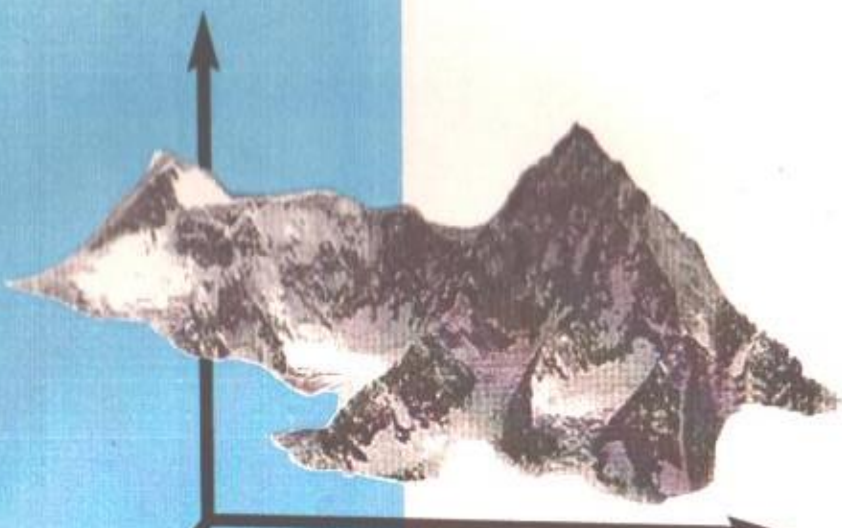
# АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ 2



НОВОСИБИРСК
1999

Novosibirsk State Technical University

# Algebra and Model Theory 2

Collection of papers
edited by A.G. Pinus and K.N.Ponomaryov

Novosibirsk
1999

512(06)

Algebra and Model Theory. Collection of papers.
Edited by A.G.Pinus and K.N.Ponomaryov.
Novosibirsk State Technical University, 1999. – 168 p.

ISBN 5-7782-0275-X

The papers in this book are devoted to some problems of algebra and model theory.

Technical editor I.D. Tchernykh.



In the summer of 1999 in the camping center "ERLAGOL" in the mountains of Altai the Third Summer School "Intermediate Problems of Model Theory and of Universal Algebra" was held. The school was organized by the department of algebra and mathematical logic of Novosibirsk State Technical University and by the laboratory of algebraic systems of Mathematical Institute of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences.

The work of the School was supported by Russian Foundation of Basic Research grant N. 99-01-10061.

This book is composed from the papers of the participants of this conference.

III Международная школа
"Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры"
(Эрлагол, 21-27 июня 1999г)

Председатель оргкомитета:
проф., доктор ф.-м. наук Пинус А.Г. (Россия, Новосибирск, НГТУ)

Члены оргкомитета:
проф., доктор ф.-м. наук $\boxed{\text{Горбунов В.А.}}$ (Россия, Новосибирск, ИМ СОРАН)
проф., доктор ф.-м. наук Мазуров В.Д. (Россия, Новосибирск, ИМ СОРАН)
проф., доктор ф.-м. наук Палютин Е.А. (Россия, Новосибирск, ИМ СОРАН)
доктор ф.-м. наук Пономарёв К.Н. (Россия, Новосибирск, НГТУ)

**22 июня**

11.30-12.20 Г.Роуз (ЮАР) Конгруэнции и амальгамирование в малых многообразиях решеток

12.30-13.20 Б.Пуаза (Франция) Поля размерности два

16.00-16.50 О.В.Белеградек (Россия) Конечно определимые объекты в многообразиях

**23 июня**

10.00-10.50 С.Живант (США) Проблемы разрешимости эквациональных теорий алгебр отношений

11.00-11.50 К.Глазек (Польша) О реализациях оператора замыкания в общих алгебрах

12.00-12.50 В.М.Копытов (Россия) Полулинейно упорядоченные группы

13.00-13.50 Н.Я.Медведев (Россия) Частичные порядки групп ступенчато-линейных функций

16.00-16.50 Б.Байжанов (Казахстан) Обогащения моделей и определимость типов.

17.00-17.25 А.Енсор (Италия) Действия на алгебрах

17.30-17.55 С.И.Мардаев (Россия) Неподвижные точки оператора времени

**24 июня**

10.00-10.50 Е.А.Палютин (Россия) Структурные свойства моделей коммутативных теори

11.00-11.50 А.Г.Пинус (Россия) О функциях коммутирующих с полугруппами преобразо ваний алгебр

12.00-12.50 В.А.Горбунов, А.Кравченко (Россия) О цветосемействах и антимногообразия

13.00-13.50 К.Н.Пономарев (Россия) О теории моделей локальных полей

16.00-16.25 П.Джипсон, Г.Роуз(ЮАР), А.Г.Пинус(Россия) О порядке Рудина Кейслера дл полных булевых алгебр

16.30-16.55 А.М.Ивлева(Россия) Единицы групповых колец

17.00-17.25 М.Семенова(Россия) Конечно представимые решетки: алгебраичность и непре рывность по Скотту

17.30-17.55 М.Шеремет (Россия) Ретрактные разложения компактных структур

**25 июня**

10.00-10.50 Ф.Вагнер(Великобритания) Минимальные поля

11.00-11.50 С.Живант(США) Группы и алгебры бинарных отношений

12.00-12.50 А.Гришков(Бразилия) Арифметический, алгебраический и аналитический асп классического экспоненциального отображения

16.00-16.25 С.В.Судоплатов(Россия) О гиперграфах минимальных простых моделей

16.30-16.55 В.Л.Пузаренко(Россия) О нестандартной теории рекурсии

17.00-17.25 Я.Л.Мордвинов, А.Г.Пинус(Россия) О скелетах многообразий решеток



# Orthogonality of one-types in weakly o-minimal theories

**Bektur Sembiuly Baizhanov**

`Institute of Informatics and Control Problems`
`National Academy of Sciences`
`480100, Ul. Pushkina 125,`
`Almaty, Kazakhstan`
`e-mail: baijan@ipic.academ.alma-ata.su`

## 1 Introduction

**Definition 1.1** [LvdD] Model $M$ of signature $\Sigma$ is ordered minimal (o-minimal) if it is $\emptyset$-definable totally ordered and the realization of each formula of the signature $\Sigma(M)$ in one free variable is a disjoint union of finitely many of open intervals, points.

**Definition 1.2** Let $A$ be a subset of totally ordered set $B$. Then $A$ is convex if for any $\alpha, \beta \in A$ the following holds:

$$\forall \gamma \in B \; [\, \alpha < \gamma < \beta \Rightarrow \gamma \in A \,].$$

**Note 1.1** An intersection of family of convex subsets of arbitrary totally ordered set is convex or empty.

**Definition 1.3** [D]

(i) A totally ordered model $M$ of signature $\Sigma$ is weakly ordered minimal (w.o.m.) if the realisation of each formula of the signature $\Sigma(M)$ in one free variable is a disjoint union of finitely many convex subsets.

(ii) A theory $T$ is said to be weakly ordered minimal (w.o.m.) if each model of $T$ is w.o.m.

**Note 1.2** $T$ is w.o.m. iff for any formula $\Phi(x, \bar{y})$ of signature $\Sigma$ there is a natural number $n_\Phi < \omega$ such that for any model of $T$ for any $\bar{a} \in M^{l(\bar{y})}$, $\Phi(M, \bar{a})$ is an union $\leq n_\Phi$ $\neg\Phi(M, \bar{a})$-separable convex subsets of $M$. Here, $\Phi(M, \bar{a}) := \{b \in M : M \models \Phi(b, \bar{a})\}$.

**Note 1.3** A set of all realizations of any 1-type over set of a model of w.o.m. theory in any model of this theory is convex set, because each complete type is determined by family of formulas, the realizations of which are convex (convex formula).

*Supported by European Community Grant INTAS-93-3547.

Everywhere we will hold on the following

**Convention 1.1** Let $\bar{a} \in M^{l(\bar{a})}$, where $l(\bar{a}) = l$, $\bar{a} = < a_1, \ldots, a_l >$. We will write $\bar{a} \in M$ whenever $\{a_1, \ldots, a_l\} \subset M$. Let $1 \leq m < l$ then $\bar{a}|m = < a_1, \ldots, a_m >$. In this paper $M$ is a model of w.o.m. theory $T$, $M'$ is a sufficiently large saturated elementary extension of $M$, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{e}, \bar{d} \in M$, $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\mu} \in M' \setminus M$. For $C, D \subset M$ we write $C < D$ whenever $c \in C$, $d \in D$, we have $c < d$. For any convex $D \subset M'$, $D^- := \{\beta \in M' : \beta < D\}$, $D^+ := \{\beta \in M' : \beta > D\}$.

If $A < B$ then $(A, B) := \{\gamma \in M' \mid A < \gamma < B\}$

We write $A \subseteq B$ whenever $a \in A$ we have $a \in B$.

We write $A \subset B$ if $A \subseteq B$ and $\exists b \in B (b \notin A)$.

We always consider subset $A$ of $M'$, such that $M'$ is $|A|^+$-saturated. We understand that $p, q, r \in S_1(A)$ means always non-algebraic complete 1-types over A. We understand that isolated type is non-algebraic isolated type. $\mathrm{Aut}_A(M')$ is the group of automorphisms of $M'$ such that $\forall f \in \mathrm{Aut}_A(M')\ \forall a \in A\ (f(a) = a)$.

We use following notations $x > F(M', \bar{y}) \Leftrightarrow \forall z [F(z, y) \to z < x]$

$\Psi(M', \bar{x}) > F(M', \bar{y}) \Leftrightarrow \forall z \forall t [F(z, \bar{y}) \wedge \Psi(t, \bar{x}) \to z < t]$

$p(M') = \{\gamma \in M' | \forall \phi(x) \in p,\ M' \models \phi(\gamma)\}$, $\alpha \models p \Leftrightarrow \alpha \in p(M')$.

By Notes we always understand historical Notes or immediate corollaries of Definitions or proofs of Lemmas or Claims. Sometimes we choose more long proof for Lemma in order to have a possibility of formulating the Notes. Almost always we do not prove the Notes.

Let $M'$ be a model of a weakly o-minimal theory such that $|A|^+$-saturated for $A \subset M'$. Let $p \in S_1(A)$ be a one-type over $A$. An element $\alpha \in p(M') := \{\beta \in M' \mid \beta \models p\}$ is solitary, if $|V_p(\alpha)| = 1$, where $V_p(\alpha) := \{\gamma \in p(M') \mid$ there exists an $(A \cup \alpha)$-definable formula $H(x)$, there exist $\gamma_1, \gamma_2 \in p(M')$ such that $\gamma_1 < H(M') < \gamma_2$ and $\gamma \in H(M')\}$ is the neighbourhood of $\alpha$ in the type $p$.

We say that $p \in S_1(A)$ is solitary, if there exists (for all) $\alpha \in p(M')$ solitory. We say that $p$ is quasisolitary, if $V_p(\alpha)$ is $(A \cup \alpha)$-definable. Obviously, any solitary type is quasisolitary.

Since $p(M')$ is convex, we can define $p(M')^+ = \{\gamma \in M' \mid p(M') < \gamma\}$, $p(M')^- = \{\gamma \in M' \mid p(M') > \gamma\}$. If $p(M')^+$ is $A$-definable, then $p$ is called quasirational to the right, and if $p(M')^-$ is $A$-definable, then $p$ — quasirational to the left.

In Section 2 we investigate quasisolitarity of a type (Lemma 2.1) and give preliminary information (Lemma 2.2) to introduce notions of weakly and almost orthogonality (Definition 3.2, 3.3).

In Section 3 notions of neighbourhood of a set in one-type, weak and almost orthogonality of one-types are introduced. It is proved that a non-weak (non-almost) orthogonality is equivalence relation and each $\mathcal{L}^w$-class of the equivalence contains one-types of only one kind from six basic ones. It is proved that a formula, which provides non-orthogonality (weakly and almost) is "monotonic" up to disjoint neighbourhoods of (Lemma 3.3).

In Section 4 it is proved that all the one-types of each $\mathcal{L}^w$-class which contains at least one definable one-type are definable (Lemma 4.2). Also we give the definition of strictly definability of a type, which generalizes the notion of isolated types.



## 2 Essential kinds of 1-types over sets of models of weakly o-minimal theories

**Definition 2.1** A partition of $A \subset M'$ into two convex subsets $C$ and $D$ ($C < D$, $C \cup D = A$) is said to be $(C, D)$-cut in $A$. If $C$ has supremum or $D$ has infimum in $A \cup \{-\infty, \infty\}$, then $(C, D)$-cut is said to be rational. Otherwise $(C, D)$-cut is irrational. Sometimes, by $(C, D)$-cut we understand the following set of formulas : $\{c \leq x \leq d : c \in C, d \in D\}$.

**Theorem 2.1** *(B. Kulpeshov [K]) Let $M$ be a linearly ordered structure. Then $M$ is w.o.m. iff the following conditions hold in $M$:*

*(i) Any $(C, D)$-cut in $M$ has at most two complete one-types over $M$ which extend $(C,D)$-cut,*

*(ii) If a $(C,D)$-cut in $M$ has two complete one-types over $M$ which extend $(C,D)$-cut, then each realization of these types is convex set in any elementary extension of $M$.*

**Definition 2.2** [M] Let $p \in S_1(A)$. We say that $p$ is rational to the right (left) if there is $a \in A$ ($b \in A$) such that for any $\alpha \models p$ the following is true:

$$\forall \beta [\alpha < \beta < a \Rightarrow tp(\beta/A) = p]$$

$$(\forall \beta [b < \beta < \alpha \Rightarrow tp(\beta/A) = p]).$$

**Definition 2.3** (i) Let $p \in S_1(A)$ be non-isolated. We say that $p$ is quasirational to the right (left) if there is a formula $U(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in A$ such that for any $\alpha \models p$ the following is true:

$$\forall \beta [\alpha < \beta \wedge M' \models U(\beta, \bar{a}) \Rightarrow tp(\beta/A) = p]$$

$$(\forall \beta [\alpha > \beta \wedge M' \models U(\beta, \bar{a}) \Rightarrow tp(\beta/A) = p]).$$

(ii) A non-isolated, non-quasirational type $p$ is irrational.

**Note 2.1** Let $p \in S_1(A)$. Then the following is true:

(i) If $p$ is rational then it is quasirational.

(ii) If $p$ is quasirational to the right (left) then $U(M', \bar{a})^+ = p(M')^+$ $(U(M', a)^- = p(M')^-)$.

(iii) $p$ is quasirational to the right and to the left iff $p$ is isolated.

**Note 2.2** By Theorem of Kulpeshov we have:

(i) Let $p \in S_1(M)$. Then $p$ is quasirational to the right (left) iff there is a formula $U(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in M$ such that the following set of formulas

$$\{x > c : M \models U(c, \bar{a}),\ c \in M\} \cup \{U(x, \bar{a})\}$$

$$(\{x < c : M \models U(c, \bar{a}),\ c \in M\} \cup \{U(x, a)\})$$

has unique completion $p$ from $S_1(M)$.

(ii) Let $p \in S_1(M)$. Then $p$ is irrational iff $p$ is determinated by irrational cut $(C_p, D_p)$.

**Definition 2.4** We say that formula $F(x,y,\bar{a})$ $(G(x,y,\bar{a}))$, $\bar{a} \in A$ is convex to the right (left) if

$$M' \models \forall y \forall x[(F(x,y,\bar{a}) \to (y \le x \wedge \forall z(y \le z \le x \to F(z,y,\bar{a})]$$
$$(M' \models \forall y \forall x[(G(x,y,\bar{a}) \to (x \le y \wedge \forall z(x \le z \le y \to G(z,y,\bar{a})])$$

**Definition 2.5** Let $p \in S_1(A)$. We say that a formula $\Phi(x,y,\bar{a}), a \in A$ is p-stable if $\forall \alpha \models p$, $\exists \gamma_1, \gamma_2 \models p$ such that

$$\gamma_1 < \Phi(M', \alpha, \bar{a}) < \gamma_2$$

**Note 2.3** Let $F_1(x,y,\bar{a}), F_2(x,y,\bar{b}), \bar{a}, \bar{b} \in A$ be two 2-$A$-formulas, $p \in S_1(A)$. Then if $\exists \alpha \in p(M')$ such that $F_1(M', \alpha, \bar{a}) \subset F_2(M', \alpha, \bar{b})$ we have:

$$\forall \beta \models p\, [F_1(M', \beta, \bar{a}) \subset F_2(M', \beta, \bar{b})].$$

**Definition 2.6** Let $p \in S_1(A), F_1(x,y,\bar{a}), F_2(x,y,\bar{b}); \bar{a}, \bar{b} \in A$ be two $p$-stable convex to right (left) 2-$A$-formulas. We say that $F_2(x,y,\bar{b})$ is greater than $F_1(x,y,\bar{a})$ if $\exists \alpha \in p(M')$ $(\equiv \forall \alpha \in p(M'))$, $F_1(M', \alpha, \bar{a}) \subset F_2(M', \alpha, \bar{b})$.

**Note 2.4** Let $p \in S_1(A)$. The set of all non-equivalent p-stable convex to the right (left) 2-$A$-formulas is totally ordered.

**Definition 2.7** Let $p \in S_1(A)$ be a non-algebraic type. We say that $p$ is semi-quasisolitary to the right (left) if there is the greatest p-stable convex to the right (left) 2-A-formula $F(x,y,\bar{a})$ $(G(x,y,\bar{a}))$, $\bar{a} \in A$.

**Note 2.5** Let $p \in S_1(A)$ be semi-quasisolitary to the right (left). If $\beta > \alpha$ $(\alpha > \beta)$ and $tp(\beta/A) = tp(\alpha/A) = p$, $M' \models \neg F(\beta, \alpha, \bar{a})$ $(M' \models \neg G(\beta, \alpha, \bar{a}))$
then for any formula $\Phi(x, \alpha, \bar{c}), \bar{c} \in A$ the following holds:

$$[M' \models \Phi(\beta, \alpha, \bar{c}) \Rightarrow \forall \beta_1 \in F(M', \alpha, \bar{a})^+ \cap p(M')$$
$$(\forall \beta_1 \in G(M', \alpha, \bar{a})^- \cap p(M'))M' \models \Phi(\beta_1, \alpha, \bar{c}))].$$

**Definition 2.8** Let $p \in S_1(A)$. We say that $p$ is quasisolitary if it is semi-quasisolitary to the right and to the left.

**Definition 2.9** Let $p \in S_1(A)$. We say that $p$-stable convex to the right (left) 2-A-formula $F(x,y,\bar{a})$ is locally $p$-decreasing ($p$-increasing) if there are $\alpha_1, \alpha_2 \in p(M')$ such that

$$M' \models \exists x(F(x, \alpha_2, \bar{a}) \wedge \neg F(x, \alpha_1, \bar{a}) \wedge F(\alpha_1, \alpha_2, \bar{a}) \wedge x > \alpha_1).$$

$$(M' \models \exists x(F(x, \alpha_2, \bar{a}) \wedge \neg F(x, \alpha_1, \bar{a}) \wedge F(\alpha_1, \alpha_2, \bar{a}) \wedge x < \alpha_1)).$$

**Lemma 2.1** *Let $p \in S_1(A)$ be a non-algebraic type. Then*



*(i) If $F(x,y,\bar{a})$ is the greatest p-stable convex to the right (left) 2-A-formula, then $F(x,y,\bar{a})$ is non-locally p-decreasing (p-increasing).*

*(ii) If $p$ is semi-quasisolitary then it is quasisolitary.*

*Proof.* Suppose that $F(x,y,\bar{a})$ is locally $p$-decreasing. Then there are $\alpha, \beta, \gamma \in p(M')$ such that

$$M' \models \alpha < \beta < \gamma \wedge F(\gamma, \alpha, \bar{a}) \wedge \neg F(\gamma, \beta, \bar{a})$$

Let $K(y, \alpha, \bar{a}) := \exists x(F(x, \alpha, \bar{a}) \wedge F(y, x, \bar{a}))$. Because $F(x,y,\bar{a})$ is $p$-stable we have $F(y, \alpha, \bar{a}) \equiv K(y, \alpha, \bar{a})$.

So, $F(M', \gamma, \bar{a}) \subset F(M', \alpha, \bar{a})$ and $F(M', \alpha, \bar{a}) \setminus F(M', \gamma, \bar{a}) \neq \emptyset$.
Let $\theta(\alpha, \beta, \gamma, \bar{a}) := \alpha < \beta < \gamma \wedge F(\gamma, \alpha, \bar{a}) \wedge \neg F(\gamma, \beta, \bar{a}) \wedge \forall x(F(x, \gamma, \bar{a}) \to F(x, \alpha, \bar{a}))$.
Then $M' \models \theta(\alpha, \beta, \gamma, \bar{a})$.

Let $f \in \mathrm{Aut}_A(M')$ such that $f(\gamma) = \alpha$. Then for any $n < \omega$
$M' \models \theta(f^n(\alpha), f^n(\beta), f^n(\gamma), \bar{a})$.

So, $M' \models \theta(f^n(\alpha), f^n(\beta), f^{n-1}(\alpha), \bar{a})$ and
$F(M', f^n(\alpha), \bar{a}) \supset F(M', f^{n-1}(\alpha), \bar{a}), f^{n-1}(\alpha) \notin F(M', f^n(\beta), \bar{a})$,
$f^n(\alpha) < f^n(\beta) < f^{n-1}(\alpha)$.
Thus, $\forall n < \omega[f^n(\alpha) \in F(\gamma, M', \bar{a})$ and $f^{n-1}(\beta) \notin F(\gamma, M', \bar{a})]$. It contradicts to weak o-minimality of $M'$. So, $F(x,y,\bar{a})$ is a non-locally $p$-decreasing.

(ii) Let $F(x,y,\bar{a})$ from Definition 2.7.

By (i) $\forall \alpha, \beta \in p(M'), \alpha < \beta$ the following holds:
If $\beta \in F(M', y, \bar{a}) \Rightarrow M' \models \forall x(x \ge \beta \to (F(x, \alpha, \bar{a}) \leftrightarrow F(x, \beta, \bar{a})))$

Consider $G(y, \alpha, \bar{a}) := y \le \alpha \wedge F(\alpha, y, \bar{a}) \wedge \forall x(x \ge \alpha \to (F(x, \alpha, \bar{a}) \leftrightarrow F(x, y, \bar{a})))$.
Let $G_0(M', \alpha, \bar{a}) := p(M') \cap G(M', \alpha, \bar{a})$.

We claim that $G_0(y, x, \bar{a})$ is the greatest convex to the left $p$-stable formula. If it is not the greatest convex to the left $p$-stable formula then there is $\Phi(x, y, \bar{c}), \bar{c} \in A$, $p$-stable formula such that $\exists \gamma_1, \gamma_2 \in p(M')$,

$$\gamma_1 < \Phi(M', \alpha, \bar{c}) < G_0(M', \alpha, \bar{c}), \gamma_2 \in \Phi(M', \alpha, \bar{c})$$

So, we have $\alpha \notin F(M', \gamma_1, \bar{a})$, $\alpha \notin F(M', \gamma_2, \bar{a})$. Notice,
$\alpha \notin F(M', \gamma_2, \bar{a}) \Rightarrow \forall \alpha_1 \in [F(M', \gamma_2, \bar{a})^+ \cap p(M')], \gamma_2 \in \Phi(M', \alpha_1, \bar{c})$, by Note 2.5.
$\alpha \notin F(M', \gamma_1, \bar{a}) \Rightarrow \forall \alpha_1 \in [F(M', \gamma_1, \bar{a})^+ \cap p(M')], \gamma_1 \notin \Phi(M', \alpha_1, \bar{c})$, by Note 2.5.

Let $\alpha_0 \in [(F(M', \gamma_2, \bar{a}) \cup F(M', \gamma_1, \bar{a}))^+ \cap p(M')]$, $f \in Aut_A(M')$ such that $f(\gamma_1) = \gamma_2$.
Then $f(\alpha_0) \in [(F(M', \gamma_2, \bar{a}) \cup F(M', \gamma_1, \bar{a}))^+ \cap p(M')]$

We have $M' \models \neg\Phi(\gamma_1, \alpha_0, \bar{c}) \Rightarrow M' \models \neg\Phi(\gamma_2, f(\alpha_0), \bar{c})$. Contradiction.

Thus, $G_0(y, x, \bar{a})$ is the greatest convex to the left $p$-stable formula, and the formula $E(x, y, \bar{a}) := F(x, y, \bar{a}) \vee G_0(x, y, \bar{a})$ is equivalence relation.

So, the type $p$ is quasisolitary. □

Further this equivalence $E(x, y, \bar{a})$ we denote by $E_p(x, y, \bar{c}_p)$.

**Note 2.6** (i) Let $p \in S_1(A)$, then for any convex to the right (left) $p$-stable 2-$A$-formula $F(x,y,\bar{a})$ there is a $F_1(x,y,\bar{a})$ is a convex to the right (left) $p$-stable formula such that $\forall \alpha \in p(M'), F(M', \alpha, \bar{a}) \subset F_1(M', \alpha, \bar{a})$ and $F_1(x,y,\bar{a})$ is non locally $p$-decreasing ($p$-increasing).

(ii) V. Verbovsky constructed an example of w.o.m. theory with 1-type $p$ and $F(x,y,\bar{a})$ that is $p$-stable convex to the right, locally $p$-decreasing formula.

(iii) Let $p \in S_1(A)$ be quasisolitary. A set of all $E_p(x,y,\bar{c}_p)$-classes of equivalence in $M'$ is densely ordered. A set of representatives of $E_p(x,y,\bar{c}_p)$-classes in $M'$ is ordered 2-indiscernible.

(iv) Let $p \in S_1(A)$, $\psi(x,y,\bar{b})$, $\bar{b} \in A$ be p-stable, $\phi(x,\bar{\alpha}), \bar{\alpha} \in M'$ such that $\exists \mu_1, \mu_2 \in p(M')$, $\mu_1 < \phi(M',\bar{\alpha}) < \mu_2$. Then $\exists \mu_1', \mu_2' \in p(M')$ such that for the formula

$$H_{\phi,\psi}(x,\bar{\alpha},\bar{b}) := \exists y\, (\phi(y,\bar{\alpha}) \wedge \psi(x,y,\bar{b}))$$

the following is true:

$$\mu_1' < H_{\phi,\psi}(M',\bar{\alpha},\bar{b}) < \mu_2'$$

*Proof.* (i) Suppose, $F(x,y,\bar{a})$ is convex to the right, $p$-stable, locally $p$-decreasing. Let $\alpha,\beta,\gamma \in p(M')$, $\alpha < \beta < \gamma$, $\beta \in F(M',\alpha,\bar{a})$, $\gamma \in F(M',\alpha,\bar{a}) \setminus F(M',\beta,\bar{a})$. $f \in \mathrm{Aut}_A(M')$ such that $f(\alpha) = \gamma$. Then $\exists \beta' \in p(M')$ such that $f(\beta') = \beta$. So, $\alpha \notin F(M',\beta',\bar{a})$ and $\beta \notin F(M',\beta',\bar{a}), \beta' \notin F(\beta,M',\bar{a})$. Let $F_0(\beta,M',\bar{a})$ be a maximal $< \bar{a},\beta >$-definable convex of $F(\beta,M',\bar{a})$ such that $\alpha \in F_0(\beta,M',\bar{a})$. Then, $F_0(\beta,M',\bar{a}) \subset p(M')$. From proof of Lemma 2.1(i) follows that $\forall \gamma[\alpha < \gamma < \beta \Rightarrow F(\beta,\gamma,\bar{a})]$.

So, $F_1(x,y,\bar{a}) := \exists z[F_0(y,z,\bar{a}) \wedge F(x,z,\bar{a}) \wedge x \geq y]$. It is clear that $F_1(x,y,\bar{a})$ satisfies the condition of Note 2.6 (i).

