Overcoming nondifferentiability in optimization synthesis of automatic control systems// Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing.- 2010.- V. 46, No 5.- Pp. 408-413.
- [9] Воевода А.А., Чехонадских А.В. Координатизация системы корней вещественных многочленов степени 5 / Науч. вестн. НГТУ.- 2006.- №1(22).- С.176-179.
- [10] Воевода А.А., Чехонадских А.В. Корневые симплексы многочленов с действительными коэффициентами / Доклады АН ВШ РФ.- 2007.- № 1 (8).- С.69-81.
- [11] Чехонадских А.В. Корневые симплексы и симплектические графы действительных многочленов / Науч. вестн. НГТУ. - 2009. - №1(34).- С.143-163.

[12] Воевода А.А., Шоба Е.В. Стабилизация трёхмассовой системы: модальный метод синтеза в пространстве состояний с наблюдателем пониженного порядка / Сб. науч. тр. НГТУ - 2005.- Вып.4(62).- С.13-24.

[13] Воевода А.А., Чехонадских А.В., Шоба Е.В. Модальный метод синтеза с использованием полиномиального разложения: разделение движений для стабилизации трёхмассовой системы // Науч. вестник НГТУ.- 2011.- № 2(43).- С.39-46.

[14] Burke J.V., Henrion D., Lewis A.S., Overton M.L. Stabilization via Nonsmooth, Nonconvex Optimization // Automatic Control, IEEE Transactions. - V.51, №11,- Nov.2006.- Pp.1760 - 1769.

[15] Воевода А.А., Чехонадских А.В. Оптимизация расположения полюсов системы автоматического управления с регулятором пониженного порядка /Автометрия.- 2009.- Т.45.- № 5.- С.113-123.

[16] Chekhonadskikh A.V., Voevoda A.A. Control system stabilization via root simplex graph illustrated by example of double inverted pendulum // Proceedings RFBR and DST sponsored The 2nd Russian-Indian Joint Workshop on Computational Intelligence and Modern Heuristics in Automation and Robotics.- 10-13 Sept., 2011/Novosibirsk, NSTU.- 2011.- Pp. 31-37.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НАД НЕКОТОРЫМИ ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ АЛГЕБРАМИ

М. В. Котов

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
644099, Россия, ул. Певцова, д. 13
e-mail: matvej.kotov@gmail.com

1 Введение

В универсальной алгебраической геометрии изучаются алгебраические множества — множества решений систем уравнений над алгебрами. В случае, если алгебра является топологической алгеброй, то некоторую информацию об алгебраических множествах можно получить из свойств заданного топологического пространства.

Например, в классической алгебраической геометрии изучаются множества нулей многочленов над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Хорошо известно, что в этом случае все множества решений уравнений будут замкнутыми в евклидовой топологии множествами. Несложно показать, что аналогичное утверждение имеет место в случае произвольной топологической алгебры $\mathcal{A} = \langle A, \mathfrak{T}, L \rangle$ с хаусдорфовой топологией $\mathfrak{T}$ (см. теорему 3).

Для некоторых топологических алгебр $\mathcal{A} = \langle A, \mathfrak{T}, L \rangle$ верно и обратное включение, то есть любое замкнутое в топологии $\mathfrak{T}^n$ множество $X \subseteq A^n$ является алгебраическим над $\mathcal{A}$ множеством. Заметим, что в этом случае мы получаем описание алгебраических множеств, а в этом и состоит одна из основных задач универсальной алгебраической геометрии.

Описание таких алгебр даётся теоремой 5. Несмотря на то, что эта теорема формулируется достаточно сложно, эта теорема удобна в техническом плане, и в разделе 4 показано, как с помощью этой теоремы можно получить описание алгебраических множеств над алгебрами $\langle \mathbb{N}, +, \min, \max, 0, 1 \rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, | \cdot |, -1, 0, 1 \rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, \max, -1, 0, 1 \rangle$ и некоторыми другими.

Основным результатом данной работы является теорема 5.

2 Необходимые понятия универсальной алгебраической геометрии

В этом разделе напомним некоторые определения из теории моделей и универсальной алгебраической геометрии, следуя [2] и [1].

Функциональный язык L полностью определяется заданием

1. множества функциональных символов F и положительных целых чисел n_f для каждого $f \in F$;
2. множества константных символов C .

Далее для краткости слово „функциональный“ будет опускаться.

Пусть $\mathbf{x}$ — конечный набор переменных, L — некоторый язык. Множество *термов* языка L от переменных $\mathbf{x}$ — это наименьшее множество T такое, что

1. $c \in T$ для каждого константного символа $c \in C$;
2. $x \in T$ для каждой переменной x из $\mathbf{x}$;
3. если $t_1, t_2, \dots, t_{n_f} \in T$ и $f \in F$, то $f(t_1, t_2, \dots, t_{n_f}) \in T$.

Формула вида $t_1 = t_2$, где t_1 и t_2 — термы, называется *уравнением* от переменных $\mathbf{x}$ языка L . Любое множество уравнений называется *системой уравнений* от переменных $\mathbf{x}$ языка L .

Алгебра $\mathcal{A}$ языка L полностью определяется заданием

1. непустого множества A , называемого *носителем* алгебры $\mathcal{A}$;
2. функции $f^{\mathcal{A}}: A^{n_f} \rightarrow A$ для каждого $f \in F$;
3. константы $c^{\mathcal{A}} \in A$ для каждого $c \in C$.

Функция $f^{\mathcal{A}}$ и константа $c^{\mathcal{A}}$ называются *интерпретациями* символов f и c соответственно. Далее алгебру $\mathcal{A}$ будем записывать в виде $\langle A, L \rangle$.

По любому терму можно построить функцию, а именно, пусть t — терм от n переменных $\mathbf{x}$. Индуктивно определим $t^{\mathcal{A}}(\mathbf{a})$, $\mathbf{a} \in A^n$, следующим образом:

1. если t — константный символ c , то $t^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) = c^{\mathcal{A}}$;

2. если t — переменная x_i , то $t^A(\mathbf{a}) = a_i$;
3. если t — терм $f(t_1, \dots, t_{n_f})$, где f — функциональный символ и $t_1, \dots, t_{n_f}$ — термы, то $t^A(\mathbf{a}) = f^A(t_1^A(\mathbf{a}), \dots, t_{n_f}^A(\mathbf{a}))$.

Теперь вернёмся к системам уравнений. Точка $\mathbf{a} \in A^n$ называется *решением* уравнения $t_1(\mathbf{x}) = t_2(\mathbf{x})$ над $\mathcal{A}$, если $t_1^A(\mathbf{a}) = t_2^A(\mathbf{a})$. Мы говорим, что точка $\mathbf{a} \in A^n$ является *решением* системы уравнений $S(\mathbf{x})$ над $\mathcal{A}$, если $\mathbf{a}$ является решением каждого из уравнений системы S .

Множество всех решений системы $S(\mathbf{x})$ называется *алгебраическим множеством над $\mathcal{A}$* , соответствующим системе S , и обозначается $V_{\mathcal{A}}(S)$. Совокупность всех алгебраических над $\mathcal{A}$ множеств $Y \subseteq A^n$ обозначим $\mathfrak{A}_{\mathcal{A},n}$.

Приведём несколько примеров алгебраических множеств. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, L \rangle$ — произвольная алгебра.

1. Множество A^n (называемое аффинным n -мерным пространством) является алгебраическим, так как является множеством решений, например, уравнения $x_1 = x_1$.
2. Если существуют два константных символа $c_1, c_2 \in L$ таких, что $c_1^A \neq c_2^A$, то пустое множество является алгебраическим, так как $\emptyset = V_{\mathcal{A}}(c_1 = c_2)$.
3. Пусть $C = \{c^A, c \in L\}$ — множество элементов, которыми проинтерпретированы константные символы языка L . Тогда любое одноточечное множество $\{(a_1, \dots, a_n)\}$, $a_i \in C$, является алгебраическим, так как $V_{\mathcal{A}}(x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n) = \{(a_1, \dots, a_n)\}$.
4. Пусть $\{Y_i, i \in I\}$ — произвольное семейство алгебраических множеств, тогда пересечение $\bigcap_{i \in I} Y_i$ также является алгебраическим множеством. В самом деле, пусть $Y_i = V_{\mathcal{A}}(S_i)$, $i \in I$, тогда $\bigcap_{i \in I} Y_i = V_{\mathcal{A}}(\bigcup_{i \in I} S_i)$.
5. Пусть Y_1 и Y_2 — алгебраические множества, тогда их произведение $Y_1 \times Y_2$ — алгебраическое множество. Пусть $Y_1 = V_{\mathcal{A}}(S_1(x_1, \dots, x_m))$, $Y_2 = V_{\mathcal{A}}(S_2(x_{m+1}, \dots, x_n))$, тогда $Y_1 \times Y_2 = V_{\mathcal{A}}(S_1 \cup S_2)$.

Пример 1. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}_{\text{mdpm}} = \langle \mathbb{R}, \max, \cdot, +, -, 0, 1 \rangle$, которая рассматривалась в работе [5]. Класс алгебраических множеств над этой алгеброй достаточно большой. Например, единичный круг является алгебраическим множеством, так как является множеством решений уравнения $\max(x^2 + y^2 - 1, 0) = 0$.

Рассмотрим следующую систему уравнений от переменной x . Пусть $f_1(x) = x(x-1)$ и первое уравнение s_1 имеет вид $\max(f_1(x), 0) = 0$. Множество решений этого уравнения есть отрезок $[0, 1]$. Все последующие уравнения будут также иметь вид $\max(f_i(x), 0) = 0$, а многочлены $f_i(x)$ строятся следующим образом. Множество решений уравнения s_{i-1} над $\mathcal{A}_{\text{mdpm}}$ есть объединение отрезков $\bigcup_{1 \leq k \leq 2^{i-1}} [a_k, b_k]$. Положим

$$f_i(x) = \prod_{1 \leq k \leq 2^{i-1}} (x - a_k) \left(x - \frac{2a_k + b_k}{3} \right) \left(x - \frac{a_k + 2b_k}{3} \right) (x - b_k).$$

Несложно заметить, что множество решений полученной системы уравнений $\{s_1, s_2, \dots\}$ над $\mathcal{A}_{\text{mdpm}}$ является множеством Кантора [4, стр. 31].

Видно, что над алгебраической системой $\mathcal{A}_{\text{mdpm}}$ являются алгебраическими множества очень сложной структуры. Тем не менее легко получить описание всех алгебраических множеств. Оказывается совокупность алгебраических множеств совпадает с совокупностью замкнутых в евклидовой топологии множеств. Это будет следовать из теоремы 5.

Пример 2. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}_{\text{nmmp}} = \langle \mathbb{N}, +, \min, \max, 0, 1 \rangle$, которая также изучалась в работе [5]. Пусть $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$. Рассмотрим уравнение $s_{(k_1, \dots, k_n)}(x_1, \dots, x_n)$ вида

$$\max \left(\sum_{i=1}^n \max(x_i, k_i), 1 + \sum_{i=1}^n \min(x_i, k_i) \right) = \sum_{i=1}^n \max(x_i, k_i).$$

Множеством решений этого уравнения над алгеброй $\mathcal{A}_{\text{nmmp}}$ является множество $\mathbb{N}^n \setminus \{(k_1, \dots, k_n)\}$. Отсюда сразу же следует, что любое множество $X \subseteq \mathbb{N}^n$ является алгебраическим над $\mathcal{A}_{\text{nmmp}}$, так как множество решений системы $\{s_{(k_1, \dots, k_n)}(x_1, \dots, x_n)\}_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n \setminus X}$ совпадает с X .

3 Топологические алгебры

Пусть $\mathcal{A} = \langle A, L \rangle$ — произвольная алгебра. Предположим также, что на множестве A задана топология $\mathfrak{T}$. Тогда если все функциональные символы языка L проинтерпретированы непрерывными в топологии $\mathfrak{T}$ функциями, то алгебра $\mathcal{A}$ называется *топологической алгеброй* [3] и обозначается $\langle A, \mathfrak{T}, L \rangle$.

Если некоторая топология $\mathfrak{T}$ превращает алгебру $\mathcal{A}$ в топологическую алгебру, то будем говорить, что $\mathfrak{T}$ является топологией на $\mathcal{A}$.

Если топология является хаусдорфовой, то имеют место следующие две леммы [4, стр. 192–193].

Лемма 1. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \mathfrak{T}, L \rangle$ — произвольная топологическая алгебра. Пространство $\langle A, \mathfrak{T} \rangle$ хаусдорфово тогда и только тогда, когда множество решений уравнения $x = y$ замкнуто в топологическом пространстве $\langle A^2, \mathfrak{T}^2 \rangle$.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \mathfrak{T}, L \rangle$ — топологическая алгебра, топология $\mathfrak{T}$ является хаусдорфовой, и $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ — произвольное уравнение языка L от n переменных $\mathbf{x}$. Тогда множество $V_{\mathcal{A}}(f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}))$ замкнуто в топологическом пространстве $\langle A^n, \mathfrak{T}^n \rangle$.

Так как $V(S) = \bigcap_{s \in S} V(s)$, а пересечение произвольного числа замкнутых множеств замкнуто, то, используя эти две леммы, получаем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \mathfrak{T}, L \rangle$ — произвольная топологическая алгебра. Топологическое пространство $\langle A, \mathfrak{T} \rangle$ является хаусдорфовым тогда и только тогда, когда для любого положительного целого n любое алгебраическое над $\mathcal{A}$ множество $Y \subseteq A^n$ является замкнутым в топологическом пространстве $\langle A^n, \mathfrak{T}^n \rangle$.

Из этой теоремы следует, что если топология хаусдорфова, то для любого целого положительного n верно включение

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{A},n} \subseteq \text{Cl}(\mathfrak{T}^n).$$

4 Совпадение совокупности алгебраических множеств с заданной топологией

В предыдущем разделе показано, когда все алгебраические множества являются замкнутыми. Выясним, при каких условиях совокупность алгебраических множеств совпадает с совокупностью замкнутых множеств.

Очевидно, что если алгебраические множества образуют базу замкнутых множеств некоторой топологии, то и все замкнутые множества будут алгебраическими, так как произвольное пересечение алгебраических множеств является алгебраическим.

Докажем утверждение, которое поможет нам проверять, в каком случае алгебраические множества образуют базу замкнутых множеств.

Лемма 4. Пусть $\langle A, \mathfrak{T} \rangle$ — топологическое пространство, $\mathfrak{B}_1$ — база (открытых множеств) топологии $\mathfrak{T}$. Для того, чтобы некоторая

совокупность $\mathfrak{B}_2$ замкнутых множеств топологии $\mathfrak{T}$ была базой замкнутых множеств этой топологии, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $a \in A$ и любого содержащего точку a множества $X \in \mathfrak{B}_1$ существовало множество $Z \in \mathfrak{B}_2$, не содержащее точку a и содержащее множество $A \setminus X$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{B}_2$ — база замкнутых множеств, $a \in A$ и $X \in \mathfrak{B}_1$ — открытое множество, содержащее точку a . Тогда $A \setminus X = \bigcap_{i \in I} Z_i$ — пересечение каких-то элементов из $\mathfrak{B}_2$. Найдётся хотя бы одно Z_i не содержащее a , оно и будет искомым.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{B}_2$ удовлетворяет условию утверждения. Пусть X — произвольное замкнутое множество, тогда его дополнение $A \setminus X$ открыто и, следовательно, представимо в виде $A \setminus X = \bigcup_{i \in I} X_i$, где $X_i \in \mathfrak{B}_1$. Для каждого множества X_i и для всех точек $a \in X_i$ найдётся замкнутое множество $Z_{i,a} \in \mathfrak{B}_2$ такое, что $a \notin Z_{i,a}$ и $Z_{i,a} \supseteq A \setminus X_i$. Тогда $X = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{a \in X_i} Z_{i,a}$, в чём несложно убедиться. $\square$

Таким образом, имеет место следующая теорема, которая является прямым следствием теоремы 3 и леммы 4.

Теорема 5. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \mathfrak{T}, L \rangle$ — топологическая алгебра, $\mathfrak{T}$ — хаусдорфова топология, n — положительное целое число. $\mathfrak{A}_{\mathcal{A},n} = \text{Cl}(\mathfrak{T}^n)$ тогда и только тогда, когда найдётся такая база $\mathfrak{B}$ топологии $\mathfrak{T}^n$, что для любой точки $\mathbf{a} \in A^n$ и любого содержащего точку $\mathbf{a}$ множества X из $\mathfrak{B}$ найдётся алгебраическое множество Y не содержащее точку $\mathbf{a}$ и содержащее множество $A^n \setminus X$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3. В примере 2 была рассмотрена алгебраическая система $\mathcal{A}_{\text{nmmp}} = \langle \mathbb{N}, +, \min, \max, 0, 1 \rangle$. Рассмотрим на множестве $\mathbb{N}$ дискретную топологию. Как было показано, множества вида $\mathbb{N}^n \setminus \{(k_1, \dots, k_n)\}$ являются алгебраическими. Несложно заметить, что они образуют базу замкнутых множеств дискретной топологии. Таким образом, можно применить теорему 5 и получить известный нам результат: любое множество $X \subseteq \mathbb{N}^n$ является алгебраическим над $\mathcal{A}_{\text{nmmp}}$ множеством.

Пример 4. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}_{\text{pa}} = \langle \mathbb{R}, +, |\cdot|, -1, 0, 1 \rangle$, где символы сигнатуры интерпретированы естественным образом. Наделив множество $\mathbb{R}$ евклидовой топологией $\mathfrak{T}_E$, получим топологическую алгебру. Пусть n задано, рассмотрим на множестве $\mathbb{R}^n$ базу состоящую из кирпичей, то есть множеств вида $]r_1, s_1[\times \dots \times]r_n, s_n[$. Итак, пусть

$(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ — некоторая точка и $X =]r_1, s_1[\times \dots \times]r_n, s_n[$ — элемент базы, содержащий точку $(a_1, \dots, a_n)$. Покажем, что существует не содержащее точку $(a_1, \dots, a_n)$ алгебраическое множество Y такое, что $Y \supseteq \mathbb{R}^n \setminus X$. Заметим, что при записи уравнений можно использовать рациональные числа, подразумевая, что уравнение всегда можно будет переписать так, чтобы все числа в записи уравнения стали целыми. Рассмотрим уравнение

$$\left| \sum_{i=1}^n |x_i - q_i| - r \right| = \sum_{i=1}^n |x_i - q_i| - r, \quad (1)$$

где $r, q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Множеством решений этого уравнения является внешность « n -мерного октаэдра» размера $2r$ с центром в точке $(q_1, q_2, \dots, q_n)$. Заметим, что внутри этого «октаэдра» содержится кирпич

$$\prod_{1 \leq i \leq n} \left] q_i - \frac{r}{n}, q_i + \frac{r}{n} \right[.$$

Положим $r = \frac{1}{2} \min(s_1 - a_1, a_1 - r_1, \dots, s_n - a_n, a_n - r_n)$. И выберем $q_1, \dots, q_n$ так, чтобы $q_i - \frac{r}{n} < a_i < q_i + \frac{r}{n}$. При таких параметрах множество решений уравнения (1) будет искомым алгебраическим множеством. Таким образом, к алгебре $\mathcal{A}_{\text{pa}}$ применима теорема 5, следовательно, $\mathfrak{A}_{\mathcal{A}_{\text{pa}}, n} = \mathfrak{T}_E^n$.

Пример 5. Рассмотрим теперь алгебру $\mathcal{A}_{\text{mpm}} = \langle \mathbb{R}; +, -, \max, 0, 1 \rangle$. Все рассуждения предыдущего примера можно повторить для уравнения

$$\max \left(\sum_{i=1}^n \max(x_i - q_i, -x_i + q_i) - r, 0 \right) = \sum_{i=1}^n \max(x_i - q_i, -x_i + q_i) - r$$

и получить, что $\mathfrak{A}_{\mathcal{A}_{\text{mpm}}, n} = \mathfrak{T}_E^n$.

Заметим, что если добавить в сигнатуру новые функциональные символы и интерпретировать их непрерывными функциями, то все наши рассуждения останутся в силе, поэтому к алгебре $\mathcal{A}_{\text{mdpm}}$ из примера 1 также применима теорема 5, следовательно, $\mathfrak{A}_{\mathcal{A}_{\text{mdpm}}, n} = \mathfrak{T}_E^n$.

Пример 6. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}_{\text{mp}} = \langle \mathbb{R}; +, \max, -1, 0, 1 \rangle$, которая является идемпотентным полукольцом. Все рассуждения можно применить к уравнению

$$\max \left(2 \sum_{i=1}^n \max(x_i - q_i, 0), \sum_{i=1}^n (x_i - q_i) + r \right) = 2 \sum_{i=1}^n \max(x_i - q_i, 0)$$

и получить аналогичный результат: $\mathfrak{A}_{\mathcal{A}_{\text{mp}}, n} = \mathfrak{T}_E^n$.

Список литературы

- [1] E. Daniyarova, A. Miasnikov, V. Remeslennikov, *Unification theorems in algebraic geometry*. Algebra and Discrete Mathematics, 1 (2008), 80–112, <http://arxiv.org/abs/0808.2522>.
- [2] D. Marker, *Model theory: an introduction*. Springer, 2002.
- [3] А. И. Мальцев, *К общей теории алгебраических систем*, Мат. сб., 1954, 35, № 1, 3–20, <http://mi.mathnet.ru/rus/msb/v77/i1/p3>.
- [4] Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян, *Общая топология: Учеб. пособие для вузов*, М.: Высш. школа, 1979.
- [5] Ю. С. Дворжецкий, М. В. Котов, *Минимаксные алгебраические системы*, Вестник Омского университета, Спецвыпуск «Комбинаторные методы алгебры и сложность вычислений», 2008, 130–136.

О ВЫПОЛНИМОСТИ ГРАФОВЫХ ФОРМУЛ НА ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНОЙ ДВУСТУПЕННО НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЕ

А.А. Мищенко

А.В. Трейер

Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН

ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия

e-mail:

alexei.mishenko@gmail.com

e-mail:

alexander.treyer@gmail.com

1 Введение

В [1] по конечному простому (без петель и кратных ребер) графу Γ введена частично коммутативная группа G_Γ в многообразии двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$ -групп, с помощью порождающих и определяющих соотношений. Порождающими группы является множество вершин графа $V(\Gamma) = \{x_1, \dots, x_n\}$, а определяющими соотношениями будет множество $R(\Gamma) = \{[x_i, x_j] = x_i^{-1}x_j^{-1}x_ix_j = 1 \mid \text{для всех } (x_i, x_j) \in E_\Gamma\}$.

По произвольному простому графу T определим графовую $\exists$ -формулу $\phi(T)$:

$$\begin{aligned} \phi(T) = \exists z_1 \dots z_n \bigg(\bigwedge_{(y_i, y_j) \in E_T} [z_i, z_j] = 1 \wedge \bigwedge_{(y_i, y_j) \notin E_T} [z_i, z_j] \neq 1 \\ \wedge \bigwedge_{i \neq j} z_i \neq z_j \wedge \bigwedge_{i=1, \dots, n} z_i \neq 1. \end{aligned} \quad (1)$$

где $\{y_1, \dots, y_m\}$ – множество вершин графа T , а E_T – множество его ребер.

В статье [1] мы привели критерий выполнимости формулы $\phi(T)$ на группе G_Γ .

Теорема 9 *Формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_Γ для произвольного конечного простого графа T , тогда и только тогда, когда существует граф Γ_0 – полученный из Γ последовательностью элементар-*

ных раздутый и сжатый первого, второго и третьего рода, такой, что граф T является полным подграфом графа Γ_0 .

К сожалению, доказательство этого критерия не является полным. Данная работа является существенным дополнением к [1], к тому же мы обобщаем все полученные в [1] результаты на случай частично коммутативных двуступенно нильпотентных R -групп, где R – биномиальное евклидово кольцо. Ради удобства читателя все необходимые определения и отдельные фрагменты доказательства из [1] мы приведем в данной статье.

2 Предварительные сведения

Пусть R – биномиальное евклидово кольцо, $\mathfrak{N}_{2,R}$ – многообразие двуступенно нильпотентных R -групп. Определение биномиального евклидова кольца и многообразия $\mathfrak{N}_{2,R}$ можно найти в [2]. По конечному простому графу Γ с множеством вершин $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ с помощью порождающих и определяющих соотношений определим частично коммутативную группу в многообразии $\mathfrak{N}_{2,R}$:

$$G_\Gamma = \langle x_1, \dots, x_n \mid [x_i, x_j] = 1, \text{ где } (x_i, x_j) - \text{ребро в графе } \Gamma \rangle_{\mathfrak{N}_{2,R}}$$

Отметим, что из двуступенной нильпотентности группы G_Γ следует, что для любых элементов группы x, y и любых $\alpha, \beta \in R$ выполняется тождество:

$$[x^\alpha, y^\beta] = [x, y]^{\alpha\beta}.$$

В предложении 1 из [1] приводится нормальная форма элементов группы G_Γ в случае, если R – поле рациональных чисел. Доказательство этого результата полностью проходит и для случая произвольного евклидова биномиального кольца. Приведём описание нормальной формы для произвольного элемента g группы G_Γ :

$$g = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \prod y_{kl}^{\beta_{kl}}, \quad (2)$$

где $x_i \in X$, $y_{kl} = [x_k, x_l] \neq 1$, $k < l$, и $\alpha_i, \beta_{kl} \in R$.

Введём важное для нашей дальнейшей работы понятие блочного элемента. Для этого для произвольного элемента $w \in G_\Gamma$, записанного в виде (2), обозначим через

$$\overline{w} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$

а через $\alpha(\overline{w})$ обозначим множество всех порождающих $x_i \in X$, входящих в запись $\overline{w}$ с ненулевыми показателями α_i . Наряду с графом коммутативности Γ для группы G_Γ рассмотрим двойственный граф Δ . Множество вершин графа Δ совпадает с X , причём $(x_i, x_j) \in E_\Delta$ тогда и только тогда, когда $(x_i, x_j) \notin E_\Gamma$. Для элемента $w \in G_\Gamma$ через $\Delta(w)$ обозначим максимальный подграф Δ на множестве вершин $\alpha(\overline{w})$.

Определение 1. Элемент $w \in G_\Gamma$ называется *блоковым*, если $\Delta(w)$ — *связный граф*.

Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ — все компоненты связности графа $\Delta(w)$, то есть $\Delta(w) = \sqcup_{i=1}^m \Delta_i$. Тогда $\overline{w}$ можно записать в виде $\overline{w} = w_1 \dots w_m$, где $\Delta(w_i) = \Delta_i$. Назовем $\overline{w} = w_1 \dots w_m$ *блоковым разложением* элемента w и $\overline{w}$, а элементы $w_1, \dots, w_m$ — его *блоками*. Заметим, что из определения следует, что блоки $w_1, \dots, w_m$ как элементы группы перестановочны между собой.

Для произвольного конечного множества элементов $M = \{g_1, \dots, g_k\}$ группы G_Γ определим понятие графа коммутативности Γ_M . Вершинами этого графа будут элементы множества M . Две вершины g_i и g_j соединены ребром в графе Γ_M тогда и только тогда, когда элементы g_i и g_j коммутируют в группе G_Γ . Заметим, что если графовая формула $\phi(T)$ выполняется на множестве элементов $M = \{g_1, \dots, g_l\}$ группы G_Γ , то граф коммутативности Γ_M для этого множества элементов будет совпадать с графом T .

Кольцо R называется *евклидовым*, если в нем определена норма

$$d : R \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

и возможно деление с остатком, то есть для любых $a, b \in R$ ($b \neq 0$), существуют $q, r \in R$ такие, что $a = bq + r$, причем $d(r) < d(b)$. Примерами евклидовых колец являются поле нулевой характеристики, кольцо целых чисел, кольцо многочленов от одной переменной над полем нулевой характеристики.

Обозначим $E(R)$ множество обратимых элементов кольца R . Два элемента $a, b \in R$ назовем *ассоциированными*, если существует $e \in E(R)$, такой, что $a = be$. Ясно, что отношение ассоциированности является отношением эквивалентности, следовательно кольцо R разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности по отношению ассоциированности. Если $\alpha \in R$ и $[\alpha]$ — класс эквивалентности, содержащий элемент α , то имеет место равенство $[\alpha] = \alpha E(R)$.

На классах эквивалентности можно ввести частичный порядок, следующим образом: класс $[\alpha] \leq [\beta]$, если существует $c \in R$, такое, что

$\alpha\varsigma = \beta$. Нетрудно заметить, что этот частичный порядок не зависит от выбора представителей α и β .

Определение 2. Пусть $g \in G_\Gamma$. Элемент $g_0 \in G_\Gamma$ будем называть корневым элементом для g , если существует $\alpha \in R$, такое, что выполнены следующие условия:

- $g = g_0^\alpha \bmod G'_\Gamma$;
- если существует $h \in G_\Gamma$ и $\beta \in R$ такие, что $g = h^\beta \bmod G'_\Gamma$, то $[\beta] \leq [\alpha]$.

Без ограничения общности будем считать, что для корневых элементов выполнено $g_0 = \overline{g_0}$.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ набор элементов кольца R . Элемент $d \in R$ назовем наибольшим общим делителем элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ($d = \text{НОД}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$), если выполнены следующие условия:

- $[d] \leq [\alpha_i]$, для всех $i = 1, \dots, n$;
- для любого d' , такого, что $[d'] \leq [\alpha_i]$, для всех $i = 1, \dots, n$, выполнено $[d'] \leq [d]$.

Доказательство следующего предложения можно найти в [2].

Предложение 3. Пусть G_Γ — частично коммутативная двуступенно нильпотентная R -группа, где R — биномиальное евклидово кольцо. Тогда для любого элемента $g \in G_\Gamma \setminus G'_\Gamma$ существует корневой элемент.

Следующая лемма описывает централизатор произвольного элемента группы G_Γ , доказательство можно найти в [2].

Лемма 4. Пусть $w \in G_\Gamma$ и $\overline{w} = w_1 \dots w_k$ — блочное разложение элемента w , а w'_i — корневой элемент для w_i , тогда

$$C(w) = \left(\prod_{|\alpha(w_i)| > 1} \langle w'_i \rangle \times A(w) \right) \cdot G'_\Gamma.$$

3 Элементарные операции на графах

Напомним нужные нам в статье операции на графах, введенные нами в [1].

Рассмотрим граф T и вершину $v \in V(T)$, обозначим через $v^\perp$ шар радиуса 1 в графе T . Иногда, если речь идет о каком-нибудь конкретном

графе T , множество соседних с v вершин будем обозначать $v_T^\perp$. Пусть V подмножество вершин графа T , тогда обозначим $V^\perp = \bigcap_{v \in V} v^\perp$. Данные операции ортогональности были введены в [5] для изучения свободных частично коммутативных алгебр и групп.

Две вершины x и y графа T называются *эквивалентными*, если $x^\perp = y^\perp$. Обозначим за $[x]$ – класс эквивалентных с x вершин.

Определение 5. *Элементарным раздутием первого рода графа T будем называть граф $\hat{T}$, полученный из T следующим образом (смотри Рис. 9):*

1. Выбираем вершину $v \in V(T)$.
2. Добавляем вершину v' в граф.
3. Соединяем v' со всеми вершинами соседними с v в графе T и самой вершиной v так, чтобы вершины v' и v были эквивалентны.

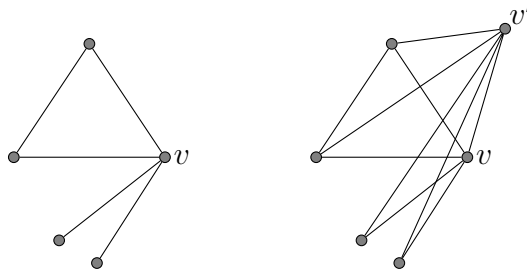


Рис. 9: Элементарное раздутие первого рода

Пусть в графе T есть вершина v , для которой $||v|| > 1$, назовем *элементарным сжатием первого рода* графа T , такой граф $\hat{T}$, который получен из графа T с помощью удаления одной вершины из $[v]$ вместе с исходящими из нее ребрами.

Элементарные раздутия и сжатия первого рода были введены как графы получаемые из исходных, также понятия элементарного раздутия и сжатия можно воспринимать как операцию перехода от исходного графа T к графу $\hat{T}$. Ясно, что операция элементарного сжатия первого рода является обратной к операции элементарного раздутия первого рода. Отметим, что если в графе T , $||v|| = 1$ для любой вершины $v \in V(T)$, то операцию элементарного сжатия первого рода уже нельзя применять к графу T . Поэтому количество возможных элементарных сжатий первого рода для конечного графа T конечно и равно $||v_1|| + \dots + ||v_n|| - n$, где $v_i \in V(T)$, $i = 1, \dots, n$.

Определение 6. Будем говорить, что граф $\tilde{T}$ получен из графа T элементарным раздутием второго рода (смотри Рис. 10), если существует ребро $e \in E(T)$ и вершина $v_0 \in V(\tilde{T})$ такие, что граф $\tilde{T}$ отличается от графа T только на вершину v_0 и множество ребер $\{v_0x_i \mid x_i \in (v_1)_T^\perp \cap (v_2)_T^\perp\}$, где v_1 и v_2 – вершины ребра e .