**Convention 1.2** Further throughout in this paper we assume that any convex to the right (left) $p$-stable formula is non locally $p$-decreasing ($p$-increasing)

**Definition 2.10** [B] Let $p \in S_1(A)$ be quasisolitary. We say that p is solitary if $E(x,y,\bar{a}) \equiv (x = y)$

**Definition 2.11** ([B] for o-minimal) Any non-algebraic, non-quasisolitary type $p \in S_1(A)$ is social.

**Corollary 2.1** *Let $p \in S_1(A)$ be non-algebraic. Then $p$ is quasisolitary iff family of all convex to the convex to the right p-stable $2 - A$-formulas has supremum iff family of all convex to the left p-stable formulas has supremum.*

**Note 2.7** (i) If $T$ is o-minimal, then each quasisolitary type is solitary (uniquely realizable [LS]).

(ii) There exist the following six essential kinds of non-algebraic 1-types over set of models with w.o.m. theory:

1–2) isolated (quasisolitary, social);

3–4) quasirational (quasisolitary, social);

5–6) irrational (quasisolitary, social).

**Lemma 2.2** *Let $p,q \in S_1(A)$ be non-algebraic, $\alpha \in p(M')$, $\Phi(x,y,\bar{a}), \bar{a} \in A$ such that $\Phi(M',\alpha,\bar{a}) \subset q(M')$ and $\exists \gamma \in q(M')$, $\gamma \notin \Phi(M',\alpha,\bar{a})$ (i.e. $p$ isolates $q$). Then the following is true:*



*(i) $p$ is isolated iff $q$ is isolated*

*(ii) $p$ is quasirational iff $q$ is quasirational*

*(iii) $p$ is irrational iff $q$ is irrational*

*(iv) $p$ is quasisolitary iff $q$ is quasisolitary.*

**Note 2.8** (i) $\forall \beta \models p$, $\Phi(M',\beta,\bar{a}) \subset q(M')$.

(ii) If $q$ is irrational to the left (right), i.e. $\neg\exists C(x,\bar{c})$ such that $C(M',\bar{c})^- \cup C(M',\bar{c}) = q(M')^-$ then for any formula $\Phi(x,\beta), \beta \in M'$ if $\Phi(M',\beta) \subseteq q(M')$ then $\exists \gamma \in q(M')$ such that $\gamma < \Phi(M',\beta) (\Phi(M',\beta) < \gamma)$.

*Proof of Lemma 2.2.* (i) If $p$ is isolated then $q$ is isolated. It is true for any types of arbitrary theory. If $q$ is isolated then $q(M') = U(M',\bar{b})$ where $U(M',\bar{b})$ is a complete formula of $q$. Let $\gamma,\beta \in U(M',\bar{b})$ such that $\gamma \notin \Phi(M',\alpha,\bar{a}), \beta \in \Phi(M',\alpha,\bar{a})$. Let $f \in Aut_A(M')$ such that $f(\gamma) = \beta$. Then $\beta \notin \Phi(M',f(\alpha),\bar{a})$. So, $\alpha \in \Phi(\beta,M',\bar{a}) \cap p(M')$ and $f(\alpha) \in \neg\Phi(\beta,M',\bar{a}) \cap p(M')$.

Because $T$ is weakly o-minimal there is a formula $H(x,\beta,\bar{a})$ such that $H(M',\beta,\bar{a}) < \neg H(M',\beta,\bar{a})$ or $\neg H(M',\beta,\bar{a}) < H(M',\beta,\bar{a})$, $\alpha \in H(M',\beta,\bar{a})$, $f(\alpha) \in \neg H(M',\beta,\bar{a})$. Then the following formula $K(x,\bar{a},\bar{b})$ is complete for $p$:

$$K(x,\bar{a},\bar{b}) := \exists y_1, \exists y_2\, [U(y_1,\bar{b}) \wedge U(y_2,\bar{b}) \wedge H(x,y_1,\bar{a}) \wedge \neg H(x,y_2,\bar{a})].$$

So, $p$ is isolated.

(ii) ($\Rightarrow$) Suppose $p$ is quasirational to the right with a formula $U(x,\bar{b})$, $\bar{b} \in A$ from Definition 2.3. Let

$$L_q(t,\bar{a},\bar{b}) := \exists z[U(z,\bar{b}) \wedge \forall y((y > z \wedge U(y,\bar{b})) \rightarrow \forall x(\Phi(x,y,\bar{a}) \rightarrow t < x))].$$

Then for any formula in one free variable $D(x,\bar{d})$, $\bar{d} \in A$ the following is true:

$$[D(M',\bar{d}) < q(M') \Rightarrow D(M',\bar{d}) \subset L_q(M',\bar{a},\bar{b})] \wedge$$

$$\wedge [q(M') < D(M',\bar{d}) \Rightarrow D(M',\bar{d}) \cap L_q(M',\bar{a},\bar{b}) = \emptyset].$$

Thus, if $L_q(t,\bar{a},\bar{b}) \in q$ then $q$ is quasirational to the right and

$$q(M')^+ = L_q(M',\bar{a},\bar{b})^+ \text{ and if } \neg L_q(t,\bar{a},\bar{b}) \in q$$

then $q$ is quasirational to the left and

$$q(M')^- = L_q(M',\bar{a},\bar{b})^-,\; q(M') \subset \neg L_q(M',\bar{a},\bar{b}).$$

As $q$ is complete type, so either $L_q(t,\bar{a},\bar{b}) \in q$ or $\neg L_q(t,\bar{a},\bar{b}) \in q$.

($\Leftarrow$) Suppose $q$ is quasirational to the right with a formula

$$U(x,\bar{b}), \bar{b} \in A, U(M',\bar{b})^+ = q(M')^+.$$

We will show an existence of $2 - a$-formula $\Phi_0(x,y,\bar{a})$ such that

$$\forall \gamma \in q(M'),\; \Phi_0(\gamma,M',\bar{a}) \subset p(M').$$

By the preceding it means that $p$ is quasirational.

Consider two cases:

a) There are $\gamma_1, \gamma_2 \in q(M')$ such that $\gamma_1 < \Phi(M', \alpha, \bar{a}) < \gamma_2$.

b) $\Phi(M', \alpha, \bar{a})^+ = q(M')^+$.

a) Let $f \in \mathrm{Aut}_A(M')$ such that $f(\gamma_1) = \gamma_2$.

If $\alpha_1, \alpha_2 \in p(M')$ such that $f(\alpha_1) = \alpha, f(\alpha) = \alpha_2$, then we have

$$\Phi(M', \alpha_1, \bar{a}) < \gamma_1 < \Phi(M', \alpha, \bar{a}) < \gamma_2 < \Phi(M', \alpha_2, \bar{a}).$$

Let $\gamma \in \Phi(M', \alpha, \bar{a})$ then $\alpha \in \Phi(\gamma, M', \bar{a})$ and ($\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ or $\alpha \in (\alpha_2, \alpha_1)$).

Let $\Phi_0(\gamma, M', \bar{a})$ be a maximal convex $< \gamma, \bar{a} >$-subformula of $\Phi(\gamma, y, \bar{a})$ such that $\alpha \in \Phi_0(\gamma, M', \bar{a})$. Clearly that $\Phi_0(\gamma, M', \bar{a}) \subset p(M')$.

b) By Note 2.8(ii) there is $\gamma \in q(M')$ such that $\gamma < \Phi(M', \alpha, \bar{a})$.

Consider the following formula

$$\Phi_0(\gamma, y, \bar{a}, \bar{b}) := \forall z(\Phi(z, y, a) \to \gamma < z \wedge U(z, \bar{a})) \wedge \exists z \Phi(z, y, \bar{a})).$$

So, $\alpha \in \Phi_0(\gamma, M', \bar{a}, \bar{b})$. If $\Phi_0(\gamma, M', \bar{a}, \bar{b}) \not\subset p(M')$ then there is $D(x, \bar{d})$, $\bar{d} \in A$ such that $D(M', \bar{d}) \cap p(M') = \emptyset$ and $D(M', \bar{d}) \subset \Phi_0(\gamma, M', \bar{a}, \bar{b})$. Then for a formula $H(x, \bar{d}, \bar{a}) := \exists y(D(y, \bar{d}) \wedge \Phi(x, y, \bar{a}))$ we have $\gamma < H(M', \bar{d}, \bar{a}) \subset q(M')$. Contradiction, because $\bar{d}, \bar{a} \in A$ and $\gamma \in q(M')$, $\forall \gamma_1 \in H(M', \bar{d}, \bar{a}), tp(\gamma/A) \neq tp(\gamma_1/A)$.

Thus, $\Phi_0(\gamma, M', \bar{a}, \bar{b}) \subset p(M')$.

(iii) follows from (i) and (ii).

(iv)

**Claim 2.1** *If $p$ isolates $q$ by a formula $\Phi(x, y, \bar{a})$, $\bar{a} \in A$ such that $\exists \alpha \in p(M') \exists \gamma_1 \gamma_2 \in q(M')$, $\gamma_1 < \Phi(M', \alpha, \bar{a}) < \gamma_2, \Phi(M', \alpha, \bar{a}) \neq \emptyset$ then $\exists \Phi_0(x, y, \bar{a})$ such that $\forall \beta \in q(M') \exists \mu_1, \mu_2 \in p(M')$*

$$\Phi_0(\beta, M', \bar{a}) \neq \emptyset, \ \mu_1 < \Phi_0(\beta, M', \bar{a}) < \mu_2$$

*and $p$ is quasisolitary iff $q$ is quasisolitary.*

*Proof of Claim 2.1* Let $f \in \mathrm{Aut}_A(M')$ such that $f(\gamma_1) = \gamma_2$. Let $\alpha_1 := f^{-1}(\alpha), \alpha_2 = f(\alpha)$. We have

$$f^{-1}(\gamma_1) < \Phi(M', \alpha_1, \bar{a}) < \gamma_1 < \Phi(M', \alpha, \bar{a}) < \gamma_2 < \Phi(M', \alpha_2, \bar{a}) < f(\gamma_2).$$

If $\alpha < f(\alpha)$ then $f^{-1}(\alpha) < \alpha$. We have $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ or $\alpha_2 < \alpha < \alpha_1$.

Let $\beta \in \Phi(M', \alpha, \bar{a})$. Consider the formula $\Phi(\beta, y, \bar{a})$. Let $\Phi_0(\beta, y, \bar{a})$ be a convex subformula of $\Phi(\beta, y, \bar{a})$ such that $\alpha \in \Phi_0(\beta, M', \bar{a})$. We have $\alpha_1 < \Phi_0(\beta, M', \bar{a}) < \alpha_2$ or $\alpha_2 < \Phi_0(\beta, M', \bar{a}) < \alpha_1$.

Suppose $p$ be quasisolitary. Let $E_p(x, y, \bar{c}_p)$, $\bar{c}_p \in A$ be a formula from the proof of Lemma 2.1(ii) which defines quasisolitarity of $p$. Let

$$E(z, t, \bar{c}_p, \bar{a}) := \exists y \exists x(\Phi_0(t, y, \bar{a}) \wedge E_p(x, y, \bar{c}_p) \wedge \Phi(z, x, \bar{a})), \ \gamma \in \Phi(M', \alpha, \bar{a}).$$

We claim that for any formula $H(x, y, \bar{d})$, $\bar{d} \in A$ the following is true:
If $H(x, y, \bar{d})$ is $q$-stable then $H(M', \gamma, \bar{d}) \subset E(M', \gamma, \bar{c}_p, \bar{a})$.



In opposite case we can choose $q$-stable $H(x, y, d)$ such that $H(M', \gamma, \bar{d}) \cap E(M', \gamma, \bar{c}_p, \bar{a}) = \emptyset$.

Consider the folowing formula:

$$K(x, \alpha, \bar{a}, \bar{d}) := \exists y \exists z(\Phi(y, \alpha, \bar{a}) \wedge H(z, y, d) \wedge \Phi_0(z, x, \bar{a})).$$

By Note 2.6(iv), $K(x, y, \bar{a}, d)$ is $p$-stable because

- $\gamma_1 < \Phi(M', \alpha, \bar{a}) < \gamma_2$,
- $H(x, y, \bar{d})$ is $q$-stable,
- $\forall \beta \in q(M') \exists \delta_1, \delta_2 \in p(M')$, $\delta_1 < \Phi_0(\beta, M', \bar{a}) < \delta_2$.

Let $\gamma_0 \in H(M', \gamma, d)$ then $\gamma_0 \notin E(M', \gamma, \bar{c}_p, \bar{a})$ and $\Phi_0(\gamma_0, M', \bar{a}) \cap E_p(M', \alpha, c_p) = \emptyset$. Let $\mu \in \Phi_0(\gamma_0, M', \bar{a}) \subset K(M', \alpha, \bar{a}, \bar{d})$ then $\mu \notin E_p(M', \alpha, \bar{c}_p)$. Contradiction. Thus $q$ is quasisolitary. By the same consideration from quasisolitarity of $q$ follows the quasisolitarity of $p$. So, Claim 2.1 is proved. □

By Note 2.8 (ii), Lemma 2.2 (i-iii) we must consider the following case:

- $p, q$ are quasirational or isolated.
- There exists $\Phi(x, y, \bar{a}), \bar{a} \in A$, such that $\forall \alpha \in p(M'), \Phi(M', \alpha, a) \subset q(M')$, $\Phi(M', \alpha, a)^+ = q(M')^+$ or $\Phi(M', \alpha, \bar{a})^- = q(M')^-$.
- $\forall \theta(x, y, b)$, $\bar{b} \in A$, $\forall \alpha \in p(M')$

$$\theta(M', \alpha, \bar{b}) \subset q(M') \Rightarrow \theta(M', \alpha, \bar{b}) = \Phi(M', \alpha, \bar{a})].$$

We claim that in this case $p, q$ are quasisolitary. Without loss of generality we assume $\Phi(M', \alpha, \bar{a}) = q(M')^+$ and $p$ is quasirational to the right.

Notice that,

$$\forall \beta, \alpha \in p(M')[\beta > \alpha \Rightarrow \Phi(M', \beta, \bar{a}) \subseteq \Phi(M', \alpha, \bar{a})].$$

Let $K(x, y, \bar{a}) := \forall t \ (z \leq t \leq y \to \Phi(M', z, \bar{a}) \subseteq \Phi(M', \alpha, \bar{a}))$. We claim that $K(z, y, \bar{a})$ is maximal convex to the left $p$-stable formula. If not there is $p$-stable $G(x, y, \bar{c})$, $\bar{c} \in A$, such that

- $G(M', \alpha, \bar{c}) < K(M', \alpha, a)$
- $\exists \mu \in G(M', \alpha, \bar{c}), \Phi(M', \alpha, \bar{a}) \subset \Phi(M', \mu, \bar{a})$

Let $\Phi_1(x, \alpha, \bar{a}, \bar{c}) := \exists y(G(y, \alpha, \bar{c}) \wedge \Phi(x, y, \bar{a})) \wedge \neg\Phi(x, \alpha, \bar{a})$. By Note 2.6 (iv) $\Phi_1(M', \alpha, \bar{a}, \bar{c}) \subset q(M')$, by construction $\Phi_1(M', \alpha, \bar{a}, \bar{c}) \neq \Phi(M', \alpha, \bar{a})$. Contradiction. So, $p$ is quasisolitary. The same consideration of $\Phi_0(x, y, \bar{a}, \bar{b})$ from Lemma 2.2(ii), ($\Leftarrow$)(b) gives us the quasisolitarity of $q$. □

**Corollary 2.2** *Let $p, q \in S_1(A)$. Then $q$ isolates $p$ iff $p$ isolates $q$.*

## 3 Orthogonality of 1-types over sets, neighbourhoods of sets in 1-types

**Definition 3.1** Let $p \in S_1(A)$, $B \subset M'$ such that $M'$ is $|B \cup A|^+$-saturated. Then a neighbourhood of set $B$ in the type $p$ is the following set:

$$V_p(B) := \{\gamma \in M' | \exists \gamma_1, \gamma_2 \in p(M'), \exists H(x, b, \bar{c}), b \in B, \bar{c} \in A,$$

$$\gamma_1 < H(M', b, \bar{c}) < \gamma_2,\ \gamma \in H(M', b, \bar{c})\}$$

Let $\alpha = <\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k>$ then $V_p(\bar{\alpha}) := V_p(\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\})$.

**Note 3.1** Let $p \in S_1(A)$.

(i) Let $\beta \in p(M')$. Then $|V_p(\beta)| = 1$ iff $p$ is solitary.

(ii) $p$ is quasisolitary iff $\exists \beta \in p(M')$, $V_p(\beta)$ is $(A \cup \beta)$-definable set. (In fact, $E_p(M', \beta, c_p) = V_p(\beta)$).

**Lemma 3.1** *Let $p \in S_1(A)$, $B \subset M'$ such that $M'$ is $|A \cup B|^+$-saturated. Then the following holds:*

*(i) $V_p(B)$ is convex or empty.*

*(ii) Let $p$ be irrational. Then $\forall \bar{\alpha} \in M' \setminus M$ $\forall H(x, \bar{\alpha}, \bar{a})$, $a \in A$*

$$[H(M', \bar{\alpha}, \bar{a}) \neq \emptyset,\ H(M', \bar{\alpha}, \bar{a}) \subseteq p(M') \Rightarrow H(M', \alpha, a) \subseteq V_p(\alpha)]$$

*(iii) $V_p(B) \neq \emptyset \Rightarrow \exists \gamma_1, \gamma_2 \in p(M')$, $\gamma_1 < V_p(B) < \gamma_2$.*

*(iv) $\forall \beta \in p(M')$ $[V_p(B) \neq \emptyset,\ \beta \notin V_p(B) \Rightarrow$*

$$\Rightarrow \forall q \in S_1(A),\ V_q(\beta) \cap V_q(B) = \emptyset].$$

*(v) $\forall \alpha \in p(M')$: $V_p(B) < \alpha$ $\exists \alpha_0 \in p(M')[V_p(B) < \alpha_0 < V_p(\alpha)]$.*

*Proof.* (i) By Definition 3.1.
(ii) By Definition 3.1 and by Note 2.8(ii).
(iii) By Definition 3.1 and by Theorem of compactness.
(iv) Suppose that there exists $q \in S_1(A)$ such that $V_q(\beta) \cap V_q(B) \neq \emptyset$. Then there exists $\Phi(x, \beta, \bar{b})$, $b \in A$, $\exists H(x, \alpha, \bar{c})$, $\alpha \in B$, $c \in A$ such that $\exists \gamma \in \Phi(M', \beta, b) \cap H(M', \alpha, \bar{c})$, $\Phi(M', \beta, b) \subset V_p(\beta)$, $H(M', \alpha, \bar{c}) \subset V_p(B)$.
By Definition 3.1 $\exists \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in q(M')$ such that $\gamma_1 < \Phi(M', \beta, \bar{b}) < \gamma_2$, $\gamma_3 < H(M', \alpha, c) < \gamma_4$.
Let $\mu_1 = \min\{\gamma_1, \gamma_3\}$, $\mu_2 = \max\{\gamma_2, \gamma_4\}$, $f \in \mathrm{Aut}_A(M')$ such that $f(\mu_2) = \mu_1$.
Let $\beta_1 := f(\beta)$, $\beta_2 := f^{-1}(\beta)$. So we have

$$\Phi(M', \beta_1, \bar{b}) < \mu_1 < H(M', \bar{\alpha}, \bar{c}) < \mu_2 < \Phi(M', \beta_2, b)$$



and $(\beta_1 < \beta < \beta_2$ or $\beta_2 < \beta < \beta_1)$.
Let $K(y, \bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c}) := \exists x(H(x, \alpha, c) \wedge \Phi(x, y, b))$. Then $\beta \in K(M', \alpha, b, c)$ and $\beta_1, \beta_2 \notin K(M', \alpha, b, c)$.
Let $K_1(x, \bar{\alpha}, b, c)$ be a convex subformula of $K(x, \alpha, \bar{b}, \bar{c})$ such that $\beta \in K_1(M', \alpha, b, \bar{c})$. Thus

$$\beta_1 < K_1(M', \alpha, b, c) < \beta_2 \text{ or } \beta_2 < K_1(M', \bar{\alpha}, b, c) < \beta_1$$

Thus $\beta \in V_p(\bar{\alpha})$ and $\beta \in V_p(B)$. Contradiction.
(v) Consider two cases:
a) $\exists U(M', \bar{\beta}, a), \bar{\beta} \in B, a \in A, U(M', \beta, a)^+ = V_p(B)^+$.
b) $\neg$ a).
a) If $p$ is social, then it is true by Theorem of compactness. Let $p$ be quasisolitary. Consider the following formula

$$K(x, \beta, a, \bar{c}_p) := U(M', \beta, \bar{a}) < x \wedge \forall y\,(U(M', \beta, \bar{a}) < y < x \to E_p(x, y, \bar{c}_p).$$

If there is not such $\alpha_0$, then $K(M', \beta, \bar{a}, \bar{c}_p) = E_p(M', \alpha, \bar{c}_p)$. So $E_p(M', \alpha, \bar{c}_p) \subseteq V_p(B)$ and $\alpha \in V_p(B)$. Contradiction.
b) It follows from Theorem of compactness. □

**Note 3.2** Let $p, q \in S_1(A)$.

(i) If $\alpha \in p(M'), \beta \in q(M')$ then $\alpha \in V_p(\beta)$ iff $\beta \in V_q(\alpha)$ iff $V_p(\alpha) = V_p(\beta)$ iff $V_q(\alpha) = V_q(\beta)$.

(ii) If $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in p(M')$ such that $\alpha_1 < V_p(\alpha_2) < \alpha_3, V_q(\alpha_1) \neq \emptyset$ then $V_q(\alpha_1) < V_q(\alpha_2) < V_q(\alpha_3)$ or $V_q(\alpha_3) < V_q(\alpha_2) < V_q(\alpha_1)$.

*Proof.* (i) is immediate corollary of proof of Lemma 3.1(iv).
(ii) By Lemma 3.1(iv) the following is true:

$$\forall q \in S_1(A), V_q(\alpha_i) \cap V_q(\alpha_j) = \emptyset, i \neq j \in 1,2,3 \text{ and } V_p(\alpha_1) < V_p(\alpha_2) < V_p(\alpha_3).$$

Then

$$tp(\alpha_1/A \cup \alpha_3) = tp(\alpha_2/A \cup \alpha_3),\ tp(\alpha_2/A \cup \alpha_1) = tp(\alpha_3/A \cup \alpha_1).$$

Suppose there is $q \in S_1(A)$ such that $V_q(\alpha_1) < V_q(\alpha_3) < V_q(\alpha_2)$. Let $H(x, y, \bar{a}), \bar{a} \in A$ be a formula such that $H(M', \alpha_1, \bar{a}) \subset V_q(\alpha_1)$. Consider the following formula:

$$G(y, \alpha_3, a) := y < \alpha_3 \wedge \forall x\, \forall z\, ((H(x, y, \bar{a}) \wedge H(z, \alpha_3, \bar{a})) \to z < x).$$

Then $\alpha_1 \notin G(M', \alpha_3, \bar{a}), \alpha_2 \in G(M', \alpha_3, \bar{a})$. Then $\alpha_2 \in V_p(\alpha_3)$. Contradiction. Consideration of other cases is the same. □

For notations of our notions we will use the analogous ones from Theory of stability ([S], [Ba]).

**Definition 3.2** Let $p, q \in S_1(A)$. We say that $p$ is weakly orthogonal to $q$ ($p \perp^w q$) if for any $H(x, y, \bar{a})$, $\bar{a} \in A$, for any $\alpha \in p(M')$ the following holds:

$$[H(M', \alpha, a) \cap q(M') \neq \emptyset \Rightarrow q(M') \subseteq H(M', \alpha, \bar{a})].$$

If $p$ is not weakly orthogonal to $q$, we will denote this fact by $p \not\perp^w q$.

**Note 3.3** (i) $p \not\perp^w q \Rightarrow q \not\perp^w p$.

(ii) $p \perp^w q \Leftrightarrow p(x) \cup q(y)$ is complete $2-A$-type.

(iii) If $p$ is algebraic then $\forall q \in S_1(A)$, $p \perp^w q$.

**Definition 3.3** Let $p, q \in S_1(A)$. We say that $p$ is almost orthogonal to $q$ ($p \perp^a q$), if $\exists \alpha \in p(M')$ ($\equiv \forall \alpha \in p(M')$), $V_q(\alpha) = \emptyset$. If $p$ is not almost orthogonal to $q$, then we denote this fact by $p \not\perp^a q$.

**Note 3.4** Let $p, q \in S_1(A)$. Then the following propositions are true:

(i) $p \perp^w q \Rightarrow p \perp^a q$.

(ii) There exists $T$ — w.o.m. theory such that $p \not\perp^w q$, $p \perp^a q$.

(iii) Let $T$ be o-minimal. Then ($p \perp^a q \Leftrightarrow p \perp^w q$).