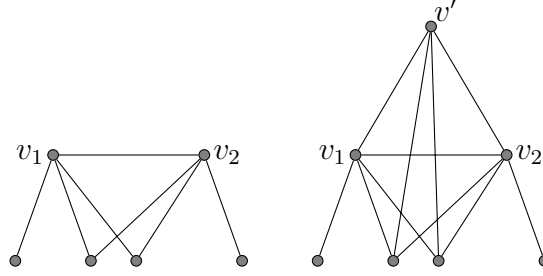


Рис. 10: Элементарное раздутие второго рода

Определение 7. Будем говорить, что граф $\tilde{T}$ получен из графа T элементарным раздутием третьего рода (смотри Рис. 11), если существуют две вершины v_1 и $v_2 \in V(T)$ и вершина $v_0 \in V(\tilde{T})$ такие, что ребро $v_1v_2 \notin E(T)$ и граф $\tilde{T}$ отличается от графа T только на вершину v_0 и множество ребер $\{v_0x_i \mid x_i \in (v_1)_T^\perp \cap (v_2)_T^\perp\}$.

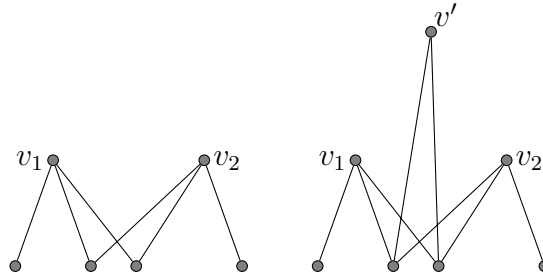


Рис. 11: Элементарное раздутие третьего рода

Как и в случае элементарного сжатия первого рода, определим аналогичным образом элементарные сжатия второго и третьего рода как операции обратные к элементарным раздутиям второго и третьего рода соответственно. Ясно, что к конечному графу T можно применить лишь конечное число элементарных сжатий второго и третьего рода.

Следующая лемма показывает, что операции элементарного раздутия и сжатия первого второго или третьего рода сохраняют выполнимость формулы на группе. Эта лемма доказана в [1] для случая если R

– поле рациональных чисел, но доказательство верно для случая, когда R – биномиальное евклидово кольцо.

Лемма 8. *Если T_2 элементарное раздутие графа T_1 , то $\phi(T_1)$ выполняется на группе G_Γ тогда и только тогда, когда $\phi(T_2)$ выполняется на группе G_Γ .*

4 Критерий выполнимости графовых $\exists$ -формул

Следующая теорема и будет критерием, объявленным в заглавии параграфа. Пусть G_Γ – частично коммутативная двуступенно нильпотентная R -группа, построенная по произвольному графу Γ (R – биномиальное евклидово кольцо).

Теорема 9. *Формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_Γ для произвольного конечного простого графа T , тогда и только тогда, когда существует граф Γ_0 – полученный из Γ последовательностью элементарных раздутий и сжатий первого, второго и третьего рода, такой, что граф T является полным подграфом графа Γ_0 .*

Доказательство

Пусть формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_Γ , и $\bar{g} = \{g_1, \dots, g_k\}$ – набор элементов группы G_Γ на которых выполняется эта формула, $k = |V(T)|$. Запишем элементы g_i через образующие по модулю коммутанта группы G_Γ :

$$\begin{aligned} g_1 &= x_1^{\alpha_{11}} \cdots x_n^{\alpha_{1n}}, \\ g_2 &= x_1^{\alpha_{21}} \cdots x_n^{\alpha_{2n}}, \\ &\dots \\ g_k &= x_1^{\alpha_{k1}} \cdots x_n^{\alpha_{kn}}, \end{aligned}$$

где $\alpha_{ij} \in R$.

Каждый из элементов g_i можно представить в виде блочного разложения:

$$\begin{aligned} g_1 &= w_{11}w_{12} \cdots w_{1l_1}, \\ g_2 &= w_{21}w_{22} \cdots w_{2l_2}, \\ &\dots \\ g_k &= w_{k1}w_{k2} \cdots w_{kl_k}. \end{aligned}$$

Как отмечалось выше, блоки участвующие в записи одного элемента коммутируют между собой (то есть все блоки w_{1j} , где $j = 1, \dots, l_1$ попарно коммутируют). Обозначим через Ω множество всех блочных элементов группы G_Γ , участвующих в записи $g_1, \dots, g_k$.

$$\Omega = \{w_{11}, \dots, w_{1l_1}, w_{21}, \dots, w_{2l_2}, \dots, w_{kl_k}\}.$$

Ясно, что формула $\phi(\Gamma)$ выполняется в группе G_Γ на множестве канонических порождающих. Стартуя с графа Γ по набору блоковых элементов Ω мы построим граф Γ_0 , описанный в формулировке теоремы. Мы будем строить этот граф с помощью цепочки раздутий графов, начиная с графа Γ .

$$\Gamma = \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \dots \subset \Gamma_m = \Gamma_0.$$

Наш процесс построения цепочки графов будет состоять из двух этапов. На первом этапе мы присоединим к графу Γ вершины соответствующие блокам из Ω . На втором этапе из вершин соответствующим данным блокам мы получим нужные нам элементы $g_1, \dots, g_k$.

На каждом шаге процесса с помощью элементарных раздутий мы будем строить по графу Γ_s граф Γ_{s+1} . На каждом шаге процесса при добавлении новой вершины в граф мы будем ставить ей метку. Каждая метка это элемент группы G_Γ . Метка для новой вершины будет равна произведению меток раздуваемых вершин в случае элементарного раздутия второго и третьего рода. В случае элементарного раздутия первого рода будем ставить метку являющейся нужной степенью метки раздуваемой вершины. Граф коммутативности для множества меток будет совпадать с получаемым на каждом шаге графом. Можно считать, что все раздутия на графах проводятся не только на вершинах, но и на множестве меток для вершин этого графа. Поэтому, когда мы говорим, что к элементу g_1 присоединяется элемент g_2 это означает, что проводится раздутие второго или третьего рода для вершин, которые имеют метки g_1 и g_2 соответственно.

На каждом шаге первого этапа процесса будем действовать так, чтобы выполнялись следующие четыре условия:

1. К блоку будем присоединять только одну букву (образующий группы G_Γ);
2. Разрешается присоединять к блоку только ту букву, которой в нем еще нет;
3. Буквы будем присоединять в таком порядке, чтобы на каждом шаге получались вершины, метки которых состоят только из одного блока;

4. Если нам нужно добавить какой-то блок $w \in \Omega$, а в графе Γ_s уже есть вершина v с меткой w^α , то мы добавляем его как раздутие первого рода вершины v .

Рассмотрим несколько случаев, в зависимости от того каким элементарным раздутием мы пользуемся и покажем корректность графа Γ_{s+1} . Под корректностью графа мы понимаем выполнение следующего условия: любые две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда их метки коммутируют в группе G_Γ .

1. *Раздутие первого рода.* Поскольку централизатор элемента g совпадает с централизатором элемента g^α , где $\alpha \in R$, то корректность графа Γ_{s+1} очевидна.
2. *Раздутие второго рода.* Пусть мы хотим раздуть две вершины. Без ограничения общности можно считать, что им соответствуют метки w_1 и x_1^γ , где w_1 блокочный элемент, и $\gamma \in R$. При этом добавляется вершина с меткой $w = w_1 x_1^\gamma$. Очевидно, что w будет коммутировать со всеми метками, которые одновременно коммутируют с w_1 и с x_1 , и не будет коммутировать с метками, которые коммутируют ровно с одной из меток w_1 или x_1 . Отметим, что так как w_1 и x_1 коммутируют, то w будет коммутировать с w_1 и с x_1^γ :

$$[w_1 x_1^\gamma, w_1] = [w_1, w_1][x_1^\gamma, w_1] = 1;$$

$$[w_1 x_1^\gamma, x_1^\gamma] = [w_1, x_1^\gamma][x_1^\gamma, x_1^\gamma] = 1.$$

Покажем корректность графа Γ_{s+1} . Пусть в графе Γ_{s+1} нашлась вершина с меткой w_0 , которая коммутирует с w . Покажем, что такого не может быть. Заметим

$$[w, w_0] = [w_1 x_1^\gamma, w_0] = [w_1, w_0][x_1^\gamma, w_0] = 1, \\ \text{причем } [w_1, w_0] \neq 1, [x_1^\gamma, w_0] \neq 1.$$

Можно считать, что

$$w_1 = x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \\ w_0 = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n},$$

где $\alpha_i, \beta_j \in R$.

Получаем

$$[x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\alpha_n}][x_1^\gamma, x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}] = 1.$$

Второй коммутатор раскладывается в произведение только $y_{1i}^{\Delta_{1i}} = [x_1, x_i]^{\Delta_{1i}}$, где x_i не коммутирует с x_1 в группе G_Γ . Но таких y_{1i} не может получиться из первого коммутатора, так как $[w_1, x_1] = 1$ (другими словами x_1 коммутирует со всеми буквами из w_1). Полученное противоречие доказывает корректность графа Γ_{s+1} .

3. *Раздутие третьего рода.* Пусть мы хотим раздуть две вершины. Без ограничения общности можно считать, что им соответствуют метки w_1 и x_1^γ , где w_1 блоковый элемент, и $\gamma \in R$. При этом добавляется вершина с меткой $w = w_1 x_1^\gamma$. Очевидно, что w будет коммутировать со всеми метками, которые одновременно коммутируют с w_1 и с x_1 , и не будет коммутировать с метками, которые коммутируют ровно с одной из меток w_1 или x_1 . Отметим, что так как w_1 и x_1 не коммутируют, то w не будет коммутировать с w_1 и с x_1^γ :

$$\begin{aligned} [w_1 x_1^\gamma, w_1] &= [w_1, w_1][x_1^\gamma, w_1] = [x_1^\gamma, w_1] \neq 1; \\ [w_1 x_1^\gamma, x_1^\gamma] &= [w_1, x_1^\gamma][x_1^\gamma, x_1^\gamma] = [w_1, x_1^\gamma] \neq 1. \end{aligned}$$

Покажем корректность графа Γ_{s+1} . Пусть в графе Γ_{s+1} нашлась вершина с меткой w_0 , которая начинает коммутировать с w . Покажем, что такого быть не может. Пусть

$$\begin{aligned} [w, w_0] &= [w_1 x_1^\gamma, w_0] = [w_1, w_0][x_1^\gamma, w_0] = 1, \\ \text{причем } [w_1, w_0] &\neq 1, [x_1^\gamma, w_0] \neq 1. \end{aligned}$$

Можно считать, что

$$\begin{aligned} w_1 &= x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \\ w_0 &= x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}, \end{aligned}$$

где $\alpha_i, \beta_j \in R$.

Получаем

$$[x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\alpha_n}][x_1^\gamma, x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}] = 1.$$

Коммутатор $[x_1^\gamma, x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}]$ раскладывается только в произведение $y_{1i}^{\Delta_{1i}}$, поэтому все эти элементы должны сократиться с аналогичными элементами из первого коммутатора. То есть

$$\prod y_{1i}^{\Delta_{1i}^{(1)}} \prod y_{1i}^{\Delta_{1i}^{(2)}} = 1,$$

где

$$\Delta_{1i}^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_i \\ \beta_1 & \beta_i \end{vmatrix} = -\alpha_i\beta_1;$$

$$\Delta_{1i}^{(2)} = \begin{vmatrix} \gamma & 0 \\ \beta_1 & \beta_i \end{vmatrix} = \gamma\beta_i.$$

Получаем $-\alpha_i\beta_1 + \gamma\beta_i = 0$. То есть имеет место соотношение:

$$\alpha_i\beta_1 = \gamma\beta_i.$$

Если $\beta_1 = 0$, то все $\beta_i = 0$ для всех i таких что x_i не коммутирует с x_1 . Это означает, что $[x_1^\gamma, w_0] = 1$, следовательно и $[w_1, w_0] = 1$, что противоречит тому, что w_0 не коммутирует с x_1 и с w_1 . Следовательно, $\beta_1 \neq 0$. Таким образом, получаем, что для всех i таких что существует путь от вершины x_1 до вершины x_i в графе не коммутативности группы G_Γ (обозначим это множество индексов I), выполнено:

$$\alpha_i\beta_1 = \gamma\beta_i \quad (\beta_1, \gamma = \text{const}).$$

Заметим, что в это множество индексов I входят индексы всех букв блока w_1 , так как w_1x_1 является блоковым элементом. Следовательно, $w_0^\gamma = (w_1x_1^\gamma)^{\beta_1}w_2$, где w_2 – какой-то другой блоковый элемент, либо произведение блоковых элементов. Но так как на каждом шаге мы можем получать только элементы состоящие из одного блока, то $w_2 = 1$. Таким образом

$$w_0^\gamma = w^{\beta_1}.$$

Значит, w_0 и w являются степенями одного корневого элемента. Следовательно, если нам нужен блок w , то нам нужно добавлять его как раздутие первого рода блока w_0 .

После того как получены все блоки множества Ω переходим ко второму этапу процесса – построение самих элементов $g_1, \dots, g_k$. Для этого рассматриваем вершины соответствующие блокам $w_{11}, \dots, w_{1l_1}$ и последовательно соединяем их раздутием второго рода, таким образом, получим вершину с меткой g_1 . Здесь используется раздутие второго рода так как все блоки блокового разложения одного элемента коммутируют между собой.

Покажем, что при этом получим корректный граф Γ_{s+1} . Пусть мы хотели раздуть две вершины, меткой одной из них будет элемент $h_1 = w_1 \dots w_{k-1}$, а меткой второй вершины будет элемент $h_2 = w_k$, где $w_1, \dots, w_k$

– блокковые элементы. При раздутии мы получим вершину с меткой $w = w_1 \dots w_{k-1} w_k$. При этом, пусть нашелся элемент w_0 который коммутирует с w , но не коммутирует с h_1 с h_2 и со всеми элементами с которыми коммутируют и h_1 и h_2 . Так как w имеет блокковое разложение $w = w_1 \dots w_k$, то по лемме 4 его централизатор по модулю коммутанта в группе G_Γ будет иметь вид

$$C(w) = \langle w'_1 \rangle \times \dots \times \langle w'_k \rangle \times A(w),$$

где $A(w)$ – подгруппа порожденная образующими $\{x_i\}$ которые коммутируют со всеми буквами блоков $w_1, \dots, w_k$, а $w'_1, \dots, w'_k$ – корневые элементы для блоков $w_1, \dots, w_k$ соответственно. Так как $w_0 \in C(w)$, получаем, что w_0 должен коммутировать и с h_1 и с h_2 . Полученное противоречие доказывает корректность графа Γ_{s+1} .

Продолжая действовать подобным образом, мы добавим в граф все вершины с метками $g_1, \dots, g_k$, которые будут соединены ребрами в строгом соответствии коммутированию данных элементов в группе G_Γ . Полученный граф Γ_m и будет являться графом Γ_0 .

■

Список литературы

- [1] А.А. Мищенко, А.В. Трейер. Графы коммутативности для частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$ -групп. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, <http://semr.math.nsc.ru/v4/p460-481.pdf>.
- [2] А.А. Мищенко, Е.И. Тимошенко. Универсальная эквивалентность частично коммутативных нильпотентных групп. *Сибирский математический журнал*, Том 52, №5, (2011), сс.1113–1122.
- [3] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. “Основы теории групп”, М.: Наука, 1982. 288 с
- [4] Evgenii S. Esyp, Ilia V. Kazatchkov, and Vladimir N. Remeslennikov. Divisibility Theory and Complexity of Algorithms for Free Partially Commutative Groups. *Groups, Languages, Algorithms. Contemporary Mathematics* 378 (2005), pp. 319–348.
- [5] A.J. Duncan, I.V. Kazachkov, V.N. Remeslennikov. Orthogonal systems in finite graphs. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 5 (2008), pp. 151–176.

ПРОДОЛЖЕНИЯ ЧАСТИЧНЫХ 1-ИЗОМОРФИЗМОВ КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТНЫХ СИСТЕМ

Е.В. Овчинникова*

Новосибирский государственный технический университет,
пр К. Маркса, 20, Новосибирск, 630092, Россия

e-mail: eovchin@ngs.ru

Для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ любой изоморфизм между ее подсистемами $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ (мощности k) называется *частичным* (k -) *изоморфизмом* системы $\mathcal{A}$.

В работе Хрушовского [1] доказано, что для любых конечного неориентированного графа без петель $\mathcal{A}$ и его частичных изоморфизмов $p_1, \dots, p_n$ существует конечный граф $\mathcal{B}$, расширяющий $\mathcal{A}$, и автоморфизмы графа $\mathcal{B}$, расширяющие $p_1, \dots, p_n$.

Хервиг [2] обобщил этот результат Хрушовского для произвольной конечной предикатной алгебраической системы.

В работе [3] показано, что любой конечный полигон над линейно упорядоченным моноидом вложим в конечный полигон, у которого любой частичный изоморфизм продолжается до автоморфизма.

В работе [4] и в данной работе предпринимаются попытки построения с помощью проективных плоскостей расширяющей системы, в которой частичные автоморфизмы продолжаются до автоморфизмов.

В работе [4] показано, что конечная предикатная алгебраическая система, в которой любые две одноэлементные подсистемы изоморфны, вложима в систему с транзитивной группой автоморфизмов.

Система $\mathcal{A}$ называется *n-ri-однородной*, если в ней любой частичный изоморфизм φ , для которого $|\text{dom}\varphi| = n$, продолжается до автоморфизма системы $\mathcal{A}$.

Определим дизъюнктивное объединение семейства систем предикатной сигнатуры $\mathcal{A}_i = \langle A_i, \Sigma \rangle_{i \in I}$ с непересекающимися носителями по правилу: $\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{A}_i = \langle \bigcup_{i \in I} A_i, \Sigma \rangle$, где $P_{\mathcal{A}} = \bigcup_{i \in I} P_{\mathcal{A}_i}$ для всех $P \in \Sigma$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 09-01-00336-а.

Отношение эквивалентности θ системы $\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ называется *a-эквивалентностью*, если для любых $i \in I$ и $a, b \in A_i$ из условия $a\theta b$ следует $a = b$.

a-Эквивалентность θ на A , являющаяся конгруэнцией, называется *a-конгруэнцией* системы $\mathcal{A}$.

Для *a-эквивалентности* θ на A и индексов $i, j \in I$, $i \neq j$, положим $A_{ij} \rightleftharpoons \{a \in A_i \mid a\theta b \text{ для некоторого } b \in A_j\}$ и $\theta_{ij} \rightleftharpoons \theta \cap (A_{ij} \times A_{ji})$. Заметим, что отношения θ_{ij} являются биекциями между A_{ij} и A_{ji} .

Верно следующее

Утверждение 1.

1. *a-Эквивалентность* θ на A является *a-конгруэнцией* тогда и только тогда, когда θ_{ij} являются изоморфизмами между A_{ij} и A_{ji} .

2. Конгруэнция θ на системе $\mathcal{A} = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ является *a-конгруэнцией* тогда и только тогда, когда для любого $i \in I$ отображение

$$\chi_i : \mathcal{A}_i \rightarrow \left(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{A}_i \right) / \theta,$$

действующее по правилу $\chi_i(a) = \theta(a)$, является изоморфным вложением.

Система $\mathcal{P}(q) = \langle P, L, I \rangle$, где P — множество точек, L — множество линий, $I \subseteq P \times L$ — отношение инцидентности, $q \in \omega$, называется *проективной q-плоскостью*, если выполняются следующие предложения:

$$\forall p \in P \quad \exists^q l \in L \quad I(p, l), \quad \forall l \in L \quad \exists^q p \in P \quad I(p, l),$$

$$\forall p_1 \neq p_2 \in P \quad \exists^1 l \in L \quad (I(p_1, l) \wedge I(p_2, l)),$$

$$\forall l_1 \neq l_2 \in L \quad \exists^1 p \in P \quad (I(p, l_1) \wedge I(p, l_2)).$$

Здесь $\exists^q$ означает “существует ровно q ”.

Обычно предполагается, что каждая линия проективной плоскости содержит не менее трех точек, но мы будем допускать $q = 1$ и $q = 2$.

Факт 1 [5]. Любая проективная q -плоскость состоит из $t \rightleftharpoons q^2 - q + 1$ точек и имеет такое же количество линий.

Если $P = \{p_0, \dots, p_{m-1}\}$, $L = \{l_0, \dots, l_{m-1}\}$, то матрицей инцидентности проективной q -плоскости $\mathcal{P}(q)$ называется матрица $S(q)$ порядка m , состоящая из элементов

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } p_j \in l_i, \\ 0, & \text{если } p_j \notin l_i. \end{cases}$$

Если $q = p^n + 1$ для некоторого простого числа p и натурального n , то матрицу $S(q)$ можно построить, используя таблицы сложения и умножения поля $\text{GF}(p^n)$. Плоскость с такой матрицей инцидентности называется *плоскостью Галуа* и обозначается через $S_{2,q}$.

Если матрица $S(q)$ — циклическая и симметрическая (по отношению к главной диагонали), то будем обозначать ее через $\Omega(q)$. Например, на рис. 1–3 представлены матрицы $\Omega(1)$, $\Omega(2)$ и $\Omega(5)$ порядков 1, 3 и 21 (нулям соответствуют пустые клетки).

Факт 2 [6]. Матрица инцидентности плоскости Галуа $S_{2,q}$ перестановками строк и столбцов приводится к матрице $\Omega(q)$.

	0
0	1

Рис. 1

	0	1	2
0	1	1	
1	1		1
2		1	1

Рис. 2

	0	1		4				9					14		16				20
0	1	1			1									1		1			
1	1			1									1		1				1
		1									1		1				1	1	
4	1								1		1					1	1		
								1		1					1	1			1
							1		1					1	1			1	
								1	1					1	1			1	
9					1		1					1	1		1				
				1		1					1	1			1				
			1	1						1	1			1					
		1		1					1	1			1						
	1		1					1	1			1							
14	1		1					1	1			1							
		1					1	1			1								1
16	1					1	1			1								1	
					1	1			1								1		1
					1	1			1								1	1	
			1	1			1									1		1	
20		1	1			1									1		1		

Рис. 3

Для проективной плоскости $\mathcal{P}(q)$ обозначим через

$$M(q) = \{m_{q,0}, \dots, m_{q,q-1}\}$$

множество номеров ненулевых элементов строки с номером 0 в матрице $\Omega(q)$. Например, $m_{2,0} = 0$, $m_{2,1} = 1$; $M(4) = \{0, 1, 3, 7\}$; $M(5) = \{0, 1, 4, 14, 16\}$.

Так как матрица $\Omega(q)$ — циклическая и симметрическая (по отношению к главной диагонали), верно следующее

Утверждение 2.

1. В матрице $\Omega(q)$ выполняется $s_{lu} = 1$ тогда и только тогда, когда $l + u \equiv m_{q,v} \pmod{q^2 - q + 1}$ для некоторого $v \in \{0, \dots, q-1\}$.

2. В проективной плоскости $\mathcal{P}(q)$ прямые с номерами l и r пересекаются в точке с номером b тогда и только тогда, когда существуют $m_{q,j}, m_{q,v} \in M(q)$ такие, что $m_{q,j} - l \equiv m_{q,v} - r \equiv b \pmod{q^2 - q + 1}$.

Теорема. Для предикатной системы $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ мощности n существует расширяющая её 1-ri-однородная система $\mathcal{B} = \langle B, \Sigma \rangle$ мощности не более 4^n .

Доказательство. Зафиксируем n -элементную предикатную систему $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$. Рассмотрим разбиение множества A на максимальные по включению q_i -элементные подмножества $A_i = \{a_{i0}, \dots, a_{iq_i-1}\}$, $i \in \{1, \dots, k\}$, такие, что все одноэлементные подсистемы системы $\mathcal{A}$, состоящие из элементов множества A_i , попарно изоморфны.

Далее будем предполагать, что для каждого $i = 1, \dots, k$,

$$q_i \in \{1\} \cup \{p^k + 1 \mid p \text{ — простое число}, k \in \omega\}$$

(если это не так, то увеличим мощности множеств A_i дизъюнктивным добавлением к системе $\mathcal{A}$ одноэлементных систем, изоморфных $\langle \{a_{i,1}\}, \Sigma \rangle$).

Для кортежей $\langle l_1, \dots, l_k \rangle$, где $l_m \in \{0, \dots, q_m^2 - q_m\}$, $m \in \{1, \dots, k\}$, рассмотрим попарно непересекающиеся изоморфные копии $\mathcal{A}_{\langle l_1, \dots, l_k \rangle}$ системы $\mathcal{A}$. При этом будем считать, что носитель системы $\mathcal{A}_{\langle l_1, \dots, l_k \rangle}$ состоит из кортежей $\langle a_{ij}, l_1, \dots, l_k \rangle$, где $a_{ij} \in A$, $j \in \{0, \dots, q_i - 1\}$, $i \in \{1, \dots, k\}$, и отображение $\varphi_{\langle l_1, \dots, l_k \rangle}: A \rightarrow A_{\langle l_1, \dots, l_k \rangle}$ с условием

$$\varphi_{\langle l_1, \dots, l_k \rangle}(a_{ij}) = \langle a_{ij}, l_1, \dots, l_k \rangle$$

является изоморфизмом между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_{\langle l_1, \dots, l_k \rangle}$.

На элементах системы $\bigsqcup_{l_m \in \{0, \dots, q_m^2 - q_m\}} \mathcal{A}_{\langle l_1, \dots, l_k \rangle}$ определим отношение θ по следующему правилу: $\langle a_{ij}, l_1, \dots, l_k \rangle \theta \langle a_{uv}, r_1, \dots, r_k \rangle$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \langle a_{ij}, l_1, \dots, l_k \rangle &= \langle a_{uv}, r_1, \dots, r_k \rangle \text{ или} \\ (i = u, l_i &\neq r_i, l_m = r_m \text{ для всех } m \neq i \\ \text{и } m_{q_i, j} - l_i &\equiv m_{q_i, v} - r_i \pmod{(q_i^2 - q_i + 1)}). \end{aligned}$$

Если $\langle l_1, \dots, l_k \rangle = \langle r_1, \dots, r_k \rangle$, то, по определению отношения θ , выполняется $\langle a_{ij}, l_1, \dots, l_k \rangle \theta \langle a_{uv}, r_1, \dots, r_k \rangle$ только при $a_{ij} = a_{uv}$, и, следовательно, θ является a -эквивалентностью.

Пусть $l_i \neq r_i$. Если условие $l_m = r_m$ выполнено не для всех $m \neq i$, то, по определению отношения θ , $A_{\langle l_1, \dots, l_k \rangle, \langle r_1, \dots, r_k \rangle} = \emptyset$. Если условие $l_m = r_m$ выполняется для всех $m \neq i$, то, так как в $\mathcal{P}(q_i)$ прямые с номерами l_i и r_i пересекаются в единственной точке и в силу утверждения 2, множество $A_{\langle l_1, \dots, l_k \rangle, \langle r_1, \dots, r_k \rangle}$ одноэлементно. Так как $i = u$, то $a_{ij}, a_{uv} \in A_i$. По построению множеств A_i , любые две одноэлементные подсистемы системы $\mathcal{A}$, состоящие из элементов множества A_i , попарно изоморфны. Следовательно, в силу утверждения 1, θ — a -конгруэнция на системе

$$\bigsqcup_{l_m \in \{0, \dots, q_m^2 - q_m\}} \mathcal{A}_{\langle l_1, \dots, l_k \rangle}, \text{ а отображения}$$

$$\chi_{\langle l_1, \dots, l_k \rangle}: \mathcal{A}_{\langle l_1, \dots, l_k \rangle} \rightarrow \left(\bigsqcup_{l_m \in \{0, \dots, q_m^2 - q_m\}} \mathcal{A}_{\langle l_1, \dots, l_k \rangle} \right) / \theta,$$

действующие по правилам

$$\chi_{\langle l_1, \dots, l_k \rangle}(\langle a_{ij}, l_1, \dots, l_k \rangle) = \theta(\langle a_{ij}, l_1, \dots, l_k \rangle),$$

являются изоморфными вложениями.

На системе $\mathcal{B} = \left(\bigsqcup_{l_m \in \{0, \dots, q_m^2 - q_m\}} \mathcal{A}_{\langle l_1, \dots, l_k \rangle} \right) / \theta$ для каждого кортежа $\langle t_1, \dots, t_k \rangle$, где $t_m \in \{0, \dots, q_m^2 - q_m\}$, $m \in \{1, \dots, k\}$, определим автоморфизм $\psi_{\langle t_1, \dots, t_k \rangle}$ по следующему правилу:

$$\psi_{\langle t_1, \dots, t_k \rangle}(\theta(\langle a_{ij}, l_1, \dots, l_k \rangle)) = \theta(\langle a_{iv}, r_1, \dots, r_k \rangle),$$

если $r_m \equiv l_m - t_m \pmod{(q_m^2 - q_m + 1)}$ для всех $m \in \{1, \dots, k\}$ и $v \equiv j - t_i \pmod{(q_i^2 - q_i + 1)}$.

Если $m_{q_i, j} - l_i \equiv m_{q_i, u} - f_i \pmod{(q_i^2 - q_i + 1)}$, то $m_{q_i, j} - l_i + t_i \equiv m_{q_i, u} - f_i + t_i \pmod{(q_i^2 - q_i + 1)}$. Следовательно, отображение $\psi_{\langle t_1, \dots, t_k \rangle}$ определено корректно. Поскольку при изменении t_m от 0 до $q_m^2 - q_m + 1$ числа $(l_m - t_m) \pmod{(q_m^2 - q_m + 1)}$ пробегают это же множество, то отображение $\psi_{\langle t_1, \dots, t_k \rangle}$ является подстановкой на множестве B .

Если для кортежа $\langle t_1, \dots, t_k \rangle$ выполняется $t_m = 0$ для всех $m \neq i$, обозначим $\psi_{\langle t_1, \dots, t_k \rangle}$ через ψ_{i, t_i} . Покажем, что при любом $i \in \{1, \dots, k\}$,

ψ_{i,t_i} сохраняет значения предикатов из Σ . Для определенности положим $i = 1$ (для остальных значений i рассуждение проводится аналогично).

Пусть P — m -местный предикатный символ сигнатуры Σ и $(b_1, \dots, b_t) \in P_{\mathcal{B}}$. Тогда, по определению системы $\mathcal{B}$ как фактор-системы по a -конгруэнции, существуют $\bar{l} = \langle l_1, \dots, l_k \rangle$ и элементы

$$\langle a_{i_1, j_1}, \bar{l} \rangle, \dots, \langle a_{i_m, j_m}, \bar{l} \rangle \in A_{\bar{l}},$$

для которых $(\langle a_{i_1, j_1}, \bar{l} \rangle, \dots, \langle a_{i_m, j_m}, \bar{l} \rangle) \in P_{A_{\bar{l}}}$ и $b_r = \theta(\langle a_{i_r, j_r}, \bar{l} \rangle)$ при $r \in \{1, \dots, m\}$. Обозначим через $\bar{l}'$ кортеж

$$\langle (l_1 - t_1)(\text{mod}(q_1^2 - q_1 + 1)), l_2, \dots, l_k \rangle.$$

Очевидно, отображение $\varphi_{\bar{l}}^{-1} \circ \varphi_{\bar{l}'}^{-1}$ является изоморфизмом между $\mathcal{A}_{\bar{l}}$ и $\mathcal{A}_{\bar{l}'}$. Следовательно, в системе $\mathcal{A}_{\bar{l}'}$ выполняется

$$(\langle a_{i_1, j_1}, \bar{l}' \rangle, \dots, \langle a_{i_m, j_m}, \bar{l}' \rangle) \in P_{\mathcal{A}_{\bar{l}'}}.$$

Таким образом, биекция ψ_{1,t_1} сохраняет значения предикатов из Σ .

Так как $\psi_{\langle t_1, \dots, t_k \rangle} = \psi_{1,t_1} \circ \dots \circ \psi_{k,t_k}$, то $\psi_{\langle t_1, \dots, t_k \rangle}$ сохраняет предикаты.

Покажем, что для любых элементов $b, c \in B$ таких, что $\langle \{b\}, \Sigma \rangle \simeq \langle \{c\}, \Sigma \rangle$, существует автоморфизм из $\text{Aut}(\mathcal{B})$, переводящий b в c . Без ограничения общности можно считать, что $b = \theta(\langle a_{i_0}, l_1, \dots, l_k \rangle)$, $c = \theta(\langle a_{i_0}, r_1, \dots, r_k \rangle)$. Тогда отображение

$$\varphi_{\langle (l_1 - r_1)(\text{mod}(q_1^2 - q_1 + 1)), \dots, (l_k - r_k)(\text{mod}(q_k^2 - q_k + 1)) \rangle}$$

является изоморфизмом, переводящим b в c .

Таким образом, система $\mathcal{B}$ 1-ри-однородна и отображения $\varphi_{\bar{l}} \circ \chi_{\bar{l}}$ являются изоморфными вложениями системы $\mathcal{A}$ в систему $\mathcal{B}$.