**Lemma 3.2** *Let $p, q \in S_1(A)$. Then the following propositions are true:*

*(i) Let $p \not\perp^w q$. If $p$ is social then $q$ is social and $p \not\perp^a q$.*

*(ii) $p \not\perp^a q \Rightarrow q \not\perp^a p$.*

*(iii) $\not\perp^a$ is relation of equivalence on $S_1(A)$.*

*(iv) $\not\perp^w$ is relation of equivalence on $S_1(A)$.*

*Proof.* (i) Consider two cases:
a) $p \not\perp^a q$,
b) $p \not\perp^w q$, $p \perp^a q$.
If $p \not\perp^a q$ then by Claim 2.1 if $p$ is social then $q$ is social.
Consider the case $p \not\perp^w q$, $p \perp^a q$. We can construct the $2-A$-formula $H(x, y, \bar{a})$, $\bar{a} \in A$ such that for any $\alpha \in p(M')$, $H(M', \alpha, \bar{a})$ — convex, $\neg H(M', \alpha, \bar{a})$ — convex,

$$H(M', \alpha, \bar{a}) \cup \neg H(M', \alpha, \bar{a}) = M', \ \exists \beta_1 \in H(M', \alpha, \bar{a}) \cap q(M'),$$
$$\exists \beta_2 \in \neg H(M', \alpha, \bar{a}) \cap q(M'), \ H(M', \alpha, \bar{a}) < \neg H(M', \alpha, \bar{a}).$$

**Note 3.5** $\forall \alpha, \beta \in p(M')$

$$[\exists \gamma \in H(M', \alpha, \bar{a}) \setminus H(M', \beta, \bar{a}) \Rightarrow H(M', \beta, \bar{a}) \subset H(M', \alpha, \bar{a})].$$

Let $\alpha \in p(M')$. Consider $f \in \mathrm{Aut}_A(M')$, such that $f(\beta_1) = \beta_2$. Then

$$H(M', \alpha, \bar{a}) \subset H(M', f(\alpha), \bar{a})$$

**Claim 3.1** If $f(\alpha) > \alpha$ ($f(\alpha) < \alpha$) then for any $\beta < \alpha$ ($\beta > \alpha$), $\beta \in p(M')$ $H(M', \beta, \bar{a}) \subseteq H(M', \alpha, \bar{a})$ and there exists $U(x, \alpha, \bar{c})$, $\bar{c} \in A$, $U(M', \alpha, \bar{c}) < \alpha$ ($U(M', \alpha, \bar{c}) > \alpha$) such that

$$\forall \beta < \alpha, \beta \in p(M')[H(M', \beta, \bar{a}) \subset H(M', \alpha, \bar{a}) \Rightarrow \beta \in U(M', \alpha, \bar{c})].$$



*Proof of Claim 3.1.* We suppose that $f(\alpha) > \alpha$, a consideration of the case $f(\alpha) < \alpha$ is the same. Let $\alpha_0 = f^{-1}(\alpha)$ then

$$H(M', \alpha_0, \bar{a}) \subset H(M', \alpha, \bar{a}).$$

Suppose there exists $\beta \in p(M')$, $\beta < \alpha$, $H(M', \alpha, \bar{a}) \subset H(M', \beta, \bar{a})$.
Consider three $< \alpha, \bar{a} >$-definable sets:

$$\begin{aligned} K_1(M', \alpha, \bar{a}) &:= \{\gamma \in M' : \gamma < \alpha, H(M', \alpha, \bar{a}) = H(M', \gamma, \bar{a})\}, \\ K_2(M', \alpha, \bar{a}) &:= \{\gamma \in M' : \gamma < \alpha, H(M', \alpha, \bar{a}) \subset H(M', \gamma, \bar{a})\}, \\ K_3(M', \alpha, \bar{a}) &:= \{\gamma \in M' : \gamma < \alpha, H(M', \gamma, \bar{a}) \subset H(M', \alpha, \bar{a})\}. \end{aligned}$$

$$\alpha_0 \in K_3(M', \alpha, \bar{a}) \cap p(M'), \ \beta \in K_2(M', \alpha, \bar{a}) \cap p(M').$$

Because $T$ is w.o.m. $K_i(M', \alpha, \bar{a})$, $i = 1,2,3$ is union of convex $\neg K_i(M', \alpha, \bar{a})$-separable subsets, there are $i \in \{1,2,3\}$, $K_i^J(M', \alpha, \bar{a})$ is the maximal convex $< \alpha, \bar{a} >$-definable subset such that

$$\exists \gamma \in K_i^J(M', \alpha, \bar{a}) \cap p(M') \Rightarrow \forall \mu [p(M')^- < \mu < \gamma \Rightarrow \mu \in K_i^J(M', \alpha, \bar{a})].$$

Consider three cases:
$i = 1$. We have two possibilities for $p$.
a) $p$ is irrational to the left. So, $\exists C(x, \bar{c})$, $\bar{c} \in A$

$$C(M', \bar{c}) \subset K_i^J(M', \alpha, \bar{a}), \ C(M', \bar{c}) < p(M').$$

b) $p$ is quasirational to the left, then $\exists C(x, \bar{c})$, $\bar{c} \in A$

$$C(M', \bar{c})^- \cup C(M', \bar{c}) = p(M')^-.$$

Thus we have $M' \models \exists z (C(M', \bar{c}) < z < \alpha \wedge \forall x (C(M', \bar{c}) < x < z \to$
$\to H(M', \alpha, \bar{a}) \leftrightarrow H(M', x, \bar{a})))$.
Consider the following formula:

$$\Phi(y, \bar{c}, \bar{a}) := \exists z [C(M', \bar{c}) < z \wedge \forall x (C(M', \bar{c}) < x < z \to \neg H(y, x, \bar{a})].$$

Then $\beta_2 \in \Phi(M', \bar{c}, \bar{a})$ and $\beta_1 \notin \Phi(M', \bar{c}, \bar{a})$. Contradiction.
$i = 2$. Then $\exists K_3^m(M', \alpha, \bar{a})$ — maximal $< \alpha, \bar{a} >$-definable subset of $K_3(M', \alpha, \bar{a})$ such that $K_3^m(M', \alpha, \bar{a}) \subset p(M')$,
$K_2^J(M', \alpha, \bar{a}) < K_3^m(M', \alpha, \bar{a})$.
Let $L(x, \alpha, \bar{a}) := \exists y \, (K_3^m(y, \alpha, \bar{a}) \wedge \neg H(x, y, \bar{a}) \wedge H(x, \alpha, \bar{a}))$. So,
$L(M', \alpha, \bar{a}) \subset q(M')$. If $\exists \mu \in q(M')$ such that $\mu < L(M', \alpha, \bar{a})$, then
$\mu < L(M', \alpha, \bar{a}) < \beta_2$. Contradiction with $p \perp^a q$.
Thus $L(M', \alpha, \bar{a})^- = q(M')^-$. It is possible by Note 2.8(ii) if $q$ is quasirational to left or isolated. Then there is $1-A$–formula $G(x, \bar{g})$,
$\bar{g} \in A$ such that $G(M', \bar{g})^- \cup G(M', \bar{g}) = q(M')^-$. Let
$\Theta_1(\alpha, \bar{a}, \bar{g}) := \exists z (G(M', \bar{g}) < z \wedge H(z, \alpha, \bar{a}) \wedge \forall x (G(M', \bar{g}) < x < z \to$
$\to \exists y (K_3^m(y, \alpha, \bar{a}) \wedge \neg H(x, y, \bar{a}))))$. It is clear that $M' \models \Theta_1(\alpha, \bar{a}, \bar{g})$.
Notice that $\forall \delta \in p(M')$ $M' \models \Theta_1(\delta, \bar{a}, \bar{g})$.

Consider arbitrary $\delta \in K_2^j(M',\alpha,\bar a) \cap p(M')$ then $H(M',\alpha,\bar a) \subset H(M',\delta,a)$ and $K_3^m(M',\delta,\bar a) \subset$ $K_2^j(M',\alpha,\bar a)$.
So, $\forall \alpha_1 \in K_3^m(M',\delta,a)\ H(M',\alpha,a) \subset H(M',\alpha_1,\bar a)$.
It is contradiction with $M' \models \Theta_1(\delta,\bar a,\bar g)$.

$i = 3$. Then $\exists K_2^m(M',\alpha,\bar a)$ – maximal $<\alpha,\bar a>$-definable subset of $K_2(M',\alpha,a)$ such that $K_2^m(M',\alpha,a) \subset p(M')$,
$K_3^j(M',\alpha,\bar a) < K_2^m(M',\alpha,\bar a)$.

Let $R(x,\alpha,a) := \exists y\,(K_2^m(y,\alpha,\bar a) \wedge H(x,y,\bar a) \wedge \neg H(x,\alpha,a))$. So, $R(M',\alpha,a) \subset q(M')$.
If $\exists \mu \in q(M')\ R(M',\alpha,\bar a) < \mu$, then
$\beta_1 < R(M',\alpha,\bar a) < \mu$. Contradiction with $p \perp^a q$.

Thus $R(M',\alpha,\bar a)^+ = q(M')^+$. It is possible by Note 2.8(ii) if $q$ is quasirational to the left or isolated. Then there is $1-A$–formula $D(x,\bar d)$,
$\bar d \in A$ such that $D(M',\bar d)^+ = q(M')^+$.

Let $\Theta_2(\alpha,\bar a,\bar d) := \forall x(D(x,\bar d) \wedge \neg H(x,\alpha,a) \rightarrow$
$\rightarrow \exists y(K_2^m(y,\alpha,\bar a) \wedge \neg H(x,y,\bar a))))$.

Consider arbitrary $\delta \in K_3^j(M',\alpha,\bar a) \cap p(M')$ then $M' \models \Theta_2(\delta,\bar a,\bar d)$,
$K_2^m(M',\delta,\bar a) \subset K_3^j(M',\alpha,\bar a) \cap p(M')$.

So, for $\beta_2$ there exists $\alpha_1 \in K_2^m(M',\delta,\bar a)$ such that $\beta_2 \in H(M',\alpha_1,\bar a)$. Then by Note 3.5 $H(M',\alpha,\bar a) \subset H(M',\alpha_1,\bar a)$. Contradiction because $\alpha_1 \in K_3^j(M',\alpha,\bar a)$.

So, $p(M') \cap K_2(M',\alpha,\bar a) = \emptyset$ and $K_1(M',\alpha,\bar a) \cap p(M') > K_3(M',\alpha,\bar a)$.

Thus $U(M',\alpha,\bar a)$ is the maximal $<\alpha,\bar a>$-definable subset of $K_3(M',\alpha,\bar a)$. It is clear that $U(x,\alpha,\bar a)$ is the required formula. So, Claim 3.1 is proved.□

Let $G(x,\alpha,\bar a) := U(M',\alpha,\bar a) < x \leq \alpha$. Then $G(x,y,a)$ is maximal convex to the left $p$-stable $2-A$-formula. It means that $p$ is quasisolitary. So, if $p$ is social and $p \not\leq^w q$, then $p \not\leq^a q$ and by Claim 2.1 $q$ is social.

**Note 3.6** Let $p,q \in S_1(A)$, $p \not\leq^w q$. Then the following hold:

(i) If $\alpha \in p(M')$ then $[p \perp^a q \Leftrightarrow V_q(\alpha) = \emptyset]$.

(ii) If $p \perp^a q, \alpha, \beta \in p(M')$ then

$$[H(M',\alpha,\bar a) = H(M',\beta,\bar a) \Leftrightarrow \models E_p(\alpha,\beta,\bar c_p)].$$

(iii) If $p \perp^a q$, $B \subset M'$ such that $V_p(B) \neq \emptyset$ then

$$[V_q(B) = \emptyset \Leftrightarrow \exists \alpha \in p(M'),\ V_p(B) = E_p(M',\alpha,\bar c_p)].$$

*Proof* (ii) follows from Claim 2.1.

(iii) $p \not\leq^a p$ for any $p \in S_1(A)$ by Definition 3.3. If $p \not\leq^a q$ then $q \not\leq^a p$ by Lemma 3.2(ii). Suppose $r \not\leq^a p$, $p \not\leq^a q$.

**Claim 3.2** Let $p \in S_1(A)$, $\alpha_1,\alpha_2 \in p(M')$, $\Phi(x,\bar\beta), \bar\beta \in M'$ such that $V_p(\alpha_1) < \Phi(M',\beta) < V_p(\alpha_2)$. Then for any $q \in S_1(A)(p \not\leq^a q)$, for any $\Psi(x,y,\bar a)$, $\bar a \in A$ such that $\Psi(M',\alpha_1,a) \subset V_q(\alpha_1)$ for the formula $K_{\Phi,\Psi}(y,\bar\beta,\bar a) := \exists x(\Phi(x,\bar\beta) \wedge \Psi(y,x,\bar a))$ the following is true:

$$V_q(\alpha_1) < K_{\Phi,\Psi}(M',\bar\beta,\bar a) < V_q(\alpha_2) \quad \text{or} \quad V_q(\alpha_2) < K_{\Phi,\Psi}(M',\bar\beta,\bar a) < V_q(\alpha_1).$$



*Proof of Claim 3.2.* By Note 3.2(ii) for any $\alpha_0, \alpha_0' \in \Phi(M',\bar\beta)$

$$V_q(\alpha_1) < V_q(\alpha_0) < V_q(\alpha_2) \Leftrightarrow V_q(\alpha_1) < V_q(\alpha_0') < V_q(\alpha_2).$$

Then suppose that for any $\alpha_0 \in \Phi(M',\beta)$

$$V_q(\alpha_1) < \Psi(M',\alpha_0,a) < V_q(\alpha_2).$$

Thus, $V_q(\alpha_1) < \bigcup_{\alpha_0 \in \Phi(M',\bar\beta)} \Psi(M',\alpha_0,\bar a) < V_q(\alpha_2)$. Then

$$V_q(\alpha_1) < K_{\Phi,\Psi}(M',\bar\beta,\bar a) < V_q(\alpha_2).$$

So, Claim 3.2 is proved.□

**Note 3.7** Let $p \in S_1(A)$, $B \subset M'$, $V_p(B) \neq \emptyset$ such that $M'$ is $|A \cup B|^+$-saturated.

(i) If $\alpha_1 < V_p(B) < \alpha_2$, $\alpha_1,\alpha_2 \in p(M')$ then for $q \in S_1(A)$ such that $q \not\leq^a p$ the following is true:

$$V_q(B) \neq \emptyset \text{ and } V_q(\alpha_1) < V_q(B) < V_q(\alpha_2) \text{ or } V_q(\alpha_2) < V_q(B) < V_q(\alpha_1).$$

(ii) $\forall \alpha_0 \subset V_p(B) \forall q \in S_1(A)$, $q \not\leq^a p$ the following is true:

$$V_q(\alpha_0) \subset V_q(B).$$

Consider $\beta \in r(M')$, then $V_p(\beta) \neq \emptyset$ because $r \not\leq^a p$. By Note 3.7(i) and Lemma 3.1(iii) $V_q(\beta) \neq \emptyset$. So, $r \not\leq^a q$.

(iv) $p \not\leq^w p$ for any $p \in S_1(A)$ by Definition 1.2. If $p \not\leq^w q$ then $q \not\leq^w p$ by Note 3.3(i). Suppose $r \not\leq^w p, p \not\leq^w q, p \perp^a q$. Then $p,q$ are quasisolitary by Lemma 3.2(i). Let $H(x,y,a)$ be a formula from Claim 3.1. Then from Note 3.6(ii), it follows:
$\forall \bar\alpha_1, \alpha_2 \in p(M')[\models \neg E_p(\alpha_1,\alpha_2,\bar c_p) \Rightarrow$
$\Rightarrow H(M',\alpha_1,a) \subset H(M',\alpha_2,\bar a)$ or $H(M',\alpha_2,\bar a) \subset H(M',\alpha_1,\bar a)]$.

Let $\alpha \in p(M')$. If $\exists \alpha_1 \in p(M')$ such that $\alpha_1 < \alpha$, $M' \models \neg E_p(\alpha_1,\alpha,\bar c_p)$, $H(M',\alpha_1,\bar a) \subset H(M',\alpha,\bar a)$, then for any $\alpha_2,\alpha_3 \in p(M')$

$M' \models \neg E_p(\alpha_2,\alpha_3,\bar c_p) \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \Rightarrow H(M',\alpha_2,\bar a) \subseteq H(M',\alpha_3,\bar a)$.

Without loss of generality suppose that $H(x,y,\bar a)$ is increasing on classes of equivalence $E_p(x,y,\bar c_p)$ of elements from $p(M')$.

Consider the following formula:
$K(x,\alpha,\bar c_p,\bar a) := \forall y[x < y < \alpha \wedge \neg E_p(x,y,\bar c_p) \wedge \neg E_p(y,\alpha,\bar c_p) \rightarrow$
$\rightarrow H(M',x,\bar a) \subset H(M',y,\bar a) \subset H(M',\alpha,\bar a)]$.

If $p$ is quasirational to the left then there is $U_p(x,\bar b)$ such that $U_p(M',\bar b)^- = p(M')^-$,

$$M' \models \forall x[U_p(M',\bar b) < x < \alpha \rightarrow K(x,\alpha,\bar c_p,\bar a)].$$

If $p$ is non-quasirational to the left then $\exists C(M',\bar e)$ such that $C(M',\bar e) \subset K(M',\alpha,\bar c_p,\bar a)$, $C(M',\bar e) < p(M')$. So, we have:

$$M' \models \forall x[C(M',\bar e) < x < \alpha \rightarrow K(x,\alpha,\bar c_p,\bar a)].$$

The same consideration of the formula
$K_1(x,\alpha,c_p,a) := \forall y[(\alpha < y < x \wedge \neg E_p(x,y,\bar{c}_p) \wedge \neg E_p(y,\alpha,c_p)) \to$
$\to H(M',\alpha,\bar{a}) \subset H(M',y,\bar{a}) \subset H(M',x,a)]$
gives the formula $D(x,\bar{d})$ such that $C(M',e) < p(M') < D(M',\bar{d})$ and
$M' \models \forall x \forall y [C(M',\bar{e}) < x < y < D(M',\bar{d}) \wedge \neg E_p(x,y,\bar{c}_p) \to$
$\to H(M',x,\bar{a}) \subset H(M',y,\bar{a})]$.

Let $\beta \in r(M')$, then there is the formula $\Phi(x,y,\bar{b})$ such that $\Phi(M',\beta,\bar{b}) \cap p(M') \neq \emptyset$ and $\neg\Phi(M',\beta,b) \cap p(M') \neq \emptyset$. Suppose $\gamma_1 \in \Phi(M',\beta,\bar{b}) \cap p(M')$ and $\gamma_2 \in \neg\Phi(M',\beta,\bar{b}) \cap p(M')$ and $\gamma_1 < \gamma_2$. Let $H_1(x,\beta,\bar{b})$ be the maximal convex subformula of $\Phi(x,\beta,\bar{b})$ such that $\gamma_1 \in H_1(M',\beta,\bar{b})$. So, $\gamma_2 > H_1(M',\beta,\bar{b})$. For $\gamma_2 \in p(M')$ there is $\mu \in q(M')$ such that $\mu > H(M',\gamma_2,\bar{a})$. Then $\forall \alpha \in H(M',\beta,a) \cap C(M',e)^+ \cap D(M',\bar{d})^-$ we have $H(M',\alpha,\bar{a}) < \mu$.

Consider the formula

$$H_2(x,\beta,\bar{a},\bar{e},\bar{b}) := \exists y(H_1(y,\beta,\bar{b}) \wedge C(M',e) < y \wedge H(x,y,\bar{a})).$$

Then $H_2(M',\beta,\bar{b},d,\bar{e},\bar{a}) \cap q(M') \neq \emptyset$, because $H(M',\gamma_1,\bar{a}) \cap q(M') \neq \emptyset$, $\neg H_2(M',\beta,\bar{b},\bar{d},\bar{e},\bar{a}) \cap q(M') \neq \emptyset$, because $\mu > H_2(M',\beta,\bar{b},d,\bar{e},\bar{a})$. Thus, $r \not\perp^w q$.$\square$

**Corollary 3.1** *The equivalence relations $\not\perp^a$ and $\not\perp^w$ partition the set of non-algebraic types from $S_1(A)$ into the classes of equivalence as follows:*

*(i) Every $\not\perp^w$-class contains $\not\perp^a$-classes or it coincides with a $\not\perp^a$-class.*

*(ii) Every $\not\perp^w$-class contains types only one kind from six basic kinds of Note 2.7.*

*(iii) Every $\not\perp^w$-class, which contains social types, is $\not\perp^a$-class.*

**Lemma 3.3** *Let $A, B, C \subset M'$ such that $M'$ is $|A \bigcup B \bigcup C|^+$-saturated, $p, q \in S_1(A)$, $p \not\perp^w q$. Then the following hold:*

*(i) If $p \not\perp^a q$, then $V_p(B) \bigcap V_p(C) = \emptyset$ iff $V_q(B) \bigcap V_q(C) = \emptyset$*

*(ii) If $p \perp^a q$, $V_p(B) \bigcap V_p(C) = \emptyset$, $V_q(B) \bigcap V_q(C) \neq \emptyset$, then $\exists \delta \in q(M')$ such that $V_q(B) \bigcap V_q(C) = V_q(\delta) = E_q(M',\delta,\bar{c}_q)$, $(V_p(B), V_p(C)) = \emptyset$ or $(V_p(C), V_p(B)) = \emptyset$.*

*(iii) If $p \perp^a q, \exists \alpha \in p(M')$ such that $V_p(B) < V_p(\alpha) < V_p(C)$, then $V_q(B) \bigcap V_q(C) = \emptyset$.*

*Proof.* (i) It follows from Claim 2.2 and Note 2.7 (ii).
(ii) Let $H(x,y,\bar{b})$ be a formula from Claim 2.1, which was obtained from fact $q \not\perp^w p, q \perp^a p$ such that $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in q(M')$ the following hold:

- $H(M',\alpha_1,\bar{b}) < \neg H(M',\alpha_1,\bar{b})$
- $\exists \beta_1, \beta_2 \in p(M'), \beta_1 \in H(M',\alpha_1,\bar{b}), \beta_2 \in \neg H(M',\alpha_2,b)$
- $H(M',\alpha_1,\bar{b}) \subset H(M',\alpha_2,b) \Rightarrow \neg E_q(\alpha_1,\alpha_2,\bar{c}_q)$



Without loss of generality as in proof of Claim 2.1 we suppose:

$$H(M',\alpha_1,\bar{b}) \subset H(M',\alpha_2,\bar{b}) \Leftrightarrow \models \alpha_1 < \alpha_2 \& \neg E_q(\alpha_1,\alpha_2,\bar{c}_q)$$

Suppose $\emptyset \neq V_q(B) \bigcap V_q(C) \neq E_q(M',\delta,c_q)\ \forall \delta \in q(M')$

Let $\delta \in V_q(B) \bigcap V_q(C)$. Then there are two formulas $\phi(x,\bar{\beta}), \psi(x,\bar{\gamma}), \beta \in B \bigcup A, \gamma \in C \bigcup A$ such that $\delta \in \phi(M',\beta) \bigcap \psi(M',\bar{\gamma})$ and $\exists \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in q(M')$ such that

$$\mu_1 < \phi(M',\bar{\beta}) < \mu_2, \mu_3 < \psi(M',\bar{\gamma}) < \mu_4.$$

Consider the formula $\phi_1(x,\beta,\bar{c}_q) := \exists y(\phi(y,\bar{\beta}) \& E_q(x,y,\bar{c}_q))$.

Because $E_q(x,y,\bar{c}_q)$ is $p$-stable it follows by Note 2.6 (iv) the existence $\mu'_1, \mu'_2$ such that $\mu'_1 < \phi_1(M',\bar{\beta},\bar{c}_q) < \mu'_2$ and $\forall \delta \in \phi_1(M',\beta,c_q)\ E_q(M',\delta,\bar{b}) \subseteq \phi_1(M',\beta,c_q)$
Let $\psi_1(x,\bar{\gamma},c_q) := \exists y(\psi(y,\bar{\gamma}) \& E_q(x,y,c_q))$. Then for any $\delta \in \phi_1(M',\bar{\beta},\bar{c}_q) \bigcap \psi_1(M',\bar{\gamma},\bar{c}_q)$ we have $E_q(M',\delta,\bar{c}_q) \subseteq \phi_1(M',\bar{\beta},\bar{c}_q) \bigcap \psi(M',\bar{\gamma},\bar{c}_q)$.
So, $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in q(M')$ such that $\alpha_1, \alpha_2 \in \phi_1(M',\beta,\bar{c}_q) \bigcap \psi_1(M',\bar{\gamma},\bar{c}_q)$ and $\models \neg E_q(\alpha_1,\alpha_2,\bar{c}_q)$. Suppose $\alpha_1 < \alpha_2$. Let

$$K_\phi(y,\bar{\beta},\bar{b},\bar{c}_q) := \exists x_1 \exists x_2\, (\phi_1(x_1,\bar{\beta},\bar{c}_q) \wedge \phi_1(x_2,\beta,c_q) \wedge \neg E_q(x_1,x_2,c_q) \wedge$$
$$\wedge x_1 < x_2 \wedge \neg H(y,x_1,\bar{b}) \wedge \neg H(y,x_2,\bar{b})).$$

Then there are $\beta_1, \beta_2 \in p(M')$ such that

$$p(M')^- < \beta_1 < K_\phi(M',\bar{\beta},\bar{b},c_q) < \beta_2 < p(M')^+$$

because there are $\alpha_3, \alpha_4 \in q(M')$ such that

$$\alpha_3 < V_p(B) < \alpha_4 \text{ and } \models \neg E_q(\alpha_3,\alpha_1,\bar{c}_q) \wedge \neg E_q(\alpha_2,\alpha_4,\bar{c}_q).$$

$K_\phi(M',\beta,\bar{b},\bar{c}_q) \neq \emptyset$, because $\exists \mu_0 \in H(M',\alpha_2,\bar{b}) \setminus H(M',\alpha_1,\bar{b})$. Thus, $\mu_0 \in K_\phi(M',\bar{\beta},\bar{b},\bar{c}_q)$.

Consider

$$K_\psi(y,\bar{\gamma},\bar{b},\bar{c}_q) := \exists x_1 \exists x_2\, (\psi_1(x_1,\bar{\gamma},\bar{c}_q) \wedge \psi_1(x_2,\bar{\gamma},\bar{c}_q) \wedge$$
$$\wedge \neg E_q(x_1,x_2,\bar{c}_q) \wedge x_1 < x_2 \wedge \neg H(y,x_1,\bar{b}) \wedge \neg H(y,x_2,b)).$$

Then $\mu_0 \in K_\psi(M',\bar{\gamma},\bar{b},\bar{c}_q)$ by the same consideration as for $K_\phi(M',\bar{\beta},\bar{b},\bar{c}_q)$. So, $\mu_0 \in V_p(B) \cap V_p(C)$. Contradiction.

Thus, $\exists \delta \in q(M')$ such that $V_q(B) \cap V_q(C) = E_q(M',\delta,\bar{c}_q)$. For quasisolitary type $q$, $E_q(M',\delta,\bar{c}_q) = V_q(B)$. So, (ii) is proved.

(iii) By Lemma 3.1(v) we have $V_p(B) < V_p(\alpha) < V_p(c)$ such that $\phi(M',\beta) \subseteq V_q(B)$, $\psi(M',\gamma) \subseteq (C), \phi(M',\beta) \cap \psi(M',\bar{\gamma} = E_q(M',\delta,c_q)$. The existence of these $\phi, \psi, \delta$ follows from proof (ii). Let $\theta(M',\bar{\beta}_1), \bar{\beta}_1 \in B$ such that $\Theta(M',\beta_1) \subset V_p(B)$ and $V_p(B) \subset H(M',\delta,\bar{b})$. Suppose $V_p(B) \subset H(M',\delta,b)$. Then $V_p(B)^+ = H(M',\delta,\bar{\beta})^+$. If $V_p(B)^+ \neq H(M',\delta,\beta)^+$, then there is $\theta(x,\beta_1), \bar{\beta}_1 \in B$, $\exists \in H(M',\delta,\bar{b})$ such that $\theta(M',\beta_1) < \mu$. Consider the following formula

$$R(x,\beta,\bar{\beta}_1,b) := \exists y\, (\phi(y,\bar{\beta}) \wedge H(x,y,\bar{b}) \wedge \theta(M',\bar{\beta}_1) < x).$$

So, $R(M',\beta,\beta_1,b) \subset V_p(B), R(M',\bar{\beta},\bar{\beta}_1,b)^+ = H(M',\delta,\bar{b})^+$.

Suppose $V_p(C) \subset \neg H(M', \delta, b)$. Then $V_p(C)^- = \neg H(M', \delta, b)^-$.
If $V_p(C)^- \neq \neg H(M', \delta, b)^-$, then there is $\theta_1(x, \gamma_1), \gamma_1 \in C, \exists \mu_1 \in \neg H(M', \delta, b)$ such that $\theta_1(M', \gamma_1) < \mu_1$. Consider the following formula

$$L(x, \gamma, \gamma_1, b) := \exists y\, (\psi(y, \gamma) \wedge \neg H(x, y, b) \wedge x < \theta(M', \bar{\gamma}_1)).$$

$L(M', \bar{\gamma}, \gamma_1, \bar{b}) \subset V_p(C), L(M', \bar{\gamma}, \gamma_1, b) = \neg H(M', \delta, \bar{b})^-$.
Thus, if $V_p(B)^+ \cap \neg H(M', \delta, b) \neq \emptyset$, then $V_p(C) \subsetneq \neg H(M', \delta, \bar{b})$, $V_p(C)^- = \neg H(M', \delta, \bar{b})^-, V_p(B) \cap V_p(C) \neq \emptyset$. Contradiction. So, $V_p(B)^+ = \neg H(M', \delta, \bar{b})$ and $V_p(C)^- = H(M', \delta, \bar{b})$. Contradiction with the existence of $\alpha$. Thus, $V_q(B) \cap V_q(C) = \emptyset$. □

**Note 3.8** Let $A, B, C \subset M'$ such that $M'$ is $|A \cup B \cup C|^+$-saturated, $p, q \in S_1(A)$, $p \not\perp^w q, p \perp^a q$. Then the following is true:

(i) $\exists \alpha \in p(M'), [V_p(B) < V_p(\alpha) < V_p(C)$ or $V_p(C) < V_p(\alpha) < V_p(B)]$ iff

$$\exists \beta \in q(M')[V_q(B) < V_p(\beta) < V_q(C) \quad \text{or} \quad V_q(C) < V_q(\beta) < V_q(B)].$$

(ii) Let $p$ be quasirational to the right. Then the following is true:

$$\exists \alpha \in p(M'), [V_p(B) < V_p(\alpha) < V_p(C) < U_p(M')^+ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \beta \in q(M')\ V_q(B) < V_q(\beta) < V_q(C) < q(M')^+$$

if $q$ is quasirational to the right or

$$q(M')^- < V_q(C) < V_q(\beta) < V_q(B)$$

if $q$ is quasirational to the left]]. Here, $U_p(x)$ is $A$-definable formula such that $U_p(M')^+ = p(M')^+$.