Для завершения доказательства найдем верхнюю оценку для мощности системы $\mathcal{B}$. Пусть мощность $|A_i|$ равна n_i , $i \in \{1, \dots, k\}$. Тогда $n_1 + \dots + n_k = n$. Для каждого n_i существует q_i такой, что $n_i \leq q_i \leq 2n_i$ и $q_i \in \{1\} \cup \{2^s + 1 \mid s \in \omega\}$. Таким образом, чтобы достичь нужных мощностей расширений множеств A_i мощность множества A увеличивается не более чем в 2 раза. Тогда $|B| \leq f(q_1, \dots, q_k)$, где

$$f(q_1, \dots, q_k) = (q_1^2 - q_1 + 1) \cdot \dots \cdot (q_k^2 - q_k + 1).$$

В предположении $q_1 + \dots + q_k = 2n$ функция $f(q_1, \dots, q_k)$ принимает максимальное значение при $q_1 = \dots = q_k = \frac{2n}{k}$. Рассмотрим функцию $h(q) = f(q, \dots, q) = (q^2 - q + 1)^{\frac{2n}{q}}$. Для любого n эта функция принимает максимальное значение при $q \approx 3,3$ и $h(3,3) \leq 4^n$. $\square$

Список литературы

- [1] *Hrushovski E.* Extending partial isomorphisms of graphs // *Combinatorica*. 1992. V. 12. P. 204–218.
- [2] *Herwig B.* Extending Partial Automorphisms on Finite Structures // *Combinatorica*. 1995. V. 15. P. 365–371.
- [3] *Овчинникова Е.В.* О расширениях частичных изоморфизмов конечных полигонов над линейно упорядоченными моноидами // *Алгебра и теория моделей*, 6. Сборник трудов. Новосибирск: изд-во НГТУ, 2007. С. 45–48.
- [4] *Овчинникова Е.В.* 1-однородные расширения конечных предикатных структур // *Алгебра и теория моделей*, 7. Сборник трудов. Новосибирск: изд-во НГТУ, 2009. С. 54–59.
- [5] *Картези Ф.* Введение в конечные геометрии. — М.: Наука, 1980.
- [6] *Singer J.* A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1938. V. 43. P. 377 – 386.

О РЕШЕТКАХ ПОДМНОЖЕСТВ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

А.Г. Пинус

Новосибирский государственный технический университет,
пр К. Маркса, 20, Новосибирск, 630092, Россия

e-mail: algebra@nstu.ru

В системе понятий алгебраической геометрии универсальных алгебр (см., к примеру, [1, 2, 3, 4]) одно из центральных мест занимает понятие алгебраического множества.

Напомним, что подмножество $B \subseteq A^n$, где n — натуральное число, а A — основное множество некоторой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ называется n -мерным алгебраическим, если существует система уравнений

$$\{t_1^i(x_1, \dots, x_n) = t_2^i(x_1, \dots, x_n) | i \in I\}$$

сигнатуры σ (здесь t_j^i — термы этой сигнатуры) таких, что B есть совокупность всех решений этой системы в алгебре $\mathfrak{A}$. Совокупность всех n -мерных алгебраических множеств алгебры $\mathfrak{A}$ образует, относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$, полную решетку $Alg_n \mathfrak{A}$ (*решетку n -мерных алгебраических подмножеств алгебры $\mathfrak{A}$*). При этом операция $\wedge$ на $Alg_n \mathfrak{A}$ совпадает с операцией теоретико-множественного пересечения $\cap$, в то время как операция $\vee$ может быть отличной от операции $\cup$.

Абстрактные свойства решеток $Alg_n \mathfrak{A}$ связаны со свойствами алгебры $\mathfrak{A}$. К примеру, одноэлементность решетки $Alg_1 \mathfrak{A}$ равносильна идемпотентности алгебры $\mathfrak{A}$.

Действительно, если алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ идемпотентна, то множество решений любого σ -уравнения $t_1(x) = t_2(x)$ есть A и, тем самым, $Alg_1 \mathfrak{A} = \{A\}$. Обратное, если $f(x_1, \dots, x_n) \in \sigma$, то в силу того, что множество решений уравнения $f(x, \dots, x) = x$ (при условии $|Alg_1 \mathfrak{A}| = 1$) должно быть равно множеству A , алгебра $\mathfrak{A}$ идемпотентна.

Алгебру $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ назовем *равномерно n -конечной*, если существует натуральное m_n такое, что все n -порожденные подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ имеют не более чем m_n элементов. Алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ называется *равномерно локально конечной*, если она равномерно n -конечна для любого натурального n .

Для алгебр $\mathfrak{A}$ конечной сигнатуры условия равномерной n -конечности и конечности решетки $Alg_n \mathfrak{A}$ равносильны. Действительно, пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ — алгебра конечной сигнатуры σ и для любого кортежа $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$ подалгебра $\langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}}$ алгебры $\mathfrak{A}$ порожденная множеством $\{a_1, \dots, a_n\}$ не более чем m_n -элементна. Так как существует лишь конечное число попарно неизоморфных m_n -элементных алгебр сигнатуры σ с выделенными порождающими $a_1, \dots, a_n$, то существует лишь конечное число σ -термов от переменных $x_1, \dots, x_n$ имеющих на алгебре $\mathfrak{A}$ отличные друг от друга термальные функции. Тем самым, существует лишь конечное число попарно не эквивалентных на алгебре $\mathfrak{A}$ систем σ -уравнений от переменных $x_1, \dots, x_n$. То есть решетка $Alg_n \mathfrak{A}$ конечна.

Обратно: если решетка $Alg_n \mathfrak{A}$ конечна, то существует лишь конечное число попарно не эквивалентных на $\mathfrak{A}$ систем σ -уравнений, т.е. существует лишь конечное число σ -термов от переменных $x_1, \dots, x_n$ имеющих на алгебре $\mathfrak{A}$ отличные друг от друга термальные функции. Число этих функций и определяет число m_n мажорирующее мощности n -порожденных подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$.

Тем самым, для алгебр конечной сигнатуры равносильны условия:

- $\mathfrak{A}$ — равномерно локально конечна и
- все решетки $Alg_n \mathfrak{A}$ конечны.

Легко видеть, что для алгебр бесконечной сигнатуры это не так.

Представляет интерес дальнейшее исследование взаимосвязи свойств алгебр $\mathfrak{A}$ и решеток $Alg_n \mathfrak{A}$.

Естественным представляется и интерес к абстрактному описанию как отдельных решеток вида $Alg_n \mathfrak{A}$, так и последовательностей $\langle Alg_n \mathfrak{A} | n \in \omega \rangle$ для произвольных универсальных алгебр $\mathfrak{A}$. Этим вопросам и посвящена данная работа.

Теорема 1. *Для любой полной решетки L существует универсальная алгебра $\mathfrak{A}$ такая, что $L \cong Alg_1 \mathfrak{A}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение этой теоремы содержится в работе [4], однако доказательство ее приведенное там содержит неточности устраненные в приводимом далее. Прежде всего напомним, что полной решеткой L_0 подмножеств множества B называется любая решеточно упорядоченная отношением $\subseteq$ совокупность подмножеств L_0 множества B такая, что для любого $C \subseteq L_0$ $\inf C = \bigcap_{D \in C} D$. В частности, единственный элемент решетки L_0 это $\inf \emptyset = \bigcap_{D \in \emptyset} D = B$. Пусть L произвольная

полная решетка. Как хорошо известно (см. к примеру [5]) L допускает представление полной решеткой L_1 подмножеств некоторого множества C . Через L'_1 обозначим совокупность $L_1 \setminus \{C\}$ подмножеств множества C . Через T обозначим совокупность любых конечных последовательностей $\overline{B} = B_1, \dots, B_n$ элементов из L'_1 . Пусть $D = \{d_{\overline{B}} | \overline{B} \in T\}$ — совокупность попарно различных (для различных $\overline{B} \in T$) элементов, дизъюнктивная с C и $A = C \cup D$. Через P обозначим совокупность $L'_1 \cup \{A\}$. Очевидно, что P упорядоченная теоретико-множественным включением, является полной решеткой подмножеств множества A изоморфной решетке L . На множестве A определим алгебру $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ сигнатуры σ , состоящей из попарно различных символов $h_B (B \in L'_1)$ унарных функций, следующим образом:

$$h_B(a) = \begin{cases} a, & \text{если } a \in B \\ d_B, & \text{если } a \in A \setminus B \\ d_{B\overline{C}}, & \text{если } a = d_{\overline{C}}, \text{ где } \overline{C} \in T. \end{cases}$$

Здесь $B\overline{C}$ — результат конкатенации (приписывания) последовательности $\overline{C}$ вслед за символом B .

Таким образом,

$$B = \{a \in A | \mathfrak{A} \models h_B(a) = a\},$$

$$A = \{a \in A | \mathfrak{A} \models a = a\}$$

и мы имеем включение

$$P \subseteq Alg_1 \mathfrak{A}.$$

С другой стороны, для любого терма

$$t(x) = h_{B_n}(h_{B_{n-1}}(\dots(h_{B_1}(x))\dots)) \quad (t(x) = x)$$

сигнатуры σ через D_t обозначим множество $\bigcap_{i=1}^n B_i (A)$, а через $\bar{t}$ последовательность $B_n, B_{n-1}, \dots, B_1$. Для любых термов $t_1(x), t_2(x)$ отличных друг от друга и от терма x через $\bar{t}_1 \cap \bar{t}_2$ обозначим наибольший общий конечный интервал последовательностей $\bar{t}_1$ и $\bar{t}_2$. Таким образом, если $\bar{t}_1 \cap \bar{t}_2 = B_{m-1}, \dots, B_1$, то $\bar{t}_1 = \bar{t}'_1 B_m^1 \bar{t}_1 \cap \bar{t}_2$, $\bar{t}_2 = \bar{t}'_2 B_m^2 \bar{t}_1 \cap \bar{t}_2$, где $B_m^1 \neq B_m^2$ элементы из L'_1 и $\bar{t}'_1, \bar{t}'_2 \in T$. Из определения функций $h \in \sigma$ следует, что, если $\bar{t}_1 \cap \bar{t}_2 = B_{m-1}, \dots, B_1$, то

$$\{a \in A | \mathfrak{A} \models t_1(a) = t_2(a)\} = B_m^1 \cap B_m^2 \cap B_{m-1} \cap \dots \cap B_1.$$

Тем самым, включение $Alg_1 \mathfrak{A} \subseteq P$, а, вместе с тем и равенство $Alg_1 \mathfrak{A} = P$ и, значит, изоморфизм решеток L и $Alg_1 \mathfrak{A}$ доказаны.

Таким образом, полнота — единственное абстрактное ограничение на решетки вида $Alg_1\mathfrak{A}$. Иначе обстоит дело для решеток вида $Alg_n\mathfrak{A}$, при $n > 1$.

Через $\text{Part } n$ обозначим решетку разбиений множества $\{1, 2, \dots, n\}$, отождествляя последнюю с решеткой эквивалентностей на этом множестве. Каждой эквивалентности Θ на множестве $\{1, \dots, n\}$ сопоставим систему уравнений

$$U_\Theta = \{x_i = x_j | i, j \in \{1, \dots, n\}, \Theta(i, j)\}$$

от переменных $x_1, \dots, x_n$ на алгебре $\mathfrak{A}$.

Пусть A_Θ — совокупность решений системы уравнений U_Θ в алгебре $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$. Очевидно, что отображение $\varphi(\Theta) = A_\Theta$ является, для неоднородных алгебр $\mathfrak{A}$, изоморфным вложением решетки $\text{Part}^* n$ (двойственной решетке $\text{Part } n$) в решетку $Alg_n\mathfrak{A}$. В том числе, это влечет мощностные ограничения на решетки $Alg_n\mathfrak{A}$ в случае их конечности (при $n > 1$). Отметим так же, что условия $|Alg_n\mathfrak{A}| = 1$ (при $n > 1$) и $|\mathfrak{A}| = 1$ равносильны.

При этом очевидно, что вложение φ таково, что для любой $\Theta \in \text{Part } n$, в интервал $[0, \varphi(\Theta)]$ решетки $Alg_n\mathfrak{A}$ изоморфно вложима решетка $Alg_{|n/\Theta|}\mathfrak{A}$.

Через $\text{Sym } n$ обозначим симметрическую группу на множестве $\{1, \dots, n\}$. Для любого уравнения

$$t_1(x_1, \dots, x_n) = t_2(x_1, \dots, x_n)$$

через $\pi(t_1 = t_2)$ обозначим уравнение

$$t_1(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) = t_2(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}).$$

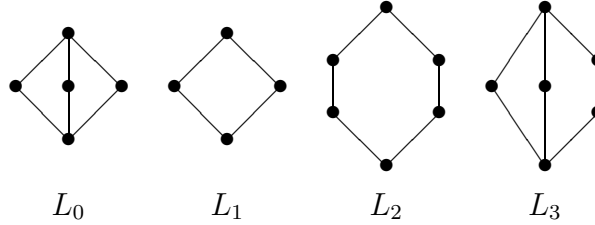
Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ и любой системы $J(x_1, \dots, x_n)$ уравнений сигнатуры σ через A_J обозначим совокупность решений этой системы в алгебре $\mathfrak{A}$. Тогда, для любого $\pi \in \text{Sym } n$ отображение

$$\psi_\pi(A_J) = A_{\{\pi(t_1=t_2) | t_1=t_2 \in J\}}$$

является, очевидным образом, автоморфизмом решетки $Alg_n\mathfrak{A}$. Тем самым, группа $\text{Sym } n$ гомоморфно отображается в группу $\text{Aut } Alg_n\mathfrak{A}$ автоморфизмов решетки $Alg_n\mathfrak{A}$. В силу же того, что (для неоднородных алгебр $\mathfrak{A}$ для нетождественных $\pi \in \text{Sym } n$ отображения ψ_π на подрешетке $\varphi(\text{Part } n)$ решетки $Alg_n\mathfrak{A}$ так же нетождественны, то отображение $\psi : \text{Sym } n \rightarrow \text{Aut } Alg_n\mathfrak{A}$, где $\psi(\pi) = \psi_\pi$, является изоморфным вложением группы $\text{Sym } n$ в $\text{Aut } Alg_n\mathfrak{A}$. Тем самым, имеет место

Теорема 2. Для любого натурального n , для любой неодноэлементной алгебры $\mathfrak{A}$ в решетку $Alg_n \mathfrak{A}$ изоморфно вложима решетка двойственная решетке $Part\ n$, а в группу $Aut\ Alg_n \mathfrak{A}$ изоморфно вложима группа $Sym\ n$.

К примеру, рассмотрим решетки



Решетка L_0 двойственна решетке $Part\ 3$. Тем самым, ни для какой неодноэлементной алгебры $\mathfrak{A}$ решетка $Alg_3 \mathfrak{A}$ не может быть изоморфна ни какой из решеток L_1, L_2, L_3 . Для L_1 это следует из мощностных соображений, т.к. $|L_1| < |L_0|$. Для L_2 — из того, что L_0 не вложима в L_2 . Для L_3 : существуют два вложения решетки L_0 в L_3 , но $Aut\ L_3 \cong Sym\ 2$ и, значит, $Sym\ 3 \cong Aut\ L_0$ не вложима в $Aut\ L_3$.

Представляет интерес выявление других абстрактных свойств решеток вида $Alg_n \mathfrak{A}$ и последовательностей $\langle Alg_n \mathfrak{A} | n \in \omega \rangle$.

В частности отметим, что если местность сигнатурных функций алгебры $\mathfrak{A}$ не превышает n и $Alg_n \mathfrak{A} \cong Part^* n$, то с учетом указанного выше вложения φ решетки $Part^* n$ в решетку $Alg_n \mathfrak{A}$ очевидно (рассматривая решения в алгебре уравнений вида $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$ для сигнатурных функций f), что эти сигнатурные функции суть обобщенные селекторы. Последнее же и влечет, что все термальные функции алгебры $\mathfrak{A}$ так же обобщенные селекторы и, значит, $Alg_k \mathfrak{A} \cong Part^* k$ для любых натуральных чисел k . Напомним, что обобщенными селекторами на множестве A называются функции вида

$$f(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} x_{i_1}, & \text{если } D_1(x_1, \dots, x_m), \\ \vdots \\ x_{i_s}, & \text{если } D_s(x_1, \dots, x_m), \end{cases}$$

где $D_j(x_1, \dots, x_m)$ (при $1 \leq j \leq s$) попарно несовместные условия вида $x_{i_r} = x_{i_p}$ дизъюнкция которых тождественно истинна.

Список литературы

- [1] B.I.Plotkin. Some Notions of Algebraic Geometry in Universal Algebra// Algebra Anal., 1997, v.9, № 4, p. 224-248.

-
- [2] E.Daniyarova, A.Myasnikov, V.Remeslennikov. Unification theorems in algebraic geometry// Algebra and Discreta Math., v.1, 2008, p. 80-112.
 - [3] E.Daniyarova, A.Myasnikov, V.Remeslennikov. Algebraic geometry over algebraic structures. Foundations// J. Algebra, submitted, arXiv: 1002.3562 v2 math AG .
 - [4] А.Г.Пинус. О геометрически близких алгебрах// Algebra and Model Theory 7, Из-во НГТУ, Новосибирск, 2009, с. 85-95.
 - [5] В.Н.Салий. Решетки// Общая алгебра. т.2, Из-во Наука, М., 1991, с. 192-292.

КЛАССИФИКАЦИЯ СЧЁТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПОЛНЫХ ТЕОРИЙ ОДНОМЕСТНЫХ ПРЕДИКАТОВ С ПОДСТАНОВКОЙ ОГРАНИЧЕННОГО ПОРЯДКА

Р.А. Попков*

Новосибирский государственный технический университет,
пр. Карла Маркса, 20, Новосибирск, 630092, Россия
e-mail: r-popkov@yandex.ru

В монографии [2] поставлена проблема описания предпорядков Рудин – Кейслера и функций распределения предельных моделей для различных естественных классов алгебраических систем. В данной статье рассматриваются полные теории одноместных предикатов с разным числом неглавных типов, выясняется изменения числа типов и их реализуемости после обогащения сигнатуры подстановкой ограниченного порядка.

1 Предварительные сведения.

Взаимосвязь счётных моделей будем прослеживать с помощью следующего обобщения предпорядка Рудин – Кейслера:

Рассмотрим множество X_T типов изоморфизма счётных моделей теории T с заданным на нём рефлексивным, транзитивным отношением подчинения $\leq$: $\mathbb{M}_i \leq \mathbb{M}_j \Leftrightarrow \text{FD}(\mathbb{M}_i) \subseteq \text{FD}(\mathbb{M}_j)$, и обозначим полученную систему $\langle X_T, \leq \rangle$ через $\text{CM}(T)$. Отношение эквивалентности $\sim$ на предупорядоченном множестве $\langle X_T, \leq \rangle$ зададим соотношением $a \sim b \Leftrightarrow a \leq b$ и $b \leq a$. Заметим, что $\mathcal{X}_T = \langle X_T / \sim, \leq \rangle$, где $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow y_1 \leq y_2$ для любых $y_1 \in x_1, y_2 \in x_2$, является частично упорядоченным множеством. Если из контекста ясно о какой теории идёт речь, индекс T будет опускаться.

*Работа финансово поддержана грантом Новосибирского государственного технического университета.

Линейно упорядоченное подмножество в частично упорядоченном множестве $\mathcal{X}$ называется *цепью*. Зафиксируем элемент $x \in X/\sim$. Будем говорить, что он находится на (0_x) -уровне. $((\lambda + 1)_x)$ -уровнем системы $\mathcal{X}$ будем называть множество покрывающих элементов для элементов (λ_x) -уровня. Если x — наименьший класс, то (λ_x) -уровень будем называть λ -уровнем. Супремум мощностей цепей будем называть *высотой* и обозначать $H(\mathcal{X})$. Супремум мощностей попарно несравнимых элементов, находящихся на N -уровне будем называть *шириной* λ -уровня и обозначать $W(\mathcal{X}(\lambda))$.

2 Теории одноместных предикатов.

Будем рассматривать далее счётную сигнатуру $\Sigma = \langle P_0, \dots, P_n, \dots \rangle$, состоящую из одноместных предикатных символов. В [1] показано, что данная теория допускает элиминацию кванторов. Следовательно, множества, изолирующие 1-типы, состоят из формул, имеющих вид

$$P_0^{\delta_0}(x) \wedge P_1^{\delta_1}(x) \wedge \dots \wedge P_n^{\delta_n}(x) \wedge \dots,$$

где $\delta_i \in \{0, 1\}$ и $P^0(x) = \neg P(x)$, $P^1(x) = P(x)$. Множества, изолирующие n -типы состоят из формул, имеющих вид

$$\bigwedge_{i,j} (x_i \approx x_j)^{\delta_{i,j}} \wedge \bigwedge_{l,i} \varphi_l(x_i),$$

где $\varphi_l(x_i)$ — формулы, составляющие множества, изолирующие 1-типы $p(x_i) \subseteq p(x_1, \dots, x_n)$.

Счётное множество 1-типов $U \subseteq S_x^1(\emptyset)$ называется *модельным*, если U содержит все главные 1-типы и для любой произвольной совместной формулы $\varphi(x)$ существует тип $p(x)$ такой, что $\varphi(x) \in p(x)$.

Пусть K — класс всех модельных множеств, тогда:

1. $U \in K \Rightarrow |U| = \omega$;
2. $U \in K, U \subseteq V, |V| \leq \omega \Rightarrow V \in K$;
3. $V \subseteq U \in K, |V| < \omega, V$ не содержит главных типов $\Rightarrow (U \setminus V) \in K$.

Поясним данное свойство: Пусть некоторая формула φ принадлежит типу p , ψ — формула, отделяющая типы p и p' , $\psi \in p$, $\psi \rightarrow \varphi$. Тогда формула $\varphi \wedge \neg\psi$ принадлежит типу p' . Следовательно, $\varphi \in p'$. То есть при удалении одного неглавного типа, содержащего формулу φ найдётся другой неглавный тип, содержащий её.

Рассмотрим теорию независимых одноместных предикатов $P_0, \dots, P_n$ с аксиомами $\exists x(P_0^{\delta_0}(x) \wedge \dots \wedge P_n^{\delta_n}(x))$, где $\delta_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{0, n}$, $n \in \omega$. Поставим в соответствие последовательностям формул $P_0^{\delta_0(x)}, \dots, P_n^{\delta_n(x)}, \dots$

последовательности $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n, \dots$. Тогда примером модельного множества можно считать счётное множество формул U соответствующих множеству W последовательностей нулей и единиц, таких, что для любого кортежа нулей и единиц этот кортеж является началом некоторой последовательности из W .

Пусть $f : S_x^1(\emptyset) \rightarrow \omega + 1$ — функция распределения числа реализаций типов в некоторой счётной модели $\mathfrak{M}$, то есть для любого типа $p(x)$ неотрицательное значение $f(p(x))$ показывает число реализаций типа $p(x)$ в $\mathfrak{M}$. Если тип $p(x) \in S(\emptyset)$ главный, то его число реализаций одинаково в любой счётной модели, а если $p(x)$ неглавный, то $f(p(x))$ может произвольно варьироваться в пределах от 0 до ω . Через $\mathfrak{M}(f)$ будем обозначать модель, реализующую типы согласно функции f .

Предложение 1. *Для любого модельного множества U существует модель $\mathfrak{M}$, реализующая данное модельное множество.*

Доказательство. Достаточно взять модель, реализующую все главные типы и имеющую хотя бы по одной реализации каждого неглавного типа из модельного множества. $\square$

Предложение 2. *Если f — функция распределения для счётной модели, то $\sum_{p_i \in S_x^1(\emptyset)} f(p_i) = \omega$. Верно и обратное.*

Доказательство. Ясно, что если модель счётная, то она содержит счётное число реализаций каких-то типов. С другой стороны, если согласно некоторой функции дано счётное число реализаций типов, то для модели с данными реализациями функция f является функцией распределения. $\square$

Теорема 3. *Пусть f и g — функции распределения числа реализаций типов моделей $\mathfrak{M}(f)$ и $\mathfrak{M}(g)$ рассматриваемой теории T . Тогда $\mathfrak{M}(f) \simeq \mathfrak{M}(g)$ если и только если $f = g$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}(f) \simeq \mathfrak{M}(g)$. Тогда каждой реализации типа p в модели $\mathfrak{M}(f)$ взаимно однозначно соответствует реализация типа p в модели $\mathfrak{M}(g)$. Следовательно, $f = g$.

Пусть $f(p) = g(p) = \lambda$, $\lambda \in \omega + 1$. Перенумеруем все типы $p_n(x)$, $n \in \omega$, реализуемые согласно функции $f = g$. Построим изоморфизм F между $\mathfrak{M}(f)$ и $\mathfrak{M}(g)$ индукцией по n . На начальном шаге существует частичный изоморфизм F_0 , взаимно однозначно переводящий все реализации типа p_0 в модели $\mathfrak{M}(f)$ во все реализации типа p_0 в модели $\mathfrak{M}(g)$. Допустим, что для n типов $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ существует частичный изоморфизм F_n , взаимно однозначно переводящий реализации данных типов в модели

$\mathfrak{M}(f)$ в соответствие реализации этих типов в модели $\mathfrak{M}(g)$. Так как $f(p_n) = g(p_n)$, то существует биекция G_n между всеми реализациями типа p_n в моделях $\mathfrak{M}(f)$ и $\mathfrak{M}(g)$, $F_{n+1} \rightleftharpoons F_n \cup G_n$. После прохождения всех типов получим изоморфизм $F = \bigcup_{n \in \omega} F_n : \mathfrak{M}(f) \simeq \mathfrak{M}(g)$. $\square$

Рассмотрим полные счётные теории одноместных предикатов с различным числом неглавных 1-типов: $0, 1, 2 \leq m < \omega, \omega, 2^\omega$.

Теории, все типы которой изолированные.

Для данных теорий справедлива теорема Рыль-Нардзевского, т.е. теории ω -категоричны и система $\mathcal{X}$ состоит из одной точки — простой модели, $H(\mathcal{X}) = 1$, $W(\mathcal{X}(0)) = 1$.

Теории с ненулевым, не более чем счётным, числом неглавных 1-типов.

Для данных теорий справедлива теорема существования для насыщенных моделей. Следовательно, теории имеют и простую модель, находящуюся а 0-уровне. Модели на λ -уровнях ($\lambda > 0$) существуют по теореме компактности, $H(\mathcal{X}) = \omega$. Элементы и характеристики систем $\mathcal{X}$ теорий с конечным числом неглавных 1-типов приведены в таблице 1, со счётным — в таблице 2, m — число неглавных 1-типов. Через $\mathfrak{M}(\langle p_1, n_1 \rangle, \dots, \langle p_m, n_m \rangle, \dots)$ обозначаются модели, имеющие n_1 реализаций типа p_1 , n_2 реализаций типа p_2 и т.д.

Таблица 1: Теории с конечным числом неглавных 1-типов.

	$m = 1$	$2 \leq m < \omega$
Модели на λ -уровнях, $\lambda \in \omega$	$\mathfrak{M}(\langle p_1, \lambda \rangle)$	$\mathfrak{M}(\langle p_1, n_1 \rangle, \dots, \langle p_m, n_m \rangle)$
Предельные модели	$\mathfrak{M}(\langle p_1, \omega \rangle)$	$\mathfrak{M}(\langle p_1, \mu_1 \rangle, \dots, \langle p_m, \mu_m \rangle)$
Насыщенная модель	$\mathfrak{M}(\langle p_1, \omega \rangle)$	$\mathfrak{M}(\langle p_1, \omega \rangle, \dots, \langle p_m, \omega \rangle)$
$W(\mathcal{X}(\lambda)), \lambda \in \omega$	1	C_{N+m-1}^{m-1}
$W(\mathcal{X}(\omega))$	1	ω

Таблица 2: Теории со счётным числом неглавных 1-типов.

	$m = \omega$
Модели на λ -уровнях, $\lambda \in \omega$	$\mathfrak{M}(\langle p_1, n_1 \rangle, \dots, \langle p_m, n_m \rangle, \dots)$
Предельные модели	$\mathfrak{M}(\langle p_1, \mu_1 \rangle, \dots, \langle p_m, \mu_m \rangle, \dots)$
Насыщенная модель	$\mathfrak{M}(\langle p_1, \omega \rangle, \dots, \langle p_m, \omega \rangle, \dots)$
$W(\mathcal{X}(\lambda)), \lambda \in \omega$	ω
$W(\mathcal{X}(\omega))$	2^ω

$$\sum_{i=1}^m n_i = \lambda, \lambda \in \omega; \sum_{i=1}^m \mu_i = \omega.$$

Теории с континуумом 1-типов.

У теорий с континуумом типов возможны две ситуации: теория имеет простую модель, теория не имеет простой модели. Если есть простая модель, то она находится на 0-уровне. Насыщенной модели нет. Элементы и характеристики системы $\mathcal{X}$ для данных теорий приведены в таблице 3.

Таблица 3: Теории с континуумом типов и простой моделью.

Модели на λ -уровнях, $\lambda \in \omega$	$\mathfrak{M}(\langle p_1, n_1 \rangle, \dots, \langle p_m, n_m \rangle, \dots)$
Предельные модели	$\mathfrak{M}(\langle p_1, \mu_1 \rangle, \dots, \langle p_m, \mu_m \rangle, \dots)$
$W(\mathcal{X}(\lambda)), \lambda > 0$	2^ω

$$\sum_{i=1}^m n_i = N, \sum_{i=1}^m \mu_i = \omega$$

Если нет простой модели, то для определения 0-уровня воспользуемся модельным множеством.

Будем считать, что на (0_x) -уровне находится модель $\mathfrak{M}(U)$, реализующая некоторое модельное множество U и называть его 0-уровнем. Так как из модельного множества можно убирать неглавные типы при условии сохранения модельности, то будем рассматривать не только λ -уровни, но и $(-\lambda)$ -уровни. Если $g(p_i) = f(p_i) - \nu_i$, $\sum \nu_i = \lambda$, то модель $\mathfrak{M}(g)$ находится на $(-\lambda)$ -уровне. Насыщенной модели нет. $H(\mathcal{X}) = \omega$. Элементы и характеристики системы $\mathcal{X}$ для теорий с континуумом типов без простой модели приведены в таблице 4.

Через $\mathfrak{M}(f, \langle p_1, n_1 \rangle, \dots, \langle p_m, n_m \rangle, \dots)$ обозначена модель, реализующая типы из модельного множества U согласно функции f и типы $p_i \in S_x^1(\emptyset) \setminus U$.

Таблица 4: Теории с континуумом типов без простой модели.

Модели на λ -уровнях	$\mathfrak{M}(f, \langle p_1, \mu_1 \rangle, \dots, \langle p_m, \mu_m \rangle, \dots)$
Модели на $(-\lambda)$ -уровнях	$\mathfrak{M}(\langle q_1, f(q_1) - \nu_1 \rangle, \dots, \langle q_l, f(q_l) - \nu_l \rangle, \dots)$
$W(\mathcal{X}(\lambda))$	2^ω
$W(\mathcal{X}(-\lambda))$	ω

$$\sum_{i \geq 1} \mu_i = \lambda, \lambda \in \omega + 1, p_1, \dots, p_m, \dots \in S_x^1(\emptyset) \setminus U;$$

$$\sum_{i \geq 1} \nu_i = \lambda, q_1, \dots, q_l, \dots \in U$$

Пример теории независимых одноместных предикатов показывает, что в отличие от класса малых теорий в классе теорий с континуальным числом типов отношение подчинения $\leq$ на множестве типов изоморфизма может не иметь наименьшего элемента, являющегося типом изоморфизма простой модели.

Теорема 4. Пусть T_1 и T_2 — счётные теории одноместных предикатов, тогда соотношение $\text{CM}(T_1) \simeq \text{CM}(T_2)$ равносильно одному из следующих трёх условий:

- 1) T_1 и T_2 имеют одинаковое, не более чем счётное, число неглавных 1-типов;
- 2) T_1 и T_2 имеют континуальное число типов и простую модель;
- 3) T_1 и T_2 имеют континуальное число типов и не имеют простой модели.

Доказательство. Пусть $\text{CM}(T_1) \simeq \text{CM}(T_2)$. Тогда $H(\mathcal{X}_{T_1}(\lambda)) = H(\mathcal{X}_{T_2}(\lambda))$, следовательно, между элементами соответствующих уровней можно установить взаимно однозначное соответствие. Так как ширина λ -уровней определяется шириной 1-уровня, ширина $(-\lambda)$ -уровня (если он есть) определяется шириной (-1) -уровня, а ширина 1-уровня определяется числом неглавных типов (ширина (-1) -уровня всегда счётная), то всё сводится к соответствующим трём ситуациям.

Обратно, пусть выполняется одно из трёх условий. Тогда существует биекция $\xi : S_x^1(T_1) \setminus Y_1 \leftrightarrow S_x^1(T_2) \setminus Y_2$ (Y_1, Y_2 множества главных типов в $S_x^1(T_1), S_x^1(T_2)$ соответственно), то есть для любого типа $p \in S_x^1(T_1) \setminus Y_1$, $f(p) = g(\xi(p))$, $p \in S_x^1(T_1)$. Поставим в соответствие каждой модели $\mathfrak{M}(f)$ модель $\mathfrak{M}(g)$. Пусть $x_1, x_2 \in X_{T_1}$ и им соответствуют модели $\mathfrak{M}(f_1)$ и $\mathfrak{M}(f_2)$. Тогда $x_1 \leq x_2$ означает, что $f_1(p) \leq f_2(p)$ для всех $p \in S_x^1(T_1)$. Пусть $\varphi : X_{T_1} \leftrightarrow X_{T_2}$, $\varphi(x_1)$ соответствует модель $\mathfrak{M}(g_1)$, $\varphi(x_2)$ — модель $\mathfrak{M}(g_2)$. Тогда для любых типов $\xi(p) \in S_x^1(T_2)$ $g_1(\xi(p)) \leq g_2(\xi(p))$, что равносильно тому, что $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$, то есть сохраняется отношение подчинения. Следовательно $\text{CM}(T_1) \simeq \text{CM}(T_2)$. $\square$

3 Теории одноместных предикатов с подстановкой.