(iii) Let $p$ be quasirational to the right.

$$\exists \alpha \in p(M'), [V_p(B) < V_p(\alpha) < V_p(C) < U_p(M')^+].$$

Then

$$\forall \Phi(M', \bar{\beta}) \subset q(M'),\ \bar{\beta} \in B, \forall \theta(M', \bar{\gamma}) \subset q(M'),\ \bar{\gamma} \in C$$

the following is true;

$$[\Phi(M', \bar{\beta})^+ = q(M')^+ \Rightarrow \theta(M', \bar{\gamma}) \subset \Phi(M', \bar{\beta})].$$

## 4 Definability and strictly definability of one-types

**Definition 4.1** Let $p \in S_n(A), \phi(\bar{x}, \bar{y}), l(\bar{x}) = n$.

(i) Type $p$ is said to be $\phi(\bar{x}, \bar{y})$-definable if there is $\theta_\phi(\bar{y}, \bar{c}), \bar{c} \in A$ such that for any $\bar{a} \in A^{l(\bar{y})}$ the following is true:

$$[M' \models \theta_\phi(\bar{a}, \bar{c}) \Leftrightarrow \phi(\bar{x}, \bar{a}) \in p]$$



(ii) Type $p$ is said to be definable if for any $\phi(\bar{x}, \bar{y}), p$ is $\phi(\bar{x}, \bar{y})$-definable

**Note 4.1** Let $p \in S_1(A)$. Then the following hold:

(i) If $p$ is quasirational or isolated then $p$ is definable

(ii) If $A = M$, where $M$ is a model, then $p$ is definable iff $p$ is quasirational.

**Lemma 4.1** *Let $p$ be an irrational type from $S_1(A)$. Then we have (i) $\Rightarrow$ (ii).*

*(i) $p$ is non-definable.*

*(ii) There is a $\bar{y}$-convex formula $G(x, \bar{y})$ (i.e. $\forall \gamma \in M'$ $G(M', \gamma)$ is convex set), such that the following is true:*

*(a) $\forall D(x, d) \in p \exists \gamma_1, \gamma_2 \in D(M', \bar{d}) \exists \bar{g} \in A^{l(\bar{y})}$*

$$[G(x, \bar{g}) \in p \wedge \gamma_1 < G(M', g) < \gamma_2]$$

*(b) $\forall C(x, c) \forall S(x, \bar{s}),\ \bar{c}, \bar{s} \in A$*

$$[C(M', c) < p(M') < S(M', s) \Rightarrow \exists g_1, g_2 \in A^{l(\bar{y})}$$

$$C(M', \bar{c}) < G(M', \bar{g}_1) < p(M') < G(M', \bar{g}_2) < S(M', \bar{s})].$$

*Proof.* Let $\phi(x, \bar{y})$ be a $\bar{y}$-convex formula such that $p$ is non-$\phi(x, \bar{y})$-definable. Suppose there is $D(x, d), d \in A, D(x, d) \in p$ such that $\forall \bar{g} \in A^{l(\bar{y})} \forall \gamma_1, \gamma_2 \in D(M', \bar{d})$ the following holds:

$$[\gamma_1 < \phi(M', \bar{g}) < \gamma_2 \Rightarrow \phi(x, g) \notin p]$$

Consider $\phi_1(x, y, \bar{d}) := \neg \exists z (\phi(M', \bar{y}) < z \wedge D(z, \bar{d})) \wedge \phi(x, \bar{y}) \wedge x < D(M', \bar{d})^+$
If $\forall C(x, c) \forall S(x, \bar{s}),\ \bar{c}, \bar{s} \in A$

$$D(M', \bar{d})^- < C(M', \bar{c}) < p(M') < S(M', \bar{s}) < D(M', \bar{d})^+$$

there are $\bar{b}_1, \bar{b}_2 \in A^{l(\bar{y})}$ such that

- $p(M') \subset \phi_1(M', \bar{b}_1, \bar{d})(\equiv \phi_1(x, \bar{b}_1, \bar{d}) \in p)$
- $C(M' \bar{c}) < \phi_1(M', \bar{b}_2, \bar{d})$
- $S(M', \bar{s}) \subset \phi_1(M', b_2, \bar{d})$
- $p(M') < \phi_1(M', b_2, \bar{d})$

then the formula

$$G(x, \bar{y}_1, y_2, \bar{d}) := \phi(x, \bar{y}_1, \bar{d}) \wedge \neg \phi(x, y_2, \bar{d})$$

satisfies the conditons a) and b).
Thus, there is $C_1(x, \bar{c}_1), c_1 \in A$ :

$$D(M', \bar{d})^- < C_1(M', c_1) < p(M')$$

such that
$$\forall \bar b \in A^{l(\bar y)}[C_1(M',\bar c_1) < \phi_1(M',\bar b,\bar d) \Rightarrow p(M') < \phi_1(M',\bar b,\bar d)]$$
or (and) there is $S_1(x,\bar s_1), \bar s_1 \in A\ [p(M') < S_1(M',\bar s_1) < D(M',\bar d)^+]$ such that
$$\forall \bar b \in A^{l(\bar y)}[S_1(M',\bar s_1) \subset \phi_1(M',\bar b,\bar d) \Rightarrow p(M') \subset \phi_1(M',\bar b,\bar d)]$$

The same consideration for the formula
$$\phi_2(x,\bar y,\bar d) := \neg\exists z(D(z,\bar d)) \wedge z < \phi(M',\bar y) \wedge \phi(x,y) \wedge D(M',\bar d) < x$$

gives the following:
There is $C_2(x,\bar c_2), \bar c_2 \in A, D(M',\bar d) < C_2(M',\bar c_2) < p(M')$
such that
$$\forall \bar b \in A^{l(\bar y)}[C_2(M',\bar c_2) \subset \phi_2(M',\bar b,\bar d) \Rightarrow \phi_2(M',\bar b,\bar d) \in p]$$

or (and) there is $S_2(x,\bar s_2), \bar s_2 \in A$ :
$$p(M') < S_2(M',\bar s_2) < D(M',\bar d)^+$$

such that
$$\forall \bar b \in A^{l(\bar y)}[\phi_2(M',\bar s_2) < S_2(M',\bar s_2) \Rightarrow \phi_2(M',\bar b,\bar d) < p(M')]$$
Suppose there are such $C_1(x,\bar c_1), S_2(x,\bar s_2)$, then the formula
$$\begin{aligned}\theta_\phi(\bar y,\bar d,\bar c_1,\bar s_2) := [&\exists x(\phi_1(x,\bar y,\bar d) \to \exists x(C_1(x,\bar c_1) \wedge \phi(x,\bar y))\\ &\wedge\exists x(\phi_2(x,\bar y,\bar d) \to \exists x(S_2(x,\bar s_2) \wedge \phi(x,\bar y))\\ &\wedge\exists x\phi_1(x,\bar y,\bar d) \vee \exists x\phi_2(x,\bar y,\bar d))\end{aligned}$$

has the following property:
$$\forall \bar a \in A^{l(\bar y)}[M' \models \theta_\phi(\bar a,\bar d,\bar c_1,\bar c_2) \Leftrightarrow \phi(x,\bar a) \in p]$$

Then $p$ is $\phi(x,\bar y)$-definable. Contradiction.
The same consideration of the cases of the existence of $(C_1,C_2),(S_1,C_2),(S_1,S_2)$ gives us the $\phi(x,\bar y)$-definability of $p$.
Thus, $\phi(x,\bar y)$ satisfies the condition a).
If $\forall S(x,\bar s), \bar s \in A, p(M') < S(M',\bar s)$, there is $\bar g \in A$ such that
$$p(M') < \phi(M',\bar g) < S(M',\bar s),$$

then the formula
$$H(x,\bar y_1,\bar y_2) := x < \phi(M',\bar y_2) \wedge \phi(x,\bar y_1)$$

is required for fairness of ii).
If $\forall C(x,\bar c), c \in A, C(M',\bar c) < p(M')$ there is $\bar g \in A$ such that
$$C(M',\bar c) < \phi(M',\bar g) < p(M'),$$

then the formula
$$H(x,\bar y_1,\bar y_2) := x > \phi(M',\bar y_2) \wedge \phi(x,\bar y_1)$$



is required for fairness of (ii).
If there are $C_3(x,\bar c_3), S_3(x,\bar s_3), \bar c_3, \bar s_3 \in A$
$$C_3(M',\bar c_3) < p(M') < S_3(M',\bar s_3)$$

such that
$$\forall \bar g \in A[C_3(M',\bar c_3) < \phi(M',\bar g) < S_3(M',\bar s_3) \Rightarrow \phi(x,\bar g) \in p],$$

then $p$ is $\phi(x,\bar y)$-definable. Contradiction. So, the fairness of ii) is proved.

**Lemma 4.2** *Let $p,q \in S_1(A), p \not\perp^w q$.*
*Then $p$ is definable iff $q$ is definable.*

*Proof.* By Corollary 2.1 and Note 3.1(ii) we can assume that $p,q$ are irrational.
Suppose $p$ is non-definable, $q$ is definable.
Let $H(x,y,\bar n), C_1(y,\bar c_1), D_1(y,\bar d_1), C_2(x,\bar c_2), D_2(x,\bar d_2), \bar n, \bar c_1, \bar c_2, \bar d_1, \bar d_2 \in A$ such that

a) $H(x,y,\bar c)$ from Claim 2.2.
b) $C_1(M',\bar c_1) < p(M') < D_1(M',\bar d_1)$
c) $C_2(M',\bar c_2) < q(M') < D_2(M',\bar d_2)$
d)
$$\begin{gathered}\forall \gamma_1,\gamma_2 \in M'[C_1(M',\bar c_1) < \gamma_1 < \gamma_2 < D_1(M',\bar d_1) \Rightarrow\\ C_2(M',\bar c_2) \subset H(M',\gamma_1,\bar n) \subseteq H(M',\gamma_2,\bar n) < D_2(M',\bar d_2)\\ (C_2(M',\bar c_2) < H(M',\gamma_1,\bar n) \supseteq H(M',\gamma_2,\bar n) \supset D_2(M',\bar d_2))\end{gathered}$$
without loss of generality we can assume that $H(x,y,\bar n)$ is increasing on $(C_1(M',\bar c_1), D_1(M',\bar d_1))$. Let
$$\phi(y,\bar z_1,\bar z_2) := G(M',\bar z_1) < y < G(M',\bar z_2),$$

where $G(y,z)$ is formula from Lemma 4.1(ii). Then $p$ is non-$\phi(y,\bar z_1,\bar z_2)$-definable.
Consider the formula
$$\begin{gathered}\psi(x,\bar z_1,\bar z_2,\bar n,\bar c_1,\bar c_2,\bar d_1,\bar d_2) := \exists y(H_0(x,y,\bar n) \wedge C_1(M',\bar c_1) < y < D_1(M',\bar d_1) \wedge\\ C_2(M'',\bar c_2) < x < D_2(M',\bar d_2) \wedge \phi(y,\bar z_1,\bar z_2))\end{gathered}$$

Here $H_0(x,y,\bar n)$ is the formula from proof of Claim 3.2.

**Claim 4.1** $\forall \bar a_1, \bar a_2 \in A^{l(\bar z)}$ *the following is true:*
$$[\phi(y,\bar a_1,\bar a_2) \in p \Leftrightarrow \psi(x,\bar a_1,\bar a_2,\bar c_1,\bar c_2,\bar d_1,\bar d_2) \in q]$$

*Proof of Claim 4.1.* Suppose $\phi(y,\bar a_1,\bar a_2) \in p$.
Let $\gamma \in p(M') \cap \phi(M',\bar a_1,\bar a_2)$, then
$$\forall \mu \in M'[C_2(M',\bar c_2) < \mu < q(M') \Rightarrow \mu \in H(M',\gamma,\bar n)]$$

Because $q$ is irrational and $C_1(M'',\bar c_1) < \gamma < D_1(M',\bar d_1)$ we have $\psi(x,\bar a_1,\bar a_2,\dots) \in q$.
Suppose $\psi(x,\bar a_1,\bar a_2,\dots) \in q$.
Let $\mu \in q(M') \cap \psi(M',\bar a_1,\bar a_2,\dots)$, then there is $\gamma \in p(M')$ such that $\mu \in H(M',\gamma,\bar n)$ and

$\gamma \in \phi(M', a_1, \bar{a}_2)$.
So, because $p$ is irrational and $C_2(M', c_2) < \mu < D_2(M', d_2)$ we have $\phi(y, a_1, a_2) \in p$.
Thus, Claim 4.1 is proved.

Because $q$ is definable there is $\theta_\psi(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{e}), \bar{e} \in M$ such that $\forall \bar{a}_1, \bar{a}_2 \in A$ the following is true:

$$M' \models \Theta_\Phi(a_1, \bar{a}_2, \bar{c}) \Leftrightarrow \Psi(x, a_1, a_2, \ldots) \in q.$$

Thus, $[\phi(y, a_1, \bar{a}_2) \in p \Leftrightarrow M' \models \Theta_\Phi(\bar{a}_1, a_2, \bar{c})]$. Contradiction.

**Definition 4.2** Let $p \in S_1(A)$ be irrational. We say that $p$ is quasimodel if $p$ is determinated by cut in $A$ i.e. $\forall G(x, \bar{c}) \forall D(x, \bar{d}), \bar{c}, \bar{d} \in A$ such that

$$G(M', \bar{c}) < p(M') < D(M', \bar{d})$$

there are $g, d \in A$ such that the following is true:

$$G(M', \bar{c}) < g < p(M') < d < D(M', \bar{d}).$$

**Note 4.2** Let $p, q \in S_1(A)$, $p$ be quasimodel, $p \not\perp^w q$. Then $q$ is non-definable.

**Notation 4.1** Let $B, C \subseteq M'$. We denote $B \leq C \Leftrightarrow B < C$ or $B < C$, $(B, C) = \emptyset$.

**Definition 4.3** (i) Let $p \in S_1(A)$. We say that $p$ is strictly definable over $A$ if

$$\forall \Psi(x, \bar{z}) \exists G^1_\Psi(x, \bar{b}), G^2_\Psi(x, \bar{b}),\ \bar{b} \in A,\ G^1_\Psi(M', \bar{b}) \leq p(M') \leq G^2_\Psi(M', \bar{b})$$

such that for any $\bar{a} \in A^{l(\bar{z})}$ the following is true:

$$M' \models \exists x(G^1_\Psi(M', \bar{b}) < x < G^2_\Psi(M', \bar{b}) \wedge \Psi(x, \bar{a})) \rightarrow$$

$$\forall x(G^1_\Psi(M', \bar{b}) < x < G^2_\Psi(M', \bar{b}) \rightarrow \Psi(x, \bar{a})).$$

$$\text{or } M' \models \exists x(G^1_\Psi(M', \bar{b}) < x < G^2_\Psi(M', \bar{b}) \wedge \Psi(x, \bar{a})) \Leftrightarrow \Psi(x, \bar{a}) \in p.$$

(ii) Let $\bar{\gamma} \in M'$. We say that $p$ is strictly definable over $A \cup \bar{\gamma}$

$$\forall \Psi(x, \bar{z}) \exists G^1_\Psi(x, \bar{b}, \bar{\gamma}), G^2_\Psi(x, \bar{b}, \bar{\gamma}),\ \bar{b} \in A,$$

$$G^1_\Psi(M', \bar{b}, \bar{\gamma})^+ \cap p(M') \cap G^2_\Psi(M', \bar{b}, \bar{\gamma})^- \neq \emptyset$$

such that for any $\bar{a} \in A^{l(\bar{z})}$ the following is true:

$$M' \models \exists x(G^1_\Psi(M', \bar{b}, \bar{\gamma}) < x < G^2_\Psi(M', \bar{b}, \bar{\gamma}) \wedge \Psi(x, \bar{a})) \rightarrow$$

$$\forall x(G^1_\Psi(M', \bar{b}, \bar{\gamma}) < x < G^2_\Psi(M', \bar{b}, \bar{\gamma}) \rightarrow \Psi(x, \bar{a})).$$

**Note 4.3** Let $p \in S_1(A)$. Then the following are true:

(i) If $p$ is isolated then $p$ is strictly definable.

(ii) If $p$ is quasirational, non-strictly definable over $A$ then for any $\gamma \in p(M')$, $p$ is strictly definable over $A \cup \gamma$.



(iii) If $p$ is irrational, non-definable then for any $\gamma_1 \neq \gamma_2 \in p(M')$, $p$ is strictly definable over $A \cup \{\gamma_1, \gamma_2\}$.

(iv) If $A = M$, where $M$ is a model, then any non-algebraic type is non-strictly definable.

**Lemma 4.3** Let $p \in S_1(A)$. Then the following is true:

(i) Let $p$ be quasirational to the right (left), then $p$ is non-strictly definable over $A$ iff $\exists G_p(x, \bar{b}_p, \bar{a}), b_p \in$ such that

$$\forall D(M', d) < p(M'),\ d \in A,\ \exists \bar{a}_D \in A D(M', d) < G_p(M', b_p, a_D) < p(M').$$

$$(\forall D(M', d) > p(M'),\ d \in A,\ \exists a_D \in A p(M') < G_p(M', b_p, \bar{a}_D) < D(M', d))$$

(ii) Let $p$ be irrational. Then $p$ is non-strictly definable over $A$ if $\exists G_{p,1}(x, \bar{b}_{p,1}, u_1)$, $\bar{b}_{p,1} \in A$ such that

$$\forall D(M', \bar{d}) < p(M'),\ \exists a_D \in A^{l(u_1)} D(M', d) < G_{p,1}(M', b_{p,1}, a_D) < p(M')$$

or (and) $\exists G_{p,2}(x, b_{p,2}, \bar{u}_2)$, $b_{p,2} \in A$ such that

$$\forall D(M', d) > p(M'),\ \exists \bar{a}_D \in A^{l(u_2)}[p(M') < G_{p,2}(M', b_{p,2}, \bar{a}_D) < D(M', d)].$$

(iii) Let $p$ be irrational, non-strictly definable then there is $\bar{\gamma} \in M' \setminus A$ which is determinated by $G_{p,1}$, $G_{p,2}$ or only by $G_{p,1}$ or only by $G_{p,2}$ such that $p$ is strictly definable over $A \cup \bar{\gamma}$.

*Proof.* (i),(ii) are true by Definition 4.3.
(iii) is true by Theorem of compactness. □

**Acknowledgements**

I thank W. Hodges for his organization and skilful guidance of Grant INTAS-93-3547, Ch. Steinhorn for his interesting report on III Kazakh-French Colloqium on Model Theory (June 1994) and for close collaboration, B. Poizat, B. Kulpeshov, R. Aref'ev, V. Verbovsky for useful discussion and valuable remarks.

I also thank participants of the seminars on Model Theory of Universities of Lyon-1 and Paris-7 on which has been doing a report on a preliminary version of this paper for their hospitality in May 1996.

## References

[D] M.A. Dickmann, "Elimination of quantifiers for ordered valuation rings", Proceedings 3rd Easter Model Theory Conference at Gross Koris, Berlin, 1985.

[B] B.S. Baizhanov, "Expansion of an o-minimal model by unary convex predicates", Researches in theory of algebraic systems, Karaganda, 1995, pp.: 3-23.

[B1] B.S. Baizhanov, "Types in weakly o-minimal theories", 1st Congress of Kazakstan Mathematicians (11-14 September 1996), Shymkent, 1996, p.177.

[B2] B.S. Baizhanov, "One-types in weakly o-minimal theories", Proceedings of Informatics and Control Problems Institute, Almaty, 1996, pp. 77–90.

[K] B.Sh. Kulpeshov, "Weak o-minimality of a linearly ordered structure", Researches in theory of algebraic systems, Karaganda, 1995, pp. 61-67.

[LvdD] L. van den Dries, "Remarks on Tarski's problem concerning $(R, +, *, exp)$", manuscript, 1983.

[LS] M. Laskovski, Ch. Steinhorn "On o-minimal expansions of archimedian ordered group", pp1-21, preprint, 1994.

[M] D. Marker "Omitting types in o-minimal theories", The Journal of Symbolic Logic, vol.51 (1986), pp.63–74.

[LM] L. Mayer "Vaught's conjecture for o-minimal theories", The Journal of Symbolic Logic, vol.53 (1988), pp.146–159.

[MS] D. Marker, Ch. Steinhorn "Definable types in o-minimal theories", The Journal of Symbolic Logic, vol.59 (1994), pp.185–198.

[MMS] D. Macpherson, D. Marker, Ch. Steinhorn "Weakly o-minimal structures and real closed fields", preprint, 1993.

[Ba] J. Baldwin "Foundamentals of stability theory", Springer-Verlag, 1988.

[S] S. Shelah "Classification theory and the number of non-isomorphic models", North Holland, 1978.




# LOCAL COHERENCE FOR LOCALLY REGULAR ALGEBRAS


I. Chajda, R. Halaš

Department of Algebra and Geometry
Palacký University Olomouc
Tomkova 40
799 00 Olomouc
Czech Republic


**Key words.** regularity, local regularity, coherence, local coherence

The concept of coherence was introduced by D. Geiger [5]: an algebra $\mathcal{A}$ is coherent if for every congruence $\theta \in Con\mathcal{A}$ and each subalgebra $B$ of $\mathcal{A}$, if $B$ contains $[b]_\theta$ for some $b \in B$ then $B$ contains $[a]_\theta$ for each $a \in B$, i.e. $B$ is a union of congruence classes. D.Geiger gave a Mal'cev type characterization of varieties of coherent algebras which yields immediately that every such a variety is congruence regular and permutable.

The regularity concept was weakened in two directions:
an algebra $\mathcal{A}$ with 0 is said to be

*weakly coherent* (see [2]) if for each $\theta \in Con\mathcal{A}$ and every subalgebra $B$ of $\mathcal{A}$, if $B$ contains $[0]_\theta$ then $B$ contains $[a]_\theta$ for each $a \in B$;

*locally coherent* if for each $\theta \in Con\mathcal{A}$ and every subalgebra $B$ of $\mathcal{A}$, if $B$ contains $[b]_\theta$ for some $b \in B$ then $[0]_\theta \subseteq B$.

Hence, $\mathcal{A}$ with 0 is coherent if and only if it is both weakly coherent and locally coherent. It was shown in [2] that each variety of weakly coherent algebras is permutable and weakly regular. On the other hand, varieties of locally coherent algebras (i.e. locally coherent varieties) need not be permutable (even not permutable at 0).

A congruence condition (the so called CUT, see [1]) was found such that when added to regularity and permutability, we obtain also coherence of a given variety and vice versa. Moreover, the condititons CUT, regularity and permutability are independent, see [1] and [7] for details.

Analogously, a weaker condition, the so called 0-CUT, was found in [2] such that a variety $\mathcal{V}$ is weakly coherent if and only if $\mathcal{V}$ has 0-CUT, it is weakly regular and permutable.

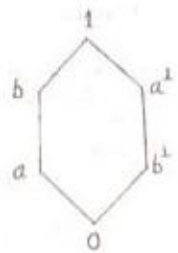
On the contrary, a similar result for locally coherent varieties was found in [4] only in the case when $\mathcal{V}$ is supposed to be permutable at 0. The aim of the paper is to improve this disadvantage by using of a different condititon independent on any form of permutability.

Recall that an algebra $\mathcal{A}$ with 0 is *locally regular* (see [4]) if for every $\theta, \phi \in Con\mathcal{A}$, if $[a]_\theta = [a]_\phi$ for some $a \in A$ then $[0]_\theta = [0]_\phi$. A variety $\mathcal{V}$ with 0 is locally regular if every $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ has this property.

Let $\mathcal{A}$ be an algebra. By an $n$-ary polynomial over $\mathcal{A}$ is meant a function $\phi : A^n \to A$ such that $\phi(x_1, \ldots, x_n) = p(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_k)$ for some $(n+k)$-ary term function $p$ of $\mathcal{A}$ and elements $a_1, \ldots, a_k$ of $A$. Denote by $\omega$ the least congruence on $\mathcal{A}$. For a binary relation $R$ on $A$, let $\theta(R)$ be the least congruence on $\mathcal{A}$ containing $R$, i.e. $\theta(R)$ is the congruence generated by $R$.

*The paper was supported by the Council of Czech Goverment No J14/98 152100011.

**Example 1.** Consider the six-element ortholattice visualized in Fig. 1




Evidently, $\mathcal{L}$ has just four subalgebras, namely $\mathcal{L}_0 = \{0,1\}$, $\mathcal{L}_1 = \{0,a,a^\perp,1\}$, $\mathcal{L}_2 = \{0,b,b^\perp,1\}$ and the whole $\mathcal{L}$. Moreover, Con $\mathcal{L}$ contains five congruences, namely $\omega, \iota$ and those given by the partitions:

$$\theta \ldots \{0\},\{a,b\},\{a^\perp,b^\perp\},\{1\}$$
$$\phi \ldots \{0,a,b\},\{1,a^\perp,b^\perp\}$$
$$\psi \ldots \{0,a^\perp,b^\perp\},\{1,a,b\}.$$

Hence $\mathcal{L}$ is not (weakly) coherent since $\mathcal{L}_1$ contains $[0]_\theta$ but does not contain $[a]_\theta = \{a,b\}$. On the other hand it is an easy exercise to check the all possibilities to show that $\mathcal{L}$ is locally coherent.

As shown in [3], ortholattices are locally regular. We search for some condititon which can be added to local regularity to ensure also local coherence.

For this, we introduce the following concept:

**Definition.** We say that an algebra $\mathcal{A}$ with 0 has *polynomially accessible classes* if for every subalgebra $B$ of A, each $\theta \in Con\mathcal{A}$ and every unary polynomials $\phi_1, \ldots, \phi_n$ over $\mathcal{A}$ it holds:

$$\text{if } [b]_\theta \subseteq B \text{ for some } b \in B \text{ and } \phi_1(b) = 0, \phi_i(c_i) = \phi_{i+1}(b) \text{ for}$$
$$i = 1, \ldots, n-1 \text{ and } c_i \in B \text{ then } \phi_n(b) \in B.$$

A variety $\mathcal{V}$ with 0 has *polynomially accessible classes* if every $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ has this property.

**Theorem 1.** *If an algebra $\mathcal{A}$ with 0 is locally regular and has polynomially accessible classes then $\mathcal{A}$ is locally coherent.*

Proof. Let $\mathcal{A}$ satisfy the assumptions, let $B$ be a subalgebra of $\mathcal{A}$ and $\phi \in Con\mathcal{A}$. Suppose further $[b]_\phi \subseteq B$ for some $b \in B$. Evidently, the congruence $\theta(\{b\} \times [b]_\phi)$ (generated by the relation $\{b\} \times [b]_\phi$) is the least congruence on $\mathcal{A}$ having the class $[b]_\phi$. Since $\mathcal{A}$ is supposed to be locally regular, it yields

$$[0]_\phi = [0]_{\theta(\{b\} \times [b]_\phi)}.$$

Suppose $x \in [0]_\phi$. Then $< 0, x > \in \theta(\{b\} \times [b]_\phi)$ and, due to the algebraicity of $Con\mathcal{A}$, there exist $c_1, \ldots, c_n \in [b]_\phi$ with



$$< 0, x > \in \theta(< b, c_1 >, \ldots, < b, c_n >).$$

By the Mal'cev lemma (see e.g. [6]) there exist unary polynomials $\phi_1, \ldots \phi_n$ over $\mathcal{A}$ such that

$$0 = \phi_1(b), \phi_1(c_1) = \phi_2(b), \ldots, \phi_{n-1}(c_{n-1}) = \phi_n(b) = x.$$

Since $\mathcal{A}$ has polynomially accessible classes, it gives $x \in B$ proving $[0]_\phi \subseteq B$, i.e. $\mathcal{A}$ is locally coherent. □

**Remark.** Local regularity and polynomial accessibility of classes are independent conditions. An example of locally regular algebra which is not locally coherent (and has not polynomially accessible classes) can be found in [4]. On the contrary, we are able to present algebras having polynomially accessible classes but which are not locally regular:

**Example 2.** Consider a meet semilattice with 0, i.e. $\mathcal{S} = (S; \wedge, 0)$, where 0 is considered as a nullary operation. Let $\phi_1, \ldots, \phi_n$ be unary polynomials over $\mathcal{S}$. Then, of course, either $\phi_i(x) = x$ or $\phi_i(x) = x \wedge d_i$ for $i = 1, \ldots, n$. Let $B$ be a subalgebra of $\mathcal{S}$ and $\theta \in Con\mathcal{S}$. Suppose further $[b]_\theta \subseteq B$. If $b = 0$ then $b \in B$ trivially. Hence let $b \neq 0$. If $\phi_1(b) = 0$ then $\phi_1(x) \neq x$ thus $\phi_1(x) = x \wedge d_1$. The condition $\phi_1(c_1) = \phi_2(b)$ gives $c_1 \wedge d_1 = b \wedge d_2$.