Рассмотрим теории одноместных предикатов, обогащённые подстановкой F ограниченного порядка L , действующий на несущем множестве счётной модели данной теории. Множества формул, изолирующие 1-типы, состоят из формул вида $\exists x\varphi(x, y)$, где

$$\varphi(x, y) = (F^s(x) \approx y)^\delta \wedge \bigwedge_r P_r^{\delta_r}(y).$$

Множества формул, изолирующих n -типы, состоят из формул вида $\exists y\varphi(x_i, y)$ и $\varphi(x_i, x_j)$.

Будем называть типы $p(x)$ и $q(x)$ *связанными подстановкой F* , если существует такое число m , что множество $p(x) \cup q(y) \cup \{F^m(x) = y\}$ совместно. Реализация некоторого типа влечёт реализацию связанного с ним.

Далее будем обозначать главные типы $Col_i(x)$, неглавные $p_i(x)$.

Образ и прообраз подстановки принадлежат одному типу. Имеем $F(a) = b$, $Col_i(a)$, $Col_i(b)$, $i \in \omega$, где a и b — элементы счётной системы $\mathfrak{M}$ сигнатуры Σ . Тогда все реализации главного типа $Col_i(x)$ в $\mathfrak{M}$ являются реализациями главных типов

$$\exists y(F^m(x) \approx y \wedge Col_i(x) \wedge Col_i(y)).$$

Рассмотрим неглавный тип $p_1(x) \in S(\emptyset)$. Предположим, что совместно множество $r(x, y) = \{F(x) \approx y\} \cup p_i(x) \cup p_1(y)$ и (a_0, a_1) — реализация типа r . Тогда $F(a_0) = a_1$ и для некоторых реализаций $a_2, a_3, \dots, a_{m-1}$ типа p_1 выполняется $F^2(a_0) = F(a_1) = a_2$, $F^3(a_0) = F(a_2) = a_3$, $\dots$, $F^m(a_0) = F(a_{m-1}) = a_0$. Если для любой реализаций данного типа p_1 длина цикла постоянна, то число реализаций типа p_1 кратно длине цикла m_1 . Модель $\mathfrak{M}(\langle p_1, k_1 \rangle, \dots, \langle p_j, k_j \rangle, \dots)$ преобразуется в модель

$$\widetilde{\mathfrak{M}}(\langle p_1, m_1 k_1 \rangle, \dots, \langle p_l, k_l \rangle, \dots), \quad m_l \leq L.$$

Если длины циклов различны, то модель $\mathfrak{M}(\langle p_1, k_1 \rangle, \dots, \langle p_j, k_j \rangle, \dots)$ преобразуется в модель

$$\widetilde{\mathfrak{M}}(\langle q_1, m_1 k_1 \rangle, \dots, \langle q_l, m_l k_l \rangle, \dots),$$

$m_1, \dots, m_l, \dots \leq L, q_l$ — неглавные типы, расширяющие типы p_j при обогащении сигнатуры подстановкой.

Образ и прообраз подстановки принадлежат разным типам (образы реализаций главных типов — главным, неглавным — неглавным).

Имеем $F(a) = b$, $Col_i(a)$, $Col_j(b)$, $i, j \in \omega$, $i \neq j$ где a и b — элементы счётной системы $\mathfrak{M}$ сигнатуры Σ . Тогда все реализации главного типа $Col_i(x)$ в $\mathfrak{M}$ являются реализациями главных типов

$$\exists y (F^m(x) \approx y \wedge Col_i(x) \wedge Col_j(y)).$$

Рассмотрим неглавные типы $p_i(x), p_j(x) \in S(\emptyset)$. Предположим, что совместно множество $r(x, y) = \{F(x) \approx y\} \cup p_i(x) \cup p_j(y)$ и (a_0, a_1) — реализация типа r . Тогда $F(a_0) = a_1$ и для некоторых реализаций $a_2, a_3, \dots, a_{m-1}$ типа p выполняется $F^2(a_0) = F(a_1) = a_2$, $F^3(a_0) = F(a_2) = a_3, \dots, F^m(a_0) = F(a_{m-1}) = a_0$. Таким образом, одна реализация типа p_i влечёт реализации $m - 1$ типов p_j , связанных с типом p_i циклом длины m . Если образы одного типа постоянны, то это приводит к тому, что ширина новой системы $\tilde{\mathcal{X}}$ уменьшается: $W(\tilde{\mathcal{X}}(1)) = W(\mathcal{X}(1)) - (m - 1)$. Ширина N -уровней ($N > 1$) определяется новой шириной 1-уровня. Модель $\mathfrak{M}(\langle p_1, k_1 \rangle, \dots, \langle p_j, k_j \rangle, \dots)$ преобразуется в модель

$$\tilde{\mathfrak{M}}(\langle q_1, k_1 \rangle, \dots, \langle q_l, k_l \rangle, \dots),$$

q_l — неглавные типы, расширяющие типы p_j при обогащении сигнатуры подстановкой. Если порядок подстановки равен числу неглавных 1-типов, то реализация одного неглавного 1-типа влечёт реализацию всех неглавных 1-типов

Образ и прообраз подстановки принадлежат разным типам.

Имеем конечное число неглавных типов $p_1, p_2, \dots, p_m$ сигнатуры Σ . Если главные типы связываются только с неглавными, то связь главного типа Col_i с неглавным типом p_i описывается формулами $F(x) \approx y$, $Col_i(x)$, $\varphi_i(y)$, где φ_i — формула, позволяющая отличить неглавный тип p_i от остальных неглавных типов. В этом случае элементы y , являвшиеся элементами неглавных типов, после обогащения сигнатуры подстановкой становятся элементами главного типа. Также, в силу теоремы компактности, образуются неглавные типы q_j , реализации которых связаны только с реализациями неглавных типов p_i .

Если реализации главных типов связываются не только с реализациями неглавных типов, но и с окрестностями неглавных типов, то связь элементов типов Col_i с данными окрестностями описываются следующими формулами:

$$F(x) \approx y, Col_i(x), Col_1(y);$$

$$F(x) \approx y, Col_i(x), Col_2(y);$$

...

$$F(x) \approx y, Col_i(x), Col_j(y);$$

...

Таким образом, при обогащении сигнатуры Σ подстановкой ограниченного порядка возможно увеличение числа неглавных типов с конечного числа до счётного.

Если имеется счётное число неглавных типов сигнатуры Σ , то элемент неглавного типа может стать элементом главного типа только в том случае, если существует конечная формула ψ , отделяющая любой неглавный тип от остальных неглавных типов. Если такой формулы нет, то все реализации неглавных типов сигнатуры Σ становятся реализациями неглавных типов обогащённой сигнатуры.

В случае континуума типов невозможно одной конечной формулой отделить любой неглавный тип от остальных неглавных типов, следовательно, неглавных типов при обогащении сигнатуры Σ так же останется континуум.

Таким образом, при обогащении сигнатуры Σ подстановкой ограниченного порядка сохраняется ω -категоричность и малость теории T . При обогащении теорий с конечным числом неглавных 1-типов число несвязанных неглавных типов может меняться в пределах $(\omega + 1) \setminus \{0\}$.

Теорема 5. Пусть T_1 и T_2 — счётные теории одноместных предикатов, тогда соотношение $CM(T_1) \simeq CM(T_2)$ равносильно одному из следующих трёх условий:

- 1) T_1 и T_2 имеют одинаковое, не более чем счётное, максимальное число попарно несвязанных неглавных 1-типов;
- 2) T_1 и T_2 имеют континуальное число типов и простую модель;
- 3) T_1 и T_2 имеют континуальное число типов и не имеют простой модели.

Спектральная функция принимает следующие значения:

1. $I(T, \omega) = 1 \Leftrightarrow$ неглавных типов нет;
2. $I(T, \omega) = \omega \Leftrightarrow$ конечное число неглавных 1-типов;
3. $I(T, \omega) = 2^\omega \Leftrightarrow$ счётное или континуальное число неглавных 1-типов.

Список литературы

- [1] Ершов Ю. Л. Математическая логика : Учеб. пособие для вузов/Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. – 6 изд., испр и доп. – М. : Физматлит, 2011 – 356 с.
- [2] Судоплатов С. В. Проблема Лахлана : Монография/С. В. Судоплатов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009 – 336 с.

BASES FOR PARTIALLY COMMUTATIVE NILPOTENT LIE ALGEBRAS

E.N. Poroshenko

Department of Algebra and Mathematical Logic,
Novosibirsk State Technical University,
Novosibirsk, Russia
e-mail: auto_stoper@ngs.ru

Let X be a finite set and let $G = \langle X, E \rangle$ be an undirected graph without loops with the set of vertices X and the set of edges E . Since the graph G is undirected the elements of E are unordered pairs that we denote by $\{x, y\}$, where $x, y \in X$.

Definition. *Let R be a commutative associative ring with unit. A partially commutative Lie algebra over R is just the Lie R -algebra under the ring R with the set of generators X and the set of defining relations*

$$(x_i, x_j) = 0, \text{ for } \{x_i, x_j\} \in E \quad (1)$$

(thereafter, we denote the Lie product of x and y) by (x, y) .

The graph G is called a defining graph for the corresponding algebra that we denote by $\mathcal{L}_R(G)$. If there is no ambiguity we omit the subscript and write $\mathcal{L}(G)$ instead of $\mathcal{L}_R(G)$.

So, the definition of the partially commutative Lie algebras is analogous to ones of other partially commutative structures such as groups, monoids etc. (see [4]).

The goal of this paper is to make up for a deficiency and find the bases for partially commutative Lie algebras explicitly. We are using totally different methods, namely the technique of the Gröbner–Shirshov bases.

Let us order the set X and extend it the linear order on X^* by two different ways.

1. $u < 1$ for any non-empty word u . By induction, $u < v$, if $u = x_i u'$, $v = x_j v'$, where $x_i, x_j \in X$, and either $x_i < x_j$ or $x_i = x_j$ and $u' < v'$. This is so called lexicographic order.

2. $u \prec v$ if either $\ell(u) < \ell(v)$ or $\ell(u) = \ell(v)$ and $u < v$, where $\ell(u)$ is the length of u . This order is denoted by deg-lex.

Define associative and non-associative Lyndon–Shirshov words as in [5] and [6]. Let us denote the set of all associative Lyndon–Shirshov words in X by $LSA(X)$ and the set of all non-associative Lyndon–Shirshov words in the same alphabet by $LS(X)$.

By [6], $LS(X)$ is a linear basis of the free Lie algebra with the set in generators X over an arbitrary field. We can easily conclude from this that this set is also a basis of the free Lie R -algebra. Let us denote this algebra by $\text{Lie}_R(X)$.

In [6], it was shown that for any associative Lyndon–Shirshov word there is the unique bracketing making a non-associative Lyndon–Shirshov word. It means that there exists a bijection $[\cdot] : LSA(X) \rightarrow LS(X)$. So, from now on, we denote the image of $u \in LSA(X)$ under this bijection by $[u]$. Finally, for $[u], [v] \in LS(X)$ we write $[u] < [v]$ ($[u] \prec [v]$) if $u < v$ ($u \prec v$ respectively). In a similar manner, we understand the notations: $[u] \leq [v]$, $[u] \preceq [v]$, $[u] > [v]$, $[u] \succ [v]$, $[u] \geq [v]$, $[u] \succeq [v]$.

To find a basis of a partially commutative Lie algebra we use the technique of Gröbner–Shirshov basis. The definition of Gröbner–Shirshov basis and the auxiliary definitions (for example the definition of a composition) were introduced in [5, 6, 7]. One can also find all necessary definitions in [1].

The main result we need is the following one:

Lemma 1 (CD-Lemma). *(see [1, 2]) S is a Gröbner–Shirshov basis if and only if the set of all Lyndon–Shirshov S -reduced words is a linear basis for $\text{Lie}_R(X)/\text{Id}(S)$.*

Finally, let us remind a couple properties of the Lyndon–Shirshov words that we are going to use in this paper.

Lemma 2. ([3], Lemma 2.12) *If $u, v \in LSA(X)$ and $u > v$, then $uv \in LSA(X)$.*

Lemma 3. *Let $[u], [v] \in LS(X)$ and $[u] > [v]$. In $\text{Lie}_R(X)$, we can write $([u], [v]) = [uv] + \sum_i [w_i]$, where $[w_i] \in LS(X)$ and $w_i < uv$.*

Доказательство. It follows clearly from [6] (Lemmas 2 and 3) and from Lemma 2. $\square$

Note that one can find English versions of [5, 6, 7] in [8].

To find a linear basis of $\mathcal{L}(G)$, let us find its Gröbner–Shirshov basis.

Let $G = \langle X, E \rangle$. Consider the free Lie R -algebra $\text{Lie}_R(X)$ whose set of generators coincides with the set of the vertices of G . Let us denote by $S(G)$ the set of Lyndon–Shirshov words $[u]$ such that $[u] = ([\tilde{u}], b)$, where $b \in X$, $[\tilde{u}]$ does not contain b , and $\{b, y\} \in E$ for any letter y appearing in $[\tilde{u}]$.

Note that if $[u] \in S(G)$ then its last letter is the second largest one in this word. The following statements hold:

Lemma 4. $S(G) \subseteq I(G)$, where $I(G)$ is the ideal of $\text{Lie}_R(X)$ generated by the set of relations (1).

Lemma 5. Let $[u], [v] \in S(G)$ and let the last letter of $[u]$ be equal to the first letter of $[v]$. Then the composition of $[u]$ and $[v]$ is trivial relative to $S(G)$.

It follows from Lemma 5 that the set $S(G)$ is a Gröbner–Shirshov basis of $\mathcal{L}_R(G)$. Therefore, the set of $S(G)$ -reduced words is a linear basis of this algebra.

For the partially commutative algebra $\mathcal{L}(G)$ with the set of generators X , let us define *partially commutative Lyndon–Shirshov words* (PCLS-words) by induction:

1. All elements in X are PCLS-words.
2. LS-word $[u]$ such that $\ell([u]) > 1$ is a PCLS-word if $[u] = ([v], [w])$, where $[v]$ and $[w]$ are PCLS-words, and the first letter of $[w]$ is not connected with at least one of the letters of $[v]$ in the graph G .
3. There are no other PCLS-words.

Now, we can formulate the main results of this paper.

Theorem 6. Let $G = \langle X, E \rangle$ be an undirected graph. Then the set of all PCLS-words is a linear basis of the partially commutative Lie algebra $L(G)$.

Let $G = \langle X, E \rangle$ be an undirected graph. We denote by $\mathcal{L}(G, n)$ the partially commutative nilpotent Lie algebra of the nilpotence degree n corresponding to the graph G , namely the algebra $\mathcal{L}(G)/I$, where I is an ideal consisting of all words with the lengths not less than n .

Theorem 7. Let $G = \langle X, E \rangle$ be an undirected graph. Then a linear basis of the Lie algebra $\mathcal{L}(G, n)$ consists of all PCLS-words with the lengths not greater than $n - 1$.

Acknowledgments: The author is very grateful to Prof. E. I. Timoshenko for very helpful criticism and suggestions about this paper.

References

- [1] Bokut, L. A. Unsolvability of the Equality Problem and Subalgebras of Finitely Presented Lie Algebras, *Math USSR Izvestia*, **6**, 1972, 1153–1199 (in Russian).
- [2] Bokut, L. A., Fong, Y., Ke, V.-F., Kolesnikov, P. S., Gröbner–Shirshov bases in algebra and conformal algebras, *Fundamental and applied mathematics*, **6(3)**, 2000, 679–716.
- [3] Bokut, L. A., Chen, Y., Gröbner–Shirshov Bases for Lie Algebras: After A. I. Shirshov, preprint, [arXiv:math.RA/08041254v1](https://arxiv.org/abs/math.RA/08041254v1).
- [4] Duchamp G., Krob D., Free Partially Commutative Structures, *Journal of Algebra*, **156**, 1993, 318–361.
- [5] Shirshov A. I. Subalgebras of Free Lie Algebras, *Math. Sbornik.*, **33(75)**, 2, (1953), 441–452 (in Russian).
- [6] Shirshov, A. I. On Free Lie Rings, *Math. sb.*, **45(87)**, 1958, 113–122 (in Russian).
- [7] Shirshov, A. I. Some Algorithmic Problems for Lie algebras, *Siberian Math. J.*, **3**, 1962, 292–296.
- [8] Shirshov A. I., *Selected works*, Birkhäuser, 2009.

ОБ АБЕЛЕВЫХ ПОЛУГРУППАХ

А.А. Степанова

Н.В. Трикашная

Дальневосточный федеральный университет,
ул. Суханова, 8, Владивосток, 690000, Россия

e-mail:
stepltd@mail.primorye.ru

e-mail: trik74@mail.ru

Свойство абелевости для алгебр было рассмотрено в [1 – 3]. В [4] описаны абелевы группоиды $\langle A; \cdot \rangle$, для которых $|A \cdot A| \leq 3$. В [5, 6] дана характеристика абелевых полугрупп, периодических абелевых групп, полупростых абелевых полугрупп. В работе [7] описаны абелевы конечные квазигруппы, абелевы группоиды с единицей. Кроме этого, в этой же работе исследуются абелевы полугруппы $\langle A; \cdot \rangle$ с условием $(*)$, т.е. с условием минимальности всех односторонних главных идеалом полугруппы $\langle A; \cdot \rangle$ или конечности множества $A \cdot A$. В данной статье удалось опустить условие конечности множества $A \cdot A$.

Напомним некоторые определения. Алгебра $\langle A; \cdot \rangle$, где $\cdot$ – бинарная операция, называется группоидом. Группоид с ассоциативной бинарной операцией называется полугруппой. Всюду ниже в выражениях вида $a \cdot b$, где a, b – элементы полугруппы $\langle A, \cdot \rangle$, знак операции $\cdot$, как правило, будет опускаться.

Алгебра называется абелевой, если для любой полиномиальной операции $t(x, y_1, \dots, y_n)$ и любых элементов $u, v, c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n$ алгебр из равенства $t(u, c_1, \dots, c_n) = t(u, d_1, \dots, d_n)$ следует $t(v, c_1, \dots, c_n) = t(v, d_1, \dots, d_n)$.

Нетрудно понять, что группа $\langle A; \cdot \rangle$ является абелевой алгеброй тогда и только тогда, когда она коммутативна. Заметим, что модуль и унарная алгебра являются абелевыми.

Следующие определения можно найти в [8]. Полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ называется прямоугольной связкой полугрупп, если существует семейство $\{A_{i\lambda} \mid i \in I, \lambda \in \Lambda\}$, являющееся разбиением множества A , причем $\langle A_{i\lambda}, \cdot \rangle$ – подполугруппы полугруппы $\langle A, \cdot \rangle$ и для любых $i \in I, \lambda, \mu \in \Lambda$ выполняется включение $A_{i\lambda} \cdot A_{j\mu} \subseteq A_{i\mu}$. Полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ называется раздуванием полугруппы $\langle B, \cdot \rangle$, если существует разбиение $\{X_a \mid a \in B\}$ множества A такое, что $a \in X_a$ и $x \cdot y = a \cdot b$ для любых $a, b \in B, x \in X_a, y \in X_b$. Полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ называется стационарной, если равенство $ub = uc$ влечет $vb = vc$ и равенство $bu = cu$ влечет $bv = cv$ для любых $u, v, b, c \in A$.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из определения абелевой алгебры.

Утверждение 1. *Полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ абелева тогда и только тогда, когда $\langle A, \cdot \rangle$ стационарна и для любых $a, b, c, d, u, v \in A$ равенство $aub = cud$ влечет равенство $avb = cvd$.*

Для полугруппы $\langle A, \cdot \rangle$ определим отношение эквивалентности на множестве A :

$$a\alpha b \Leftrightarrow \forall x \in A (ax = bx \text{ и } xa = xb)$$

для любых $a, b \in A$.

Замечание 2. *Полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ – раздувание полугруппы $\langle B, \cdot \rangle$ тогда и только тогда, когда для любого $a \in A$ существует $b \in B$ такой, что $a \alpha b$.*

Лемма 3. *Если полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ являются раздуванием прямоугольной связки $\langle T, \cdot \rangle$ абелевых групп, то $T = A \cdot A$.*

Доказательство. Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ – раздувание прямоугольной связки $\langle T, \cdot \rangle$ абелевых групп. Ясно, что $T \subseteq A \cdot A$. Если $a_1 \cdot a_2 \in A \cdot A$, то по определению раздувания полугруппы существуют $x, y \in T$ такие, что $x\alpha a_1$ и $y\alpha a_2$, т.е. $a_1 \cdot a_2 = x \cdot y \in T$ и $A \cdot A \subseteq T$. $\square$

Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ – полугруппа. Если Θ – отношение эквивалентности на A и $a \in A \cdot A$, то через Θ_a обозначим множество $(a/\Theta) \cap (A \cdot A)$, где a/Θ – класс эквивалентности Θ с представителем a . Введем следующие отношения на множестве A :

$$x\Phi y \Leftrightarrow \exists z (xz = yz),$$

$$x\Psi y \Leftrightarrow \exists z (zx = zy).$$

$$xXy \Leftrightarrow \exists z (zx = x \wedge zy = y \wedge z^2 = z),$$

$$xYy \Leftrightarrow \exists z (xz = x \wedge yz = y \wedge z^2 = z),$$

$$xZy \Leftrightarrow xXy \wedge xYy.$$

Замечание 4. *Если полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ – абелева, то*

$$x\Phi y \Leftrightarrow \forall z (xz = yz),$$

$$x\Psi y \Leftrightarrow \forall z (zx = zy).$$

и отношения Φ и Ψ являются отношениями эквивалентности на множестве A .

Лемма 5. Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ – абелева полугруппа. Тогда для любого идемпотента $f \in A$ и любых элементов x, y из A выполняется равенство $xy = xfy$.

Доказательство. Пусть $x, y \in A$, $f \in A$ – идемпотент. Тогда $xf = xff$. Так как полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ абелева, имеем $xy = xfy$. $\square$

Лемма 6. Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ – абелева полугруппа, все односторонние главные идеалы которой минимальны. Тогда

- 1) отношения X и Y являются отношениями эквивалентности на $A \cdot A$;
- 2) для любых идемпотентов $e, f \in A$ имеет место $\Phi_e \cap \Psi_f = \{ef\}$, причем ef – идемпотент;
- 3) для любого $a \in A \cdot A$ найдутся идемпотенты $e, f \in A$ такие, что $a \in X_e \cap Y_f$, причем $X_e \cap Y_f = Z_{ef}$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Покажем, что отношение X является отношением эквивалентности на $A \cdot A$. Докажем рефлексивность отношения X . Пусть $a = bc$ – произвольный элемент $A \cdot A$. В силу минимальности односторонних главных идеалов полугруппы $Ac = Aa$. Из того, что $a \in Ac$ следует, что $a \in Aa$, т.е. $a = da$ для некоторого $d \in A$. Пусть $e = dd$. Тогда $ea = dda = da = a$. Так как $ddda = da$, то $(ddd)\Phi d$. Тогда $e^2 = dddd = dd = e$. Следовательно, aXa для любого $a \in A \cdot A$.

Докажем транзитивность отношения X . Пусть aXb и bXc , где $a, b, c \in A \cdot A$, т.е. $ea = a, eb = b, fb = b, fc = c$ для некоторых идемпотентов $e, f \in A$. Из равенства $eb = fb$ в силу абелевости полугруппы $\langle A, \cdot \rangle$ следует $ea = fa = a$. Следовательно, aXc . Таким образом, отношение X является эквивалентностью на $A \cdot A$. Аналогично доказывается, что отношение Y также является отношением эквивалентности на $A \cdot A$.

Докажем утверждение 2). Пусть e, f – идемпотенты. Так как $eff = ef$ и $eeef = ef$, то $(ef)\Phi e$ и $(ef)\Psi f$, т.е. $ef \in \Phi_e \cap \Psi_f$. Пусть $g \in \Phi_e \cap \Psi_f$, $g = bc$, где $b, c \in A$. Так как $ge = ee$, то $bc b(ce) = b(ce)$, т.е. $(bc b)\Phi b$. Следовательно, $bc b c = bc$, т.е. $g^2 = g$, в частности, ef – идемпотент. Если $g, g' \in \Phi_e \cap \Psi_f$, то, поскольку g, g' – идемпотенты, $g = gg = gg' = g'g' = g'$. Таким образом, $X_e \cap Y_f = Z_{ef}$.

Докажем утверждение 3). Если $a \in A \cdot A$, то в силу рефлексивности отношения X существует идемпотент $e \in A$ такой, что aXe . Аналогично, существует идемпотент f такой, что aYf . Следовательно, $a \in X_e \cap Y_f$. По лемме 5 $a = ea = e(fa)$ и $a = ef = (ae)f$. Так как ef – идемпотент, то $a \in Z_{ef}$. Равенство $X_e \cap Y_f = Z_{ef}$ доказано. $\square$

Лемма 7. Если $\langle A, \cdot \rangle$ – абелева полугруппа, все односторонние главные идеалы которой минимальны, то $\langle A \cdot A, \cdot \rangle$ – прямоугольная связка абелевых групп

$$\{\langle Z_{ef}; \cdot \rangle \mid e, f - \text{идемпотенты}\},$$

причем $Z_{ef'} \subseteq Z_{ef} \cdot Z_{e'f'}$ для любых идемпотентов $e, f, e', f' \in A$.

Доказательство. Отношение Z является отношением эквивалентности на $A \cdot A$ как пересечение двух отношений эквивалентности.

Пусть $a \in A \cdot A$. По лемме 6 существует идемпотент g такой, что $a \in Z_g$. Следовательно, полугруппа $\langle A \cdot A, \cdot \rangle$ есть объединение абелевых групп $\langle Z_g, \cdot \rangle$, где g – идемпотент. Пусть $g \in A$ – произвольный идемпотент. Покажем, что $\langle Z_g, \cdot \rangle$ – абелева группа. Ясно, что $\langle Z_g, \cdot \rangle$ – полугруппа с единицей g . Покажем, что уравнение $ax = b$ имеет решение для любых $a, b \in Z_g$. По условию минимальности односторонних главных идеалов полугруппы $Ag = Abg$. Тогда $g = xbg$ для некоторого $x \in A$. Тогда $ag = axbg$ и $a = (ax)b$. Тогда по теореме 8 Z_g – абелева группа.

Пусть e, f, e', f' – идемпотенты. По лемме 6 fe' – идемпотент, а по лемме 5 имеет место равенство $efe'f' = ef'$. Покажем, что $Z_{ef} \cdot Z_{e'f'} = Z_{ef'}$. Если $a \in Z_{ef}$, $b \in Z_{e'f'}$, то по леммам 5 и 6 $ab = abef' = abe'f'ef' = abe'f'$ и $ab = ef'ab = ef'efab = efab$, т.е. $ab \in Z_{ef'}$ и $Z_{ef} \cdot Z_{e'f'} \subseteq Z_{ef'}$. Если $c \in Z_{ef'}$, то по леммам 5 и 6 $c = ef'cef' = (eff'cef')e'f'$, т.е. $c \in Z_{ef} \cdot Z_{e'f'}$ и $Z_{ef'} \subseteq Z_{ef} \cdot Z_{e'f'}$. Таким образом, полугруппа $\langle A \cdot A, \cdot \rangle$ является прямоугольной связкой абелевых групп $\{\langle Z_{ef}; \cdot \rangle \mid e, f - \text{идемпотенты}\}$. $\square$

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится факт.

Факт 8. [7] Пусть $\langle A; \cdot \rangle$ – группоид с единицей. Группоид $\langle A; \cdot \rangle$ является абелевой алгеброй тогда и только тогда, когда $\langle A; \cdot \rangle$ – коммутативная полугруппа, такая что для любых $a, b \in A$ уравнение $ax = b$ имеет не более одного решения в $\langle A; \cdot \rangle$.

Теорема 9. Пусть все односторонние главные идеалы полугруппы $\langle A, \cdot \rangle$ минимальны. Тогда полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ является абелевой алгеброй в том и только в том случае, когда $\langle A, \cdot \rangle$ – раздувание прямоугольной связки абелевых групп и произведение идемпотентов из A является идемпотентом из A .

Доказательство. Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ – абелева полугруппа, все односторонние главные идеалы которой минимальны. По лемме 6 произведение идемпотентов из A является идемпотентом из A . По лемме 7 полугруппа $\langle A \cdot A, \cdot \rangle$

– прямоугольная связка абелевых групп $\{\langle Z_{ef}; \cdot \rangle \mid e, f \text{ — идемпотенты}\}$, причем $Z_{ef'} \subseteq Z_{ef} \cdot Z_{e'f'}$ для любых идемпотентов $e, f, e', f' \in A$.

Покажем, что $\langle A, \cdot \rangle$ – раздувание прямоугольной связки абелевых групп. Зафиксируем произвольный элемент $t \in A$, не принадлежащий множеству $A \cdot A$. По замечанию 2 достаточно найти идемпотент g такой, что элемент $gtg \in A$ является представителем класса эквивалентности t/α . Пусть e и f – произвольные идемпотенты, $(te)(ft) \in Z_g$, где g – идемпотент, а, следовательно, единица группы $\{\langle Z_g; \cdot \rangle\}$. По лемме 5 $(te)(ft) = (te')(f't)$ для любых идемпотентов e', f' , поэтому g не зависит от выбора идемпотентов e и f .

Докажем, что $(gtg)\alpha t$. Так как $(te)(ft) \in Z_g$, то $gt(ef t) = t(ef t)$. В силу абелевости полугруппы $\langle A, \cdot \rangle$ $gtg = tg$. Аналогично, $gtg = gt$. Тогда для любого $x \in A \cdot A$, используя лемму 5, получаем $xt = xgt = xgtg$ и $tx = tgx = tgxg$, т.е. $(gtg)\alpha t$ и $\langle A; \cdot \rangle$ – раздувание полугруппы $\langle A \cdot A; \cdot \rangle$.

Докажем достаточность. По лемме 3 $\langle A, \cdot \rangle$ – раздувание полугруппы $\langle A \cdot A; \cdot \rangle$, являющейся, по условию, прямоугольной связкой абелевых групп $Z_{i\lambda}$ с единицами $e_{i\lambda}$ $i \in I, \lambda \in \Lambda$, причем $e_{i\lambda} \cdot e_{j\mu} = e_{i\mu}$ для любых $i, j \in I$ и $\lambda, \mu \in \Lambda$. Покажем, что $\langle A \cdot A; \cdot \rangle$ абелева алгебра. Пусть $x, y, a_k, b_k \in A$ ($k \in \{1, 2\}$) и $a_1xb_1 = a_2xb_2$. Покажем, что $a_1yb_1 = a_2yb_2$. По определению раздувания полугруппы существуют такие $x' \in Z_{j\mu}$, $y' \in Z_{i\nu}$, $a'_k \in Z_{i\lambda_k}$, $b'_k \in Z_{i_k\lambda}$ ($k \in \{1, 2\}$), что $x \alpha x'$, $y \alpha y'$, $a_k \alpha a'_k$, $b_k \alpha b'_k$. Тогда $a'_1x'b'_1 = a'_2x'b'_2$. Для любого $k \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} a'_kx'b'_k &= (a'_ke_{i\lambda_k})x'(e_{i_k\lambda}b'_k) = a'_k(e_{i\lambda}e_{i\lambda_k})x'(e_{i_k\lambda}e_{i\lambda})b'_k = \\ &= (a'_ke_{i\lambda})(e_{i\lambda_k}x'e_{i_k\lambda})(e_{i\lambda}b'_k) = (a'_ke_{i\lambda})(e_{i\lambda_k}e_{j\mu}x'e_{j\mu}e_{i_k\lambda})(e_{i\lambda}b'_k) = \\ &= (a'_ke_{i\lambda})(e_{i\mu}x'e_{j\lambda})(e_{i\lambda}b'_k) = a''_kx''b''_k, \end{aligned}$$

где $a''_k = a'_ke_{i\lambda}$, $x'' = e_{i\mu}x'e_{j\lambda}$, $b''_k = e_{i\lambda}b'_k$ и $a''_k, x'', b''_k \in Z_{i\lambda}$. Следовательно, $a''_1x''b''_1 = a''_2x''b''_2$. Аналогично, $a'_ky'b'_k = a''_ky''b''_k$, где $y'' = e_{i\nu}y'e_{i\lambda} \in Z_{i\lambda}$. Так как $Z_{i\lambda}$ – абелева группа, то $a''_1y''b''_1 = a''_2y''b''_2$, т.е. $a'y'b' = c'y'd'$. Тогда $ayb = cyd$. Аналогично доказывается стационарность полугруппы $\langle A \cdot A; \cdot \rangle$. Следовательно, по факту 8, полугруппа $\langle A \cdot A; \cdot \rangle$ абелева. $\square$

Заметим, что условие минимальности всех односторонних главных идеалов полугруппы используется только при доказательстве необходимости в теореме 9.

Пример моноида $\langle \mathcal{N}, \cdot \rangle$, где $\mathcal{N}$ – множество натуральных чисел, являющегося абелевой полугруппой, но не являющегося прямоугольной связкой абелевых групп, показывает, что условие минимальности всех односторонних главных идеалов полугруппы является существенным в формулировке теоремы 9.

Следующий *пример* показывает, что в теореме 9 нельзя опустить условие: произведение идемпотентов является идемпотентом. Рассмотрим множество $A = \bigcup \{Z_{i\lambda} \mid i \in \{0, 1\}, \lambda \in \{0, 1\}\}$, где $\langle Z_{i\lambda}; + \rangle$ – копии группы вычетов $\langle \mathbb{Z}_2; + \rangle$ по модулю 2, $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, $\bar{0}_{i\lambda}$ – копии элемента $\bar{0}$ в $Z_{i\lambda}$, $\bar{1}_{i\lambda}$ – копии элемента $\bar{1}$ в $Z_{i\lambda}$ ($i \in \{0, 1\}, \lambda \in \{0, 1\}$). Доопределим операцию $+$ на множестве A следующим образом:

$$\bar{\varepsilon}_{i\lambda} + \bar{\delta}_{j\mu} = \begin{cases} \bar{\varepsilon}_{i\mu} + \bar{\delta}_{i\mu}, & \text{если } i = j \text{ или } \lambda = \mu; \\ \bar{\varepsilon}_{i\mu} + \bar{\delta}_{i\mu} + \bar{1}_{i\mu}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Полугруппа $\langle A; + \rangle$ является прямоугольной связкой абелевых групп, причем сумма идемпотентов не является идемпотентом, например, $\bar{0}_{00} + \bar{0}_{11} = \bar{1}_{01}$. Полученная полугруппа не является абелевой, т.к. $\bar{0}_{10} + \bar{1}_{01} = \bar{1}_{11} + \bar{1}_{01}$, а $\bar{0}_{10} + \bar{1}_{11} \neq \bar{1}_{11} + \bar{1}_{11}$.

В [6] доказано, что полупростая полугруппа $\langle A; \cdot \rangle$ является абелевой тогда и только тогда, когда $\langle A; \cdot \rangle \cong \langle H; \cdot \rangle \times \langle I; \cdot \rangle \times \langle J; \cdot \rangle$, где $\langle H; \cdot \rangle$ – абелева группа, $\langle I; \cdot \rangle$ – полугруппа левых нулей, $\langle J; \cdot \rangle$ – полугруппа правых нулей. Нетрудно доказать следующее замечание.

Замечание 10. Полугруппа $\langle A; \cdot \rangle$ является прямоугольной связкой абелевых групп, причем произведение идемпотентов из A является идемпотентом из A тогда и только тогда, когда $\langle A; \cdot \rangle \cong \langle H; \cdot \rangle \times \langle I; \cdot \rangle \times \langle J; \cdot \rangle$, где $\langle H; \cdot \rangle$ – абелева группа, $\langle I; \cdot \rangle$ – полугруппа левых нулей, $\langle J; \cdot \rangle$ – полугруппа правых нулей.

Тогда по теореме 9 и замечанию 10 получаем следующее утверждение.

Следствие 11. Пусть все односторонние главные полугруппы $\langle A; \cdot \rangle$ минимальны. Тогда $\langle A; \cdot \rangle$ является абелевой алгеброй в том и только том случае, когда $\langle A; \cdot \rangle$ – раздувание полупростой абелевой полугруппы.

Список литературы

- [1] Хобби Д., Макензи Р. *Строение конечных алгебр* // М.: Мир. 1993.
- [2] Kiss E. W., Valeriote M. A. *Abelian algebras and the Hamiltonian property* // J. Pure Appl. Algebra. 1993. V.87. No.1. P.37-49.
- [3] Kiss E.W., Valeriote M. A. *Strongly abelian varieties and the Hamiltonian property* // Canad. J. Math. 1991. V.43. No.2. P.1-16.

- [4] Овчинникова Е.В. *Об абелевых группоидах с образами малой мощности* // Алгебра и теория моделей. Сборник статей. НГТУ. 2005. С.125-131
- [5] Warne R.J. *Semigroups obeying the term conditions* // Algebra Universalis. 1994. No.31. P.113-123.
- [6] Warne R.J. *Semigroups and Inflation* // Semigroup Forum. 1997. V.54. P.271-277.
- [7] Степанова А.А., Трикашная Н.В. *Абелевы и гамильтоновы группоиды* // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т.15. No.7. С.165–177.
- [8] Клиффорд А., Престон Г. *Алгебраическая теория полугрупп* // М.: Мир. 1972.

ON RUDIN–KEISLER PREORDERS IN SMALL THEORIES

S.V. Sudoplatov*

Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptug avenue, Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State Technical University,
20, K.Marx avenue, Novosibirsk, 630092, Russia
e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

Rudin–Keisler preorders play a key role in the classification of countable models of small theories as a tool for distributions of prime models over tuples [1, 2]. In the paper, we consider variations and properties of Rudin–Keisler preorders in small theories.

The author thanks Evgeniy A. Palyutin, Bektur S. Baizhanov, Aleksandr G. Pinus, and Predrag Tanović for useful remarks.

We consider complete first-order theories T with infinite models. Additionally we assume that T are small, i. e., they have countably many types ($|S(T)| = \omega$). So for any type $q \in S(T)$ and its realization $\bar{a}$, there exists a model $\mathcal{M}(\bar{a})$, being prime over $\bar{a}$. Since all prime models over realizations of q are isomorphic, we often denote such by $\mathcal{M}_q$.

Let p and q be types in $S(T)$. We say that the type p *is dominated by a type q* , or *p does not exceed q under the Rudin–Keisler preorder* (written $p \leq_{\text{RK}} q$), if $\mathcal{M}_q \models p$, that is, $\mathcal{M}_p$ is an elementary submodel of $\mathcal{M}_q$ (written $\mathcal{M}_p \preceq \mathcal{M}_q$). Besides, we say that a model $\mathcal{M}_p$ *is dominated by a model $\mathcal{M}_q$* , or *$\mathcal{M}_p$ does not exceed $\mathcal{M}_q$ under the Rudin–Keisler preorder*, and write $\mathcal{M}_p \leq_{\text{RK}} \mathcal{M}_q$.

Syntactically, the condition $p \leq_{\text{RK}} q$ (and hence also $\mathcal{M}_p \leq_{\text{RK}} \mathcal{M}_q$) is expressed thus: there exists a formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ such that the set $q(\bar{y}) \cup \{\varphi(\bar{x}, \bar{y})\}$ is consistent and $q(\bar{y}) \cup \{\varphi(\bar{x}, \bar{y})\} \vdash p(\bar{x})$. Since we deal with a small theory, $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ can be chosen so that, for any formula $\psi(\bar{x}, \bar{y})$, the set $q(\bar{y}) \cup \{\varphi(\bar{x}, \bar{y}), \psi(\bar{x}, \bar{y})\}$ being consistent implies that $q(\bar{y}) \cup \{\varphi(\bar{x}, \bar{y})\} \vdash \psi(\bar{x}, \bar{y})$. In this event the formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ is said to be (q, p) -*principal*.

*The work is supported by RFFI (grant 09-01-00336-a), by the Council for Grants (under RF President) and State Aid of Fundamental Science Schools via project NSh-3669.2010.1, and by the grant of Novosibirsk State Technical University.

Types p and q are said to be *domination-equivalent*, *realization-equivalent*, *Rudin–Keisler equivalent*, or *RK-equivalent* (written $p \sim_{\text{RK}} q$) if $p \leq_{\text{RK}} q$ and $q \leq_{\text{RK}} p$. Besides, models $\mathcal{M}_p$ and $\mathcal{M}_q$ are said to be *domination-equivalent*, *Rudin–Keisler equivalent*, or *RK-equivalent* (written $\mathcal{M}_p \sim_{\text{RK}} \mathcal{M}_q$).

As in [3], types p and q are said to be *strongly domination-equivalent*, *strongly realization-equivalent*, *strongly Rudin–Keisler equivalent*, or *strongly RK-equivalent* (written $p \equiv_{\text{RK}} q$) if, for some realizations $\bar{a}$ and $\bar{b}$ of p and q accordingly, both $\text{tp}(\bar{b}/\bar{a})$ and $\text{tp}(\bar{a}/\bar{b})$ are principal. Models $\mathcal{M}_p$ and $\mathcal{M}_q$ are said to be *strongly domination-equivalent*, *strongly Rudin–Keisler equivalent*, or *strongly RK-equivalent* (written $\mathcal{M}_p \equiv_{\text{RK}} \mathcal{M}_q$).

Clearly, domination relations form preorders, and (strong) domination-equivalence relations are equivalence relations. Here, $\mathcal{M}_p \equiv_{\text{RK}} \mathcal{M}_q$ implies $\mathcal{M}_p \sim_{\text{RK}} \mathcal{M}_q$.

If $\mathcal{M}_p$ and $\mathcal{M}_q$ are not domination-equivalent then they are non-isomorphic. Moreover, non-isomorphic models may be found among domination-equivalent ones.

For the illustration, we consider the following *Ehrenfeucht examples* [4] of theories T_n , $n \in \omega$, with $I(T_n, \omega) = n \geq 3$.

Example. Let T_n be the theory of a structure $\mathcal{M}^n$, formed from the structure $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ by adding of constants c_k , $k \in \omega$, such that $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \infty$, and by unary predicates $P_0, \dots, P_{n-3}$ which form a partition of the set $\mathbb{Q}$ of rationals, with

$$\models \forall x, y ((x < y) \rightarrow \exists z ((x < z) \wedge (z < y) \wedge P_i(z))), \quad i = 0, \dots, n-3.$$

The theory T_n has exactly n pairwise non-isomorphic models:

- (a) a prime model $\mathcal{M}^n$ ($\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \infty$);
- (b) prime models $\mathcal{M}_i^n$ over realizations of types $p_i(x) \in S^1(\emptyset)$, isolated by sets of formulas $\{c_k < x \mid k \in \omega\} \cup \{P_i(x)\}$, $i = 0, \dots, n-3$ ($\lim_{k \rightarrow \infty} c_k \in P_i$);
- (c) a saturated model $\overline{\mathcal{M}}^n$ (the limit $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k$ is irrational).

The models $\mathcal{M}_{p_0}^n, \dots, \mathcal{M}_{p_{n-3}}^n$ are domination-equivalent but pairwise non-isomorphic. $\square$

A syntactic characterization for the model isomorphism between $\mathcal{M}_p$ and $\mathcal{M}_q$ is given by the following proposition. It asserts that an existence of isomorphism between $\mathcal{M}_p$ and $\mathcal{M}_q$ is equivalent to the strong domination-equivalence of that models.

Proposition 1 [1, 2, 3]. *For any types $p(\bar{x})$ and $q(\bar{y})$ of a small theory T , the following conditions are equivalent:*

- (1) *models $\mathcal{M}_p$ and $\mathcal{M}_q$ are isomorphic;*

- (2) models $\mathcal{M}_p$ and $\mathcal{M}_q$ are strongly domination-equivalent;
 (3) there exist (p, q) - and (q, p) -principal formulas $\varphi_{p,q}(\bar{y}, \bar{x})$ and $\varphi_{q,p}(\bar{x}, \bar{y})$ respectively, such that the set

$$p(\bar{x}) \cup q(\bar{y}) \cup \{\varphi_{p,q}(\bar{y}, \bar{x}), \varphi_{q,p}(\bar{x}, \bar{y})\}$$

is consistent;

- (4) there exists a (p, q) - and (q, p) -principal formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, such that the set

$$p(\bar{x}) \cup q(\bar{y}) \cup \{\varphi(\bar{x}, \bar{y})\}$$

is consistent.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (3). Let $\mathcal{M}(\bar{a})$ and $\mathcal{M}(\bar{b})$ be prime models over realizations $\bar{a}$ and $\bar{b}$ of types $p(\bar{x})$ and $q(\bar{y})$, respectively.

If there is an isomorphism between $\mathcal{M}(\bar{a})$ and $\mathcal{M}(\bar{b})$, the existence of (p, q) - and (q, p) -principal formulas $\varphi_{p,q}(\bar{y}, \bar{x})$ and $\varphi_{q,p}(\bar{x}, \bar{y})$, satisfying the condition that

$$p(\bar{x}) \cup q(\bar{y}) \cup \{\varphi_{p,q}(\bar{y}, \bar{x}), \varphi_{q,p}(\bar{x}, \bar{y})\}$$

is consistent, follows from the facts that $\mathcal{M}(\bar{a})$ and $\mathcal{M}(\bar{b})$ realize just principal types over $\bar{a}$ and $\bar{b}$, respectively, and $\mathcal{M}(\bar{a}) = \mathcal{M}(\bar{b}')$ for some tuple $\bar{b}'$ realizing type $q(\bar{y})$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Assume that there exist (p, q) - and (q, p) -principal formulas $\varphi_{p,q}(\bar{y}, \bar{x})$ and $\varphi_{q,p}(\bar{x}, \bar{y})$ such that the set

$$p(\bar{x}) \cup q(\bar{y}) \cup \{\varphi_{p,q}(\bar{y}, \bar{x}), \varphi_{q,p}(\bar{x}, \bar{y})\}$$

is consistent. We argue to show that $\mathcal{M}_p$ and $\mathcal{M}_q$ are isomorphic, where $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}(\bar{a})$, $\mathcal{M}_q = \mathcal{M}(\bar{b})$, $\models p(\bar{a})$, $\models q(\bar{b})$. Since $\varphi_{p,q}(\bar{y}, \bar{x})$ is (p, q) -principal and $\varphi_{q,p}(\bar{x}, \bar{y})$ is (q, p) -principal, we have

$$p(\bar{x}) \cup \{\varphi_{p,q}(\bar{y}, \bar{x})\} \equiv r_1(\bar{x}, \bar{y}) \in S(\emptyset),$$

$$q(\bar{y}) \cup \{\varphi_{q,p}(\bar{x}, \bar{y})\} \equiv r_2(\bar{y}, \bar{x}) \in S(\emptyset).$$

As $p(\bar{x}) \cup \{\varphi_{p,q}(\bar{y}, \bar{x})\} \cup q(\bar{y}) \cup \{\varphi_{q,p}(\bar{x}, \bar{y})\}$ is consistent, so $r_1(\bar{x}, \bar{y}) = r_2(\bar{y}, \bar{x})$. Let $\models r_1(\bar{a} \hat{\ } \bar{b}')$, $\models r_2(\bar{b} \hat{\ } \bar{a}')$, where $\bar{b}' \in M_q$, $\bar{a}' \in M_p$, then

$$\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_{r_1} = \mathcal{M}(\bar{a} \hat{\ } \bar{b}') \simeq \mathcal{M}(\bar{b} \hat{\ } \bar{a}') = \mathcal{M}_{r_2} = \mathcal{M}_q.$$

It follows by that $(\mathcal{M}_p, \bar{a})$ is a prime model of theory $T \cup p(\bar{c}_1)$, $(\mathcal{M}_p, \bar{a}, \bar{b}')$ is a prime model of theory $T \cup r_1(\bar{c}_1, \bar{c}_2)$, $(\mathcal{M}_q, \bar{b})$ is a prime model of theory $T \cup q(\bar{c}_2)$, $(\mathcal{M}_q, \bar{a}', \bar{b})$ is a prime model of theory $T \cup r_1(\bar{c}_1, \bar{c}_2)$, and that any constant expansion of prime model is a prime model of new theory.

(3) $\Rightarrow$ (4). Having (p, q) - and (q, p) -principal formulas $\varphi_{p,q}(\bar{y}, \bar{x})$ and $\varphi_{q,p}(\bar{x}, \bar{y})$, and consistent set

$$p(\bar{x}) \cup q(\bar{y}) \cup \{\varphi_{p,q}(\bar{y}, \bar{x}), \varphi_{q,p}(\bar{x}, \bar{y})\},$$

we get a required (p, q) - and (q, p) -principal formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \Leftarrow \varphi_{p,q}(\bar{y}, \bar{x}) \wedge \varphi_{q,p}(\bar{x}, \bar{y})$.

The directions (4) $\Rightarrow$ (3) and (4) $\Leftrightarrow$ (2) are obvious. $\square$

Denote by $\text{RK}(T)$ the set $\mathbf{PM}$ of isomorphism types of models $\mathcal{M}_p$, $p \in S(T)$, on which the relation of domination is induced by $\leq_{\text{RK}}$, a relation deciding domination among $\mathcal{M}_p$, that is, $\text{RK}(T) = \langle \mathbf{PM}; \leq_{\text{RK}} \rangle$. We say that isomorphism types $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \mathbf{PM}$ are *domination-equivalent* (written $\mathbf{M}_1 \sim_{\text{RK}} \mathbf{M}_2$) if so are their representatives.

Clearly, the preordered set $\text{RK}(T)$ has a least element, which is an isomorphism type of a prime model.

Proposition 2 [1, 2]. *If $I(T, \omega) < \omega$ then $\text{RK}(T)$ is a finite preordered set whose factor set $\text{RK}(T)/\sim_{\text{RK}}$, with respect to domination-equivalence $\sim_{\text{RK}}$, forms a partially ordered set with a greatest element.*

Proof. That $\mathbf{PM}$ is a finite set is obvious, and the fact that $\text{RK}(T)/\sim_{\text{RK}}$ contains a greatest element follows from the existence of a powerful type which dominates any type in $S(T)$. $\square$

Obviously, a small theory T is ω -categorical iff $|\text{RK}(T)| = 1$.

In the above-given Ehrenfeucht examples of theories T_n with $I(T_n, \omega) = n$, each preordered set $\text{RK}(T_n)$ consists of the least element and $(n - 2)$ domination-equivalent elements corresponding to the models $\mathcal{M}_{p_0}^n, \dots, \mathcal{M}_{p_{n-3}}^n$. Thus all ordered sets $\text{RK}(T_n)/\sim_{\text{RK}}$ are two-element and linearly ordered.

The following theorem describes preordered sets $\text{RK}(T)$ for small theories T .

Theorem 1 [2, 5]. (1) *For any small theory T , the preordered set $\text{RK}(T)$ is at most countable, upward directed, and has a least element.*

(2) *For any finite or countable, preordered, upward directed set $\langle X; \leq \rangle$ having a least element, there exists a small theory T , for which $\text{RK}(T) \simeq \langle X; \leq \rangle$.*

Proof. (1) That $|\text{RK}(T)| \leq \omega$ follows from the property of T being small. The property for the preordered set $\text{RK}(T) = \langle \mathbf{PM}; \leq_{\text{RK}} \rangle$ to be upward directed is implied by the following: if $\mathbf{M}_1$ and $\mathbf{M}_2$ are isomorphism types of $\mathbf{PM}$ corresponding to models $\mathcal{M}(\bar{a}_1)$ and $\mathcal{M}(\bar{a}_2)$, then types $\text{tp}(\bar{a}_1)$ and

$\text{tp}(\bar{a}_2)$ are dominated by $q = \text{tp}(\bar{a}_1 \hat{\ } \bar{a}_2)$; hence, $\mathbf{M}_1 \leq_{\text{RK}} \mathbf{M}$ and $\mathbf{M}_2 \leq_{\text{RK}} \mathbf{M}$, where $\mathbf{M}$ is the isomorphism type of $\mathcal{M}_q$. The least element in $\text{RK}(T)$ is the isomorphism type of the prime model.

(2) In view of [2, Theorem 3.4.1], there is no loss of generality in assuming that the set X is countable. A small theory T with $\text{RK}(T) \simeq \langle X; \leq \rangle$ is constructed similarly to how were the theories constructed in proving [2, Theorem 3.4.1], with the theory of unary predicates $P_1, \dots, P_{|X|-1}$ replaced by a theory of pairwise disjoint unary predicates P_i , $i \in \omega$, each containing infinitely many elements. $\square$

Now we consider the relation $\leq_{\text{RK}}$, being defined on the set $S(T)$ of complete types of small theory T . Denote the structure $\langle S(T); \leq_{\text{RK}} \rangle$ by $\text{RKT}(T)$.

Since for each type $p \in S(T)$ there is a model $\mathcal{M}_p$, and countably many types (for instance, $\text{tp}(\bar{a})$, $\text{tp}(\bar{a} \hat{\ } \bar{a})$, $\dots$ with $\models p(\bar{a})$) forms isomorphic models, being prime over realizations of these types, the structure $\text{RKT}(T)$ can be obtained from $\text{RK}(T)$ by replacement of each element by countably many pairwise $\sim_{\text{RK}}$ -equivalent elements, where $\sim_{\text{RK}} = \leq_{\text{RK}} \cap \geq_{\text{RK}}$. Thus Theorem 1 implies

Corollary 1. (1) *For any small theory T , the preordered set $\text{RKT}(T)$ is countable, upward directed, has the least $\sim_{\text{RK}}$ -class, and each $\sim_{\text{RK}}$ -class consists of countably many elements.*

(2) *For any countable, preordered, upward directed set $\langle X; \leq \rangle$ having the least $(\leq \cap \geq)$ -class and such that each $(\leq \cap \geq)$ -class is countable, there exists a small theory T , for which $\text{RKT}(T) \simeq \langle X; \leq \rangle$.*

P. Tanović noticed that the factorization of $\text{RKT}(T)$ by the equivalence relation $\equiv_{\text{RK}}$ forms a structure which is isomorphic to $\text{RK}(T)$:

$$\text{RKT}(T)/\equiv_{\text{RK}} \simeq \text{RK}(T).$$

Indeed, in view of Proposition 1, for any type $p \in S(T)$, the set of types, that are strongly RK-equivalent to p , corresponds to the model $\mathcal{M}_p$. And for types p and q in $S(T)$, being not strongly RK-equivalent, $p \leq_{\text{RK}} q$ iff $\mathcal{M}_p \leq_{\text{RK}} \mathcal{M}_q$.

In particular, $\text{RK}(T)$ is finite iff $\text{RKT}(T)/\equiv_{\text{RK}}$ is finite.

Since for any theory T , the inclusion $\equiv_{\text{RK}} \subseteq \sim_{\text{RK}}$ holds, the finiteness of $\text{RK}(T)$ implies that $\text{RKT}(T)/\sim_{\text{RK}}$ is finite (and $|\text{RK}(T)| = 1$ iff $|\text{RKT}(T)/\sim_{\text{RK}}| = 1$, that means the ω -categoricity of theory). At the same time there are theories T with infinite $\text{RK}(T)$ and finite $\text{RKT}(T)/\sim_{\text{RK}}$, since by Theorem 1 there are infinite preordered sets $\langle X; \leq \rangle$ being isomorphic to $\text{RK}(T)$ and having only finitely many $\sim_{\text{RK}}$ -classes.

Extend the relation $\leq_{\text{RK}}$, being defined on the set $S(T)$ of complete types of the small theory T , to the set $\subseteq S(T)$ of all types (including incomplete types) of T . For types $p, q \in \subseteq S(T)$ we set $p \leq_{\text{RK}} q$, if any model, realizing q , realizes p .

Notice that the relation $\leq_{\text{RK}}$ on $\subseteq S(T)$ is induced by the according relation on $S(T)$:

Proposition 3. *For types $p, q \in \subseteq S(T)$, $p \leq_{\text{RK}} q$ holds iff, for any type $q' \in S(T)$, containing q , there exists a type $p' \in S(T)$ such that $p' \supseteq p$ and $p' \leq_{\text{RK}} q'$.*

Proof. Assume that, for the types $p, q \in \subseteq S(T)$, $p \leq_{\text{RK}} q$ holds and $q' \in S(T)$ is a completion of q . Since q is realized in the model $\mathcal{M}_{q'}$, the conjecture of proposition implies that p is realized in that model by a tuple $\bar{a}$. The type $p' = \text{tp}(\bar{a})$ is a required completion of p such that $p' \leq_{\text{RK}} q'$.

Now we assume that, for any completion $q' \in S(T)$ of the type q , there exists a completion $p' \in S(T)$ of p such that $p' \leq_{\text{RK}} q'$. Consider an arbitrary model $\mathcal{M}$, realizing q by a tuple $\bar{a}$, and the completion $q' = \text{tp}(\bar{a})$ of q . By assumption, some completion $p' \in S(T)$ of p is realized in $\mathcal{M}(\bar{a})$ and so in $\mathcal{M}$. Hence, the model $\mathcal{M}$ realizes p and we have $p \leq_{\text{RK}} q$. $\square$

Thus, the relation $\leq_{\text{RK}}$ on $\subseteq S(T)$ is reduced to the relation $\leq_{\text{RK}}$ on the set $S(T)$ and to possible combinations of complete types, forming type-definable sets.

Since even equivalent formulas form continuum many incomplete types (including or non-including to types the formulas of given set of equivalent formulas), it is natural to factorize the set $\subseteq S(T)$ by the equivalence relation $\sim$ of reciprocal deducibility of types:

$$p(\bar{x}) \sim q(\bar{x}) \Leftrightarrow p(\bar{x}) \vdash q(\bar{x}) \text{ and } q(\bar{x}) \vdash p(\bar{x}).$$

The relation $\leq_{\text{RK}}$ is naturally transformed, by representatives, to the factor-set $\subseteq S(T)/\sim$, and further it will be also denoted by $\leq_{\text{RK}}$.

Notice the following properties of the relation $\leq_{\text{RK}}$ on the set

$$\subseteq S(T)/\sim = \{\tilde{p} \mid p \in \subseteq S(T)\}.$$

Proposition 4. *If $p, p', q, q' \in \subseteq S(T)$, $p' \subseteq p$, $q \subseteq q'$, and $\tilde{p} \leq_{\text{RK}} \tilde{q}$ then $\tilde{p}' \leq_{\text{RK}} \tilde{q}'$.*

Proof is obvious. $\square$

By the definition, we also have

Proposition 5. *The relation $\leq_{\text{RK}}$ on the set $\subseteq S(T)/\sim$ is preserved under expansions of theory: if $p, q \in \subseteq S(T)$, $\tilde{p} \leq_{\text{RK}} \tilde{q}$, and T' is an expansion of T then, for $p, q \in \subseteq S(T')$, $\tilde{p} \leq_{\text{RK}} \tilde{q}$ holds.*

Having $|S(T)| = \omega$, we get $|\subseteq S(T)/\sim| \leq 2^\omega$. It is shown in [6], that any countable Boolean algebra $\mathcal{B}$ is *interval*, i.e., $\mathcal{B}$ is isomorphic to a Boolean algebra of subsets of linearly ordered set, being generated by intervals of form $(a, b]$. Now, take a countable saturated structure $\mathcal{M}$ with a small theory and, for some $n \in \omega \setminus \{0\}$, countably many pairwise different principal n -types $p_k(\bar{x})$ with isolating formulas $\varphi_k(\bar{x})$, $k \in \omega$. We get an interval Boolean algebra for the set of definable sets, countably many ultrafilters corresponding to types in $S(\emptyset)$, and continuum many filters corresponding to types $\{\neg\varphi_k(\bar{x}) \mid k \in w\}$, $w \subseteq \omega$.

If for each $n \in \omega \setminus \{0\}$ there are finitely many pairwise different principal n -types $p_k(\bar{x})$, the theory is ω -categorical and it implies finitely many n -types $p(\bar{x})$ in $S(\emptyset)$, $n \in \omega \setminus \{0\}$, and so finitely many n -types $p(\bar{x})$ in $\subseteq S(\emptyset)/\sim$.

Thus we get the following proposition.

Proposition 6. *Let T be a small theory. Then the following assertions hold.*

- (1) *If T is ω -categorical, then $|\subseteq S(T)/\sim| = \omega$.*
- (2) *If T is not ω -categorical, then $|\subseteq S(T)/\sim| = 2^\omega$.*

Using Proposition 6 and combining the proof for Theorem 1 and Corollary 1, we get

Proposition 7. *The relation $\leq_{\text{RK}}$ forms either countable or continual preordered set on $\subseteq S(T)/\sim$, having unique $(\leq_{\text{RK}} \cap \geq_{\text{RK}})$ -class (for countable $\subseteq S(T)/\sim$) or being upward directed, having a least $\sim_{\text{RK}}$ -class (consisting of types that have isolated completions), where each $\sim_{\text{RK}}$ -class is countable.*

Proposition 8. *For any small theory T , the following conditions are equivalent:*

- (1) *the structure $\text{RKT}(T)$ has finitely many $\sim_{\text{RK}}$ -classes;*
- (2) *the structure $\langle \subseteq S(T)/\sim; \leq_{\text{RK}} \rangle$ has finitely many $\sim_{\text{RK}}$ -classes.*

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2). Let $\text{RKT}(T)$ has n $\sim_{\text{RK}}$ -classes and $p_1, \dots, p_n \in S(T)$ be pairwise non- $\sim_{\text{RK}}$ -equivalent, $P \Leftarrow \{p_1, \dots, p_n\}$. Take an arbitrary type q in $\subseteq S(T)$. Since any completion of q is $\sim_{\text{RK}}$ -equivalent to a type in P and there are only finitely many subsets of P , we have only finitely many possibilities for the $\sim_{\text{RK}}$ -equivalence of completions for q to types in P . Now we get the implication (1) $\Rightarrow$ (2), since $\sim$ -classes $\tilde{q}$, for which completions of q are $\sim_{\text{RK}}$ -equivalent to the same types in P , are $\sim_{\text{RK}}$ -equivalent.

The implication (2) $\Rightarrow$ (1) is followed by inclusion $S(T) \subset \subseteq S(T)$. $\square$

Further we assume that the small theory T is not ω -categorical and Isol is the set of all types in $\subseteq S(T)$ having isolated completions.

Notice that, starting with some $n \in \omega \setminus \{0\}$, there exists (possibly incomplete) n -type $p_{\text{ni}}(\bar{x})$, such that its realizations are exactly all possible realizations of non-principal n -types. That type is isolated by the set of formulas $\neg\varphi(\bar{x})$, where the formulas $\varphi(\bar{x})$ are principal. By the definition, the $\sim$ -class $\tilde{p}_{\text{ni}}$ is $\leq_{\text{RK}}$ -covering for the $\sim$ -class, corresponding to isolated types, in the structure, being a restriction of $\langle \subseteq S(T)/\sim; \leq_{\text{RK}} \rangle$ to the set of n -types. Thus, if there exists a natural number n such that, on the set $\subseteq S(T) \setminus \text{Isol}$, each $\sim$ -class is connected by $\geq_{\text{RK}}$ with a $\sim$ -class, corresponding to some n -type, then the structure $\langle \subseteq S(T)/\sim; \leq_{\text{RK}} \rangle$ has the least $\sim_{\text{RK}}$ -class and the least $\sim_{\text{RK}}$ -class among others. By the definition the reverse implication holds too.

Thus the following criterion for existence of two-element initial segment for the result of factorization of $\langle \subseteq S(T)/\sim; \leq_{\text{RK}} \rangle$ by the relation $\sim_{\text{RK}}$.

Proposition 9. *The structure $\langle (\subseteq S(T) \setminus \text{Isol})/\sim; \leq_{\text{RK}} \rangle$ has the least $\sim_{\text{RK}}$ -class iff there exists $n \in \omega \setminus \{0\}$ such that, for each $\sim$ -class*

$$\tilde{p} \in (\subseteq S(T) \setminus \text{Isol})/\sim,$$

there exists a $\sim$ -class

$$\tilde{q} \in (\subseteq S(T) \setminus \text{Isol})/\sim,$$

where q is a n -type with $\tilde{q} \leq_{\text{RK}} \tilde{p}$.

For finite structures $\text{RK}(T)$ there exists a natural number n such that each type of T dominates some n -type (for n we can take the length of tuple realizing types p for models $\mathcal{M}_p$ that represent all isomorphism types in $\text{RK}(T)$). Hence, Proposition 9 implies

Corollary 2. *If the structure $\text{RK}(T)$ is finite then the structure*

$$\langle (\subseteq S(T) \setminus \text{Isol})/\sim; \leq_{\text{RK}} \rangle$$

has the least $\sim_{\text{RK}}$ -class.

References

- [1] *Sudoplatov S. V.* Complete theories with finitely many countable models. I / S. V. Sudoplatov // Algebra and Logic. — 2004. — Vol. 43, No. 1. — P. 62–69.

- [2] *Sudoplatov S. V.* The Lachlan problem / S. V. Sudoplatov. — Novosibirsk : NSTU, 2009. — 336 p.
- [3] *Tanović P.* Theories with constants and three countable models / P. Tanović // Archive for Math. Logic. — 2007. — Vol. 46, No. 5–6. — P. 517–527.
- [4] *Vaught R.* Denumerable models of complete theories / R. Vaught // Infinitistic Methods. — London : Pergamon, 1961. — P. 303–321.
- [5] *Sudoplatov S. V.* Complete theories with finitely many countable models. II / S. V. Sudoplatov // Algebra and Logic. — 2006. — Vol. 45, No. 3. — P. 180–200.
- [6] *Pinus A. G.* Constructions of Boolean algebras / A. G. Pinus. — Novosibirsk : NSTU, 1994. — 208 p.

ON HRUSHOVSKI FUSIONS FOR PREDICATES AND THEIR ENVELOPES

S.V. Sudoplatov*

Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptug avenue, Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State Technical University,
20, K.Marx avenue, Novosibirsk, 630092, Russia
e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

E.Hrushovski [1] showed that, for any predicate symbol R , taking a linear *prerank* function of form

$$y_R(\mathcal{A}) = |A| - \alpha \cdot e_R(\mathcal{A}),$$

(where $\mathcal{A}$ is a structure $\langle A; R \rangle$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $e_R(\mathcal{A})$ is a number of tuples in R , being interpreted in $\mathcal{A}$) and a class K_R of finite structures $\mathcal{A}$ with $y_R(\mathcal{A}) \geq 0$, one get a saturated countable K_R -generic (in the sense of [2, 3]) structure $\mathcal{M}_R = \langle M_R; R \rangle$ with a stable theory.