However, $c_1 \wedge d_1 \leq d_1$
$c_1 \wedge d_1 \leq b \wedge d_2 \leq b$,
thus $c_1 \wedge d_1 \leq b \wedge d_2 = 0$, whence $c_1 \wedge d_1 = 0$.

Analogously, $c_2 \wedge d_2 \leq d_2$
$c_2 \wedge d_2 = b \wedge d_3 \leq b$
which yields $c_2 \wedge d_2 \leq b \wedge d_2 = \phi_2(b) = \phi_1(c_1) = c_1 \wedge d_1 = 0$, thus also $c_2 \wedge d_2 = 0$.

After a finite number of steps we obtain

$$c_{n-1} \wedge d_{n-1} = b \wedge d_n = 0$$

thus $\phi_n(b) = b \wedge d_n = 0 \in B$.

Let us remark that the case $\phi_i(x) = x$ for $i > 1$ yields immediately $b = 0$ which is excluded by the assumption. Hence $\mathcal{S}$ satisfies the polynomial accessibility of classes. On the other hand, if $S = \{0, a, b\}$ is a chain with $0 < a < b$ then the partition $\{0, a\}, \{b\}$ induces a congruence $\theta \in Con\mathcal{S}$ for which $[b]_\theta = [b]_\omega$ but $[0]_\theta \neq [0]_\omega$, i.e. $\mathcal{S}$ is not locally regular.

We can ask if the assertion of Theorem 1 can be converted. For varieties of algebras, the following result was proved in [4]:

**Lemma.** *Every locally coherent variety is locally regular.*

Unfortunately, the similar statement for a single algebra need not be true in general:

**Example 3.** Let $A = \{0, a, 1\}$ be a chain, $0 < a < 1$, and $\mathcal{A} = (A; \vee, \wedge, 0, a, 1)$ be an algebra of type (2,2,0,0,0) such that $(A; \vee, \wedge)$ is a lattice with respect to the given order and 0,a,1 are nullary operations of $\mathcal{A}$. Then, of course, $\mathcal{A}$ has no proper subalgebra and hence $\mathcal{A}$ is trivially (locally) coherent. On the other hand, the partition $\{0, a\}, \{1\}$ induces a congruence $\theta \in Con\mathcal{A}$ for which $[1]_\theta = [1]_\omega$ but $[0]_\theta \neq [0]_\omega$, i.e. $\mathcal{A}$ is not (locally) regular.

Hence, we can state only the following

**Theorem 2.** *For a variety $\mathcal{V}$ with 0, the following conditions are equivalent:*
(1) *$\mathcal{V}$ is locally coherent;*
(2) *$\mathcal{V}$ is locally regular and has polynomially accessible classes.*

Proof. (2)$\Rightarrow$ (1) by Theorem 1. Let us prove (1) $\Rightarrow$ (2). By the Lemma, we need only to show that every $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ has polynomially accessible classes. Let $B$ be a subalgebra of $\mathcal{A}$, $\theta \in Con\mathcal{A}$ and $\phi_1, \ldots, \phi_n$ be unary polynomials over $\mathcal{A}$. Suppose $[b]_\theta \subseteq B$ for some $b \in B$ and

$$\phi_1(b) = 0, \phi_i(c_i) = \phi_{i+1}(b) \text{ for } c_i \in [b]_\theta, i = 1, \ldots, n-1.$$

Then clearly

$$0 = \phi_1(b)\theta\phi_1(c_1) = \phi_2(b)\theta\phi_2(c_2) = \ldots = \phi_{n-1}(b)\theta\phi_{n-1}(c_{n-1}) = \phi_n(b)$$

proving that $\phi_n(b) \in [0]_\theta$. Since $\mathcal{A}$ is locally coherent, we have $[0]_\theta \subseteq B$ which yields also $\phi_n(b) \in B$. □

**Remark.** Locally coherent varieties were characterized in [4] by the following Mal'cev type condition:

There exist $n \geq 1$, binary terms $d_1, \ldots, d_n$ and an $n$-ary term $s$ such that

$$d_i(0, y) = y \qquad \text{for } i = 1, \ldots, n$$

$$s(d_1(x, y), \ldots, d_n(x, y)) = x.$$

The example of a locally coherent variety is the following:

**Example 4.** Let $\mathcal{V}$ be a variety of type (2,2,0) whose operations are denoted by $\bullet, \backslash, 0$, and satisfying the identities

$$x\backslash(x \bullet y) = y$$

$$x\backslash x = 0$$

$$x \bullet 0 = x.$$

We can take $n = 2$ and $d_1(x, y) = y \bullet x, d_2(x, y) = y$ and $s(x, y) = x\backslash y$. One can easily verify that $d_1(0, y) = y \bullet 0 = y, d_2(0, y) = y$ and $s(d_1(x, y), d_2(x, y)) = y\backslash(y \bullet x) = x$. Henceforth $\mathcal{V}$ is locally coherent variety (of right cancellable groupoids with the right unit).



## References


[1] Chajda I.: *Coherence, regularity and permutability of congruences*, Algebra Universalis **17** (1983), 170-173.

[2] Chajda I.: *Weak coherence of congruences*, Czech. Math. J., **41** (1991), 149-154.

[3] Chajda I.: *Locally regular varieties*, Acta Sci. Math. (Szeged), **64** (1998), 431-435.

[4] Chajda I.: *Locally coherent algebras*, Acta Univ. Palack. Olom., Mathematica, to appear.

[5] Geiger D.: *Coherent algebras*, Notices Amer. Math. Soc. **21** (1974), 74T-A130.

[6] Mc Kenzie R., Mc Nulty G., Taylor W.: *Algebras, lattices, varieties*, Vol. 1

[7] Taylor W.: *Uniformity of congruences*, Algebra Universalis **4** (1974), 342-360.

## RELATION ALGEBRAS AND GROUPS


**Steven Givant and Hajnal Andréka**

Department of Mathematics and Computer Science
Mills College
5000 MacArthur Blvd.
Oacland, California 94613
U.S.A
e-mail: givant@ella.mills.edu


An *algebra of binary relations* (or *set relation algebra*) is an algebra whose universe consists of binary relations on some set $U$, and whose operations are those of forming the (set-theoretic) union of two relations, the complement of a relation, the composition of two relations, and the inverse of a relation. There is also a distinguished element, the identity relation on $U$. The study of these algebras was initiated by De Morgan, and intensively developed by Peirce and Schröder in the second half of the 19th century.

In the 1940s, Tarski put the theory on a modern footing. He introduced the concept of an abstract relation algebra and used algebraic and metamathematical techniques to study them. A *relation algebra* is any algebra (of the same similarity type as algebras of binary relations) satisfying a certain finite set of equational postulates—equations that are valid in all algebras of binary relations. Tarski asked whether every abstract relation algebra is representable as — that is, is isomorphic to — a concrete algebra of binary relations. Lyndon provided a negative answer by constructing a relation algebra that is not representable. However, Jónsson and Tarski showed (even before Lyndon's construction) that the answer to the question may be positive when additional hypotheses are imposed. For example, every atomic relation algebra in which the atoms are functional is representable. (A *functional* element is one that satisfies the equation $x^{\smile};x \leq 1'$, where $^{\smile}$ denotes the abstract operation of inversion, while ; denotes the abstract operation of relative composition and 1' denotes the identity element. In algebras of binary relations, functional elements are just functions in the usual sense of the word.) As a corollary they concluded that every relation algebra in which the Boolean unit is the sum of finitely many functional elements must also be representable. Finally, they proved that every atomic relation algebra in



which the atoms are points is representable. (A *point* is an element that satisfies the equations $x^{\smile};1;x \leq 1'$ and $x;1;x^{\smile} \leq 1'$, where 1 denotes the Boolean unit. Points behave like relations that consist of just one ordered pair.) Generalizing this last theorem, Maddux proved that a relation algebra in which the identity element is a sum of points and pairs is atomic and representable. The work reported in this abstract constitutes a far-reaching generalization of the theorems of Jónsson-Tarski and Maddux.

A *diagonal* element is one that is below the identity element 1'. A diagonal atom $x$ is said to be *measurable* if its "square", $x;1;x$, is the sum of functional elements. The name comes from the fact that (in a representable algebra) the number of functional elements beneath the square $x;1;x$ determines the "size" of $x$. A relation algebra is *diagonally measurable* if its identity element is the sum of measurable atoms.

The study of atomic, diagonally measurable relation algebras has led to a new and quite broad construction of relation algebras, one that comprehends all full set relation algebras and simultaneously yields new and interesting classes of representable and non-representable relation algebras. It can be viewed as a generalization of the well-known construction of relation algebras as complex algebras of groups. Instead of a single group, the construction involves a system of pairwise disjoint groups, a corresponding system of isomorphisms between quotients of the groups, and a system of cosets in the quotients that serve to "shift" relational composition. The resulting algebra is called a *generalized group relation algebra*. When the shifting cosets coincide with the normal subgroups by means of which the quotients are formed (i.e., they are the identity cosets in the quotient groups), the resulting relation algebra is an algebra of binary relations. It may happen, however, that the shifting cosets do not coincide with the normal subgroups, and in this case the resulting relation algebra may cease to be representable.

**Theorem 1** *Every atomic, diagonally measurable relation algebra is canonically embeddable in a generalized group relation algebra.*

In fact, the (MacNeille) completion of a diagonally measurable relation algebra is again diagonally measurable (with the same atoms below the identity and the same functional elements as the original algebra), and this completion is isomorphic to (and not just embeddable in) a generalized group relation algebra.

In case there are only finitely many functional elements below the square of each diagonal atom, the assumption of atomicity is superfluous: every such diagonally measurable relation algebra is automatically atomic. When the functional elements below the square on each measurable, diagonal atom form a cyclic group, or even the product of two cyclic groups, the resulting generalized group relation algebra is actually a set relation algebra (that is, the shifting cosets are the identity cosets). However, there are examples which show that, in general, generalized group relation algebras, even those based on finite groups (and in fact on groups that are copies of $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$) may not be representable.

The above theorem contains the representation theorems of Jónsson-Tarski and of Maddux as very special cases. In fact, even for these special cases, it goes substantially beyond those theorems by clarifying the underlying structure of the representing algebras. For example, the representation theorem for atomic relation algebras with functional atoms is that special case of the above theorem when all the groups are isomorphic to one another, the normal subgroups by means of which the quotients are formed are all trivial (i.e., they are the one-element subgroup), and the cosets are all the identity cosets. The representation theorem for relation algebras in which the identity element is a sum of points and pairs is that special case of the theorem when all the groups are either trivial or of order two, and the cosets are all the identity cosets.



# ALGEBRAS OF OPERATIONS

**Kazimierz Głazek**

Institute of Mathematics
Technical University of Zielona Góra
ul. Podgórna 50
65-246 Zielona Góra, Poland
e-mail: K.Glazek@im.pz.zgora.pl

Many investigations of general algebras or multivalued logics are devoted to families of operations (on a non-empty set) closed under some kinds of compositions or superpositions of them (see, e.g., [Ba80], [Ba81], [BaR77], [BeM84], [Bi82], [Bu67], [DeHM81], [DenS91], [DenW99], [Dic1887], [Ei89], [Gł93], [Gł94], [Glu66], [Glu70], [GłY89], [LN73], [MacR84], [Mal67], [Mar79], [Mar80], [Mo86], [Mo90], [Mu59], [Ng92], [PöK79], [Pos20], [Pos41], [Ro61], [Ros65], [Ros70], [Ros77], [Ros88], [Sa88], [Schm62], [Schm82], [Schw83], [Schw87], [Si45], [Słu39], [St86], [Sz86], [Wh64], [Wi20], [Ya89], [YGK66]). Knowledge of all operations generated by compositions of functions from some families of operations play an important role in some algebraic investigations concerning for example the notions of independence and weak automorphism in general algebras, of functional completeness of algebras, and primal or preprimal algebras (see, e.g., [Den82], [Gł79], [Gł94], [Iw74], [Ku70], [Ku85], [Merc61], [Mi71], [Pos21], [Pos41], [Ros70], [Qu81]). On the other hand, representations of functions of several finite-valued variables as composite functions play an important role in some applications and in Computer Science (for example, in synthesis of switching circuits, see [Ka63]). Investigations of some special superpositions are also important for the foundations of Computer Science and are useful in the theory of Boolean functions (see, e.g., [GłY89], pp. 130-132, 137-139, [Ros88]).

We want to give a short survey of different kinds of algebras of operations.

## § 1. Direct and Tensorial Compositions

Consider a non-empty set $A$. A mapping $f\colon A^n \to A$ (for some natural $n \in N$) is called an *$n$-ary operation*, and a number $n = ar(f)$ is said to be the *arity* of the operation $f$. A *constant operation* can be treated in different ways (cf. [HMT71]): either separately from other operations as a distinguished element $a \in A$ (i.e. as a relation $\{a\} \subseteq A$), or as a mapping $a\colon A^0 \to A$, or else as a unary operation whose value does not depend on the choice of argument, i.e. as a function $f(x) = a$ (for all $x \in A$). The last interpretation will be the most suitable in this paper. Sometimes we will identify a constant operation with its value.

Denote by $\mathcal{O}^{(n)}(A)$ the set of all $n$-ary operations on a set $A$. Then the set $\mathcal{O}(A)$ of all finitary operations is a disjoined sum of sets $\mathcal{O}^{(n)}(A)$ :

$$\mathcal{O}(A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}^{(n)}(A). \tag{1}$$

This set is called a *full set of operations on set $A$*. The $n$-ary *trivial operations* (called also *projections*):

$$e_i^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = x_i \qquad (x_1, \ldots, x_n \in A). \tag{2}$$

play a special role among $n$-ary operations. Of course, for $n = 1$ we have $e_1^{(1)} = id_A$.

On the set $\mathcal{O}(A)$, one can consider distinct kinds of *generalized closure operators*

$$\gamma: 2^{\mathcal{O}(A)} \to 2^{\mathcal{O}(A)}$$

in the sense of E.H. Moore (i.e. extensive, isotonic and idempotent operators). Then one can consider subsets $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$, with are $\gamma$-*complete*, i.e. if $\gamma(\mathcal{F}) = \mathcal{O}(A)$, and $\gamma$-equivalent subsets, $\mathcal{F}_1 \underset{\gamma}{\equiv} \mathcal{F}_2$, i.e. if $\gamma(\mathcal{F}_1) = \gamma(\mathcal{F}_2)$.

Some operators $\gamma$ can be defined by distinct kinds of "compositions" or "superpositions" in a recurrent way. Now, we will fix our terminology, because there are some differences in the literature.

Most frequently two essential types of compositions of operations are used denoted here by the symbols $\Phi_{mn}$ and $\Psi_m$. Namely:

The *direct composition*

$$\Phi_{mn}: \mathcal{O}^{(m)}(A) \times (\mathcal{O}^{(n)}(A))^m \to \mathcal{O}^{(n)}(A), \tag{3}$$

defined by the following equality

$$(\Phi_{mn}(f, g_1, \ldots, g_m))(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)) \tag{4}$$

(where $f \in \mathcal{O}^{(m)}(A)$, $g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{O}^{(n)}(A)$ and $x_1, \ldots, x_n \in A$).
and the *tensorial composition*

$$\Psi_m: \mathcal{O}^{(m)}(A) \times (\mathcal{O}(A))^m \to \mathcal{O}(A) \tag{5}$$

defined by the formula:

$$\begin{aligned}(\Psi_m(f, g_1, \ldots, g_m))(x_{11}, \ldots, x_{1n_1}, x_{21}, \ldots, x_{2n_2}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn_m}) = \\ = f(g_1(x_{11}, \ldots, x_{1n_1}), g_2(x_{21}, \ldots, x_{2n_2}), \ldots, g_m(x_{m1}, \ldots, x_{mn_m}))\end{aligned} \tag{6}$$

(where $f \in \mathcal{O}^{(m)}(A)$, $g_i \in \mathcal{O}^{(n_i)}(A)$ $(i = 1, \ldots, m)$, $x_{11}, \ldots, x_{mn_m} \in A$).

The definitions of the compositions $\Phi_{mn}$ and $\Psi_m$ can easily be extended to the case of constant operations.

Such compositions are also named *superpositions* by some authors. Nevertheless, in this survey we will use the term "superposition" only for a special case of compositions of two operations. J. Schmidt ([Schm62]) called the first of those compositions "compositions on equal arguments", and the second "composition on different arguments". The values of those compositions are sometime denoted shortly by the following symbols:

$$\dot{f}(g_1, \ldots, g_m) \tag{7}$$

for the direct composition (cf. [Mar61], p. 47) and

$$\bar{f}(g_1, \ldots, g_m) \tag{8}$$

for the tensorial composition (cf. [GlM74]). For a fixed function $f \in \mathcal{O}^{(m)}(A)$ the mappings

$$(g_1, \ldots, g_m) \mapsto \dot{f}(g_1, \ldots, g_m), \tag{9}$$



$$(g_1, \ldots, g_m) \mapsto \bar{f}(g_1, \ldots, g_m) \tag{10}$$

can be treated as $m$-ary operations on $\mathcal{O}^{(n)}(A)$ and on $\mathcal{O}(A)$, respectively. The compositions $\Phi_{mn}$ and $\Psi_m$ can also be regarded as (partial) operations on the set $\mathcal{O}(A)$.

## § 2. Menger Algebras, Menger Systems and Clones

For such operations $\Phi_{mn}$ we have the following laws of *superassociativity* and *unitarity*:

$$\begin{aligned}\Phi_{mn}(\Phi_{km}(f, g_1, \ldots, g_k), h_1, \ldots, h_m) = \\ = \Phi_{kn}(f, \Phi_{mn}(g_1, h_1, \ldots, h_m), \ldots, \Phi_{mn}(g_k, h_1, \ldots, h_m)),\end{aligned} \tag{11}$$

where $f \in \mathcal{O}^{(k)}(A)$, $g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{O}^{(m)}(A)$, $h_1, \ldots, h_m \in \mathcal{O}^{(n)}(A)$ and $k, m, n \in N$,

$$\Phi_{mn}(e_i^{(m)}, g_1, \ldots, g_m) = g_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{12}$$

$$\Phi_{nn}(f, e_1^{(n)}, \ldots, e_n^{(n)}) = f \tag{13}$$

for all $g_1, \ldots, g_m, f \in \mathcal{O}^{(n)}(A)$.

In particular, for $n = m$, setting $\Phi := \Phi_{nn}$, we obtain the equalities:

$$\begin{aligned}\Phi(\Phi(f, g_1, \ldots, g_n), h_1, \ldots, h_n) = \\ = \Phi(f, \Phi(g_1, h_1, \ldots, h_n), \ldots, \Phi(g_n, h_1, \ldots, h_n)),\end{aligned} \tag{11'}$$

$$\Phi(e_i^{(n)}, g_1, \ldots, g_n) = g_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{12'}$$

$$\Phi(f, e_1^{(n)}, \ldots, e_n^{(n)}) = f. \tag{13'}$$

Equality (11') is called "the law of substitutions" (see [Di63]) or "the clone law" (see [Ev81]).

In this manner we get the algebras

$$\mathcal{M}(n, A) = (\mathcal{O}^{(n)}(A); \Phi), \tag{14}$$

which are important examples of so-called *n-dimensional Mengera algebras* (or, in another terminology, "composition algebras"). The operations $e_i^{(n)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ play the role of constants in these algebras and form a socalled *full system of selectors* of algebras $\mathcal{M}(n, A)$. Algebras of multiplace functions with such composition were investigated by K. Mengera from the mid-1940s, and then by several of his co-workers (see, e.g., the papers: [Me44], [Me46], [Me61], [Me64], [Wh64]; for more references we refer the reader to the book by H. Lausch and W. Nöbauer [LN73] and to the survey article [Sc79]). It is worth adding that this algebra (or its abstract analogue) considered with the full system of selectors (as fundamental constants), i.e. the algebra

$$\mathcal{M}(n, A; \mathcal{E}^{(n)}) = (\mathcal{O}^{(n)}(A); \Phi, e_1^{(n)}, \ldots, e_n^{(n)}). \tag{15}$$

is called an *n-clone* by T. Evans. He defined *abstract n-clones*, too (see [Ev81]).

However, the system

$$\mathcal{M}(N, A) = (\mathcal{O}(A); \{\Phi_{mn} |\ m, n \in N \cup \{0\}\}) \tag{16}$$

with the partial operations $\Phi_{mn}$ on the set $\mathcal{O}(A)$ is an example of a *Menger system of functions* (cf. [Wh64], [Sc79]) and is said to be a *full Menger system*. In a special case, so-called term functions of a (non-indexed) algebra $\mathcal{A}$ with a carrier set $A$, systems defined in such a way were considered by C. Ryll Nardzewski (who did not however publish these considerations) in the mid-1960s. He propose for them the term "algebroids".

The equalities (11), (12) i (13) also appear in the definition of clone of operations. A subset $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}(A)$ is called a *clone of operations*, if it contain all trivial operations and is closed with respect to all direct compositions (in notation: $\mathcal{A} = (\mathcal{A})$). We denote the full clone on $A$ by the symbol $\mathcal{M}(N, A, \mathcal{E})$. The notion of clone was introduced by P. Hall at the end of the 1940s and appeared in his unpublished lectures in the years 1947 – 1951. This notion appeared in the algebraic literature for the first time in 1965 in the book by P.M. Cohn (cf. [Co81]). We should add that also A.L. Foster (in the 1950s and 1960s) considered families of operations closed under compositions (so-called "clogs"; [Fos68]). The monographs by Á. Szendrei [Sz86], and also many places in the prepared second volume of the book "*Algebras, Lattices, Varieties*" by R.N. McKenzie, G.F. McNulty and W.F. Taylor, are devoted to clones. The idea of considering so-called closed classes of functions or clones has emerged from some investigations of multiple valued logics (cf., e.g., [Pos20], [Pos21], [Pos41], [We35], [We36], [Ya58], [YGK66], [Ros70]). These notions are specially useful for investigations of completeness of some sets of fundamental operations on finite algebras, which have been made by several authors. If $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}(A)$ is a clone of operations on a set $A$, then there exists a set $I$ (with the condition $|I| \leq |A| + \aleph_o$) and a relation $\rho \subseteq A^I$ such that $\mathcal{A}$ is the family of all finitary operations preserving the relation $\rho$, i.e. $\rho$ is a subalgebra of the algebra $A^I$ with operations corresponding to operations from $\mathcal{A}$ (defined on the cartesian power $A^I$). It is a well-known result of I.G. Rosenberg [Ros76].

Clones (or Menger systems, or algebroids – in other terminologies) can be abstractly treated by giving suitable axioms (see, e.g., the papers [Hi66], [Ta73], [Ev81], [Ev89], [Sa88]), which define some heterogeneous algebras, or, more generally, considered as special categories, e.g. *dht*-categories (which also give an abstraction of composition of partial operations and are closely related to so-called symmetric monoidal categories in the sense of Eilenberg-Kelly; see, for example, [Ho72], [Ho81], [Ho89a], [Ho89b], [Schr87], [Vo80], [Vo82], [Vo91]). It is worth adding that *heterogeneous algebras* were introduced simultaneously but independently by several authors using different terms (e.g. by A.I. Mal'cev, P.J. Higgins i G. Grätzer, for the references see [Gi80]; however the recently used term is from the paper [BiL70]). Heterogeneous algebras are very important for the foundations of Computer Science (see papers of the ADJ group, e.g. [GoW77]). We take this opportunity to mention that the idea of heterogeneous systems goes back to the 1930s (cf. [Sch38]).

## § 3. Tensorial Compositions and Semiclones

Using the tensorial compositions $\Psi_m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$), one can treat the set $\mathcal{O}(A)$ as an general algebra:

$$\mathcal{O}(A) = (\mathcal{O}(A);\ \{\Psi_m : m = 0, 1, 2, \ldots\}).$$

If operations $g_i$ ($i = 1, \ldots, m$) are $n_i$-ary, then the operation $\Psi_m(f, g_1, \ldots, g_m)$ is $r$-ary, where $r = \sum_{i=1}^{m} n_i$. For arbitrary operations $h_1, \ldots, h_r \in \mathcal{O}(A)$, the following *law of hyperassociativity* for the tensorial composition is fulfilled:

$$\begin{aligned} &\Psi_r(\Psi_m(f, g_1, \ldots, g_m), h_1, \ldots, h_r) = \\ &= \Psi_m(f, \Psi_{n_1}(g_1, h_1, \ldots, h_{n_1}), \Psi_{n_2}(g_2, h_{n_1+1}, \ldots, h_{n_1+n_2}), \ldots, \\ &\qquad \ldots \Psi_{n_m}(g_m, h_{r-n_m+1}, \ldots, h_r)) \end{aligned} \tag{17}$$

For the time being, tensorial compositions are used less frequently than direct compositions, but were already considered, for example, by B. Jónsson, J. Schmidt, W. Sierpiński, A. Tarski, H.A. Thurston (one can observe some differences of terminology in papers of different authors). In [GlM74] and [GlM77], we call attention to the usefulness of those compositions for investigations of weak homomorphism in the sense of E. Marczewski. In 1982, J. Schmidt defined the notion of semiclone using such compositions in the following way: subfamilies $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}(A)$ closed with respect to all operations $\Psi_m$ and containing the trivial operation $e_1^{(1)} (= id_A)$ are said to be *semiclones* (see [Schm82]).

By using compositions with trivial operations, one can introduce so-called *seeming variables*. Namely, consider the composition

$$\tilde{f}(e_1^{(m+1)}, \ldots, e_m^{(m+1)}),$$

for an operation $f \in \mathcal{O}^{(m)}(A)$; then we obtain a new operation which is formally $(m+1)$-ary, but it does not depend on the variable $x_{m+1}$. This effect can be reached in another way by using some new partial operations on $\mathcal{O}(A)$, which are called substitutions. Namely, taking into account a mapping

$$\mu_{nm} : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}, \tag{18}$$

for arbitrary $n, m \in N$, one can define a *substitution*

$$\tilde{\mu}_{nm} : \mathcal{O}^{(n)}(A) \to \mathcal{O}^{(m)}(A) \tag{19}$$

by the equality

$$\tilde{\mu}_{nm}(f)(x_1, \ldots, x_m) = f(x_{\mu_{nm}(1)}, \ldots, x_{\mu_{nm}(n)}). \tag{20}$$

The set $\mathcal{E}$ of all trivial operations can be defined (cf. [Schm62]) as the smallest set of operations containing the identity mapping $id_A$ $(= e_1^{(1)})$ and closed with respect to all possible substitutions.

A set $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}(A)$ containing $e_1^{(1)}$ is a clone if and only if it is closed with respect to all tensorial compositions $\Psi_m$ and all substitutions $\tilde{\mu}_{nm}$. Therefore, a semiclone $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}(A)$ is a clone if and only if it is closed under all possible substitutions (see [Schm62]).

Among substitutions it is worth distinguishing (following E. Marczewski and J. Schmidt) three important types:

1° bringing in new seeming variables (if $m > n$ and $\mu_{nm}$ is an injection);

2° permuting variables (if $m = n$ and $\mu_{nn}$ is a bijection); and

3° identifying variables (for $n > m$).

The closing of a set $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}(A)$ with respect to substitutions of the second kind is called *symmetrizing of operations* (cf. [Pö85]).

Operations obtained from some set $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(A)$ of operations by using substitutions and direct compositions are said to be *compound operations* (cf. [Bi46], [Ros76]). If a subset $\mathcal{F}$ closed with respect to using all possible substitutions and compositions, then it is called a *closed class* (in the sense of E. Post). Such a closed class is a clone if it contains all trivial operations.

## § 4. Distinct Types of Superpositions of Some Binary Algebras

Besides general kinds of compositions of type (4) or (6), one can consider some special kinds of them, this leads to definitions some useful binary operations on the set $\mathcal{O}(A)$ or on its subsets (then one can define some special kinds of general closure operators on subsets of the set $\mathcal{O}(A)$). Such binary operations on $\mathcal{O}(A)$ we will call *superpositions*.

Let $f, g \in \mathcal{O}^{(n)}(A)$; then we can define a new operation $f \oplus_i g$, for all $i = 1, 2, \ldots, n$, in the following way:

$$(f \oplus_i g)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(x_1, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n), \tag{21}$$

and also an operation $f \oplus g$ by the equality:

$$(f \oplus g)(x_1, \ldots, x_n) = f(g(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g(x_1, \ldots, x_n)). \tag{22}$$

Let now $f \in \mathcal{O}^{(m)}(A), g \in \mathcal{O}^{(n)}(A)$ and $1 \le i \le m$. Then operations $f *_i g$ and $f \otimes g$ are defined as follows:

$$\begin{aligned}(f *_i g)(x_1, \ldots, x_{m+n-1}) &= \\ = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(x_i, \ldots, x_{i+n-1}), x_{i+n}, \ldots, x_{m+n-1}),\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}(f \otimes g)(x_1, \ldots, x_{mn}) &= \\ = f(g(x_1, \ldots, x_n), g(x_{n+1}, \ldots, x_{2n}), \ldots, g(x_{(m-1)n+1}, \ldots, x_{mn})).\end{aligned} \tag{24}$$

The binary operations $\oplus_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ can be regarded as operations on the set $\mathcal{O}^{(n)}(A)$. However, the operations $*_i$ (for $i > 1$) are only partial operations on the set $\mathcal{O}(A)$, whereas $*_1$ (denoted further also by $*$) and $\otimes$ are defined on whole $\mathcal{O}(A)$. The operations $\oplus_i$ can be used for other investigations of $n$-dimensional Menger algebras $\mathcal{M}(n, A)$ as so-called $(2,n)$-semigroups:

$$\mathcal{S}(n, A) = (\mathcal{O}^{(n)}(A); \oplus_1, \oplus_2, \ldots, \oplus_n), \tag{25}$$

considered, e.g., by T. Yakubov and F.N. Sokhatskiĭ (cf. [Sc79]).

One can also consider the semigroup:

$$\mathcal{S}_n(A) = (\mathcal{O}^{(n)}(A); \oplus). \tag{26}$$

However, using the operations $*_i$ (together with the identity mapping $id_A$ as a fundamental constant), one can treat alteratively the semi-clones as so-called positional algebras of multiplace functions investigated by G. Čupona, W.D. Belousov, F.N. Sokhatskiĭ and others (cf. [Sc79]; it seems that the operations $*_i$ were for the first time used by H.A. Thurston in the paper [Th49]). The following algebraic system:

$$\mathcal{S}(N, A) = (\mathcal{O}(A); \{*_i \quad i = 1, 2, \ldots\}) \tag{27}$$



is said to be a *full* (or *symmetric*) *positional algebra of multiplace functions*. The set of all polyadic quasigroup operations on the set $A$ is also a semiclone and can be considered as a subalgebra of $\mathcal{S}(N, A)$; it is the positional algebra of quasigroup operations investigated among others by V.D. Belousov and F.N. Sokhatskiĭ ([Be72a], [Be72b], [So87]).

Investigations of the semigroup

$$\mathcal{S}_\otimes(A) = (\mathcal{O}(A); \otimes) \tag{28}$$

or semigroup

$$\mathcal{S}_1(A) = (\mathcal{O}(A); *_1) \tag{29}$$

are specially interesting for the theory of clones and its applications (see, e.g., [La84], [Tr73]). For example, using the operation $\otimes$, the condition that a mapping $\chi \colon A \to A$ is an endomorphism of the general algebra $\mathcal{A} = (A; \mathcal{F})$ can be expressed as the commutativity: $\chi \otimes f = f \otimes \chi$ (for all $f \in \mathcal{F}$). In [Sc79], one can also find information about some other special algebras of multiplace functions.

## § 5. Other Topics

In some algebraic investigations (cf. [Marc66]) and in the general theory of multivalued logics (cf. [Ba81], [Mi71], [Ya58]), operations depending on all their variables play very essential role for considerations. From this point of view, one can be investigated some equivalences on the set $\mathcal{O}(A)$. Let $f \in \mathcal{O}^{(n)}(A)$, $g \in \mathcal{O}^{(n)}(A)$ and $n \ge k$. Then one can define

$$f \equiv g, \text{ iff } f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) \tag{30}$$

for $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $x_1, \ldots, x_n \in A$, and

$$f \approx g, \text{ iff } f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_k), \tag{31}$$

for arbitrary $a_1, \ldots, a_r \in A$, where $r = \max(n, k)$.

This second relation is weaker than the first one. Functions $f, g \in \mathcal{O}(A)$ are *effectively identical* if $f \approx g$. Such functions are often identified (cf. [Mi71]). Remark that both of this relations are compatible with the operation $\hat{f}$ defined by the tensorial composition (for fixed $f \in \mathcal{O}(A)$). Moreover, if $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}(A)$ is a clone, then $\mathcal{A}/_\approx$ is a semiclone.

Taking into account the possibility to adding seeming variables, one can extend the definition of direct composition $\hat{f}(g_1, \ldots, g_m)$ on whole $\mathcal{O}(A)$. Namely, if operations $g_i$ have the arity $n_i = ar(g_i)$, for $i = 1, 2, \ldots, m$, then we can replace $g_i$ by a suitable $n$-ary operation, where $n = \max(n_1, \ldots, n_m)$. In order to get considered direct compositions free from restrictions by arities of the inner functions $g_1, \ldots, g_m$, it seems to be useful considering infinitary operations (cf. [Ra68], Chapter 14, §6).

Finally, we only mention the A.I. Mal'cev have been proposed in 1966 very important and elegant treatment of the set $\mathcal{O}(A)$ and its subsets as algebras of the type $(2, 1, 1, 1, 1)$ with the operations $*, \zeta, \tau, \Delta, \nabla$. He introduced the notions *iterative* and *preiterative Post algebras* (see [Mal66], [Mal76]). Such algebras are very important for many investigations (see, e.g., [PöK79]). But now we have not enough place to discuss these topics here. It is worth to adding that the idea of using one binary and several unary operations for investigations of clones and varieties of algebras has already appeared in the doctoral dissertation of E.C. Dale-Wiegold in 1956 (see [NeW66]) and this idea goes back to the 1920s (see the paper of E. Artin [Ar26] on the theory of braids).

## References


[Ar26] A. Artin, *Theorie der Zöpfe*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1926), 47-72.

[Ba80] R.A. Baĭramov, *On completeness problem in iterative Post algebras* (in Russian), Special Topics in Algebra and Topology (in Russian) **1** (1980), 1-27.

[Ba81] R.A. Baĭramov, *Some new results in the theory of function algebras of finite-valued logics*, p. 41-67 in: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, v. **28** ("Finite Algebra and Multiple-Valued Logic"), North-Holland, Amsterdam 1981.

[BaR77] R.A. Baĭramov and B.A. Romov, *Fundamental and generalized fundamental subalgebras of Post algebras* (in Russian), Izv. Akad. Nauk Azerbaidzan. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Nauk 1977, no. 1, 7-12.

[Be72a] V.D. Belousov, *n-Ary Quasigroups* (in Russian), "Štiinca", Kišiniev 1972.

[Be72b] V.D. Belousov, *Balanced identities in algebras of quasigroups*, Aeqationes Math. **8** (1972), 1-73.

[BeM84] J. Berman and R.N. McKenzie, *Clones satisfying the term condition*, Discrete Math. **52** (1984), 7-29.

[Bi46] G. Birkhoff, *Universal algebra*, p. 310-326 in: Proc. First Canadian Math. Congress 1945, Montreal 1946.

[Bi82] G. Birkhoff, *Some applications of universal algebra*, p. 107-128 in: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, v. **29** ("Universal Algebra"), North-Holland, Amsterdam 1982.

[BiL70] G. Birkhoff and J.D. Lipson, *Heterogeneous algebras*, J. Combin. Theory **8** (1970), 115-133.

[Bu67] G.A. Burle, *The classes of k-valued logics containing all one-variable functions* (in Russian), Diskret. Analiz **10** (1967), 3-7.

[Co81] P.M. Cohn, *Universal Algebra* (2[nd] edition), D. Reidel Publ. Co., Dordrecht 1981.

[DeHM81] J. Demetrovics, L. Hannák and S.S. Marčenkov, *On closed classes of self-dual functions in $P_3$*, p. 183-189 in: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, v. **28** ("Finite Algebra and Multiple-Valued Logic"), North-Holland, Amsterdam 1981.

[Den82] K. Denecke, *Preprimal Algebras*, Akademie Verlag, Berlin 1982.

[DenS91] K. Denecke, D. Lau, R. Pöschel and D. Schweigert, *Hyper- identities, hyperequational classes and clone congruences*, Contributions to General Algebra **7** (1991), 97-118.

[DenW99] K. Denecke and S. Wismath, *Hyperidentities and Clones*, Gordon and Breach, in print

[Di63] R.M. Dicker, *The substitutive law*, Proc. London Math. Soc. (3) **13** (1963), 493-510.

[Dic1897] L.E. Dickson, *The analytic representation of substitutions on a power of a prime number of letters with a discussion of the linear group*, Ann. of Math. **11** (1897), 65-120.

[Ei77] G. Eigenthaler, *On polynomial algebras*, p. 83-99 in: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, v. **17** ("Contributions to Universal Algebra"), North-Holland, Amsterdam 1977.





[Ev81] T. Evans, *Some remarks on the general theory of clones*, p. 203-244 in: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, v. **28** ("Finite Algebra and Multiple-Valued Logic"), North-Holland, Amsterdam 1981.

[Ev89] T. Evans, *Embedding and representation theorems for clones and varieties*, Bull. Austral. Math. Soc. **40** (1989), 199-205.

[Fo68] A.L. Foster, *Algebraic function-spectra*, Math. Z. **106** (1968), 225-244.

[Gl79] K. Głazek, *Some old and new problems in the independence theory*, Colloq. Math. **42** (1979), 127-189.

[Gl80] K. Głazek, *Weak homomorphisms of general algebras and related topics*, Math. Seminar Notes **8** (1980), 1-36.

[Gl93] K. Głazek, *Morphisms of general algebras without fixed fundamental operations*, p. 89-112 in: "General Algebra and Applications", Heldermann Verlag, Berlin 1993.

[Gl94] K. Głazek, *Algebras of algebraic operations and morphisms of algebraic systems* (in Polish), Wyd. Uniw. Wrocławskiego, Wrocław 1994.

[GlM74] K. Głazek and J. Michalski, *On weak homomorphisms of general non-indexed algebras*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astronom. phys., **22** (1974), 651-656.

[GlM77] K. Głazek and J. Michalski, *Weak homomorphisms of general algebras*, Comment. Math. (Prace Mat.) **19** (1977), 211-228.

[Glu66] L.M. Gluskin, *Algebras of multiplace functions* (in Russian), p. 32-37 in: "Interuniv. Sci. Symposium on General Algebra" (in Russian), Tartu. Gos. Univ., Tartu 1966.

[Glu70] L.M. Gluskin, *Superposition of multiplace functions* (in Russian), Publ. Math. (Debrecen) **17** (1970), 349-378.

[GlY89] V.M. Glushkov, G.E. Tseitlin and E.L. Yushchenko, *Algebra, Languages, Programming* (in Russian; 3[rd] edition), "Naukova Dumka", Kiev 1989.

[GoW77] J.A. Goguen, J.W. Thatcher, E.G. Wagner and J.B. Wright, *Initial algebra semantics and continuous algebras*, J. Assoc. Comput. Mach. **24** (1977), 68-95.

[Gr70] G. Grätzer, *Composition of functions*, p. 1-106 in: Proc. Conf. on Universal Algebra (Queen's Univ., Kingston, Ont., 1969), Queen's Univ., Kingston, Ont., 1970.

[Gr79] G. Grätzer, *Universal Algebra* (2[nd] ed.), Springer-Verlag, New York 1979.

[GrK92] G. Grätzer and A. Kisielewicz, *A survey of some open problems on $p_n$ – sequences and free spectra of algebras and varieties*, p. 57-88 in: "Universal Algebra and Quasigroup Theory", Heldermann Verlag, Berlin 1992.

[HeMT71] L. Henkin, J.D. Monk and A. Tarski, *Cylindric Algebras*, North- -Holland, Amsterdam 1971.

[Hi66] J.A. Hion, *Ω-systems* (in Russian), p. 123-129 in: Interuniv. Sci. Sympos. on General Algebra (in Russian), Tartu. Gos. Univ., Tartu 1966.

[Ho72] H.-J. Hoehnke, *Superposition Partieller Funktionen*, Stud. z. Algebra u. ihre Anwend. **16** (1972), 7-26.

[Ho82] H.-J. Hoehnke, *On partial algebras*, p. 373–412 in: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, v. **29** ("Universal Algebra"), North-Holland, Amsterdam 1982.

[Ho89a] H.-J. Hoehnke, *On certain classes of categories and Monoids constructed from abstract Mal'cev clones*, I., p. 149-176 in: "Universal Applied", World Scientific, Singapore 1989.

[Ho89b] H.-J. Hoehnke, *On certain classes of categories and Monoids constructed from abstract Mal'cev clones*, II., Potsdamer Forsch., Reihe B, **62** (1989), 30-64 ("Proc. 18th Conf. on Univ. Algebra").

[Iw74] A. Iwanik, *On infinite complete algebras*, Colloq. Math. **29** (1974), 195-199.

[Ka63] R.M. Karp, *Functional decomposition and switching circuit design*, J. Soc. Indust. Appl. Math. **11** (1963), 291-335.

[Kn70] A. Knoebel, *Simplicity vis-à-vis functional completeness*, Math. Ann. **189** (1970), 299-307.

[Kn85] A. Knoebel, *The equational classes generated by single functionally precomplete algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., v. **57** (1985), no. 332.

[La84] D. Lau, *Unterhalbgruppen von* $(P_3^1, *)$, Rostock. Math. Kolloq. **26** (1984), 55-62.

[LN73] H. Lausch and W. Nöbauer, *Algebra of Polynomials*, North-Holland, Amsterdam 1973.

[MacR84] H. Machida and I.G. Rosenberg, *Classifying essentially minimal clones*, p. 4-7 in: "Proc. $14^{th}$ Intern. Sympos. Multiple-Valued Logic (Winnipeg, 1984)", IEEE Comput. Soc., New York 1984.

[Mal66] A.I. Mal'cev, *Iterative algebras and Post's varieties* (in Russian), Algebra i Logika **5** (1966), 5-24.

[Mal67] A.I. Mal'cev, *A strengthening of the theorems of Sλupecki and Yablonskii* (in Russian), Algebra i Logika **6** (1967), no. 3, 61-73.

[Mal76] A.I. Mal'cev, *Iterative Post's algebra* (in Russian), Novosibir. Gos. Univ., Novosibirsk 1976.

[Mar79] S.S. Marchenkov, *Closed classes of self-dual functions of many- valued logic* (in Russian), Problemy Kibernet. **36** (1979), 5-22, 279.

[Mar80] S.S. Marchenkov, J. Demitrovics and L. Hannák, *Closed classes of self-dual functions in* $P_3$ (in Russian), Metody Diskret. Analiz. **34** (1980), 38-73.

[Marc61] E. Marczewski, *Independence and homomorphisms in abstract algebras*, Fund. Math. **50** (1961), 45-61.

[Marc61] E. Marczewski, *Independence in abstract algebras. Results and Problems*, Colloq. Math. **14** (1966), 169-188.

[MMT87] R.N. McKenzie, G.F. McNulty and W.F. Taylor, *Algebras, Lattices, Varieties*, v. I, Wadsworth and Brooks, Monterey, CA, 1987.

[McT44] J.C.C. McKinsey and A. Tarski, *The algebra of topology*, Ann. of Math. **45** (1944), 141-191.



[Me44] K. Menger, *Algebra of Analysis*, Notre Dame Math. Lectures **3** (1944).

[Me46] K. Menger, *General algebra of analysis*, Repts. Math. Colloq., Notre Dame Univ. **7** (1946), 49-60.

[Me61] K. Menger, *The algebra of functions: Past, present, future*, Rend. Mat. Appl. **20** (1961), 409-430.

[Me64] K. Menger, *Superassociative systems and logical functors*, Math. Ann. **157** (1964), 278-295.

[Mi74] M. Miyakawa, *Functional completeness and structure of three-valued logic*, I: - *Classification of* $P_3$, Researches of the Electronical Laboratory, No. **717**, Tokyo, 1971

[Mo86] Yu. M. Movsisyan, *Introduction to the Theory of Algebras with Hyperidentities* (in Russian), Izdat. Erevan. Univ., Erevan 1986.

[Mo90] Yu. M. Movsisyan, *Hyperidentities and Hypervarieties in Algebras* (in Russian), Izdat. Erevan. Univ., Erevan 1990.

[Mu59] A.A. Mullin, *Selfdual symmetric switching functions with a certain number of constraints*, IRE Trans, EC-**8**(4), Dec.1959, 498-499.

[NeW66] B.H. Neumann and E.C. Wiegold, *A semigroup representation of varieties of algebras*, Colloq. Math. **14** (1966), 111-114.

[Ng92] V.Kh. Nguen, *On a structure of self-dual closed classes of the ternary logic* $P_3$ (in Russian), Diskret. Mat. **4** (1992), 82-95.

[Pö85] R. Pöschel, *Cryptomorphisms of non-indexed algebras and relational systems*, p. 365-404 in: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, v. **43** ("Lectures in Universal Algebra"), North-Holland, Amsterdam 1985.

[PöK79] R. Pöschel and L.A. Kalužnin, *Funktionen- und Relationen- algebren*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979.

[Po20] E.L. Post, *Determination of all closed systems of truth tables*, Bull. Amer. Math. Soc. **26** (1920), p. 437.

[Po21] E.L. Post, *Introductions to a general theory of elementary propositions*, Amer. J. Math. **43** (1921), 163-185.

[Po41] E.L. Post, *Two-valued iterative systems of mathematical logic*, Princeton Univ. Press, Princeton 1941.

[Qu81] R.W. Quackenbush, *A new proof of Rosenberg's primal algebra characterization theorem*, p. 603-634 in: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, v. **28** ("Finite Algebra and Multiple-Valued Logic") North-Holland, Amsterdam 1981.

[Ra68] H. Rasiowa, *Introduction to the Modern Mathematics* (in Polish), PWN, Warsaw 1968.

[Ro61] A. Rose, *Self-dual binary and ternary connectives for m-valued logic*, Math. Ann. **143** (1961), 448-462.

[Ros65] I.G. Rosenberg, *La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B, **260** (1965), 3817-3819.

[Ros70] I.G. Rosenberg, *Über die funktionelle Vollst/Indigkeit in den mehrwertigen Logiken*, Rozpravy Československé Akad. Ved., Ser. Mat. Nat. Sci., v. **80** (1970), no 4, p. 3-93.

[Ros76] I.G. Rosenberg, *The set of maximal closed classes of operations on an infinite set A has cardinality* $2^2$ , Arch. Math. (Basel) **27** (1976), 561-568.

[Ros77] I.G. Rosenberg, *Completeness properties of multiple valued logic algebras*, p. 144-246 in: "Computer Science and Multiple Valued Logic - Theory and Applications", North-Holland, Amsterdam 1977.

[Ros88] I.G. Rosenberg, *Clones of Boolean functions: a survey*, S.A.J. Philosophy **7** (1988), 90-99.

[Sa88] A.A. Sangalli, *On the structure and representation of clones*, Algebra Universalis **25** (1988), 101-106.

[Sc79] B.M. Schein and V.S. Trokhimenko, *Algebras of multiplace functions*, Semigroup Forum **17** (1979), 1-64.

[Sch38] A. Schmidt, *Über deduktive Theorien mit merhreren Sorten von Grunddigen*, Math. Ann. **115** (1938), 485-506.

[Schm62] J. Schmidt, *On the definition of algebraic operations in finitary algebras*, Colloq. Math. **9** (1962), 189-197.

[Schm82] J. Schmidt, *Clones and semiclones of operations*, p. 705-723 in: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, v. **29** ("Universal Algebra"), North-Holland, Amsterdam 1982.

[Schr87] J. Schreckenberger, *Zur Axiomatik von Kategorien particller Morphismen*, Beiträge Algebra Geom. **24** (1987), 83-98.

[Schw83] D. Schweigert, *On varieties of clones*, Semigroup Forum **26** (1983), 275-285.

[Schw87] D. Schweigert, *On algebras and clones*, Semigroup Forum **35** (1987), 85-99.

[Si45] W. Sierpiński, *Sur les fonctions des plusieurs variables*, Fund. Math. **33** (1945), 169-173.

[Sl39] J. Słupecki, *Completeness criterion for systems of many-valued propositional calculus* (in Polish), C. R. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III **32** (1939), 102-109; English translation: Studia Logica **30** (1972), 153-157.

[So87] F.N. Sokhatskiĭ, *Positional algebras. Belousov algebras* (in Russian), Mat. Issled. no. **95** ("Kvazigruppy"), 1987, p. 101-120.

[St85] I. Stojmenović, *Enumeration of bases of semi-degenerate, linear and self-dual functions of prime-valued logics*, Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak., Ser. Mat. **15** (1985), no. 2, 105-122.

[St86] I. Stojmenović, *Classification of a maximal clone of three-valued logical functions*, J. Inform. Process. Cybernet. EIK **22** (1986), 533-545.

[Sz86] Á. Szendrei, *Clones in Universal Algebra*, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal 1986.

[Ta73] W. Taylor, *Characterizing Mal'cev conditions*, Algebra Universalis **3** (1973), 351-397.



[Th49] H.A. Thurston, *Partly associative operations*, J. London Math. Soc. **24** (1949), 260-271.

[Tr73] V.S. Trokhimenko, *A characterization of the semigroup of multiplace functions* (in Russian), p. 239 in: "Summaries of Talks $XII^{th}$ All-Union Algebraic Colloq." (in Russian), Sverdlovsk 1973.

[Vo80] H.-J. Vogel, *Operationen-Klone in speziellen dht symmetrischen*, Wiss. Z. Pädagog. Hochsch. "Karl Liebknecht" Potsdam **24** (1980), 101-106.

[Vo82] H.-J. Vogel, *Eine Beschreibung von Verknüpfungen für partielle Funktionen*, Rostock. Math. Kolloq. **20** (1982), 21-32.

[Vo91] H.-J. Vogel, *On categories with partial morphisms*, Wiss. Z. Brandenburg. Landeshochsch. **35** (1991), 163-168.

[We35] D.L. Webb, *Generation of any n-valued logic by one binary operator*, Proc. Nat. Acad.Sci. **21** ( 1935), 252-254.

[We36] D.L. Webb, *Definition of Post's generalized negative and maximum in terms of one binary operation*, Amer. J. Math. **58** (1936), 193- 194.

[Wh64] H.J. Whitlock, *A composition algebra for multiplace functions*, Math. Ann. **157** (1964), 167-178.

[Wi20] N. Wiener, *Bilinear operations generating all operations rational in a domain* $\Omega$, Ann. of Math. **21** (1920), 157-165.

[Ya58] S.V. Yablonskiĭ, *Functional construction in the k-valued logic* (in Russian), Trudy Mat. Inst. Steklov. **51** (1958), 5-142.

[Ya89] S.V. Yablonskiĭ, *Introduction to Discrete Mathematics*, Mir Publ., Moscow 1989.

[YGK66] S.V. Yablonskiĭ, G.P. Gavrilov and V.B. Kudryavtsev, *Functions of the algebra of logic and Post classes* (in Russian), Izd. "Nauka", Moskva 1966.

# THREE ASPECTS OF THE EXPONENTIAL MAP

**Alexandr Grishkov**

Omsk State University (Russia)
and University of São Paulo (Brasil)
e-mail: grishkov@ime.usp.br

## 1 Introduction.

It is well known that the classical exponential map: $exp(x) = \sum x^i/i!$ has many different applications in the various branches of mathematics. For instance, if $k$ is a locally compact field of characteristic 0 then $exp : k \longrightarrow k^*$ is a homomorphism from the additive group of the field $k$ in the multiplicative group. If $A$ is a locally nilpotent linear operator on a vector space $V$ then $\{exp(tA) \| t \in k\}$ is 1-parametric group. Here and above $k^* = k \setminus \{0\}$. In this paper we will give some characterizations and generalizations of the exponential map and their applications for the theory of groups, algebras and loops.

## 2 Analytic aspect of the exponential map.

Consider the followings categories $\mathbf{G} \subset \mathbf{M} \subset \mathbf{D}$, where $\mathbf{G}$ is the category of local Lie Groups, $\mathbf{M}$ the catagory of local analytic Moufang loops and $\mathbf{D}$ the catagory of local analytic diassociative loops. Recall that a loop is diassociative (Moufang) if every two elements generate a subgroup (this loop satisfies the identity $(xy \cdot z)x = x(y \cdot zx)$). In his work ([21]) Malcev proved that the tangent space for a loop from $\mathbf{D}$ has the structure of a Binary-Lie algebra (BL-algebra) and if this loop is Moufang then the corresponding BL-algebra is a Malcev algebra. Recall that an algebra is a BL-algebra (Malcev algebra) if it is anticommutative and every two elements genarate a Lie subalgebra (it satisfies the identity $(xy \cdot z)x + (yz \cdot x)x + (zx \cdot x)y = xz \cdot yx$). Hence for the categories $\mathbf{M}$ and $\mathbf{D}$ we have an analogy of the classical correspondence: Lie Groups$\longrightarrow$ Lie Algebras. In the same article ([21]) Malcev noted that for every BL-algebra $B$ over a real field $\mathbf{R}$ we can construct the corresponding local analytic diassociative loop $D$, because the classical Campbell-Hausdorf series $H(x, y) = x + y + [x, y]/2 + ...$ depends only on two variables $x, y$ and those two elemens generate Lie subalgebra. In this case we have the classical (local) exponential map $exp : B \longrightarrow D, exp(x) = x$. If the algebra $B$ is a Malcev algebra (note that every Malcev algebra is a BL-algebra but the converse is not true) then the corresponding loop $D$ is a local analytic Moufang loop. This is an important Theorem of Kuzmin ([20]). Therefore the theory of local analytic Moufang (diassociative) loops is equivalent to the theory of finite dimensional Malcev (BL-) algebras. The theory of finite dimensional Malcev and BL-algebras was developed in ([22],[18],[19],[4],[5], [6],[7],[8]).

Now we construct a global analytic Moufang (diassociative) loop for a given local analitic loop $D$. For Lie groups it is the famous Cartan Theorem. For Moufang loops this problem was solved by Kerdman in ([17]). But for diassociative loops the situation

[1]This work was supported by FAPESP, processo 99/02573-9



is more difficult. In ([9]) the author constructed a local analytic diassociative loop such the corresponding global analytic loop does not exist. Let $B$ be a finite dimensional BL-algebra over $\mathbf{R}$. Denote by $B(a, b)$ a Lie subalgebra of $B$ with two generators $a, b \in B$ and by $G(a, b)$ the corresponding simply connected Lie group. Then we have the exponential map: $exp : B(a, b) \longrightarrow G(a, b)$. We define a binary relation $\sim$ on $B$ such that $a \sim b, a, b \in B$ iff $exp(a) = exp(b)$. It is clear that if for a local analytic diassociative loop $D$ corresponding to the BL-algebra $B$ a global analytic loop exists then the relation $\sim$ is an equivalence.