For predicate symbols $R_1, \dots, R_n, \dots$, taking a prerank function

$$y_{R_1, \dots, R_n, \dots}(\mathcal{A}) = |A| - \sum_i \alpha_i \cdot e_{R_i}(\mathcal{A}),$$

and a class $K_{R_1, \dots, R_n, \dots}$ of finite structures $\mathcal{A}$ of language $\{R_1, \dots, R_n, \dots\}$ with $y_{R_1, \dots, R_n, \dots}(\mathcal{A}) \geq 0$, one again get a saturated countable $K_{R_1, \dots, R_n, \dots}$ -generic structure $\mathcal{M}$ with a stable theory and such that $\mathcal{M} \upharpoonright R_i = \mathcal{M}_{R_i}$. That structure $\mathcal{M}$ is called the *Hrushovski fusion* of structures $\mathcal{M}_{R_i}$ (cf. [3, 4, 5]). Considering $\mathcal{M}$ itself, $\mathcal{M}$ and the restrictions $\mathcal{M} \upharpoonright \{R_{i_1}, \dots, R_{i_k}, \dots\}$ are called the *Hrushovski structures*. If for a Hrushovski structure $\mathcal{M}$, arities for all relations R_i are at most r , coefficients α_i are chosen in Herwig style [6] (cf. [3, Chapter 4]) and additionally with $\alpha_i \cdot (k_p)^r < \varepsilon_p$, as well as the special

*The work is supported by RFFI (grant 09-01-00336-a), by the Council for Grants (under RF President) and State Aid of Fundamental Science Schools via project NSH-3669.2010.1, and by the grant of Novosibirsk State Technical University.

b_n^p are lower bounds for p -approximations of $y_{R_1, \dots, R_n, \dots}$ (with $\sum_{i=1}^p$ instead of $\sum_i$), then $\mathcal{M}$ is called a *Hrushovski–Herwig structure*.

Notice that each Hrushovski structure is countable. Notice also that, by construction, the Hrushovski structures in [3] are Hrushovski–Herwig structures.

The following definition generalizes the notion of (binary) envelope in [3], being used for constructions of generic Ehrenfeucht theories.

Definition. Let $R(x_1, \dots, x_n)$ be an atomic formula, $\bar{x}$ be a tuple with coordinates in $\{x_1, \dots, x_n\}$. The formula $\exists \bar{x} R(x_1, \dots, x_n)$ (as well as the correspondent relations in structures) is called the $\bar{x}$ -*projection* or the $\bar{x}$ -*envelope* of $R(x_1, \dots, x_n)$. A tuple $(Q_1, \dots, Q_m)$ is an *envelope* of the relation R or R -*envelope* if, for each coordinate x_i in $R(x_1, \dots, x_n)$, there is a tuple $\bar{x}$ without x_i such that some Q_j is an $\bar{x}$ -envelope of R . The envelope $(Q_1, \dots, Q_m)$ is k -*ary* if each Q_j is a k -ary relation. Any 2-ary envelope is called *binary*. If $(Q_1, \dots, Q_m)$ is an envelope of R , the relation R is called the *bush* in $(Q_1, \dots, Q_m)$.

Since

$$R(x_1, \dots, x_n) \vdash \exists \bar{x} R(x_1, \dots, x_n),$$

any envelope $(Q_1, \dots, Q_m)$ forms a formula

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{j=1}^m \exists \bar{x}^j R(x_1, \dots, x_n),$$

where $\exists \bar{x}^j R(x_1, \dots, x_n)$ corresponds to Q_j , such that

$$R(x_1, \dots, x_n) \vdash \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Now we consider an influence of bushes R and their envelopes $(Q_1, \dots, Q_m)$ with respect to Hrushovski construction, as well as Hrushovski fusions for R and $(Q_1, \dots, Q_m)$.

A bush R (an envelope $(Q_1, \dots, Q_m)$) is a *Hrushovski(–Herwig) bush* (a *Hrushovski(–Herwig) envelope*) if its structure $\mathcal{M}$ is a generic Hrushovski(–Herwig) structure.

The following examples show that an existence of K_R -generic Hrushovski structure can not guarantee that envelopes of R are Hrushovski envelopes.

Example. Let $R(x, y_1, \dots, y_n)$ be an infinite bush (with a K_R -generic Hrushovski structure) for a binary envelope $(Q_1, \dots, Q_n)$, where

$$\exists y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n R(x, y_1, \dots, y_n) \equiv Q_i(x, y_i),$$

$i = 1, \dots, n$, $Q_j = Q_k$ for some $j \neq k$, and Q_j satisfies the *pairwise intersection property* [3], i. e.,

$$\models \forall x, y \exists z (Q_j(z, x) \wedge Q_j(z, y)).$$

Then the binary R -envelope $(Q_1, \dots, Q_n, Q_{n+1})$, where Q_{n+1} corresponds to the formula

$$\exists x, y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n R(x, y_1, \dots, y_n),$$

has the coordinate Q_{n+1} that forms a complete graph (having $\frac{n(n-1)}{2}$ edges for n -element subgraphs). Thus there is no Hrushovski structures with respect to the class $K_{Q_{n+1}}$, being generated by finite restrictions of a Q_{n+1} -structure. If $n > 2$ one can replace Q_j and Q_k by Q_{n+1} and again get a non-Hrushovski R -envelope. $\square$

Modifying Example one can get a K_R -generic Hrushovski structure with a binary envelope $(Q_1, \dots, Q_n)$, not having the pairwise intersection property but with $O(k^2)$ edges for k -element subgraphs with respect to some Q_i producing a non-Hrushovski generic structure.

Recall [1, 3] that a finite substructure $\mathcal{A}$ in a Hrushovski structure $\mathcal{M}$ is *strong* or *self-sufficient* if $y(\mathcal{A}) \leq y(\mathcal{B})$ for any finite $\mathcal{B}$ with $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq M$.

A Hrushovski relation R is *self-sufficient* any tuple $(a_1, \dots, a_n)$ in R forms a self-sufficient set $\{a_1, \dots, a_n\}$.

Theorem. *If $(Q_1, \dots, Q_m)$ be a Hrushovski-Herwig envelope for an n -ary bush and consisting of self-sufficient relations, then $(Q_1, \dots, Q_m)$ has a Hrushovski-Herwig bush R forming a Hrushovski fusion of generic structures $\mathcal{M}_{Q_i}$, $i = 1, \dots, m$, and $\mathcal{M}_R$.*

Proof. Let

$$y_{Q_1, \dots, Q_m}(\mathcal{A}) = |A| - \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot e_{Q_i}(\mathcal{A}),$$

be the prerank function for a generic model $\mathcal{M}_{Q_1, \dots, Q_m}$. Take α_{m+1} , being in Herwig construction [3, 6] and additionally with $\alpha_{m+1} \cdot (k_p)^n < \varepsilon_p$, allow to permute coordinates of tuples in R , preserving R , and to put $(a_1, \dots, a_n)$ in R if that tuple belongs to a bush of $(Q_1, \dots, Q_m)$.

Now we consider the prerank function

$$y_{Q_1, \dots, Q_m, R}(\mathcal{A}) = |A| - \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot e_{Q_i}(\mathcal{A}) - \alpha_{m+1} \cdot e_R(\mathcal{A}).$$

By choice of α_{m+1} for any n -element restriction $\mathcal{A}_0$ of structure in $K_{Q_1, \dots, Q_m}$ there is a bush R of a copy of a restriction of $(Q_1, \dots, Q_m)$ such that p -approximations of $y_{Q_1, \dots, Q_m, R}(\mathcal{A})$ have lower bounds $b_{n'}^p$ for any non-empty restrictions $\mathcal{A}$ of $\mathcal{A}_0$.¹ Thus, a class $K_{Q_1, \dots, Q_m, R}$ of finite $(Q_1, \dots, Q_m, R)$ -structures $\mathcal{A}$ with that lower bounds $b_{n'}^p$ for p -approximations is generic. Since each Q_i is self-sufficient, for each tuple $\bar{a}_i \in Q_i$, $i = 1, \dots, m$, the structure $\mathcal{A}_i$ with the universe A_i , consisting of all elements in $\bar{a}_i$, admits (using standard arguments of Amalgamation Lemmas in [3]) the free amalgamation $\mathcal{B} *_{\mathcal{A}_i} \mathcal{A}'$ inside the class $K_{Q_1, \dots, Q_m, R}$, where $\mathcal{A}'$ is a copy of $\mathcal{A}_0$ such that $\mathcal{A}_i$ is a strong restriction of $\mathcal{A}'$ to a tuple in Q_i , and $\mathcal{A}_i$ is a strong substructure of $\mathcal{B}$. Thus, in that amalgams, $\bar{a}$ belongs to the according projection of R . Taking a $K_{Q_1, \dots, Q_m, R}$ -generic structure $\mathcal{M}$, we get the small stable theory $\text{Th}(\mathcal{M})$ and a required Hrushovski fusion with a bush R for the envelope $(Q_1, \dots, Q_m)$. $\square$

References

- [1] *Hrushovski E.* A stable $\aleph_0$ -categorical pseudoplane / E. Hrushovski. — Jerusalem : Hebrew University, 1988. — (Preprint).
- [2] *Sudoplatov S. V.* Syntactic approach to constructions of generic models / S. V. Sudoplatov // Algebra and Logic. — 2007. — Vol. 46, No. 2. — P. 134–146.
- [3] *Sudoplatov S. V.* The Lachlan problem / S. V. Sudoplatov. — Novosibirsk : NSTU, 2009. — 336 p. [in Russian]
- [4] *Hrushovski E.* A new strongly minimal set / E. Hrushovski // Ann. Pure and Appl. Logic. — 1993. — Vol. 62, No. 2. — P. 147–166.
- [5] *Sudoplatov S. V.* On the finite closure property for fusions of generic classes / S. V. Sudoplatov // Algebra and Model Theory 7. Collection of papers / eds.: A. G. Pinus, K. N. Ponomaryov, S. V. Sudoplatov. — Novosibirsk : NSTU, 2009. — P. 131–140. [in Russian]
- [6] *Herwig B.* Weight ω in stable theories with few types / B. Herwig // J. Symbolic Logic. — 1995. — Vol. 60, No. 2. — P. 353–373.

¹The coefficients $(k_p)^n$ allow to add to R some or all permutations of any tuple in the bush R , if it is necessary, staying in the class $K_{Q_1, \dots, Q_m, R}$ with lower bounds $b_{n'}^p$.

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ РЕМЕСЛЕННИКОВА ДЛЯ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ ГРУПП

Е.И. Тимошенко*

Новосибирский государственный технический университет,
пр К. Маркса, 20, Новосибирск, 630092, Россия
e-mail: algebra@nstu.ru

Под графом в дальнейшем будем понимать конечное множество вершин $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, на котором задано бинарное отношение смежности. Все рассматриваемые графы не имеют петель и кратных ребер. Запись $(x_i, x_j) \in \Gamma$ означает, что вершины x_i и x_j смежны в графе Γ .

Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторое многообразие групп и Γ – некоторый граф. Им соответствует *частично коммутативная группа* $F(\mathfrak{M}, \Gamma)$. Она имеет представление

$$F(\mathfrak{M}, \Gamma) = \langle x_1, \dots, x_n \mid x_i x_j = x_j x_i \Leftrightarrow (x_i, x_j) \in \Gamma \rangle$$

в многообразии $\mathfrak{M}$. Граф Γ называется определяющим графом либо графом коммутативности этой группы.

$\mathfrak{A}^2$ обозначает многообразие всех метабелевых (двуступенно разрешимых) групп, а $S_\Gamma = F(\mathfrak{A}^2, \Gamma)$.

Действие элементов $g \in S_\Gamma$ на коммутанте S'_Γ определяется сопряжением: $c \circ g = g^{-1}cg$, где $c \in S'_\Gamma$. Относительно этого действия S'_Γ является правым модулем над целочисленным групповым кольцом $\mathbb{Z}(S_\Gamma/S'_\Gamma)$. Сохраним за образами элементов $g \in S_\Gamma$ в группе S_Γ/S'_Γ обозначение g . Поэтому $\mathbb{Z}(S_\Gamma/S'_\Gamma) = \mathbb{Z}[X^{\pm 1}]$ – кольцо многочленов Лорана от $X^{\pm 1} = \{x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\}$. Как обычно, коммутатор $[x, y]$ равен $x^{-1}y^{-1}xy$.

Для любых не смежных вершин x_i, x_j определим идеал $\mathcal{A}_{i,j}^\Gamma$ кольца $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}]$ следующим образом. Если вершины x_i, x_j лежат в разных компонентах связности определяющего графа Γ , то положим $\mathcal{A}_{i,j}^\Gamma = 0$. Если эти вершины из одной компоненты связности, то рассмотрим все пути

*Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 09-01-00099

$\{x_i, x_{i1}, \dots, x_{im}, x_j\}$ между ними. Каждому пути поставим в соответствие элемент $(1 - x_{i1}) \dots (1 - x_{im})$ кольца $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}]$. Идеал $\mathcal{A}_{i,j}^\Gamma$ порожден всеми такими элементами.

Аннулятором $Ann(c)$ элемента $c \in S'_\Gamma$ называется идеал кольца $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}]$, состоящий из элементов α этого кольца, для которых $c^\alpha = 1$.

Мы будем использовать следующую теорему, доказанную в [1].

Теорема об аннуляторе. $Ann([x_i, x_j]) = \mathcal{A}_{i,j}^\Gamma$, если $[x_i, x_j] \neq 1$.

Рассмотрим стандартный язык групповой сигнатуры L , содержащий операции умножения и обращения.

$\exists$ — предложением называется формула вида

$$\exists w_1 \dots w_m \Phi(w_1, \dots, w_m),$$

где $\Phi(w_1, \dots, w_m)$ — формула языка L , не содержащая кванторов. Подчеркнем, что предложение не содержит свободных переменных. Это значит, что все переменные w_i связаны кванторами $\exists$.

Множество всех $\exists$ — предложений, истинных на группе G , называется ее *экзистенциальной теорией*.

Две группы называются *универсально эквивалентными*, если их экзистенциальные теории совпадают.

Для произвольного графа Δ на множестве вершин $Z = \{z_1, \dots, z_m\}$ обозначим через $\varphi(\Delta)$ формулу:

$$\exists z_1 \dots z_m \left(\bigwedge_{(z_i, z_j) \in T} [z_i, z_j] = 1 \wedge \bigwedge_{(z_i, z_j) \notin T} [z_i, z_j] \neq 1 \wedge \bigwedge_{i \neq j} z_i \neq z_j \wedge \bigwedge_{i=1, m} z_i \neq 1 \right).$$

В.Н.Ремесленников высказал гипотезу:

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое многообразие групп и $F(\mathfrak{M}, \Gamma_1)$, $F(\mathfrak{M}, \Gamma_2)$ — частично коммутативные группы из многообразия $\mathfrak{M}$. Если универсальные теории этих групп различны, то найдется граф Δ такой, что формула $\varphi(\Delta)$ верна на одной из этих групп, но ложна на другой.

Эта гипотеза получила свое подтверждение в работе [2] для частично коммутативных 2-ступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$ -групп.

Неизвестно, верна ли гипотеза для многообразия метабелевых групп. Однако, если ограничиться только теми формулами $\varphi(\Delta)$, для которых в качестве Δ рассматриваются деревья, то гипотеза не верна. Точнее, мы построим две частично коммутативные метабелевы группы S_{Γ_1} и S_{Γ_2} , имеющие различные универсальные теории, для которых любая формула $\varphi(T)$, где T — дерево, верна на одной из этих групп тогда и только тогда, когда она верна на другой.

Заметим, что тем не менее, гипотеза Ремесленникова остается правдоподобной для многообразия метабелевых групп.

Через C_n обозначим цикл на множестве вершин $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Частично коммутативную метабелеву группу с определяющим графом C_n обозначим S_n . Она имеет представление

$$S_n = \langle x_1, \dots, x_n \mid [x_i, x_j] = 1, \ 1 \leq i, j \leq n, \ i \equiv j + 1 \pmod{n} \rangle$$

в многообразии $\mathfrak{A}^2$.

Рассмотрим группу S_5 и в ней элементы $u_i(l, m)$, $i = 1, \dots, 5$, $l, m \in \mathbb{Z}$, определенные следующим образом:

$$u_1(l, m) = x_1[x_1, x_3]^l[x_1, x_4]^m,$$

$$u_2(l, m) = x_2[x_2, x_4]^l[x_2, x_5]^m,$$

$$u_3(l, m) = x_3[x_1, x_3]^l[x_3, x_5]^m,$$

$$u_4(l, m) = x_4[x_1, x_4]^l[x_2, x_4]^m,$$

$$u_5(l, m) = x_5[x_2, x_5]^l[x_3, x_5]^m.$$

Имеет место следующая

Лемма 1. В группе S_5 для элементов $u_i(l, m)$ справедливы утверждения:

1. Для $i = 1, \dots, 5$ m и m' $[u_i(l, m), u_i(l', m')] = 1$, когда $l = l'$, $m = m'$;
2. Тогда и только тогда $[u_1(l_1, m_1), u_2(l_2, m_2)] = 1$, когда $m_1 = l_2$;
3. Тогда и только тогда $[u_2(l_2, m_2), u_3(l_3, m_3)] = 1$, когда $m_2 = m_3$;
4. Тогда и только тогда $[u_3(l_3, m_3), u_4(l_4, m_4)] = 1$, когда $l_3 = l_4$;
5. Тогда и только тогда $[u_4(l_4, m_4), u_5(l_5, m_5)] = 1$, когда $m_4 = l_5$;
6. Тогда и только тогда $[u_1(l_1, m_1), u_5(l_5, m_5)] = 1$, когда $l_1 = -m_5$;
7. При $1 \leq i \neq j \leq 5$ $[u_i(l_i, m_i), u_j(l_j, m_j)] \neq 1$, если i не сравнимо с $j + 1$ по модулю 5.

Доказательство. Проверим первое утверждение. Пусть, для определенности, $i = 1$. Вычислим

$$[u_1(l, m), u_1(l', m')] = [x_1[x_1, x_3]^l[x_1, x_4]^m, x_1[x_1, x_3]^{l'}[x_1, x_4]^{m'}] =$$

$$\begin{aligned}
&= [x_1, x_3]^{l(1-x_1)} [x_1, x_4]^{m(1-x_1)} [x_1, x_3]^{l'(x_1-1)} [x_1, x_4]^{m'(x_1-1)} = \\
&= [x_1, x_3]^{(l-l')(1-x_1)} [x_1, x_4]^{(m-m')(1-x_1)}.
\end{aligned}$$

Предположим, что имеет место равенство

$$[x_1, x_3]^{(l-l')(1-x_1)} [x_1, x_4]^{(m-m')(1-x_1)} = 1.$$

Рассмотрим элемент

$$[x_1, x_3]^{(l-l')(1-x_1)(1-x_2)} [x_1, x_4]^{(m-m')(1-x_1)(1-x_2)},$$

который также равен единице в группе S_5 . Из теоремы об аннуляторе получим

$$[x_1, x_3]^{1-x_2} = 1.$$

Поэтому

$$[x_1, x_4]^{(m-m')(1-x_1)(1-x_2)} = 1.$$

Аннулятор коммутатора x_1, x_4 порожден в кольце $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}]$ элементами

$$1 - x_5, (1 - x_2)(1 - x_3).$$

Значит для некоторых элементов α и β из кольца $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}]$ выполнено равенство

$$(m - m')(1 - x_1)(1 - x_2) = \alpha(1 - x_5) + \beta(1 - x_2)(1 - x_3).$$

Применяя к этому равенству эндоморфизм

$$\varphi = \{x_1 \rightarrow x_1, x_2 \rightarrow x_2, x_3 \rightarrow 1, x_4 \rightarrow 1, x_5 \rightarrow x_5\}$$

кольца $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}]$, получим

$$(m - m')(1 - x_1)(1 - x_2) = 0.$$

Значит $m = m'$.

Чтобы доказать, что $l = l'$ рассмотрим элемент

$$[u_1(l, m), u_1(l', m')]^{1-x_5},$$

равный единице. Получим

$$[x_1, x_3]^{(l-l')(1-x_1)(1-x_5)} = 1.$$

По аналогии с рассмотренным ранее случаем, получим

$$(l - l')(1 - x_1)(1 - x_5) = \alpha'(1 - x_2) + \beta'(1 - x_4)(1 - x_5)$$

для некоторых $\alpha', \beta' \in \mathbb{Z}[X^{\pm 1}]$. Значит $l = l'$.

Проверим второе утверждение. Вычислим элемент

$$c = [u_1(l_1, m_1), u_2(l_2, m_2)].$$

Получим

$$c = [x_1, x_3]^{l_1(1-x_2)} [x_1, x_4]^{m_1(1-x_2)} [x_2, x_4]^{l_2(x_1-1)} [x_2, x_5]^{m_2(x_1-1)}.$$

Так как по теореме об аннуляторе

$$[x_1, x_3]^{1-x_2} = [x_2, x_5]^{x_1-1} = 1,$$

то

$$[x_1, x_4]^{m_1(1-x_2)} [x_2, x_4]^{l_2(x_1-1)} = 1.$$

В любой метабелевой группе справедливо тождество Якоби, которое можно записать в виде

$$[x, y]^{1-z} [y, z]^{1-x} [z, x]^{1-y} = 1.$$

Из этого тождества получаем

$$[x_1, x_4]^{1-x_2} [x_4, x_2]^{1-x_1} = 1.$$

Значит

$$c = [x_2, x_4]^{(m_1-l_2)(x_1-1)}.$$

Но аннулятор элемента $[x_2, x_4]$ порожден как идеал кольца $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}]$ элементами

$$1 - x_3, (1 - x_1)(1 - x_5).$$

Значит $m_1 = l_2$.

Доказательства утверждений 3–6 аналогичные.

Для доказательства последнего утверждения леммы достаточно воспользоваться леммой 4 из [3]. Согласно этой лемме, если элементы $u_i(l_i, m_i)$ и $u_j(l_j, m_j)$ перестановочны, то $[x_i, x_j] = 1$.

Лемма полностью доказана.

Для пары элементов $u_1(l_1, m_1)$ и $u_2(l_2, m_2)$ параметры m_1 и l_2 назовем соответствующими. По утверждению 2 леммы 1 элементы $u_1(l_1, m_1)$ и $u_2(l_2, m_2)$ перестановочны, если их соответствующие параметры равны. Определим соответствующие параметры для пар элементов $u_2(l_2, m_2)$ и $u_3(l_3, m_3)$ и т.д., используя утверждения 3–6 той же леммы. Можно

сказать, что если указанные элементы перестановочны, то их соответствующие параметры равны либо отличаются знаком. Последняя ситуация соответствует шестому утверждению леммы.

Рассмотрим теперь группу S_6 , определенную циклом C_6 и в ней элементы $v_i = v_i(p, q, r)$, $i = 1, \dots, 6$, $p, q, r \in \mathbb{Z}$:

$$v_1(p_1, q_1, r_1) = x_1[x_1, x_3]^{p_1}[x_1, x_4]^{q_1}[x_1, x_5]^{r_1},$$

$$v_2(p_2, q_2, r_2) = x_2[x_2, x_4]^{p_2}[x_2, x_5]^{q_2}[x_2, x_6]^{r_2},$$

$$v_3(p_3, q_3, r_3) = x_3[x_1, x_3]^{p_3}[x_3, x_5]^{q_3}[x_3, x_6]^{r_3},$$

$$v_4(p_4, q_4, r_4) = x_4[x_1, x_4]^{p_4}[x_2, x_4]^{q_4}[x_4, x_6]^{r_4},$$

$$v_5(p_5, q_5, r_5) = x_5[x_1, x_5]^{p_5}[x_2, x_5]^{q_5}[x_3, x_5]^{r_5},$$

$$v_6(p_6, q_6, r_6) = x_6[x_2, x_6]^{p_6}[x_3, x_6]^{q_6}[x_4, x_6]^{r_6},$$

По аналогии с леммой 1 может быть доказана

Лемма 2. В группе S_6 для элементов v_i справедливы утверждения:

1. $[v_1, v_2] = 1$ тогда и только тогда, когда $p_1 = p_2$, $r_1 = q_2$;
2. $[v_2, v_3] = 1$ тогда и только тогда, когда $q_2 = q_3$, $r_2 = r_3$;
3. $[v_3, v_4] = 1$ тогда и только тогда, когда $p_3 = p_4$, $r_3 = r_4$;
4. $[v_4, v_5] = 1$ тогда и только тогда, когда $p_4 = p_5$, $q_4 = q_5$;
5. $[v_5, v_6] = 1$ тогда и только тогда, когда $q_5 = p_6$, $r_5 = q_6$;
6. $[v_1, v_6] = 1$ тогда и только тогда, когда $p_1 = -q_6$, $q_1 = -r_6$;
7. $[v_i(p_i, q_i, r_i), v_i(p'_i, q'_i, r'_i)] = 1$ тогда и только тогда, когда $p_i = p'_i$, $q_i = q'_i$, $r_i = r'_i$;
8. При $1 \leq i \neq j \leq 6$ $[v_i, v_j] \neq 1$, если i не сравнимо с $j + 1$ по модулю 6.

Паре параметров p_1, r_1 элемента v_1 соответствует пара параметров p_2, q_2 элемента v_2 . Элементы v_1, v_2 перестановочны, если пары соответствующих параметров совпадают, то есть $(p_1, r_1) = (p_2, q_2)$. Аналогично определяются пары соответствующих параметров для других элементов v_2, v_3 и т.д. Можно сказать, что указанные элементы перестановочны, если пары соответствующих параметров совпадают либо отличаются знаком, как в утверждении 6 леммы 2.

Для $n \geq 2$ рассмотрим корневое дерево, которое обозначим через Δ_n . Степень его корня равна n , а степень любой не висячей вершины $n + 1$. Расстояние от корня до любой висячей вершины равна n . На рисунке 1 изображено дерево Δ_2 .

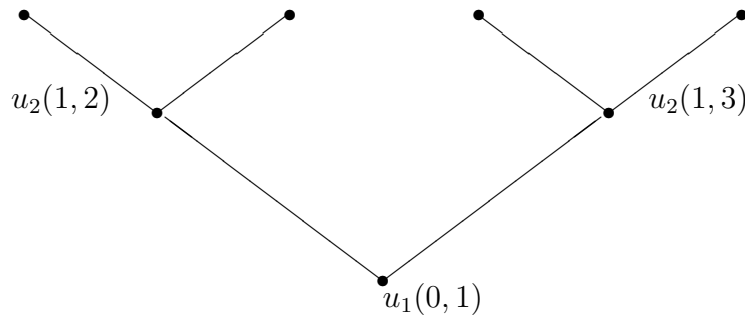


Рисунок 1.

В дереве Δ_n определим уровни с нулевого по n -ый. Вершина a имеет уровень t , если расстояние от нее до корня равно t . Корень a_0 имеет уровень ноль. Очевидно, что любое дерево T является подграфом Δ_n при подходящем достаточно большом n . Из утверждения 4 [1] следует

Утверждение. *Любая частично коммутативная метабелева группа с определяющим графом – деревом является подгруппой группы S_{Δ_n} при подходящем n .*

Скажем, что граф Γ можно разметить некоторой группой G , если каждой вершине графа Γ можно поставить в соответствие некоторый неединичный элемент группы G так, что различным вершинам соответствуют разные элементы группы и две вершины смежны в графе Γ тогда и только тогда, когда соответствующие им элементы группы перестановочны.

Теперь может быть доказана

Теорема. *Существуют частично коммутативные метабелевы группы S_{Γ_1} и S_{Γ_2} , универсальные теории которых различны, но тем не менее любая формула $\varphi(T)$, T – любое дерево, верна на одной из этих групп т. т. т., когда она верна на другой.*

Доказательство. В качестве Γ_1 и Γ_2 рассмотрим циклы C_5 и C_6 . Как доказано в [4], теорема 5, группы S_5 и S_6 не универсально эквивалентны. Мы докажем, что для любого дерева T формула $\varphi(T)$ верна

на обеих группах S_5 и S_6 . Для этого достаточно доказать, что граф Δ_n можно разметить группами S_5 и S_6 при любом n .

Разметим вначале дерево Δ_n элементами группы S_5 . Пусть $M = \{ a_i \mid 0 \leq i \leq N \}$ — множество вершин графа Δ_n . В качестве меток рассмотрим множество

$$U = \{ u_i(l, m) \mid i = 1, \dots, 5; l, m \in \mathbb{Z} \}$$

элементов группы S_5 , определенное в лемме 1.

Корню поставим в соответствие элемент $u_1(0, 1)$. Затем проставляем метки на вершины первого уровня, затем второго и т.д. Вершинам одинакового уровня α поставлены в соответствие элементы $u_i(l, m)$, у которых параметр i одинаков, причем $\alpha + 1 \equiv i \pmod{5}$. (см. рисунок 1.) Другими словами, мы помечаем вершину нулевого уровня элементом u_1 , вершины первого уровня элементами u_2 и т.д., изменяя индекс i элемента u_i по циклу $C_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 1, \dots\}$. Очередная метка, которую мы ставим, обладает тем свойством, что значение одного из её параметров равно соответствующему параметру ранее поставленной смежной метки, а значение другого параметра отличается даже по модулю от модулей всех ранее определенных параметров. Например, если метками смежных вершин являются элементы $u_1(l_1, m_1)$ и $u_2(l_2, m_2)$ и метка $u_2(l_2, m_2)$ ставится позже, то l_2 выбирается равным m_1 , а параметр m_2 выберем так, что его модуль отличен от модулей параметров ранее поставленных меток. Таким образом на каждом шаге появляется значение параметра метки, отличное от ранее определенных параметров, взятых со знаком плюс-минус.

Покажем, что метки не смежных элементов не перестановочны. Действительно, если расстояние между вершинами больше двух, то их метки имеют все различные по модулю параметры, следовательно не перестановочны по лемме 1.

Если расстояние между вершинами равно двум, то они находятся либо на одном уровне, либо их уровни различаются на два. Из леммы следует, что проставленные метки таких элементов не коммутируют в одном случае по первому, а в другом случае по последнему утверждению леммы 1.

Аналогична происходит разметка дерева Δ_n элементами группы S_6 . Алгоритм понятен из рисунка 2 и процесса распределения меток, описанного для группы S_5 .

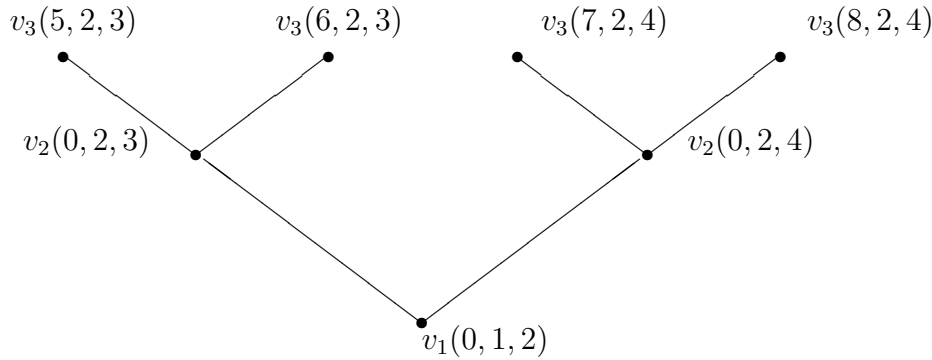


Рисунок 2.

По утверждению 7 леммы 2 метки вершин одного уровня не перестановочны, так как не все их соответствующие параметры совпадают. Рассмотрим не смежные вершины соседних уровней. Очевидно, что любая пара параметров одной метки не совпадает с соответствующей парой параметров другой метки даже по модулю. Значит метки не перестановочны. Метки, помещенные в вершины не соседнего уровня, также не перестановочны по последнему утверждению леммы 2. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ч.К. Гупта, Е.И. Тимошенко, Частично коммутативные метабелевы группы: централизаторы и элементарная эквивалентность, Алгебра и логика, 48, №3 (2009), 309–341.
- [2] А.А. Мищенко, Универсальная эквивалентность частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$ -групп, Вестник Омского университета. Специальный выпуск. Комбинаторные методы алгебры и сложность вычислений, (2008), 61–67.
- [3] Е.И. Тимошенко, Универсальная эквивалентность частично коммутативных метабелевых групп, Алгебра и логика, 49, №2 (2010), 263–290.
- [4] Ч.К. Гупта, Е.И. Тимошенко, Об универсальных теориях частично коммутативных метабелевых групп, Алгебра и логика, 50, №1 (2011), 3–25.

ALGEBRAIC GEOMETRY OVER LINEAR ORDERED SEMILATTICES

A.N. Shevlyakov

Omsk Branch of Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian
Academy of Sciences,
644099 Russia, Omsk, Pevtsova st. 13
e-mail: a_shevl@mail.ru

Introduction

Algebraic geometry over a field is the classical mathematic branch. It studies sets defined by systems of polynomial (algebraic) equations. The equationally Noetherian property (any system of algebraic equations is equivalent to its finite subsystem) plays a crucial role in algebraic geometry over a field. It follows that all algebraic sets over a field are defined by finite systems of equations and any nonempty algebraic set is a finite union of irreducible ones.

However, the notions of an equation and a solution can be formulated not merely over a field (see [1]). Thus, one can develop algebraic geometry over an algebraic structure $\mathcal{A}$ (algebra for short) in an arbitrary language $\mathcal{L}$ with no predicates. The definitions of algebraic set and radical are naturally generalized for an arbitrary algebra. The notion of coordinate ring of an algebraic set over a field corresponds to the notion of coordinate algebra in the general case. As well in classical case, a coordinate algebra determines the algebraic set up to isomorphism. Therefore, the main aim of algebraic geometry (the classification of algebraic sets) can be reduced to the classification of coordinate algebras.