**Conjecture 1** *For a given finite dimensional real BL-algebra the corresponding global analytic diassociative loop exists iff the relation $\sim$ on this BL-algebra is an equivalence.*

The first step in the direction of the proof of this conjecture was done in ([14]):

**Theorem 1** *Let $B$ be a finite dimensional real BL-algebra such that the relation $\sim$ on $B$ is equality. Then the corresponding global analytic diassociative loop exists.*

The idea of the proof of this theorem is the following. Let $B$ be a BL-algebra over $\mathbf{R}$ with a basis $\{b_1, ..., b_n\}$ and $K = \mathbf{R}[x_1, x_2, ..., y_1, y_2, ...]$ is the ring of polynomiais. Then $B \otimes_{\mathbf{R}} K$ is a BL-algebra over $K$. Denote by $B_0$ the Lie subalgebra of $B \otimes_{\mathbf{R}} K$ with two generators $X = \sum_{i=1}^n x_i b_i, Y = \sum_{i=1}^n y_i b_i$. Suppose that we have a faithful matrix representation $\pi$ of $B_0$ over $K$: $\pi : B_0 \longrightarrow \mathcal{T}_m(K)$ where $\mathcal{T}_m(K)$ is the set of triangular matricies over $K$. Consider the matrix

$$Z = exp^{-1}(exp(\pi(X))exp(\pi(Y))).$$

It is clear that $Z \in M_m(\overline{K})$, where $\overline{K} = \mathbf{R}[[x_1, ...]]$ is the ring of power series. Suppose that

$$Z = \sum_{i=1}^{l} f_i \pi(Z_i),$$

where $Z_i = p_{ij} b_j \subset B \otimes_{\mathbf{R}} K, p_{ij} \in K$ and $f_i \in \overline{K}$. If the series $f_1, ..., f_l$ have an analytic extension then we can define a multiplication on $\mathbf{R}^n$ by:

$$(x_1, ..., x_n) \cdot (y_1, ..., y_n) = (z_1, ..., z_n),$$

where $z_i = \sum_{j=1}^l f_j(x_1, ..., y_1, ...)p_{ji}(x_1, ..., y_1, ...)$.

As all finite dimensional semisimple BL-algebras over $\mathbf{R}$ are Malcev algebras we can suppose (at first) that the BL-algebra $B$ is solvable. In ([13],[14]) we proved

**Theorem 2** *Let $L$ be a completly solvable Lie algebra over $K$ such that $L$ is free as $K$-module. Then $L$ has a faithful triangulable representation over $K$.*

For the proof of the Conjecture 1 the following is usefull:

**Conjecture 2** *If $X, Y \in M_m(K)$ are triangular matricies then there exists a matrix $Z \in M_m(K)$ such that $exp(Z) = exp(X)exp(Y), Z = \sum_{i=1}^l f_i Z_i, Z_i \in Lie\{X, Y\}$, the Lie algebra over $\mathbf{R}$ with generators $X, Y$, and $f_1, ..., f_l$ have analytic extension.*

In order to establish Theorem 1 we proved in ([14]) a weak version of the Conjecture 2.

Now we illustrate the above construction:

**Example 1** *Let $B$ be Bl-algebra with a basis $\{t,a,b,c\}$ and the multiplication*

$$at = bt = ac = bc = 0, ab = c, ct = c.$$

*Denote as above $X = x_1t + x_2a + x + x_3b + x_4c, Y = y_1t + y_2a + y_3b + y_4c$, then $[X,Y] = Z = f \cdot c$, where $f = (x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1 - x_1y_4)$, $[Z,X] = x_1Z$. We have*

$$B_0 = KX \oplus KY \oplus KZ.$$

*Define a representation $\pi$ of $B_0$ by the following formulas:*

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} -x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\pi(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix},$$

$$\pi(Z) = \begin{pmatrix} 0 & -x_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*It is clear that*

$$exp(\pi(X))exp(\pi(Y)) = exp(C) = \begin{pmatrix} e^{-x_1} & e^{-x_1}(e^{y_1}-1)/y_1 \\ 0 & e^{y_1} \end{pmatrix}.$$

*Hence*

$$C = \pi(X) + \pi(Y) + \frac{1-\tau}{x_1}\pi(Z) = \begin{pmatrix} -x_1 & \tau \\ 0 & y_1 \end{pmatrix},$$

*where $\tau = \frac{(x_1+y_1)(e^{y_1}-1)}{y_1(e^{y_1}-e^{-x_1})}$. It is not difficult to prove that the space $B = \mathbf{R}^4$ with multiplication*

$$X \cdot Y = (x_1+y_1)t + (x_2+y_2)a + (x_3+y_3) + (x_4+y_4+\frac{1-\tau}{x_1}f)c$$

*is a diassociative analytic loop which corresponds to the BL-algebra $B$.*

## 3 Algebraic aspect of the exponential map.

In this section we will introduce an algebraic analogy of the exponential map from a Lie algebra into a Lie group.

**Definition 1** *Let $k$ be a field of characteristic 0, $G$ be an algebraic $k$-group and $L = L(G)$ be the corresponding Lie algebra.*

*An algebraic map (or rational map) $E : L \longrightarrow G$ is called* **exponential algebraic map** *or* **EA-map** *if*

*1. $E(kx)$ is an additive 1-parametric subgroup of $G$ for every $x \in N(L)$ where $N(L)$ is the nilradical of $G$.*

*2. $E(k^*t)$ is a multiplicative 1-parametric subgroup of $G$ if $x \in L$ is semisimple.*



The main problem about $EA$-maps is the existence of an $EA$-map for a given algebraic group $G$.

**Theorem 3** *[11] Let $T_n(k)$ be the group of triangular nondegenerate matrices over $k$. Then for every closed algebraic subgroup of the rang one of $T_n(k)$ there exists an EA-map.*

**Example 2** *[11] Let $G = G(n,m), n,m \in \mathbf{Z}^*$ be the following algebraic group:*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & x^n & c \\ 0 & 0 & x^m \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x \in k^*, \\ a,b,c \in k. \end{array} \right\}$$

*Then the corresponding Lie algebra has the form:*

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & p & r \\ 0 & nz & q \\ 0 & 0 & mz \end{pmatrix} \middle| \; p,q,r,z \in k. \right\}$$

*In this case the EA-map may be defined by the formula:*

$$E\begin{pmatrix} 0 & p & r \\ 0 & nz & q \\ 0 & 0 & mz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p[\frac{(1+z)^n-1}{nz}] & \tau \\ 0 & (1+z)^n & \eta \\ 0 & 0 & (1+z)^m \end{pmatrix},$$

*where*

$$\eta = q[\frac{(1+z)^n-(1+z)^m}{(n-m)z}],$$

$$\tau = r[\frac{(1+z)^m-1}{mz}] + pq[\frac{(m-n)-m(1+z)^n+n(1+z)^m}{mn(m-n)z^2}].$$

As in the analytic case, we can apply the $EA$-map for construction of diassociative (in this case algebraic) loops.

**Example 3** *(Grishkov ([11])) Let $B = B(n,m)$ be a BL-algebra over $k$ with a basis $\{t,a,b,c\}$ and multiplication:*

$$at = na, bt = nb, ct = mc, ab = c, ac = bc = 0, n,m \in k.$$

*If $m,n \neq 0, m,n \in \mathbf{Z}, n \neq m$ then the following local algebraic loop is diassociative and corresponds to $B$:*

$$G(n,m) = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) | x_1 \neq -1, x_i \in k, i = 1,\ldots,4\}.$$

$$(x_1,\ldots,x_4)\cdot(y_1,\ldots,y_4) = (\alpha,\beta,\gamma,\tau),$$

where

$$\alpha = x_1 + y_1 + x_1y_1,$$

$$\beta = \frac{\alpha y_2}{y_1} + \frac{\alpha[(1+x_1)^n-1](x_2y_1-x_1y_2)(1+y_1)^n}{x_1y_1[(1+x_1)^n(1+y_1)^n-1},$$

$$\gamma = \frac{\alpha y_3}{y_1} + \frac{\alpha[(1+x_1)^n - 1](x_3y_1 - x_1y_3)(1+y_1)^n}{x_1y_1[(1+x_1)^n(1+y_1)^n - 1},$$

$$\tau = \frac{\alpha y_4}{y_1} + \frac{\alpha[(1+x_1)^n - 1](x_2y_3 - x_3y_2)(1+y_1)^n}{x_1y_1[(1+x_1)^n(1+y_1)^n - 1](n-m)} +$$

$$\frac{\alpha[(1+x_1)^m - 1](1+y_1)^m[(n-m)(x_4y_1 - x_1y_4) + x_2y_3 - x_3y_2]}{x_1y_1(n-m)[(1+x_1)^m(1+y_1)^m - 1]}$$

Recall some important theorems from the theory of algebraic group.

**Theorem 4** *[9]Let $L$ be a finite dimensional solvable Lie algebra over an algebraicly closed field $k$ of characteristic 0. Then $L$ is algebraic (it means that there is an algebraic group $G$ such that $Lie(G) = L$.) iff we have:*

*1.$L = T \oplus N$, where $T$ is a torus of $L$ and $N$ is the nilradical.*

*2.$N = \sum_{\alpha \in T^*} \oplus N_\alpha$, where $N_\alpha = \{x \in N | xt = \alpha(t)x, \forall t \in T\}$ and*

$$dim_{\mathbf{Q}}\{\alpha | N_\alpha \neq 0\} = dim_k\{\alpha | N_\alpha \neq 0\}.$$

**Theorem 5** *[23]If $G$ is a local algebraic group then there exists a global algebraic group $G_1$ such that $G \simeq G_1$ as local algebraic groups.*

The following theorems show that the Theorems of C.Chevalley and A.Weyl are not valid for algebraic diassociative loops.

**Theorem 6** *(Grishkov,([11]))Let $B = B(n,m)$ the Bl-algebra from Example 3. Then $B$ is* **algebraic** *iff $m \neq 0$ and $n/m \in \mathbf{Q}$ or $n = m = 0$.*

**Theorem 7** *[11]Let $B = B(n,m)$ be the BL-algebra as above. Then for $B$ there exists the corresponding* **global algebraic** *diassociative loop $G_1 = G_1(n,m)$ iff $n/m \in \mathbf{Z}$.*

*If $n = ms, 2 \leq s, n, m \in \mathbf{N}$ then*

$$G_1 = \{(x_1, ..., x_4) | x_1 \neq 0, x_i \in k, i = 1, ..., 4\},$$

$$(x_1, ..., x_4) \cdot (y_1, ..., y_4) = (x_1y_1, x_2y_1^n + y_2, x_3y_1^n + y_3, \alpha),$$

*where*

$$\alpha = x_4y_1^m + y_4 + y_1^n(x_2y_3 - x_3y_2)(\sum_{j=0}^{s-2}\sum_{i=0}^{j} x_1^{im}y_1^{jm})/n(s-1).$$

Theorems 6 and 7 confirm the following Conjecture:

**Conjecture 3** *Let $B$ be a finite dimensional solvable BL-algebra over an algebraically closed field $k$ of characterstic 0. Then $B$ is algebraic (local) iff we have:*

*(i)$B = T \oplus N, T$ is a torus and $N$ is the nil radical of $B$.*

*(ii)$N = \sum_{\alpha \in T^*} \oplus N_\alpha, dim_{\mathbf{Q}}\{\alpha | N_\alpha \neq 0\} = dim_k\{\alpha | N_\alpha \neq 0\}$.*

*(iii)$N_0^2 \subset N_0$.*

*Moreover, $B$ is an algebraic global iff we have (i)-(iii) and*

*(iv) $N_\alpha N_\alpha \subset \sum_{p \in \mathbf{Z} \setminus 0} \oplus N_{p\alpha}, \forall \alpha \in T^*$.*

Note that for Moufang loops this conjecture was proved in [16].



# 4 Arithmetic aspect of the exponential map.

In this section we will discuss the analogues of the classical exponential map for the case of the fields of characteristic $p > 0$.

Chevalley showed that the correspondence **Lie algebras – Algebraic groups** breaks down completely in characteristic $p > 0$. Thus it is important to search for a good substitute for the Lie algebra of an algebraic group.

In this section we will consider a solution to this problem in the following particular case: the correspondence between $\mathcal{LN}_n(F)$ and $GN_n(F)$ where $\mathcal{LN}_n(F)$ is the set of all Lie $p$-subalgebras of the Lie algebra

$$N_n(F) = \{a \in M_n(F) | a_{ij} = 0, i \geq j\}.$$

$F$ is a field of characteristic $p > 2$, $GN_n(F)$ is a set of all closed algebraic subgroups of

$$U_n(F) = \{a \in M_n(F) | a_{ii} = 1, a_{ij} = 0, i > j\}.$$

It is clear that for $G \in GN_n(F)$ the corresponding Lie algebra $L(G) \in \mathcal{LN}_n(F)$. If the field $F$ has characteristic 0 then the classical exponential map gives a good correspondence between $GN_n(F)$ and $\mathcal{LN}_n(F)$. In this case every algebra $L \in \mathcal{LN}_n(F)$ can be considered as a group from $GN_n(F)$, since Campbell-Hausdorf series converges in every nilpotent Lie algebra. But this series has no sense for a field $F$ of characteristic $p$ and $n \geq p$. There is no hope to find a "good" correspondence between $GN_n(F)$ and $\mathcal{LN}_n(F)$ because there are examples of non-isomorphic groups $G_1, G_2 \in GN_n(F)$ such that $L(G_1) \simeq L(G_2)$. But we can reformulate the question:

**Problem 1** *Find a* **canonical** *(in some sense) function $\mathcal{F} : \mathcal{LN}_n(F) \longrightarrow GN_n(F)$ such that $L(\mathcal{F}(L)) \simeq L$.*

This problem is still open. We say that this problem has a solution in the classical sence if there exists an **exponential** map $\mathcal{E} : L(G) \longrightarrow G, L = L(G) \in \mathcal{LN}_n(F), G \in GN_n(F)$ such that $L$ as a group with the multiplication: $a \cdot b = \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(a)\mathcal{E}(b))$ is isomorphic to $G$. I think that this problem has no solution in the classical sense but there is a hope that for a certain subclass of $p$-subalgebras of $N_n(F)$ the map $\mathcal{E}$ exists.

Let $F$ be a field of characteristic 3 and

$$\mathcal{JN}_n(F) = \{L \in \mathcal{LN}_n(F) | \forall a, b, c \in L : \{a, b, c\} = abc + cba \in L\}.$$

Note that in this definition the products $abc$ and $cba$ are the usual products of matrices.

**Theorem 8** *[15] In the notations above there exists a series:*

$$\mathcal{E}(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i,$$

*such that for every $L \in \mathcal{JN}_n(F)$ we can consider $L$ as an algebraic group with the multiplication: $a \cdot b = \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(a)\mathcal{E}(b)) \in L$ and the Lie algebra corresponding to this group is isomorphic to $L$.*

We will call the series $\mathcal{E}(x)$ from Theorem 8 the **3-exponential map**. Note that the series $\mathcal{E}$ from Theorem 8 is not unique and we can describe all such series (3-exponential maps):

**Theorem 9** *[15] Let $\mathbf{Z}_3$ be the ring of integral 3-adic numbers and $E(x) = 1+\sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i \in \mathbf{Z}_3[[x]]$ be a series such that*

$$E'(x) = \Lambda(x)E(x),$$

*where $E'(x)$ is the derivation of $E(x)$ and $\Lambda(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x^{2i}$. Then the serie $\overline{E}(x) = 1+\sum_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i x^i$ is a 3-exponential map. Here $\overline{A}, A \in \mathbf{Z}_3$ is the element from the field $\mathbf{Z}_3/3\mathbf{Z}_3$ that corresponds to $A$.*

I hope that the converse of this theorem is valid too.

**Example 4** *Let*

$$E(x) = exp(\sum_{i=0}^{\infty} x^{3^i}/3^i) \in \mathbf{Z}_3[[x]]$$

*be the famouse Artin-Hasse exponent for $p = 3$. Then we have*

$$E'(x) = (\sum_{i=0}^{\infty} x^{3^i-1})E(x), E(0) = 1.$$

*Hence $\overline{E}(x)$ is a 3-exponential map.*

**Example 5** *[15] Let*

$$E(x) = x + \sqrt{1+x^2},$$

*then*

$$E'(x) = (\sqrt{1+x^2})^{-1}E(x), E(0) = 1.$$

*Hence $\overline{E}(x)$ is a 3-exponential map.*

Note that the proof of the Theorem 8 is based on the fact that the 3-exponential map $E(x)$ from the last example is algebraic:

$$E(x)^2 - 2xE(x) - 1 = 0,$$

moreover the inverse series (3-logarithmic map) is rational:

$$\overline{E}^{-1}(x) = (x - x^{-1})/2.$$

We can consider the Lie algebras from $\mathcal{JN}_n(F)$ as algebras with two operations binary $[,]$ and ternary $\{,,\}$. It is easy to prove that these algebras satisfy the following identities:

$$x^2 = [[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0, \quad (1)$$

$$\{x,y,z\} = \{z,y,x\}, \quad (2)$$

$$\{x,y,z\} - \{y,x,z\} = [[x,y],z], \quad (3)$$

$$[\{x,y,z\},t] = \{[x,t],y,z\} + \{x,[y,t],z\} + \{x,y,[z,t]\}, \quad (4)$$

$$\{\{x,y,z\},t,u\} = \{\{x,t,u\},y,z\} - \{x,\{y,t,u\},u\} + \{x,y,\{z,t,u\}\}. \quad (5)$$

We will call an algebra with two operations $[,]$ and $\{,,\}$ a **Lie-Jordan algebra (LJ-algebra)** if it satisfies the identities (1-5).



**Theorem 10** *[15] Let $L$ be a LJ-algebra from $\mathcal{JN}_n(F)$ and $\mathcal{E}$ be a 3-exponential map. Then there exists a series $H(a,b)$ in the signature of the operations $[,]$ and $\{,,\}$ such that*

$$a \star b = \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(a)\mathcal{E}(b)) = H(a,b).$$

Note that in view of Theorems 8 and 10 the LJ-algebra $L \in \mathcal{JN}_n(F)$ with operation $a \star b = H(a,b)$ is an algebraic group. The series

$$H(a,b) = a + b - [a,b] + \{a,b,a\} + \{b,a,b\} + \ldots$$

is the analogy of the classical Campbell-Hausdorf serie in characteristic 3. Now suppose that we have any nilpotent LJ-algebra $L$ over $F$, then we can consider $L$ as a loop with the multiplication $a \star b = H(a,b)$. From the following Theorem hence that this loop is a group.

**Theorem 11** *[10] Let $L$ be a nilpotent LJ-algebra over field $F$ of characteristic 3. Then $L$ is a group with the miltiplication $a \star b = H(a,b)$.*

Now we can apply the series $H(a,b)$ for the construction of nilpotent diassociative loops. We call an algebra $B$ with two operations $[,]$ and $\{,,\}$ a binary *LJ*-algebra if every two elements of $B$ generate a LJ-subalgebra of $B$. It is clear that if $L$ is a binary LJ-algebra then $L$ with the operation $a \star b = H(a,b)$ is an diassociative loop.

**Definition 2** *Let $B$ be an algebra with two operations $[,]$ and $\{,,\}$ over a field of characteristic 3. Then $B$ is a MJ-algebra (Malcev-Jordan algebra) if and only if it satisfies the identities (1),(2),(4),(5) and*

$$\{x,y,x\} - \{y,x,x\} = [[x,y],x].$$

It is clear that if $B$ is a nilpotent MJ-algebra over a field of characteristic 3 then we can consider $B$ as a diassociative (algebraic) loop. It is possible that all loops of this type are Moufang.

**Conjecture 4** *Let $B$ be nilpotent a MJ-algebra over a field of characteristic 3. Then the loop $(B,\star)$ is Moufang where $a \star b = H(a,b)$.*

This conjecture is a corollary of the following Conjecture 5.

**Conjecture 5** *Let $B$ be a MJ-algebra over a field of characteristic 3. Then there exists an alternative algebra $A$ and a homomorphism $\pi$ of MJ-algebras $\pi : B \longrightarrow A^{(\pm)}$ such that $ker(\pi) = 0$ and $A^{(+)}$ is a MJ-algebra with operations: $[a,b] = ab - ba$ and $\{a,b,c\} = (ab)c + (cb)a$.*

This Conjecture is intresting even if the binary operation $[,]$ is trivial and an alternative algebra $A$ is commutative.

Now we will try to generalize the above theory to the case of characteristic $p \geq 3$. Let $F$ be a field of characteristic $p \geq 3$. For a definition of the class $\mathcal{JN}_n(F)$ we have to define the analogy of the associative polynomial $abc + cba$. Let $A$ be free associative ring over $F$ with two free generators $a, b$. It is well known that the element $(a+b)^p - a^p - b^p$ belongs to the Lie subalgebra $Lie(a,b) \otimes_{\mathbf{Z}} F$ of $A_F = A \otimes_{\mathbf{Z}} F$ with generators $a, b$. It means that there exists a Lie polynomial $p(a,b) \in Lie(a,b) \subset A$ such that $(a+b)^p - a^p - b^p - p(a,b) = pf(a,b)$, $f(a,b) \in A$. Note that $f(a,b)$ is unique only modulo $Lie(a,b)$.

Denote

$$\mathcal{JN}_n(F) = \{L \in \mathcal{LJ}_n(F) | \forall a,b \in L : f(a,b) \in L\}.$$

**Conjecture 6** *In the notations above there exists series over $F$:*

$$\mathcal{E}(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$$

*such that for every $L \in \mathcal{JN}_n(F)$ we can consider $L$ as a group with multiplication: $a \cdot b = \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(a)\mathcal{E}(b)) \in L$ and the Lie algebra corresponding to this group is isomorphic to $L$.*

As above we will call the series $\mathcal{E}(x)$ from this Conjecture (if it exists) by a **$p$-exponential map**.

**Conjecture 7** *Let $\mathbf{Z}_p$ be the ring of integral p-adic numbers and $E(x) = 1 + \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i \in \mathbf{Z}_p[[x]]$ be a serie such that*

$$E'(x) = \Lambda(x)E(x),$$

*where $E'(x)$ is the derivation of $E(x)$ and $\Lambda(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x^{(p-1)i}$. Then the series $\overline{E}(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i x^i$ is a p-exponential map. Here $\overline{A}, A \in \mathbf{Z}_p$ is the element from the field $\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p$ that corresponds to $A$.*

It is not difficult to generalize the 3-exponential maps from Exampls 4 and 5 to the case of arbitrary $p \geq 3$:

$$\mathcal{E}(x) = exp(\sum_{i=0}^{\infty} x^{p^i}/p^i) \in \mathbf{Z}[[x]]$$

is the Artin-Hasse exponent and we have

$$E'(x) = (\sum_{i=0}^{\infty} x^{p^i - 1})E(x), E(0) = 1.$$

2. In the second case we have only the differential equation for $E(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i x^i$:

$$E'(x) = (\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i x^{i(p-1)})E(x), A_{i(p-1)+1} = 0, i > 0. \qquad (6)$$

**Conjecture 8** *The equation (6) has a unique solution $\mathcal{E}(x) \in \mathbf{Z}_p[[x]]$ and $\mathcal{E}(x)$ is an algebraic function.*

Suppose that $\mathcal{E}(x)$ is a solution of (6) Then we can wright: $\mathcal{E}(x) = e_0(x) + xe_1(x) + ... + x^{p-2}e_{p-2}(x)$ where $e_0, ..., e_{p-2} \in \mathbf{Z}_p[[x^{p-1}]], e_1(x) = 1$ and from (6) we have

$$\underbrace{(...(e_0'e_0)')e_0)')...)'e_0}_{p-1} = x. \qquad (7)$$

It is clear that equations (6) and (7) have unique solutions $\mathcal{E}(x)$ and $e_0(x^{p-1})$ respectively in the ring $\mathbf{Q}[[x]]$ and the problem has the arithmetic nature. Is it true that the coefficients of those series are in $\mathbf{Q} \cap \mathbf{Z}_p$? As the first step for resolution of equation (7) over $\mathbf{Z}_p$ we have to solve this equation over the field $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. It is interesting that in this case the equation (7) over $\mathbf{F}_p$ is equivalent to the following:

$$(e_0^{p-1})^{(p-2)} = x. \qquad (8)$$



This equivalence is the consequence of the following equality in the ring $\mathbf{F}_p[x_1, ..., x_{p-1}]$ [12]:

$$(x_1 + ... + x_{p-1})(x_1 + ... + x_{p-1} - 1)...(x_1 + ... + x_{p-1} - p + 2) =$$
$$\sum_{\sigma \in S_{p-1}} x_{\sigma 1}(x_{\sigma 1} + x_{\sigma 2} - 1)...(x_{\sigma 1} + ... + x_{\sigma(p-1)} - p + 2),$$

where $S_{p-1}$ is the group of permutations.

## References


[1] Carlesson R. *Malcev-Moduln*, J.Reine Angew. Math., 281,(1976), 199-210.

[2] Carlesson R. *On the exeptional central simple non-Lie Malcev algebras*, Trans.Amer.Math. Soc.,V.244,(1978),pp.173-184.

[3] Chevalley C. *Théorie des Groupes de Lie*. Tome II, Actualités Sci.Ind. No. 1152. Paris,1951.

[4] Grishkov A.N. *An analogue of Levi's theorem for Malcev Algebras*, Algebra i Logika, V.16,(1977), No.4, pp.389-396.

[5] Grishkov A.N. *Finite dimentional Binary-Lie Algebras* Algebra i Logika, Vol.16,(1977),No.5,pp.549-556.

[6] Grishkov A.N. *Decomposable Malcev algebras*, Algebra i Logika, V.19,(1980), No.4, pp.405-422.

[7] Grishkov A.N. *Structure and representation of binary-Lie algebras*, Izv.Akad.Nauk SSSR, ser.mat. V.44,(1980), pp.999-1030.

[8] Grishkov A.N. *On the conjugacy of Levi factors in Binary Lie algebras*, Izv.Akad.Nauk SSSR,ser.mat., V.50,(1986),No.2, pp.305-334.

[9] Grishkov A.N. *About global nalatytic alternative loops*, Preprint n 510, Novosibirsk, Russia,(1985),p.13.

[10] Grishkov A.N., Shestakov I.P. *On the speciality of the Lie-Jordan Algebras*,(manuscript).

[11] Grishkov A.N. *Algebraic diassociative Loops*. (manuscript).

[12] Grishkov A.N. *One combinatorial function and their applications*, (manuscript).

[13] Grishkov A.N. *Representations of the Lie rings*, (manuscript).

[14] Grishkov A.N. *Solvable Lie Groups over rings*, Preprint,Novosibirsk, 1986,p.36.

[15] Grishkov A.N. *An analogy of the exponential map in characteristic 3*,(manuscript).

[16] Grishkov A.N. *Algebraic Moufang Loops*, (manuscript).

[17] Kerdman F. *Global analytic Moufang Loops*, Algebra i Logika, v.18,n.5, p. 523-555.

[18] Kuzmin E.N. *Malcev Algebras and their representations*, Algebra i Logika, V.7,(1968) No.4, p.49-69.

[19] Kuzmin E.N. *Levi's theorem for Malcev algebras*, Algebra i Logika, V.16,(1977),No.4, p.424-431.

[20] Kuzmin E.N. *The connection between Malcev algebra and analytic Moufang Loops*,Algebra i Logika, 10(1971),no.1,p.1-14.

[21] Malcev A.I. *Analitic loops*, J.Mat.Sb., V.36,(1955), p.569-576. Izv.AN USSR, ser.mat. V.8,(1956), No.4, p.326-356.

[22] Sagle A.A. *Simple Malcev algebras over fields of characteristic zero*, Pac.J.Math., V.12.(1962), No.3,p.1057-1078.

[23] Weyl A. *On algebraic groups and homogeneous spaces*. Amer.J.Math.,77(1955),p.493-512.