The first of so-called Unification Theorems proven in [1, 2] describes the whole class of coordinate algebras of algebraic sets over an algebra $\mathcal{A}$ using seven different approaches. The second Unification Theorem describes the coordinate algebras which correspond to irreducible sets over $\mathcal{A}$. The unique restriction of Unifying Theorems is the equationally Noetherian property of an algebra $\mathcal{A}$.

Unlike the fields, there exist algebras which are not equationally Noetherian. The non-equationally Noetherian algebras do not admit a nice classification of coordinate algebras, since Unification Theorems do not necessary

hold. Trying to preserve the power of Unification Theorems, there were defined the classes of weakly equationally Noetherian, u_ω - and q_ω -compact algebras (see [3]). These three classes are denoted by $\mathbf{N}'$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Q}$ respectively and generalize the class of equationally Noetherian algebras $\mathbf{N}$. Each of the classes $\mathbf{N}'$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Q}$ inherits some properties of the class $\mathbf{N}$. For example, all algebraic sets over an algebra $\mathcal{A} \in \mathbf{N}'$ are defined by finite systems of equations. For any $\mathcal{A} \in \mathbf{U}$ the both Unification Theorems remain true, but for every $\mathcal{A} \in \mathbf{Q}$ remains true only the first one.

As the belonging of an algebra $\mathcal{A}$ to one of the classes $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Q}$ determines the set of Unifying Theorems which are true for $\mathcal{A}$, the next problem becomes fundamental in universal algebraic geometry.

Problem 1. For a given algebra $\mathcal{A}$ find the class $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Q}$ containing $\mathcal{A}$.

Problem 1 was solved for many classical algebras. In [2] it was listed the examples of equationally Noetherian algebras.

Moreover, in [5] it was defined a q_ω -compact group which is not equationally Noetherian. In the paper [4] it was shown that all the classes $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Q}$ of algebras in the language $\mathcal{L} = \{f_i^{(1)} | i \in \mathbb{N}\}$ of countable many unary functional symbols are pairwise distinct. In [6] we proved the distinction of the classes $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Q}$ of semilattices in the language $\mathcal{L} = \{\wedge\} \cup \{c_i | i \in \mathbb{N}\}$ with countable many constants.

The interesting result devoted to Problem 1 was proven in [4]. It were found the necessary conditions of an arbitrary algebra $\mathcal{A}$ to be u_ω - and q_ω -compact. Let us formulate this theorem.

Theorem [4]. *A system $\mathcal{S}$ over an algebra $\mathcal{A}$ is called an E_k -system if $\mathcal{S}$ has exactly k solutions in $\mathcal{A}$, but the solution set of any finite subsystem $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$ is infinite.*

Suppose $\mathcal{A}$ is a q_ω -compact $\mathcal{L}$ -algebra, then for $k \in \{0, 1\}$ there are not E_k -systems over $\mathcal{A}$. If $\mathcal{A}$ is u_ω -compact, then for any $k \in \mathbb{N}$ there are not E_k -systems over $\mathcal{A}$.

Therefore, it is naturally to pose the next problem.

Problem 2. Find a class of algebras $\mathbf{C}$ such that for any $\mathcal{A} \in \mathbf{C}$ the conditions of the theorem above are sufficient to be q_ω -compact (or u_ω -compact).

In the current paper we deal with the class $\mathbf{C}$ of linear ordered semilattices in the language $\mathcal{L} = \{\wedge\} \cup \{c_i | i \in I\}$ with infinite many constants and prove that Problem 2 is positively solved in $\mathbf{C}$ (Section 6). As we consider

semilattices in the extended language, we call them $\mathcal{L}$ -semilattices. Let us formulate the main results.

Theorem. *A linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$ is q_ω -compact iff there is not any one-variable E_k -system with $k = 0$ or $k = 1$*

Theorem. *A linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$ is u_ω -compact iff there is not any one-variable E_k -system for every $k \in \mathbb{N}$.*

In the paper we also prove the criteria for linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice to be (weakly) equationally Noetherian (Sections 3, 7).

1 Basic notions

A linear order $\leq$ over a set M is a binary relation which satisfies the next axioms

$$\forall x \forall y \forall z (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z) \text{ (transitivity),}$$

$$\forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x) \text{ (totality),}$$

$$\forall x \forall y (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y) \text{ (antisymmetry).}$$

The strict order is derived from $\leq$ by

$$x < y \iff x \leq y \text{ and } x \neq y.$$

A semilattice S is a partially ordered set with the operation $\wedge$, which for given $x, y \in S$ takes the lower bound $x \wedge y \in S$ of x and y . Obviously, the operation $\wedge$ is commutative and idempotent, i.e. $x \wedge y = y \wedge x$ and $x \wedge x = x$ for any $x, y \in S$.

In any semilattice one can define a partial order by

$$x \leq y \iff x \wedge y = x.$$

A semilattice S with a linear order $\leq$ is called a *linear ordered semilattice*.

Let $\mathcal{L}_0 = \{\wedge\}$ be the standard language of semilattice theory. We add to $\mathcal{L}_0$ a set of new constant symbols $\{c_i | i \in I\}$ of an arbitrary cardinality and obtain the extended language $\mathcal{L} = \{\wedge\} \cup \{c_i | i \in I\}$. A linear ordered semilattice of the language $\mathcal{L}$ is called a *linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice*. In other words, in a linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice any constant symbol from $\mathcal{L}$ corresponds to an appropriate element of the semilattice. As for any pair $x, y \in \mathcal{A}$ we have either $x \wedge y = x$ ($x \leq y$) or $x \wedge y = y$ ($y \leq x$), the set of constants $\{c_i\}$ is closed under the operation $\wedge$, i.e. it is a subsemilattice.

Let us consider the next example which will be used below.

Example 1. Consider a semilattice $[0, 1] \cup \{2, 3, \dots\} \subseteq \mathbb{Q}$ of rationals relative to usual order. By the segment $[0, 1]$ we denote the set of all rational x numbers with $0 \leq x \leq 1$. All elements from the interval $(0, 1)$ are matched as constants. Thus, we obtain the $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}_{ex}$.

Below in the paper we assume that the set $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ of variables is always finite. Each term of the language $\mathcal{L}$ depending on variables X is equivalent to

$$\tau(X) = x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n} \wedge \mathbf{c}, \quad (1)$$

where $\alpha_i \in \{0, 1\}$ (if $\alpha_i = 0$ the variable x_i does not occur in the term), $\mathbf{c}$ is a constant. We will use Greek letters $\tau, \sigma, \dots$ to denote terms of the language $\mathcal{L}$. The set of variables occurring in a term $\tau(X)$ is denoted by X_τ .

A term without a constant $\mathbf{c}$ is called *coefficient-free*. We will denote coefficient-free terms by Latin letters $t, s, \dots$.

Example 2. The expressions $x_1 \wedge x_2 \wedge 1/2$, x_1 , $1/3$ are terms over the semigroup $\mathcal{A}_{ex}$ from Example 1. Moreover, the second one is coefficient-free. However, the expression $x_1 \wedge 1$ is not a term over $\mathcal{A}_{ex}$, since the element 1 is not a constant in $\mathcal{A}_{ex}$.

Remark 3. The number of all pairwise non-equivalent coefficient-free terms depending on variables $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ over a linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice equals $2^n - 1$. For example, the coefficient-free terms in two variables exactly are the following $x_1 \wedge x_2$, x_1 , x_2 .

Remark 4. Let $\mathcal{A}$ be a linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice, $P = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathcal{A}^n$ a point and $t(X)$ a coefficient-free term. Then $t(P)$ equals the coordinate p_i , where $p_i = p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$. For example, the value of $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ at $(3, 1/2, 1/3) \in \mathcal{A}_{ex}$ equals $\min\{3, 1/2, 1/3\} = 1/3$.

The value of a variable x at a point P is denoted by $x(P)$.

Definition. We will say that a variable x (a constant $\mathbf{c}$) occurring in a term $\tau(X)$ defines $\tau(X)$ at a point P if the value $\tau(P)$ is equal to $x(P)$ ($\mathbf{c}$ respectively).

It is easy to check that any term of the language $\mathcal{L}$ has a defining variable or constant at any point P from a linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice. For instance, consider a term $x_1 \wedge x_2 \wedge 1/2$ over $\mathcal{A}_{ex}$; the variable x_1 defines it at $(1/3, 1/2) \in \mathcal{A}_{ex}^2$ and the constant $1/2$ defines the term at $(3/4, 1) \in \mathcal{A}_{ex}^2$.

2 The basic notions of algebraic geometry

Below we give the basic definitions of universal algebraic geometry. For more details one can recommend [1, 2, 3].

An *equation* in the language $\mathcal{L}$ is an atomic formula of $\mathcal{L}$. A *system of equations* (system for short) is an arbitrary set of equations. A system depending on the variables X is denoted by $\mathcal{S}(X)$. Recall that we will consider only systems which depend on a finite number of variables.

Remark 5. *As the order $x \leq y$ is expressible by the equation $x \wedge y = x$, further we suppose that systems may include inequalities of the form $x \leq y$.*

Let us give the main definitions of universal algebraic geometry.

The set of solutions of a system $\mathcal{S}$ in an $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$ is denoted by $V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S})$. If a system has not a solution in $\mathcal{A}$ it is called *inconsistent* over $\mathcal{A}$. If $\mathcal{S}$ contains only one equation $\tau(X) = \sigma(X)$, we will omit brackets and write $V_{\mathcal{A}}(\tau(X) = \sigma(X))$ instead of $V_{\mathcal{A}}(\{\tau(X) = \sigma(X)\})$.

A set $Y \subseteq \mathcal{A}^n$ is called *algebraic* over $\mathcal{A}$ if there exists a system $\mathcal{S}(X)$ such that $Y = V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S})$. A nonempty algebraic set is said to be *irreducible* if it is not a proper finite union of algebraic sets.

Systems are called *equivalent over the $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$* if they have the same set of solutions in $\mathcal{A}$.

An $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$ is said to be *equationally Noetherian* if for each system $\mathcal{S}$ (even for inconsistent) there exists its finite subsystem $\mathcal{S}_0$ which is equivalent to $\mathcal{S}$ over $\mathcal{A}$. The class of all equationally Noetherian $\mathcal{L}$ -semilattices is denoted by $\mathbf{N}$.

The following three definitions generalize the equationally Noetherian property.

An $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$ is said to be *weakly equationally Noetherian* if for any system $\mathcal{S}$ there exists a finite system $\mathcal{S}_0$ which is equivalent to $\mathcal{S}$ over $\mathcal{A}$ (here we do not assume $\mathcal{S}_0$ to be a subsystem of $\mathcal{S}$). Denote by $\mathbf{N}'$ the class of all weakly equationally Noetherian $\mathcal{L}$ -semilattices.

An $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$ is called *q_{ω} -compact* if for any system $\mathcal{S}$ and any $\tau(X) = \sigma(X)$ such that $V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}) \subseteq V_{\mathcal{A}}(\tau(X) = \sigma(X))$ there exists a finite subsystem $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$ with $V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_0) \subseteq V_{\mathcal{A}}(\tau(X) = \sigma(X))$.

An $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$ is *u_{ω} -compact* if for any system $\mathcal{S}$ and any finite set of equations $\tau_i(X) = \sigma_i(X)$ ($1 \leq i \leq m$) such that

$$V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}) \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_{\mathcal{A}}(\tau_i(X) = \sigma_i(X)),$$

there exists a finite subsystem $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$ with

$$V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_0) \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_{\mathcal{A}}(\tau_i(X) = \sigma_i(X)).$$

The classes of all q_ω -, u_ω -compact $\mathcal{L}$ -semilattices are denoted by $\mathbf{Q}, \mathbf{U}$ respectively.

The next figure explains the inclusions of all classes defined above. Notice that $\mathbf{Q} \cap \mathbf{N}' = \mathbf{N}$ (see the proof in [3]).

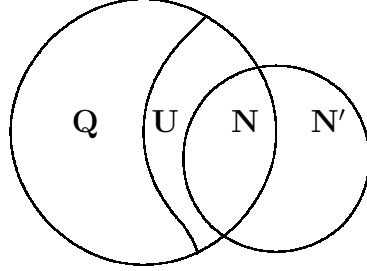


Figure 1.

Definition. [4] A system $\mathcal{S}$ over an $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$ is called an E_k -system if $\mathcal{S}$ has exactly k solutions in $\mathcal{A}$, but the solution set of any finite subsystem $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$ is infinite.

The following theorem contains a necessary condition of u_ω - and q_ω -compactness and was proved in [4].

Theorem 6. [4] Suppose $\mathcal{A}$ is a q_ω -compact $\mathcal{L}$ -algebra, then for $k \in \{0, 1\}$ there are not E_k -systems over $\mathcal{A}$. If $\mathcal{A}$ is u_ω -compact, then for any $k \in \mathbb{N}$ there are not E_k -systems over $\mathcal{A}$.

3 Equationally Noetherian property

The description of equationally Noetherian linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattices immediately follows from the next criterion proven in [6] for an arbitrary $\mathcal{L}$ -semilattice.

Theorem 7. [6] An $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$ is equationally Noetherian iff the sub-semilattice $\mathcal{C}$ generated by the constants $\{\mathbf{c}_i | i \in I\}$ is finite.

Example 8. From Theorem 7 it follows that the $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}_{ex}$ defined in Example 1 is not equationally Noetherian.

Indeed, consider the sequence of constants $\{\mathbf{c}_i | i \in I_0\}$ which tends to 0, hence the infinite system $\mathcal{S} = \{x \leq \mathbf{c}_i | i \in I_0\}$ is not equivalent to any finite subsystem.

4 Decompositions of systems

In this section we study the simplifications of systems over linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattices. The results of this section will be used in Section 6.

Definition. An infinite system $\mathcal{S}(X)$ over a linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$ is called homogeneous if there exist coefficient-free terms $t(X), s(X)$ such that each equation of $\mathcal{S}$ is one of the following:

1. $t(X) \wedge \mathbf{a}_j = s(X) \wedge \mathbf{b}_j$;
2. $t(X) = s(X) \wedge \mathbf{b}_j$;
3. $t(X) \wedge \mathbf{a}_j = s(X)$;
4. $t(X) \wedge \mathbf{a}_j = s(X) \wedge \mathbf{b}_j$;

where $\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j$ are constants.

Definition. A homogeneous systems $\mathcal{S}(X) = \{t(X) \wedge \mathbf{a}_j = s(X) \wedge \mathbf{b}_j | j \in J\}$ is called ordered if the one of the following conditions holds:

1. $\mathbf{a}_j < \mathbf{b}_j$ for all equations of $\mathcal{S}$;
2. $\mathbf{a}_j > \mathbf{b}_j$ for all equations of $\mathcal{S}$;
3. $\mathbf{a}_j = \mathbf{b}_j$ for all equations of $\mathcal{S}$;
4. all equations of $\mathcal{S}$ are $t(X) \wedge \mathbf{a}_j = s(X)$;
5. all equations of $\mathcal{S}$ are $t(X) = s(X) \wedge \mathbf{b}_j$;
6. all equations of $\mathcal{S}$ are $t(X) \wedge \mathbf{a}_j = \mathbf{b}_j$.

Remember that we apply the notions “homogeneous” and “ordered” only to infinite systems.

Remark 9. By definitions, each homogeneous system is represented as a union of at most six ordered systems.

The following lemma comes from Remarks 3, 9.

Lemma 10. Let $\mathcal{S}(X)$ be an infinite system over a linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$. Then $\mathcal{S}$ is represented as a finite union

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \dots \cup \mathcal{S}_m \cup \tilde{\mathcal{S}}, \quad (2)$$

where $\mathcal{S}_i$ are ordered, $\tilde{\mathcal{S}}$ is finite.

Proof. Straightforward. One should apply that any ordered system is defined by coefficient-free equation, and the number of such equations is finite. $\square$

5 The solutions of some equations and ordered systems over a linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice

Below we write the solutions of equations and ordered systems depending on at most two variables in a linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$. Always when we denote the constants by $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ we assume $\mathbf{a} < \mathbf{b}$. Let us write down the solutions of such equations

- $V_{\mathcal{A}}(x \wedge \mathbf{a} = \mathbf{b}) = \emptyset$;
- $V_{\mathcal{A}}(x \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a}) = \{\mathbf{a}\}$;
- $V_{\mathcal{A}}(x \wedge \mathbf{a} = x) = V_{\mathcal{A}}(x \wedge \mathbf{a} = x \wedge \mathbf{b}) = \{x \leq \mathbf{a}\}$;
- $V_{\mathcal{A}}(x \wedge \mathbf{a} = y \wedge \mathbf{b}) = V_{\mathcal{A}}(x \wedge \mathbf{a} = y) = \{(x, x) | x \leq \mathbf{a}\} \cup \{(x, \mathbf{a}) | x \geq \mathbf{a}\}$;
- $V_{\mathcal{A}}(x \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a}) = \{x \geq \mathbf{a}\}$;
- $V_{\mathcal{A}}(x \wedge \mathbf{a} = y \wedge \mathbf{a}) = \{(x, x) | \text{for an arbitrary } x\} \cup \{(x, y) | x, y \geq \mathbf{a}\}$;

Let us solve infinite systems depending at most two variable in a linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$ (below we assume $\mathbf{a}_k \leq \mathbf{b}_k$).

1. $\mathcal{S} = \{x \wedge \mathbf{a}_k = \mathbf{b}_k | k \in K\}$. Obviously, $\mathcal{S}$ is inconsistent and equivalent to its arbitrary equation.
2. $\mathcal{S} = \{x \wedge \mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k | k \in K\}$. Since the solution of the equation $x \wedge \mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k$ is equal to $\{\mathbf{a}_k\}$, the system $\mathcal{S}$ is consistent iff all equations of $\mathcal{S}$ have the same right parts. The consistent system $\mathcal{S}$ is equivalent to its arbitrary equation; the inconsistent system $\mathcal{S}$ is equivalent to a pair of its equations $x \wedge \mathbf{b}_{k_1} = \mathbf{a}_{k_1}$, $x \wedge \mathbf{b}_{k_2} = \mathbf{a}_{k_2}$ with $k_1 \neq k_2$.
3. If any equation of the system $\mathcal{S} = \{x \wedge \mathbf{a}_k = y \wedge \mathbf{b}_k | k \in K\}$ has the same left part $x \wedge \mathbf{a}$ then $\mathcal{S}$ is equivalent to its arbitrary equation. Otherwise, $\mathcal{S}$ is equivalent to the system $\{x \leq \mathbf{a}_k | i \in K\}$.

Remark 11. An arbitrary ordered system $\{t(X) \wedge \mathbf{a}_i = s(X) \wedge \mathbf{b}_i\}$ is obtained from the systems considered above by the substitution $\mathbf{x} = t(X)$, $\mathbf{y} = s(X)$, where $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ are new variables.

Further we will assume that ordered systems $\mathcal{S}_i$ in the decomposition (2) consist of the equations $t(X) \leq \mathbf{a}_i$, $t(X) \geq \mathbf{a}_i$, $t(X) \wedge \mathbf{a}_i = s(X) \wedge \mathbf{a}_i$, since the another types of ordered systems are equivalent to these ones. Thus,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \dots \cup \mathcal{S}_m \cup \tilde{\mathcal{S}}, \quad (3)$$

where $\mathcal{S}_k$ is either $\{t(X) \leq \mathbf{a}_k | k \in K_i\}$ or $\{t(X) \geq \mathbf{a}_k | k \in K_i\}$ or $\{t(X) \wedge \mathbf{a}_k = s(X) \wedge \mathbf{a}_k | k \in K\}$.

6 q_ω - and u_ω -compactness

Definition. A subset S of a linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice is called an algebraic segment if S is one of the following ($\mathbf{a}, \mathbf{b}$ are constants)

1. $S = (-\infty, \mathbf{b}] = \{x \leq \mathbf{b}\};$
2. $S = [\mathbf{a}, +\infty) = \{\mathbf{a} \leq x\};$
3. $S = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{a} \leq x \leq \mathbf{b}\}.$
4. $S = (-\infty, +\infty) = \mathcal{A};$

The empty set is an algebraic segment, since $\emptyset = [\mathbf{a}, \mathbf{a})$. Indeed, any algebraic segment is an algebraic set.

Let $\mathcal{A}$ be a linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice and k a natural number. A set $S \subseteq \mathcal{A}$ is said to be E_k -segment if it is an intersection of infinitely many algebraic segments $\{S_i | i \in I\}$ such that $|S| = k$, but for any finite set of indexes $I_0 \subseteq I$ the set $\bigcap_{i \in I_0} S_i$ is infinite.

As every E_k -segment is an infinite intersection of algebraic sets, it is also algebraic.

Example 12. Let $\mathcal{A}_{ex}$ be the $\mathcal{L}$ -semilattice from Example 1. Suppose $\{\mathbf{c}_i\} \subset \mathbb{Q}$ is the sequence of constants which tends to 0. Therefore, the intersection $\bigcap_{i=1}^{\infty} (-\infty, \mathbf{c}_i]$ defines an E_1 -segment $\{0\}$. Similarly, the intersection $\bigcap_{i=1}^{\infty} [\mathbf{c}'_i, \mathbf{c}_i]$ defines an E_0 -segment if $\{\mathbf{c}_i\}, \{\mathbf{c}'_i\}$ tend to the same irrational limit (recall that $\mathcal{A}_{ex}$ consists of rational numbers). Let $N \geq 1$ be a natural number from $\mathcal{A}_{ex}$. If we add to $\mathcal{A}_{ex}$ a new constant which is equal to N we obtain the E_N -segment defined by $\bigcap_{i=1}^{\infty} [\mathbf{c}_i, N]$, where the sequence $\{\mathbf{c}_i\}$ tends to 1.

Remark 13. Let $\mathcal{A}$ be a linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice. Obviously, every E_k -segment defines a E_k -system $\mathcal{S}$ over $\mathcal{A}$ depending on a single variable and vice versa. According Theorem 6, we have

1. if there exists an E_0 - or E_1 -segment over $\mathcal{A}$ then $\mathcal{A}$ is not q_ω -compact;
2. if for some $k \in \mathbb{N}$ there exists an E_k -segment over $\mathcal{A}$ then $\mathcal{A}$ is not u_ω -compact;

Remark 14. Below we assume that a system $\mathcal{S}$ is decomposed by (3).

By L_i we denote the intersection of segments defined by the ordered system $\mathcal{S}_i$, i.e.

1. $L_i = \bigcap_{i \in I} [\mathbf{c}_i, +\infty)$ if $\mathcal{S}_i = \{t(X) \geq \mathbf{c}_i | i \in I\}$ or $\mathcal{S}_i = \{t(X)\mathbf{c}_i = s(X)\mathbf{c}_i | i \in I\}$;
2. $L_i = \bigcap_{i \in I} (-\infty, \mathbf{c}_i]$ if $\mathcal{S}_i = \{t(X) \leq \mathbf{c}_i | i \in I\}$;

The sets L_i are called the *limit segments* of the ordered systems $\mathcal{S}_i$. According the definition, any limit interval is half-infinite.

Example 15. Let $\mathcal{A}_{ex}$ be the $\mathcal{L}$ -semilattice from Example 1. Consider a system $\mathcal{S}_{ex}$ over $\mathcal{A}_{ex}$ which consists of the equations

$$\{x \leq \mathbf{c}_i | i \in I_0\} \cup \{y \leq \mathbf{c}_i | i \in I_{\kappa^+}\} \cup \{y \geq \mathbf{c}_i | i \in I_{\kappa^-}\} \cup \{z \geq \mathbf{c}_i | i \in I_1\} \cup \{x \leq y \wedge z\},$$

where $I_0, I_{\kappa^+}, I_{\kappa^-}, I_1$ are infinite subsets of naturals, κ is an irrational number from the interval $(0, 1)$, and

$$\lim_{\substack{i \rightarrow \infty, \\ i \in I_0}} \mathbf{c}_i = 0, \quad \lim_{\substack{i \rightarrow \infty, \\ i \in I_1}} \mathbf{c}_i = 1, \quad \lim_{\substack{i \rightarrow \infty, \\ i \in I_{\kappa^+}}} \mathbf{c}_i = \lim_{\substack{i \rightarrow \infty, \\ i \in I_{\kappa^-}}} \mathbf{c}_i = \kappa,$$

$$\mathbf{c}_i < \kappa < \mathbf{c}_j \text{ for any } i \in I_{\kappa^-}, j \in I_{\kappa^+}.$$

The system $\mathcal{S}_{ex}$ is decomposed by $\mathcal{S}_{ex} = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_{\kappa^+} \cup \mathcal{S}_{\kappa^-} \cup \mathcal{S}_1 \cup \tilde{\mathcal{S}}$, where $\mathcal{S}_0 = \{x \leq \mathbf{c}_i | i \in I_0\}$, $\mathcal{S}_{\kappa^+} = \{y \geq \mathbf{c}_i | i \in I_{\kappa^+}\}$, $\mathcal{S}_{\kappa^-} = \{y \leq \mathbf{c}_i | i \in I_{\kappa^-}\}$, $\mathcal{S}_1 = \{z \geq \mathbf{c}_i | i \in I_1\}$, $\tilde{\mathcal{S}} = \{x \leq y \wedge z\}$. The limit segment L_0 of the ordered system $\mathcal{S}_0$ equals $\{0\}$. Similarly, $L_{\kappa^+} = (0, \kappa]$, $L_{\kappa^-} = [\kappa, +\infty)$, $L_1 = \{1, 2, \dots\}$.

Thus, L_0 is an E_1 -segment. The intersection of L_{κ^+} and L_{κ^-} is also an E_1 -segment.

Remark 16. Let $L'_i \subseteq L_i$ be a finite intersection of segments from a finite subsystem $\mathcal{S}'_i \subseteq \mathcal{S}_i$. We will also call L'_i a limit segment of $\mathcal{S}'_i$.

The next lemma is obvious and its proof is omitted.

Lemma 17. Suppose a constant $\mathbf{c}$ does not belong to a limit segment L_i . Then there exists a finite subsystem (below $\mathcal{S}'_i \subseteq \mathcal{S}_i$, where $\mathcal{S}_i$ is defined by formula (3))

$$\mathcal{S}' = \mathcal{S}'_1 \cup \mathcal{S}'_2 \cup \dots \cup \mathcal{S}'_m \cup \tilde{\mathcal{S}} \quad (4)$$

such that $\mathbf{c}$ does not belong to L'_i , where L'_i is a limit segment of the finite subsystem $\mathcal{S}'_i$.

Lemma 18. Let $\mathcal{A}$ be a linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice without E_0 -segments.

If limit segments L'_i, L'_j have a nonempty intersection for any finite subsystem $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, then $L_i \cap L_j \neq \emptyset$.

Proof. Assume the converse, i.e. $L_i \cap L_j = \emptyset$. Then $\mathcal{S}_i \cup \mathcal{S}_j$ is a E_0 -system that contradicts with the condition of the lemma. $\square$

Remark 19. Further we assume that the finite subsystem $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ satisfies the following two conditions.

1. Let C be a finite set of constants. According Lemma 17, one can assume that any limit segment L'_i of the finite subsystem (4) does not contain any constant $\mathbf{c} \in C$ which does not belong to a limit segment L_i .
2. Following Lemma 18, for a linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice without E_0 -segments we claim that the limit segments L'_i, L'_j of $\mathcal{S}'$ intersect iff $L_i \cap L_j \neq \emptyset$.

Example 20. Let $\mathcal{S}_{ex}$ be the system from Example 15. The limit segments $L_0, L_{\kappa-}$ do not intersect, hence one can choose the finite sets $\{\mathbf{c}_i | i \in I'_0 \subseteq I_0\}$, $\{\mathbf{c}_i | i \in I'_{\kappa-} \subseteq I_{\kappa-}\}$ such that the segments $L'_0, L'_{\kappa-}$ have the empty intersection. Similarly, there exist segments $L'_1, L'_{\kappa+}$ with $L'_0 \cap L'_{\kappa+} = \emptyset$. For distinctness we assume further that the segments $L'_0, L'_{\kappa-}, L'_{\kappa+}, L'_1$ equal $[0, 0.25]$, $[0.3, +\infty)$, $[0, 0.5]$, $[0.75, +\infty)$ respectively, where κ equals $1/\pi \approx 0.3183$.

Let $\mathcal{A}$ be a linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice, P a point $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathcal{A}^n$, and C a finite set of constants. Consider a point $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, where q_i satisfy the following conditions

1. $p_i \leq p_j$ iff $q_i \leq q_j$;
2. $p_i = p_j$ then $q_i = q_j$;
3. if $p_i \leq \mathbf{c} \in C$ iff $q_i \leq \mathbf{c}$;

The point Q is called a C -shift of the point P . Notice that the definition of a shift implies $p_i = \mathbf{c}$ iff $q_i = \mathbf{c}$ for any $\mathbf{c} \in C$.

Correspondingly, Q is a C -strict shift if the first two conditions above are replaced by

$$p_i < p_j \text{ iff } q_i < q_j.$$

Example 21. Let $\mathcal{S}_{ex}$ be the system from Example 15. In Example 20 we defined the finite subsystem $\mathcal{S}'_{ex}$. Let $C = (0.1, 0.4, 0.6, 0.9)$. The C -shifts of the points $P_1 = (0.3, 0.4, 0.8)$, $P_2 = (0.09, 0.08, 0.2)$, $P_3 = (0.3, 0.55, 0.8)$, $P_4 = (1, 2, 3)$ are $Q_1 = (0.11, 0.4, 0.9)$, $Q_2 = (0.1, 0.1, 0.1)$, $Q_3 = (0.4, 0.6, 0.8)$, $Q_4 = (0.9, 0.9, 1)$ respectively (recall that a C -shift is not unique). The C -shifts of the points P_1, P_3 are strict.

Remark 22. By definition, any shift determines a map φ over the set $\{p_i\}$ such that φ preserves the equality and order relations. For a strict shift the map φ is injective. According Remark 4, φ preserves the values of every coefficient-tree term $t(X)$. For an arbitrary term $\tau(X)$ we have $\tau(P) = \tau(Q)$ if its constant belongs to the set $\mathcal{C}$. Thus we obtain the next lemma.

Lemma 23. Let $P \in \mathcal{A}^n$ be a solution of a finite system $\tilde{\mathcal{S}}$ over a linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$. Then any C -shift (or strict C -shift) Q of the point P is a solution of $\tilde{\mathcal{S}}$, where the finite set C contains all constants of the system $\tilde{\mathcal{S}}$.

Let $L_1, L_2, \dots, L_m$ be the limit segments of the ordered systems $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_m$. The finite subsystem $\mathcal{S}'$ is defined by (4) and $L'_1, L'_2, \dots, L'_m$ are the limit segments of the systems $\mathcal{S}'_1, \mathcal{S}'_2, \dots, \mathcal{S}'_m$.

Suppose a point Q is a C -shift (strict C -shift) of a point $P = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathcal{A}^n$. The point $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathcal{A}^n$ is called a *limit shift* (correspondingly *limit strict C -shift*) if for any coordinate p_i we have $p_i \in L'_j$ iff $q_i \in L_j$.

Example 24. Let $\mathcal{S}_{ex}$ be the system from Example 15. The limit segments L'_i of the finite subsystem $\mathcal{S}'$ were defined in Example 20. As above $C = (0.1, 0.4, 0.6, 0.9)$, $P_1 = (0.3, 0.4, 0.8)$, $P_2 = (0.09, 0.08, 0.2)$, $P_3 = (0.3, 0.55, 0.8)$, $P_4 = (1, 2, 3)$. The points $Q_1 = (\kappa, \kappa, 2)$ (recall $\kappa = 1/\pi$), $Q_2 = (0, 0, 0)$, $Q_3 = (\kappa, 0.6, 1)$, $Q_4 = (1, 4, 8)$ are limit C -shifts of P_i . Moreover, Q_3, Q_2 are strict.

Lemma 25. Let $P = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathcal{A}^n$ be a solution of a finite system $\mathcal{S}'$. Then any limit C -shift (or limit strict C -shift) Q of the point P is a solution of $\mathcal{S}$, where the finite set C contains all constants of the system $\tilde{\mathcal{S}}$.

Proof. By Lemma 23, $Q \in V_{\mathcal{A}}(\tilde{\mathcal{S}})$. Let $\mathcal{S}_i$ be an ordered subsystem of $\mathcal{S}$. Without loss of generality one can assume that $\mathcal{S}_i$ is a system $\{t(x) \geq \mathbf{c}_i | i \in I\}$ with the limit segment $L_i = \bigcap_{i \in I} [\mathbf{c}_i, +\infty)$. Suppose the variable x defines $t(X)$ at P (hence $x \in L'_i$). According Remark 22, x defines $t(X)$ at Q . Since $x(Q) \in L_i$, we obtain $t(Q) \in L_i$, hence $Q \in V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_i)$. Finally, we have $Q \in V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S})$. $\square$

Now we are able to prove the criteria of u_ω - and q_ω -compactness for linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattices.

Theorem 26 (The criterion of u_ω -compactness). *A linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$ is u_ω -compact iff there is not any E_k -segment over $\mathcal{A}$ for every $k \in \mathbb{N}$.*

Proof. Following Remark 13, the existence of an E_k -segment ($k \in \mathbb{N}$) implies $\mathcal{A} \notin \mathbf{U}$.

Suppose now there is not an E_k -segment over $\mathcal{A}$ for any $k \in \mathbb{N}$. Let us prove $\mathcal{A} \in \mathbf{U}$.

Let $\mathcal{S}$ be an infinite system (3) over $\mathcal{A}$. Consider a set of equations $\tau_1(X) = \sigma_1(X), \dots, \tau_l(X) = \sigma_l(X)$ such that

$$V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}) \subseteq \bigcup_{i=1}^l V_{\mathcal{A}}(\tau_i(X) = \sigma_i(X)).$$

Let $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ be a finite subsystem defined by formula (4). One can suppose that $\mathcal{S}'$ satisfies Remark 19, where the finite set C consists of all constants which occur in the equations $\tilde{\mathcal{S}} \cup \bigcup_{i=1}^l \{\tau_i(X) = \sigma_i(X)\}$.

The proof of the inclusion

$$V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}') \subseteq \bigcup_{i=1}^l V_{\mathcal{A}}(\tau_i(X) = \sigma_i(X)) \quad (5)$$

provides the proof of the whole theorem.

If $\mathcal{S}'$ is inconsistent it is equivalent to $\mathcal{S}$ and the inclusion above holds.

Otherwise, let P be an arbitrary solution of $\mathcal{S}'$. Firstly we prove that there exists a limit strict C -shift of P .

Suppose the value p_i of a variable x_i belongs to the limit segments $L'_{i_1}, L'_{i_2}, \dots, L'_{i_n}$. Let $L = \bigcap_{j=1}^n L_{i_j}$. According Lemma 18, $L \neq \emptyset$. Let $\mathbf{c}_l, \mathbf{c}_r \in C$ satisfy $c_l \leq p_i \leq c_r$ and the segment $[\mathbf{c}_l, \mathbf{c}_r]$ does not contain any constant from C .

By definition of a strict C -shift, one should map p_i into $L \cap [\mathbf{c}_l, \mathbf{c}_r]$. As $\mathcal{A}$ does not have E_k -segments, $|L \cap [\mathbf{c}_l, \mathbf{c}_r]| = \infty$. By definition of a limit strict C -shift, one should map into the set $L \cap [\mathbf{c}_l, \mathbf{c}_r]$ all variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$ with the values $\mathbf{c}_l \leq p_{i_j} \leq \mathbf{c}_r$. Since the set $L \cap [\mathbf{c}_l, \mathbf{c}_r]$ is infinite, one can do it preserving the equality and strict order relations.

Thus, there exists a limit strict C -shift Q of the point P . By Lemma 25 Q is a solution of $\mathcal{S}$. Hence, $Q \in V_{\mathcal{A}}(\tau_i(X) = \sigma_i(X))$ for some i . One can apply Lemma 23 to $\tau_i(X) = \sigma_i(X)$ and Q . Therefore, $P \in V_{\mathcal{A}}(\tau_i(X) = \sigma_i(X))$, and inclusion (5) holds. $\square$

Corollary 27. *A linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$ is u_ω -compact iff there is not any one-variable E_k -system with $k \in \mathbb{N}$.*

Proof. Straightforward. Recall that any limit segment is defined by a system in one variable. $\square$

Theorem 28 (The criterion of q_ω -compactness). *A linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$ is q_ω -compact iff there is not any E_k -segment with $k = 0$ or $k = 1$.*

Proof. Following Remark 13, the existence of an E_k -segment ($0 \leq k \leq 1$) implies $\mathcal{A} \notin \mathbf{Q}$.

Suppose now there is not any E_k -segment over $\mathcal{A}$ for $0 \leq k \leq 1$. Let us prove $\mathcal{A} \in \mathbf{Q}$.

Let $\mathcal{S}$ be an infinite system (3) over $\mathcal{A}$. Let us take an equation $\tau(X) = \sigma(X)$ such that

$$V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}) \subseteq V_{\mathcal{A}}(\tau(X) = \sigma(X)).$$

Consider a finite subsystem $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ defined by formula (4). One can suppose that the system $\mathcal{S}'$ satisfies Remark 19, where the finite set C consists of all constants which occur in the equations $\tilde{\mathcal{S}} \cup \{\tau(X) = \sigma(X)\}$.

The proof of the inclusion

$$V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}') \subseteq V_{\mathcal{A}}(\tau(X) = \sigma(X)) \quad (6)$$

provides the proof of the whole theorem.

If $\mathcal{S}'$ is inconsistent it is equivalent to $\mathcal{S}$ and the inclusion above holds.

Otherwise, let P be an arbitrary solution of $\mathcal{S}'$. Assume the converse, i.e. $P \notin V_{\mathcal{A}}(\tau(X) = \sigma(X))$. Without loss of generality one can put $\tau(P) < \sigma(P)$ and the variables x_1, x_2 define the terms $\tau(X), \sigma(X)$ at the point P (similarly one can consider a constant which defines the term $\tau(X)$ or $\sigma(X)$).

For any point p_i the intersection of all limit segments $\{L'_{ij} | 1 \leq j \leq n_i\}$ containing p_i is nonempty. As there are not E_0 -systems over $\mathcal{A}$, all intersections $L^{(i)} = \bigcap_{j=1}^{n_i} L_{ij}$ are nonempty. Hence, if we map a coordinate p_i into the limit segment $L^{(i)}$ we obtain the point Q which is a C -shift of P . If $L^{(1)} \cap L^{(2)} = \emptyset$ we have $q_1 \neq q_2$. Assume that $L^{(1)} \cap L^{(2)} = L \neq \emptyset$. As L is not a E_0 - or E_1 -segment, we have $|L| \geq 2$, hence $L^{(1)} \cup L^{(2)} \geq 2$. It follows that one can map p_1, p_2 into $L^{(1)} \cup L^{(2)}$ with $q_1 \neq q_2$.

Thus we obtain the point Q with the coordinates $q_1 \neq q_2$. Hence, $\tau(Q) < \sigma(Q)$. However, by Lemma 25, we have $Q \in V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S})$ that contradicts with the inclusion $V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}) \subseteq V_{\mathcal{A}}(\tau(X) = \sigma(X))$. $\square$

Corollary 29. *A linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$ is q_ω -compact iff there is not any one-variable E_k -system with $k = 0$ or $k = 1$.*

Proof. Straightforward. Recall that any limit segment is defined by a system in one variable. $\square$

7 Weak equationally Noetherian property

Theorem 30. *Let $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ be the subsemilattice generated by the constants. A linear ordered $\mathcal{L}$ -semilattice $\mathcal{A}$ is weakly equationally Noetherian iff*

1. *every set of constants $\{\mathbf{c}_k \in \mathcal{C} | k \in K\}$ has the upper bound in $\mathcal{C}$ or it is unbounded above in $\mathcal{A}$;*
2. *every set of constants $\{\mathbf{c}_k \in \mathcal{C} | k \in K\}$ has the lower bound in $\mathcal{C}$ or it is unbounded below in $\mathcal{A}$;*

Proof. Let us prove the necessary condition. Assume there exists a set of constants $\{\mathbf{c}_k | k \in K\}$ such that it has not the supremum in $\mathcal{C}$, but the system $\mathcal{S} = \{x \geq \mathbf{c}_k | k \in K\}$ is consistent (similarly, one can consider a set without the infimum in $\mathcal{C}$).

Assume $\mathcal{S}$ is equivalent to a finite one-variable system $\mathcal{S}_0$. The system $\mathcal{S}_0$ does not contain the equations $x = \mathbf{c}$, since the solution set of $\mathcal{S}$ contains non-constants. Therefore, the $\mathcal{S}_0$ consists of the equations $\{x \geq \mathbf{c}_j | 1 \leq j \leq m\}$ and $\mathcal{S}_0$ is equivalent to the single equation $x \geq \bigwedge_{j=1}^m \mathbf{c}_j$. Hence, the element $\bigwedge_{j=1}^m \mathbf{c}_j$ is the supremum of $\{\mathbf{c}_k | k \in K\}$. We came to the contradiction.

Now we prove the sufficient condition. According to decomposition (3), it is sufficient to prove that any ordered system $\mathcal{S}$ is equivalent to a finite system.

Suppose $\mathcal{S} = \{t(X)\mathbf{c}_k = s(X)\mathbf{c}_k | k \in K\}$ (similarly, one can consider another types of ordered systems). It is easy to check that for the unbounded above set $\{\mathbf{c}_k | k \in K\}$ the system $\mathcal{S}$ is inconsistent. Hence, it is equivalent to the equation $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2$. Otherwise (the set $\{\mathbf{c}_k | k \in K\}$ has the upper bound $\mathbf{c}$), $\mathcal{S}$ is equivalent to the equation $t(X)\mathbf{c} = s(X)\mathbf{c}$. $\square$

References

- [1] E. Daniyarova, A. Miasnikov, V. Remeslennikov, Unification theorems in algebraic geometry, arXiv:0808.2522v1 [math.AG], 28 p
- [2] E. Daniyarova, A. Miasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over algebraic structures II: Foundations, arXiv:1002.3562v1 [math.AG], 54 p.
- [3] E. Daniyarova, A. Miasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over algebraic structures III: Equationally Noetherian property and compactness, Southeast Asian Bull.Math., submitted, arXiv:1002.4243 [math.AG], 46 p.

- [4] M. Kotov Equationally Noetherian Property and Close Properties, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, vol. 35, to appear.
- [5] B. Plotkin, Algebras with the same (algebraic) geometry, Proc. Steklov Inst. Math., vol. 242 (2003) pp.165–196.
- [6] A. Shevlyakov. Commutative idempotent semilattices at the service of universal algebraic geometry, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, vol. 35, to appear.

ПРЕДИКАТНОЕ ПОДОБИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ОТОЖДЕСТВЛЕНИЯХ СИГНАТУРНЫХ СИМВОЛОВ

И.В. Шулепов*

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: salvodore@mail.ru

Введение

Одним из основных классов, изучаемых в теории моделей, является класс счетных моделей, для которого исследуется его структурная классификация. В книге [1] показано, что любая счетная модель малой теории (т.е. теории со счетным числом типов над пустым множеством) проста над некоторым кортежом или предельна, т.е. представляется в виде объединения счетной цепи простых над кортежами моделей и не изоморфна никакой простой модели ни над каким конечным множеством. В этой же книге приведена конструкция, позволяющая сводить изучение основных характеристик малых теорий, т.е. пар (система типов изоморфизма простых над кортежами моделей, функция распределения числа предельных моделей) к изучению факторизаций символьных последовательностей по множествам словарных тождеств.

При этом показано, что вопрос о реализации основных структурных характеристик полных теорий с конечным числом счетных моделей сводится к графовым построениям, основанным на факторизациях последовательностей по множествам словарных тождеств. Изучению этих факторизаций с целью получения соответствующих графов, имеющих заданное число компонент связности и заданные диаметры по каждой компоненте, и, тем самым, для построения заданного числа предельных моделей, определяемого числом компонент связности неорграфа на соответствующем фактор-множестве, посвящена работа [2].

*Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ, проект НШ-3669.2010.1.

В [1, § 3.5] и в работе [2] определена операция, позволяющая по системе словарных тождеств I строить граф $G(I)$ на некотором фактормножестве множества последовательностей из ω^ω и по числу компонент связности графа $G(I)$ определять число $I_l(T, p)$ предельных моделей *специальной* теории T над некоторым типом p этой теории.

Данная работа является продолжением начатых в [2] исследований, связанных с предикатным подобием предельных моделей и числом предельных моделей теорий, получаемых отождествлениями сигнатурных символов. В ней исследуется вопрос о влиянии предикатного подобия и отождествления сигнатурных символов на взаимосвязь предельных моделей и, в частности, вопрос о числе классов эквивалентности предельных моделей над заданным типом по отношению предикатного подобия после отождествления сигнатурных символов.

1 Предикатное подобие предельных моделей при отождествлениях сигнатурных символов

В работе без пояснений используется терминология из книг [1],[3]–[5].

1.1 Основные определения

Рассмотрим множество всех числовых последовательностей ω^ω и полугруппу $S_0 = \langle W; \hat{\ } \rangle$, состоящую из всех *непустых* слов алфавита ω и операции $\hat{\ }$ конкатенации. Если w_1 и w_2 — слова из W , формула $w_1 \approx w_2$ как обычно будет называться *тождеством*. Для данного множества I тождеств $w_1^j \approx w_2^j$, $j \in J$, содержащего множество I_0 всевозможных тождеств вида $w \approx w$, определим множество тождеств, выводимых из I . Тождество $w_1 \approx w_2$ называется *выводимым* из I , если существует конечная последовательность тождеств $w_1^1 \approx w_2^1, \dots, w_1^t \approx w_2^t$ такая, что $w_1^t = w_1$, $w_2^t = w_2$ и любое тождество из этой последовательности принадлежит I или получается из предыдущих тождеств применением одного из следующих правил вывода:

- 1) $\frac{w_1 \approx w_2}{w_2 \approx w_1}$, где $w_1, w_2 \in W$;
- 2) $\frac{w_1 \approx w_2; w_2 \approx w_3}{w_1 \approx w_3}$, где $w_1, w_2, w_3 \in W$;

- 3) $\frac{w_1 \approx w_2; w'_1 \approx w'_2}{w_1 w'_1 \approx w_2 w'_2}$, где $w_1, w'_1, w_2, w'_2 \in W$;
- 4) $\frac{w_1 w_2 \approx w_1 w'_2}{w_2 \approx w'_2}$, где $w_1, w_2, w'_2 \in W$.

В дальнейшем будут рассматриваться множества тождеств $I \supseteq I_0$, замкнутые относительно выводимости. Любое множество тождеств I би-ективно полугруппе $S_I = \langle W; \hat{\cdot} \rangle / I$, которая является результатом факторизации полугруппы S_0 по следующему отношению конгруэнции $\sim_I$:

$$w_1 \sim_I w_2 \Leftrightarrow (w_1 \approx w_2) \in I.$$

Определим факторизации множества ω^ω , соответствующие множествам тождеств I . Две последовательности f_0 и f_1 из ω^ω называются *почти одинаковыми* (*одинаковыми*), если существуют такие числа $l_0, l_1 \in \omega$ ($l_0 = l_1 = 0$), что $f_0(n + l_0) = f_1(n + l_1)$ для любых $n \in \omega$. Последовательности f_0 и f_1 называются *безусловно сильно I -эквивалентными* (соответственно *сильно I -эквивалентными*), если f_i одинакова (почти одинакова) со счетной конкатенацией слов $w_i^m \in W$, $m \in \omega$, $i = 0, 1$, где тождество $w_0^m \approx w_1^m$ принадлежит I , $m \in \omega$. Последовательности f и f' называются (безусловно) *I -эквивалентными*, если существует последовательность $f_0, f_1, \dots, f_n \in \omega^\omega$, в которой $f_0 = f$, $f_n = f'$, f_i и f_{i+1} (безусловно) сильно I -эквивалентны для любого $i = 0, \dots, n - 1$.

Очевидно, что если последовательности безусловно (сильно) I -эквивалентны, то эти последовательности (сильно) I -эквивалентны.

На множестве M всех классов $\tilde{f}$ почти одинаковых последовательностей определим неорграф $G(I)$, соответствующий множеству тождеств I . Два класса $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 \in M$ будем называть *смежными*, если некоторые последовательности $g_0 \in \tilde{f}_0$ и $g_1 \in \tilde{f}_1$ сильно I -эквивалентны. Для каждой компоненты связности C графа $G(I)$ через $d(C)$ будем обозначать ее диаметр.

Напомним, что *кликой* графа G называется подмножество множества вершин графа G , у которого все различные вершины являются смежными.

Последовательность $f \in \omega^\omega$ называется *периодической* с периодом w и обозначается через (w) , если $f = w \hat{\cdot} w \hat{\cdot} w \hat{\cdot} \dots$.

Замечание. Если множество тождеств I нетривиально, т.е. содержит тождество $w_0 \approx w_1$, $w_0 \neq w_1$, то класс из $G(I)$, содержащий последовательность (w_0) , принадлежит континуальной клике. Действительно, если в последовательности (w_0) заменить некоторые копии w_0 на w_1 , то получится сильно эквивалентная к (w_0) последовательность. Считая,

что m -я копия w_0 кодируется нулем, а результат ее замены на w_1 кодируется единицей, получаем всевозможные последовательности нулей и единиц, определяющие попарно различные смежные вершины из $G(I)$.

Обозначим через $c(I)$ мощность $|\omega^\omega/I|$, и это значение будем называть *числом компонент связности* на множестве ω^ω по множеству тождеств I .

Пусть T — некоторая *малая* теория, т.е. полная теория, имеющая счетное число типов над $\emptyset$, p — тип из $S(T)$. Напомним [1], что модель M теории T называется *предельной над типом p* , если $M = \bigcup_{n \in \omega} M_n$ для некоторой элементарной цепи $(M_n)_{n \in \omega}$ простых моделей над типом p и модель M не изоморфна никакой простой модели над кортежем. Число попарно неизоморфных предельных моделей теории T над типом p обозначается через $I_l(T, p)$.

Число компонент связности неорграфа при рассмотренных выше факторизациях последовательностей по множествам словарных тождеств позволяют говорить о числе предельных моделей. Фактор-множество ω^ω/I множества ω^ω по отношению I -эквивалентности биективно теориям, полученным попарными отождествлениями цепей для всех тождеств из множества заданных тождеств. Вследствие чего число компонент связности неорграфа является числом предельных моделей над некоторым типом.

Приведённые в книге [1] конструкции теорий с заданным конечным числом счётных моделей основаны на факторизациях, сводящих число предельных моделей над типом к числу неэквивалентных константных последовательностей.

Далее мы будем рассматривать предельные модели над фиксированным типом p и считать, что предельные модели M над типом p взаимно однозначно соответствуют компонентам связности C графа $G(I)$ так, что некоторая последовательность $(Q_n)_{n \in \omega}$ двухместных предикатных символов теории $\text{Th}(M)$ задает граф $G(I)$ согласно [1, § 3.5].

Модель M *предикатно подобна* модели N , если M получается из N некоторой перестановкой предикатных символов. Тождествам вида $m \approx n$, $m, n \in \omega$, соответствуют отождествления сигнатурных символов Q_m и Q_n теории T . В результате таких отождествлений образуется *специальная* теория T' и тип p' , соответствующий типу p .

1.2 Основной результат

В работе [2] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для любого не более чем счетного неорграфа G , имеющего заданное число $c(G)$ компонент связности и заданные величины диаметров $\{d_i \mid i < c(G)\}$ по соответствующим компонентам связности, существует множество тождеств I такое, что граф $G(I)$ также содержит $c(G)$ компонент связности, имеет те же диаметры d_i , $i < c(G)$, по всем компонентам связности, и каждая компонента связности графа G изоморфно вкладывается в соответствующую компоненту связности графа $G(I)$, причем разные компоненты переходят в разные.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. Для любых ненулевых, не более чем счетных мощностей λ_i , $i < \aleph$, $\lambda_i \leq \lambda_j$, если $i \leq j$, $\aleph \in (\omega \setminus \{0\}) \cup \{\omega\}$, $\lambda_\aleph = 1$, и λ'_j , $j < \aleph'$, $\aleph' \in (\omega \setminus \{0\}) \cup \{\omega\}$, $\lambda'_{\aleph'} = 1$, где $\lambda' \leq \lambda$, $\lambda = \sum_{i \leq \aleph} \lambda_i$, $\lambda' = \sum_{j \leq \aleph'} \lambda'_j$, существует специальная теория T с типом p , у которой $I_l(T, p) = \lambda$, имеется ровно $\aleph + 1$ классов эквивалентности S_i предельных моделей по отношению предикатного подобия и $|S_i| = \lambda_i$, $i \leq \aleph$, а также существует теория T' и тип p' такие, что T' получается из T отождествлениями сигнатурных символов, p' соответствует типу p , $I_l(T', p') = \lambda'$, имеется ровно $\aleph' + 1$ классов эквивалентности S'_j предельных моделей по отношению предикатного подобия и $|S'_j| = \lambda'_j$, $j \leq \aleph'$.

Доказательство. Рассмотрим первый случай, когда все λ_i конечны. Построим теорию T (используя подход к доказательству теоремы 1), а также классы эквивалентности S_i , содержащие λ_i предельных моделей по отношению предикатного подобия. Под диаметром в классе будем понимать диаметр компоненты связности, соответствующий любой предельной модели данного класса. Построим классы эквивалентности таким образом, чтобы в классе S_i был диаметр, равный $i + 1$, и в нем содержалось λ_i предельных моделей. Для этого будем рассматривать циклические последовательности с длиной цикла i . Предельной модели $M_{i,j}$ класса S_i (где j это номер модели в классе S_i) соответствует компонента связности графа $G(I)$ с диаметром $d_i = i + 1$ (при этом для построения графа $G(I)$ используется метод, предложенный в статье [2]). Для построения такого класса рассмотрим последовательности

$$f_{1\dots i} = (1 \dots i), f_{i+1\dots 2i} = (i + 1 \dots 2i),$$

$$f_{2i+1\dots 3i} = (2i + 1 \dots 3i), \dots, f_{(\lambda_i-1)i+1\dots \lambda_i i} = ((\lambda_i - 1)i + 1 \dots \lambda_i i)$$

и тождества

$$rr \approx ll,$$

где $r = 1 \dots i$, $l = ki + 1 \dots (k+1)i$, где $k \geq \lambda_i$. Для построения требуемого диаметра $d_i = i + 1$ возьмем $\lambda_i(i+2)$ таких последовательностей и для каждого набора из $i+2$ последовательностей построим граф, соответствующий предельной модели $\mathcal{M}_{i,j}$. Для этого достаточно задать систему тождеств, чтобы граф, образованный заданными циклическими последовательностями, образовывал простую цепь, состоящую из $i+1$ вершин. Класс S_i состоит из предельных моделей $\mathcal{M}_{i,j}$, $j < \lambda_i$.

Для построения $\lambda_i = \omega$ предикатно подобных моделей, берем счетное количество циклических последовательностей типа описанного выше и убираем тождество $rr \approx ll$. И аналогично строим соответствующие графы. После составления требуемых графов оставшиеся последовательности (в частности, последовательности, захватывающие элементы из разных пар) с помощью системы тождеств попадают в одну новую компоненту связности не предикатно подобных моделей, имеющую диаметр 1, назовем ее *особой*. После добавления системы тождеств

$$1 \approx 2 \approx 3 \approx \dots \approx m, \quad m+2 \approx \dots \approx 2m, \dots,$$

$$(k_i - l_i - 1)m + (k_i - l_i) \approx \dots \approx (k_i - l_i)m$$

такой, что $(m-1) - (k_i - l_i) \geq 1$, получим требуемый класс эквивалентности S'_i , содержащий $\lambda_i = l_i$ моделей по отношению предикатного подобия. Для класса S_i , состоящего из счетного числа предельных моделей, можно отождествить, начиная с требуемого номера, натуральные числа, получив тем самым класс S'_i с требуемым конечным числом предельных моделей. При таком отождествлении лишние компоненты связности перейдут в особую компоненту. Таким образом в каждом классе S_i можно уменьшать число предельных моделей λ_i , а значит, применяя операцию отождествления сигнатурных символов, можно уменьшать количество предикатно подобных моделей в каждом классе.

Рассмотрим два класса S_{i-1} и S_i с диаметрами d_{i-1} и d_i соответственно. И рассмотрим две произвольные компоненты связности этих графов, соответствующие предельным моделям $\mathcal{M}_{i-1,j'}$ и $\mathcal{M}_{i,j}$. Изменив диаметр d_i на d_{i-1} (применяя систему тождеств, приведенную выше), предельная модель изменится на $\mathcal{M}_{i-1,j''}$, и в классе S_{i-1} увеличится число предельных моделей на 1, а в классе S_i на 1 уменьшится. Таким образом можно уменьшить диаметр некоторых моделей в классе S_i , тем самым увеличив число последних в классе S_k , где $k < i$, и даже уменьшить количество классов, уменьшив диаметр всех компонент связности в данном или с помощью операции отождествления сигнатурных символов, примененной ко всем компонентам связности в данном классе (при этом все эти компоненты связности перейдут в особый класс).

Стоит отметить, что условие $\lambda' \leq \lambda$ показывает, что предельных моделей теории T достаточно для построения классов S'_i . Таким образом приведенные выше построения позволяют переходить от классов S_i к классам S'_i так, что существует специальная теория T с типом p , у которой $I_l(T, p) = \lambda$, имеется ровно $\varkappa + 1$ классов эквивалентности S_i предельных моделей по отношению предикатного подобия и $|S_i| = \lambda_i$, $i \leq \varkappa$, а также существует теория T' и тип p' такие, что T' получается из T отождествлениями сигнатурных символов, p' соответствует типу p , $I_l(T', p') = \lambda'$, имеется ровно $\varkappa' + 1$ классов эквивалентности S'_j предельных моделей по отношению предикатного подобия и $|S'_j| = \lambda'_j$, $j \leq \varkappa'$. $\square$

Замечание. Рассмотрим два класса S_i и S_j с диаметрами d_i и d_j соответственно. И рассмотрим две произвольные компоненты связности этих графов, соответствующие предельным моделям $\mathcal{M}_{i,i'}$ и $\mathcal{M}_{j,j'}$. Склеив две вершины из разных компонент связности, появится класс S_{i+j} , если такого еще не было, с единственной предельной моделью $\mathcal{M}_{i+j,1}$, диаметр которой $d_i + d_j$. Таким образом можно увеличить число классов, образовав класс с диаметром, равным сумме диаметров двух предельных моделей.

Список литературы

- [1] С. В. Судоплатов, Проблема Лахлана. — Новосибирск: НГТУ, 2009.
- [2] И.В.Шулепов, *Факторизации последовательностей по множествам словарных тождеств и предельные модели*, Алгебра и теория моделей 7. Сб. тр. / Под. ред. А. Г. Пинуса, К. Н. Пономарева, С. В. Судоплатова, Новосибирск: НГТУ, 2009. С. 120–130.
- [3] С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова, Дискретная математика: Учебник. — М.: ИНФРА-М, Новосибирск: НГТУ, 2007. — 256 с.
- [4] С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова, Математическая логика и теория алгоритмов: Учебник. — М.: ИНФРА-М, Новосибирск: НГТУ, 2008. — 224 с.
- [5] Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин Математическая логика. — СПб.: Лань, 2005
- [6] Лекции по теории графов. В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич — М.: Наука, 1990.

Abstracts

K.A. Baykalova. *Limit models of theories of Abelian groups.*

This paper talks about the number of limit models of small theories of Abelian groups. The investigation is based on classification of theories $\text{Th}(A)$ of Abelian groups A by the Szemielew invariants $\alpha_{p,n}(A)$, $\beta_p(A)$, $\gamma_p(A)$, $\varepsilon(A)$.

E.V. Grachev. *Groups of external automorphisms of two free Burnside groups.*

We consider the structure of groups of automorphisms of free Burnside groups of finite order $B(2,3)$ and $B(2,4)$. We find factor groups of groups of automorphisms of these groups with respect to subgroups of inner automorphisms.

F.A. Dudkin. *On abstract commensurator of Baumslag-Solitar groups.*

Let p and q be coprime integers not equal to -1 , 0 or 1 . We denote by $BS(p, q)$ the Baumslag-Solitar group with parameters p and q . First result is the presentation of automorphism group for all subgroups of finite index of $BS(p, q)$. Second, we prove that an abstract commensurator of $BS(p, q)$ is a semidirect product of subgroup of rational numbers and direct limit of certain groups.

A.N. Koryukin, A.V. Chekhonadskih. *Extreme root locations of real polynomials and stabilization of 3-mass control system..*

Authors examine the optimal location of the poles of the control systems with lower order control. For a given structure of the controller there are defined types of possible extreme pole configurations. This is illustrated by the 3-mass object with elastic links and 2x2 PID control. There is studied the locations of the poles which are achievable in the parameter space, and found a local and global minima of the Hurwitz stability function.

M. Kotov. *Algebraic geometry over some topological algebras.*

In this paper we describe topological algebras for which the family of all algebraic sets coincides with the family of closed sets in the given topology.

A.A. Mishchenko, A.V. Treyer. *On satisfiability of graph's formulas on partially commutative nilpotent group of class 2.*

Abstract. In this paper we generalize our recent result about satisfiability of graph's formulas on partially commutative nilpotent R-groups of class 2 on the case of R is arbitrary binomial euclidean ring.

E.V. Ovchinnikova. *Extensions of partial 1-isomorphisms of finite predicate structures.*

It is shown that any finite n -element predicate system is embeddable into a finite system of cardinality at most $4m^2 - 6m + 3$ in which all partial (1-)isomorphisms are continued to automorphisms.

A.G. Pinus. *On the lattices of algebraic subsets of universal algebras.*

The isomorphisms types of the lattices of algebraic subsets of universal algebras is studied.

R.A. Popkov. *The classification of countable models complete theories of one-place predicates with substitution of the limited order.*

The classification of countable models complete theories of one-place predicates is arranged according to the number of types in these theories. The invariants, characterising the isomorphism of the above mentioned models, are established. The dynamics of change in the number of types, and their feasibility after theories enrichment with substituting a limited order, are elucidated.

E.N. Poroshenko. *Bases for partially commutative nilpotent Lie algebras.*

In this paper, linear bases for the partially commutative nilpotent Lie algebras are found. The method of the Gröbner–Shirshov bases is used.

A.A. Stepanova, N.V. Triakashnaya. *On Abelian semigroups.*

In the papers by Kiss E., Valeriote M, Hobby D., McKenzie R., the Abelian property for algebras was considered. Warne R. described Abelian semigroups, periodic Abelian groups, semisimple Abelian semigroups. In the paper “Abelian and Hamiltonian groupoids” by A.A. Stepanova and N.V. Triakashnaya, characterizations for Abelian finite quasigroups, Abelian groupoids with identity, and Abelian semigroups with the condition $(*)$ were given. This paper continues the aforesaid paper.

S.V. Sudoplatov. *On Rudin–Keisler preorders in small theories.*

Variations and properties of Rudin–Keisler preorders in small theories are considered.

S.V. Sudoplatov. *On Hrushovski fusions for predicates and their envelopes.*

Links between Hrushovski fusions for predicates and their envelopes, producing small stable generic theories, are investigated.

E.I. Timoshenko. *On Remeslennikov's conjecture for partially commutative metabelian groups.*

Let $\mathbf{\Gamma}$ be set of all finite nonoriented graphs Γ without loops and multiple edges, and let $\mathbf{T}$ be set of all trees $T \in \mathbf{\Gamma}$. For each $\Gamma \in \mathbf{\Gamma}$ we denote by $\varphi(\Gamma)$ a formula of the form

$$\exists z_1 \dots z_n \left(\bigwedge_{(z_i, z_j) \in \Gamma} [z_i, z_j] = 1 \wedge \bigwedge_{(z_i, z_j) \notin \Gamma} [z_i, z_j] \neq 1 \wedge \bigwedge_{i \neq j} z_i \neq z_j \wedge \bigwedge_{i=1, n} z_i \neq 1 \right).$$

Conjecture of V.N. Remeslennikov for partially commutative metabelian groups: if the universal theories of two partially commutative metabelian groups S_{Γ_1} and S_{Γ_2} are different then exists a graph $\Gamma \in \mathbf{\Gamma}$ such that the formula $\varphi(\Gamma)$ is true on the one of these groups and false on other. We prove that there are two partially commutative metabelian groups S_{Γ_1} and S_{Γ_2} such that their universal theories are different but they are indiscernible by the formulae $\varphi(T)$, $T \in \mathbf{T}$.

A.N. Shevlyakov. *Algebraic geometry over linear ordered semilattices.*

We study equations over linear ordered semilattices in the language extended by the set of constants. For any linear ordered semilattice we give the criteria which characterize its geometric properties.

I.V. Shulepov. *Predicate Similarity of Limit Models with Identifications of Signature Symbols.*

The work is devoted to the investigation of the question of influence for the predicate similarity and the identification of signature symbols on the relationship between the limit models and, in particular, the number of equivalence classes of limit models over a given type in respect of predicate similarity after identifications of the signature symbols.

Contents

Introduction.....	3
School Programme	4
K.A. Baykalova, <i>Limit models of theories of Abelian groups</i>	9
E.V. Grachev, <i>Groups of external automorphisms of two free Burnside groups</i>	13
F.A. Dudkin, <i>On abstract commensurator of Baumslag-Solitar groups</i>	16
A.N. Koryukin, A.V. Chekhonadskih, <i>Extreme root locations of real polynomials and stabilization of 3-mass control system</i>	19
M. Kotov, <i>Algebraic geometry over some topological algebras</i>	40
A.A. Mishchenko, A.V. Treyer, <i>On satisfiability of graph's formulas on partially commutative nilpotent group of class 2</i>	48
E.V. Ovchinnikova, <i>Extensions of partial 1-isomorphisms of finite predicate structures</i>	60
A.G. Pinus, <i>On the lattices of algebraic subsets of universal algebras</i> .	67
R.A. Popkov, <i>The classification of countable models complete theories of one-place predicates with substitution of the limited order</i>	73
E.N. Poroshenko, <i>Bases for partially commutative nilpotent Lie algebras</i>	83
A.A. Stepanova, N.V. Triakashnaya, <i>On Abelian semigroups</i>	87
S.V. Sudoplatov, <i>On Rudin-Keisler preorders in small theories</i>	94
S.V. Sudoplatov, <i>On Hrushovski fusions for predicates and their envelopes</i>	103
E.I. Timoshenko, <i>On Remeslennikov's conjecture for partially commutative metabelian groups</i>	107
A.N. Shevlyakov, <i>Algebraic geometry over linear ordered semilattices</i>	116
I.V. Shulepov, <i>Predicate Similarity of Limit Models with Identifications of Signature Symbols</i>	132
Abstracts.....	139