# Новые результаты о полулинейно упорядоченных группах

**В. М. Копытов**

Институт математики СОРАН

## Введение, предварительные сведения

Полулинейно упорядоченной группой $\{G; \leq\}$ называется группа $G$, на которой задано отношение частичного порядка $\leq$ такое, что для любых элементов $x, y, u$ из $G$ неравенство $x \leq y$ влечет $xu \leq yu$, причем для любых элементов $x, y, z \in G$ из неравенств $x \leq y$, $x \leq z$ следует, что элементы $y$ и $z$ сравнимы. Понятие полулинейно упорядоченной группы было введено Фреге в 1903 году в связи с осмыслением роли отношения порядка в арифметике и с вопросами о минимальной аксиоматике поля вещественных чисел. Первый пример полулинейно упорядоченной но не правоупорядоченной группы был построен в 1987 году Аделеке, Дамметом и П.Нейманном в работе [1]. При построении авторы использовали стандартный линейный порядок на свободной группе ранга 2, при котором система выпуклых подгрупп совпадает с нижним центральным рядом. Свойства полулинейно упорядоченных групп изучались за прошедшие десять лет разными авторами. В 1990 году С.В.Вараксин, модифицировав метод Аделеке-Даммета-П.Неймана, доказал, что на всякой свободной разрешимой группе ранга 2 ступени большей 1 можно определить полулинейный порядок, не являющийся правым линейным порядком. К сожалению, предложенный метод довольно трудоемок и не ясны условия, при которых он применим. Систему выпуклых направленных подгрупп полулинейно упорядоченных групп рассматривал И.Рахунек (см [3]), в частности им доказано, что лексикорасширение полулинейно упорядоченной группы $H$ с помощью полулинейно упорядоченной группы $\bar{G}$ является полулинейно упорядоченной группы тогда и только тогда, когда $H$ является правоупорядоченной группой. Н.Петрова установила, что всякая полулинейно упорядоченная группа, является правоупорядочиваемой. Ряд признаков того, что всякий полулинейный порядок на группе является правым порядком установил Н.Я.Медведев. В.М.Копытов в 1995 году указал общий метод построения полулинейных порядков на правоупорядочиваемых группах и дал необходимые условия существования полулинейного порядка на группе, при котором имеется нетривиальная выпуклая направленная подгруппа. Были указаны и довольно близкие к необходимым достаточные условия существования на расширении групп полулинейного порядка, не являющегося правым порядком. Из этого признака, в частности, получалось, что на прямом сплетении и на свободном произведении правоупорядоченных групп можно ввести нетривиальный полулинейный порядок. Тем самым было указано несколько методов построения полулинейных порядков на группах. Изложение основных результатов о полулинейно упорядоченных группах дано в книге [4]. Вместе с тем оставались без ответа многие типичные вопросы применительно к классу полулинейно упорядоченных групп.

[1] Эта работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ, грант 99-01-00156

К примеру, вопросы более точного описания расширений полулинейно упорядоченных групп, строения таких групп, вопросы продолжения полулинейного порядка до правого порядка, вопрос о существовании простых групп с нетривиальным полулинейным порядком, нехопфовых полулинейно упорядоченных групп. В этой статье я излагаю результаты, полученные мною после выхода указанной книги. Изложение носит в основном обзорный характер, лишь в некоторых случаях я буду приводить доказательства в качестве иллюстрации. Подробное изложение приведенных результатов представлено к опубликованию.

Я использую здесь в основном обозначения и терминологию из книги [4], причем для удобства читателя буду использовать при ссылках нумерацию из указанной работы.

Как обычно, через $P = P(G)$ обозначаем положительный конус частично правоупорядоченной группы $G$, то есть множество

$$P = P(G) = \{x \in G | x \geq e\}$$

положительных элементов этой группы. При рассмотрении полулинейно упорядоченных групп бывает полезно рассматривать множество $P^{\pm} = P \cup P^{-1}$ – совокупность всех элементов группы, сравнимых с единицей.

В терминах множеств $P$ и $P^{\pm}$ полулинейно упорядоченные группы описываются следующим утверждением (см. [4], теорема 8.1.1): *группа $G$ тогда и только тогда является полулинейно упорядоченной группой с положительным конусом $P$, когда выполнены следующие условия:*

$O.1.$ $P \cdot P \subseteq P$,
$O.2.$ $P \cap P^{-1} = \{e\}$,
$O.4.$ $G = P^{-1} \cdot P$,
$O.7.$ $P \cdot P^{-1} \subseteq P^{\pm}$.

## 1 Нормализатор порядка

В книге [4] в полулинейно упорядоченной группе были выделены подгруппы, тесно связанные с положительным и отрицательным конусами этой группы. Точнее, если $G$ полулинейно упорядоченная группа с положительным конусом $P$, то через $\mathbf{n}(G)$ обозначена наибольшая выпуклая направленная нормальная подгруппа группы $G$, через $\mathbf{o}(G)$ – наибольшая выпуклая правоупорядоченная подгруппа $G$, через $\mathbf{r}(G)$ – множество всех таких элементов $x$ из $G$, что $x$ и $x^{-1}$ сравнимы со всяким элементом из $P^{\pm}$. В [4], было доказано (теорема 8.3.3), что $\mathbf{r}(G)$ является выпуклой правоупорядоченной подгруппой в $G$, причем

$$\mathbf{n}(G) \subseteq \mathbf{r}(G) \subseteq \mathbf{o}(G).$$

Здесь мы установим одно новое свойство подгруппы $\mathbf{r}(G)$. Установим также с помощью примеров, что неравенства в приведенной выше системе включений, вообще говоря, строгие. Отметим здесь, что подгруппа $\mathbf{r}(G)$ оказалась нужной при рассмотрении самых разных аспектов теории полулинейно упорядоченных групп.

**ТЕОРЕМА 1.1.** *Во всякой полулинейно упорядоченной группе $G$ подгруппа $\mathbf{r}(G)$ совпадает с нормализатором в $G$ множества $P^{\pm}$.*



**Доказательство.** Докажем, что $N_G(P^{\pm}) \subseteq \mathbf{r}(G)$. Для этого установим сначала, что подгруппа $N_G(P^{\pm})$ правоупорядочена, то есть любой элемент $x$ из $N_G(P^{\pm})$ сравним с единицей группы $G$. Пусть $x \in N_G(P^{\pm})$ и $x = a^{-1}b$, где $a, b \in P$. Такое представление элемента $x$ возможно, так как $G = P^{-1}P$. Поскольку $x \in N_G(P^{\pm})$, $a^{-1} \in P^{\pm}$, то заключаем, что $x^{-1}a^{-1}x \in P^{\pm}$, то есть $x^{-1}a^{-1}x = (a^{-1}b)^{-1} \cdot a^{-1} \cdot (a^{-1}b) = b^{-1}a \cdot a^{-1} \cdot a^{-1}b = b^{-1}a^{-1}b = b^{-1} \cdot x \in P^{\pm}$.

Если $b^{-1}x \geq e$, то $b^{-1} \geq x^{-1}$, и так как $b^{-1} \leq e$, заключаем $x^{-1} \leq e$, откуда следует $x \geq e$, $x \in P^{\pm}$.

Если же $b^{-1}x \leq e$, то $x^{-1} \geq b^{-1}$. Но $e \geq b^{-1}$, и из того, что в полулинейно упорядоченной группе всякие два элемента, имеющие общую нижнюю грань сравнимы между собой, заключаем, что элементы $x^{-1}$ и $e$ сравнимы, то есть и в этом случае $x \in P^{\pm}$.

Итак, подгруппа $N_G(P^{\pm})$ является правоупорядоченной подгруппой в $G$.

Теперь докажем, что для любого элемента $x$ из $N_G(P^{\pm})$ и для любого элемента $a$ из $P^{\pm}$ элементы $x, x^{-1}$ и $a$ сравнимы. Поскольку мы уже доказали выше, что $N_G(P^{\pm})$ правоупорядочена, то элементы $x$ и $x^{-1}$ сравнимы между собой и сравнимы с $e$. Не ограничивая общности, считаем, что $x^{-1} \leq e \leq x$. Ясно, что достаточно рассмотреть только случай $a \leq e$, и доказать в этом случае, что $x^{-1}$ сравним с $a$. Так как $x^{-1} \in N_G(P^{\pm})$, то $x^{-1}a^{-1}x \in P^{\pm}$. Если $x^{-1}a^{-1}x \geq e$, то $x^{-1}a^{-1} \geq x^{-1}$. Отсюда и из неравенства $e \geq x^{-1}$ следует, что элемент $x^{-1}a^{-1}$ сравним с $e$, и тогда элемент $x^{-1}$ сравним с $a$. Если же $x^{-1}a^{-1}x \leq e$, то $x^{-1}a^{-1} \leq x^{-1} \leq e$ и $x^{-1} \leq a$. Этим доказано, что $N_G(P^{\pm}) \subseteq \mathbf{r}(G)$.

Докажем обратное включение $N_G(P^{\pm}) \supseteq \mathbf{r}(G)$. Пусть $x \in \mathbf{r}(G)$, $x \geq e$. Очевидно, что $x^{-1}\mathbf{r}(G)x = \mathbf{r}(G)$, $x^{-1}ax \in P^{\pm}$ для любого элемента $a$ из $\mathbf{r}(G) \cap P^{\pm}$. Пусть $a \in P \setminus \mathbf{r}(G)$. Так как $x^{-1} \in \mathbf{r}(G)$, то элемент $x^{-1}$ сравним с любым элементом из $P^{\pm}$ и, в частности, с $a^{-1}$. Поскольку $\mathbf{r}(G)$ выпукла и $a^{-1} \notin \mathbf{r}(G)$, то возможно лишь неравенство $a^{-1} \leq x^{-1}$. Тогда $e \leq x^{-1}a$, $x \leq x^{-1}ax$. А так как $e \leq x$, то $e \leq x^{-1}ax$. Таким образом, для любого элемента $a$ из $P^{\pm}$ выполнено $x^{-1}ax \in P^{\pm}$, откуда следует $x^{-1}P^{\pm}x \subseteq P^{\pm}$. Это включение вместе с очевидным включением $xPx^{-1} \subseteq P^{\pm}$ дает $x \in N_G(P^{\pm})$. Теорема доказана.

Рассмотрим расположение относительно $\mathbf{r}(G)$ некоторых подгрупп полулинейно упорядоченной группы $G$. Пусть, как обычно, $\zeta(G) = \zeta_1(G)$ – центр группы $G$; если $\alpha$ некоторый ординал то $\zeta_\alpha(G)$ – член верхнего центрального ряда $G$ с номером $\alpha$. Через $Z_\alpha$ обозначим выпуклую подгруппу полулинейно упорядоченной группы $G$, порожденную подгруппой $\zeta_\alpha(G)$.

Применение теоремы 1.1. позволяет указать новые свойства подгрупп в полулинейно упорядоченных группах и новые классы групп, всякий полулинейный порядок которых является правым порядком.

**ТЕОРЕМА 1.2.** *Для всякого ординала $\alpha$ выпуклое замыкание $Z_\alpha(G)$ подгруппы $\zeta_\alpha(G)$ полулинейно упорядоченной группы $G$ содержится в подгруппе $\mathbf{r}(G)$.*

С.В.Вараксин в [2] показал, что всякий полулинейный порядок на нильпотентной группе является правым порядком. С помощью теорем 1.1. и 1.2 этот результат усиливается в следующих двух направлениях.

**ТЕОРЕМА 1.3.** *Пусть $G$ – полулинейно упорядоченная группа с положительным конусом $P$. Если $n$-й член $\gamma_n(G)$ ее нижнего центрального ряда является правоупорядоченной группой, то $G$ также является правоупорядоченной группой.*

**ТЕОРЕМА 1.4.** *Пусть $H$ нормальная правоупорядоченная подгруппа полулинейно упорядоченной группы $G$, $A$ – подгруппа $G$ и $H \subseteq A$, причем $A/H$ содержится в некотором члене $\zeta_\alpha(G/H)$ верхнего центрального ряда фактор-группы $G/H$. Тогда $A$ – правоупорядоченная подгруппа группы $H$.*

Естественен вопрос о том, являются ли включения в отмеченной перед перед теоремой 1.1. выше цепочке неравенств

$$\mathfrak{n}(G) \subseteq \mathfrak{r}(G) \subseteq \mathfrak{o}(G).$$

строгими. Ранее указывались примеры, показывающие, что существуют полулинейно упорядоченные группы, для которых выполнено строгое включение $E = \mathfrak{n}(G) \subset \mathfrak{r}(G) = \mathfrak{o}(G) \neq G$. Мы отмечаем здесь, что существуют полулинейно упорядоченные группы $G$, в которых подгруппа с нетривиальной подгрупой $\mathfrak{o}(G)$, отличной от подгруппы $\mathfrak{r}(G) = E$. Для построения такого полулинейного порядка $P$ на свободной группе $F_2$ ранга два можно использовать собирательный процесс сопряженных элементов, введенный в работе [5] для других целей, в частности, для построения линейно упорядоченной группы с некоторыми специфическими свойствами. Доказательство того, что построенный полулинейный порядок обладает нужными свойствами существенно использует теорему 1.1.

Отметим также, что в полулинейно упорядоченной группе $(F_2, P)$ имеется подгруппа, являющаяся $o$-простой полулинейно упорядоченной группой (то есть не имеющей собственных выпуклых направленных подгрупп)и не являющаяся правоупорядоченной группой.

## 2 Расширения полулинейно упорядоченных групп

Здесь мы дадим описание расширений полулинейно упорядоченных групп, как в общей постановке, так и в такой форме, которая достаточно удобна для применения. При рассмотрении этого вопроса мы используем стандартные сведения о шрайеровых расширениях групп, и приспособим эти сведения к частично правоупорядоченным группам, в особенности к полулинейно упорядоченным группам. Как обычно, если $G$ группа, $N$ ее нормальная подгруппа и $\bar{G} = G/N$ – факторгруппа $G$ по $N$, то говорим, что группа $G$ является расширением группы $N$ с помощью группы $\bar{G}$. Предполагаем в дальнейшем группу $G$ правоупорядочиваемой. В этом случае группа $G$ может быть описана заданием функции $\eta(\bar{x}, \bar{y})$ двух переменных из $\bar{G} \times \bar{G}$ в группу $N$, и отображения группы $\bar{G}$ в группу автоморфизмов группы $N$, удовлетворяющих условиям –

$$\begin{aligned} \eta(\bar{a}\bar{b}, \bar{c})(\eta(\bar{a}, \bar{b})\alpha(c) &= \eta(\bar{a}, \bar{b}\bar{c}), \\ (x\alpha(a))\alpha(b) &= \eta(\bar{a}, \bar{b})^{-1} \cdot x\alpha(ab)) \cdot \eta(\bar{a}, \bar{b}), \\ \eta(\bar{e}, \bar{e}) = \eta(\bar{a}, \bar{e}) &= \eta(\bar{e}, \bar{a}) = e, \\ \eta(a, a^{-1}) = e, \quad (x\alpha(a))\alpha(a^{-1}) &= x\alpha(e) = x. \end{aligned} \tag{1}$$

Элементы $\eta(\bar{x}, \bar{y})$ называются в этом случае шрайеровскими факторами.



Допуская некоторую вольность, не приводящую к недоразумениям, мы в формулах (2) и в дальнейших полагаем в выражениях $a$, $\eta(\bar{x}, \bar{y})$, $\alpha(a)$ параметры $a, x, y$ принадлежащими группе $G$, именно, если $a \in G$ то $a$ означает элемент $aN$ фактор-группы $G$, автоморфизм $\alpha(a)$ – автоморфизм группы $N$, заданный элементом $a$ группы $\bar{G}$, $\eta(x, y)$ - элемент $N$ равный элементу $\eta(\bar{x}, \bar{y})$. Задание отображений $\eta$ и $\alpha$ взаимно однозначно связано с выбором трансверсали $T$ группы $G$ по $N$ – системы представителей $\tau(a)$ смежных классов $Na$ группы $G$ по $N$, причем таких при наших предположениях, что $\tau(a^{-1}) = \tau(a)^{-1}$.

При сделанных предположениях всякое расширение $G$ группы $N$ с помощью фактор-группы $\bar{G}$ представляет собой множество пар вида $(\bar{a}, x)$, где $a \in \bar{G}$, $x \in N$ с умножением

$$(\bar{a}, x)(\bar{b}, y) = (a\bar{b}, \eta(a, b) \cdot x\alpha(b) \cdot y),$$

причем обратный элемент для $(\bar{a}, x)$ вычисляется по формуле

$$(\bar{a}, x)^{-1} = (\bar{a}^{-1}, x^{-1}\alpha(a^{-1})).$$

Пусть $G$ и $N$ частично правоупорядоченные группы с частичными правыми порядками $P$ и $P(N)$ соответственно. Мы рассматриваем расширение $G$ группы $N$ с помощью группы $\bar{G}$ с порядками $P_\alpha$ $\{\alpha \in A\}$, при которых

$$N \text{ выпукла}, \ P_\alpha \cap N = P(N), \text{ и } P_\alpha \text{ индуцирует на } \bar{G} = G/N \text{ порядок } \bar{P}. \tag{2}$$

Считаем при этом фиксированными набор шрайеровских факторов и автоморфизмов, определяющих групповую структуру расширения.

Для произвольного частичного правого порядка $P$ группы $G$, обладающего свойством (2), соответствующее отношение порядка обозначаем символом $\leq$. Положим

$$\mathcal{L}(\bar{a}) = \{x \in N | \quad x \leq \tau(\bar{a})\}.$$

Ясно, что для всякого элемента $a$ из $G$ неравенство $a \geq e$ выполнено тогда и только тогда, когда $a = \tau(a)x = (\bar{a}, x)$, где $\bar{a} \in \bar{P}$, $x \in \mathcal{L}(\bar{a})^{-1}$.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.** *Для того, чтобы задать на шрайеровском расширении $G$ частично правоупорядоченной группы $(N, P(N))$ с помощью частично правоупорядоченной группы $(\bar{G}, \bar{P})$ частичный правый порядок $P$, удовлетворяющий условиям (2), необходимо и достаточно задать отображение, ставящее каждому элементу $\bar{a}$ из $\bar{P}$ непустое подмножество $\mathcal{L}(\bar{a})$ группы $N$ такое, что выполнены условия*

$$P(N)^{-1} \cdot \mathcal{L}(a) = P(N) \cdot \mathcal{L}(\bar{a}) = \mathcal{L}(\bar{a}), \quad \mathcal{L}(\bar{e}) = P(N)^{-1}, \tag{3}$$

$$\mathcal{L}(\bar{b}) \cdot (\mathcal{L}(\bar{a})\alpha(b)) \subseteq \mathcal{L}(a\bar{b}) \cdot \eta(a, b), \tag{4}$$

$$\eta(a, b)^{-1} \in \mathcal{L}(\bar{a}\bar{b}). \tag{5}$$

Для заданных частично правоупорядоченных групп $N$ и $G$ множество частично правоупорядоченных расширений $G$, удовлетворяющих условиям предложения 2.1 непусто. Более того, это множество обладает естественной хорошей структурой.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2.** *Множество*

$$L(P(N),\bar{P}) = \{P_\alpha | \quad \alpha \subset A\}$$

*всех правых частичных порядков расширения $G$ частично правоупорядоченной группы $(N, P(N))$ с помощью частично правоупорядоченной группы $\bar{G}$, обладающих свойством (2), является полной решеткой по включению.*

Нулем $P_0$ решетки $L(P(N), P)$ является подполугруппа группы $G$, порожденная всеми элементами вида $(a, x)$, где либо $a = \bar{b}\bar{c}$, $\bar{b}, \bar{c} \in \bar{P}$, $\bar{b} \neq \bar{e} \neq \bar{c}$, $x = \eta(\bar{b}, \bar{c})$, либо $a = \bar{e}$, $x \in P(N)$. Единицей $P_1$ этой решетки является лексикографическое расширение группы $(N, P(N))$ с помощью группы $\bar{G}, \bar{P}$, при котором $(\bar{a}, x) \geq (\bar{e}, e)$ тогда и только тогда, когда $\bar{a} > \bar{e}$ в $\bar{G}$ или $\bar{a} = \bar{e}$, $x \geq e$ в $N$.

Рассмотрим теперь расширения частично правоупорядоченных групп промежуточные между минимальным расширением $P_0$ и лексикографическим $P_1$. Нас будут интересовать такие расширения, которые гарантируют полулинейность расширения тогда, когда это возможно. Разумеется, такие расширения возможны не для произвольных частично правоупорядоченных групп. Называем частично правоупорядоченное расширение $G$ частично правоупорядоченной группы $(N, P(N))$ с помощью частично правоупорядоченной группы $(\bar{G}, \bar{P})$ *полулексикографическим*, если сравнимы в $G$ любые два положительные элемента $a, b$ из $G$, такие, что $\bar{a} \geq \bar{b} \geq \bar{e}$ в $\bar{G}$. Ясно, что лексикографическое расширение является полулексикографическим и что множество всех полулексикографических расширений является решеткой по включению.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.** *Для того, чтобы расширение $G$ частично правоупорядоченной группы $(N, P(N))$ с помощью частично правоупорядоченной группы $(\bar{G}, \bar{P})$ было полулексикографическим, необходимо и достаточно, чтобы система подмножеств $\{\mathcal{L}(a) | \bar{a} \in \bar{P}\}$ удовлетворяла условиям (3) - (4) а также условию*

$$\mathcal{L}(\bar{b})^{-1} \cdot \mathcal{L}(\bar{a}) \subseteq (\mathcal{L}(\bar{a}\bar{b}^{-1}) \cdot \eta(\bar{a}, \bar{b}^{-1}))\alpha(b) \quad \text{при} \quad \bar{a} \geq \bar{b} \geq \bar{e}. \tag{6}$$

Мне неизвестно, единственен ли полулинейный порядок на расширении, удовлетворяющем условию (2), в том случае когда он существует. Основная теорема, описывающая полулинейные порядки на расширениях, имеет следующий вид.

**ТЕОРЕМА 2.4.** *Для того, чтобы расширение $(G, P)$ частично правоупорядоченной группы $(N, P(N))$ с помощью частично правоупорядоченной группы $(\bar{G}, \bar{P})$, заданное системой шрайеровских факторов и автоморфизмов, удовлетворяющих условиям (2),(2), являлось полулинейно упорядоченной группой, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:*

(a) *группа $(\bar{G}, \bar{P})$ полулинейно упорядочена;*

(b) *подгруппа $C$ группы $N$, порожденная полугруппой $P(N)$, является полулинейно упорядоченной, то есть $C = P(N) \cdot P(N)^{-1} \subseteq P(N)^{\pm}$;*

(c) $N = \bigcup_{a \in G} C\alpha(a)$;

*а также система подмножеств $\{\mathcal{L}(\bar{a}) | a \in \bar{P}\}$ удовлетворяла условиям (3) - (6).*

Указанная теорема при всей ее общности не дает рецептов для построения системы $\{\mathcal{L}(\bar{a})\}$, поэтому удобнее пользоваться следующим достаточным признаком полулинейной упорядочиваемости расширений.



**ТЕОРЕМА 2.5.** *Пусть группа $G$ является полупрямым произведением частично правоупорядоченной группы $(N, P(N))$ с дополнительным множителем $H$, являющимся полулинейно упорядоченной группой с порядком $P(H)$, причем выполнены условия*

(a) *подгруппа $C$ группы $N$, порожденная полугруппой $P(N)$, является полулинейно упорядоченной, то есть $C = P(N) \cdot P(N)^{-1} \subseteq P(N)^{\pm}$;*

(b) $N = \bigcup_{x \in H} x^{-1}Cx$;

(c) *для любого элемента $a > e$ из $H$ выполнено $aCa^{-1} \subset \mathbf{r}(G)$.*

*Тогда на группе $G$ можно задать полулинейный порядок удовлетворяющий условиям (2).*

# 3 Новые примеры

Теоремы 2.4 и 2.5 позволяют использовать известные теоретико групповые приемы для ответа на традиционные вопросы теории групп и теории упорядоченных групп применительно к полулинейно упорядоченным группам. Точнее, справедливы следующие теоремы.

**ТЕОРЕМА 3.1.** *Существуют полулинейно упорядоченные группы, порядок которых не продолжается до правого порядка.*

**ТЕОРЕМА 3.2.** *Всякая правоупорядочиваемая группа вкладывается в простую группу, обладающую полулинейным порядком, не являющимся правым порядком.*

**ТЕОРЕМА 3.3.** *Существуют нехопфовы группы с полулинейным порядком, не являющимся правым порядком.*

*ЛИТЕРАТУРА*


1. *S.A Adeleke, M.A.E.Dummett* and *P.M.Neumann*, On a question of Frege's about right-ordered groups, Bull. London Math. Soc., 19, №6,(1987), 513-521.

2. *С.А.Вараксин*, Полулинейные порядки на разрешимых и нильпотентных группах, Алгебра и логика, 29, №6,(1990), 631-63

3. *J.Rachunek*, Convex directed subgroups of right-ordered tree groups, Czech. Math. J., 41, №1, (1991), 99-103.

4. *В.М.Копытов* и *Н.Я.Медведев*, Правоупорядоченные группы, Научная книга НИИ МИОО, Новосибирск,(1996).

5. *В.М.Копытов*, Неабелево многообразие решеточно упорядоченных групп, в котором всякая разрешимая l-группа абелева, Матем. сб., 126, N 2, (1985), 247-266.

# Неподвижные точки временных операторов


**С.И. Мардаев**

630090 Новосибирск-90

пр. Коптюга, 4

Институт математики СО РАН

e-mail: mardaev@math.nsc.ru


Исследуется определимость наименьших неподвижных точек временных позитивных П-операторов.

Временные формулы составляются из констант $\bot$, $\top$ и пропозициональных переменных $p, q, r, \ldots$ с помощью связок $\wedge$ и $\vee$ и унарных связок $\neg$, $\Box_L$, $\Box_R$, $\Diamond_L$ и $\Diamond_R$.

Временная шкала $< W, R >$ состоит из непустого множества $W$ и бинарного отношения $R$ на $W$. Временная модель $< W, R, v >$ состоит из шкалы $< W, R >$ и означивания $v$, которое каждой переменной $q$ ставит в соответствие ее значение – подмножество $v(q)$ множества $W$. Значение $q$ будем обозначать соответствующей прописной буквой $Q$. Функция $v$ естественным образом продолжается на формулы: $\bot$ соответствует $\emptyset$, $\top$ соответствует $W$, связкам $\neg$, $\wedge$, $\vee$ соответствуют дополнение, пересечение, объединение множеств. Связкам $\Box_L$, $\Box_R$, $\Diamond_L$ и $\Diamond_R$ соответствуют следующие операции на множествах:

$$\Box_L A = \{x \,|\, \forall y(yRx \Rightarrow y \in A)\},$$
$$\Box_R A = \{x \,|\, \forall y(xRy \Rightarrow y \in A)\},$$
$$\Diamond_L A = \{x \,|\, \exists y(yRx \wedge y \in A)\},$$
$$\Diamond_R A = \{x \,|\, \exists y(xRy \wedge y \in A)\}.$$

Введем сокращения $\alpha \to \beta = \neg\alpha \vee \beta$, $\alpha \equiv \beta = (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$, $\Box\alpha = \Box_L \alpha \wedge \Box_R \alpha$. Значение формулы $\alpha(q_1, \ldots, q_n)$ будем обозначать через $\alpha(Q_1, \ldots, Q_n)$.

Пусть дана формула $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ от переменных $p, q_1, \ldots, q_n$. Рассмотрим временную модель $< W, R, v >$, в которой заданы значения $Q_1, \ldots, Q_n$ переменных $q_1, \ldots, q_n$, а значение переменной $p$ не задано. Формула $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ определяет на модели $< W, R, v >$ оператор $F_\varphi : P \mapsto \varphi(P, Q_1, \ldots, Q_n)$, который сопоставляет множеству $P$ множество $\varphi(P, Q_1, \ldots, Q_n)$. Такие операторы назовем формульными.

Множество $P$ называется неподвижной точкой оператора $F_\varphi$, если выполняется $P = F_\varphi(P)$, т.е. $P = \varphi(P, Q_1, \ldots, Q_n)$. Неподвижная точка $P$ называется наименьшей неподвижной точкой оператора $F_\varphi$, если для любой другой неподвижной точки $P'$ этого оператора выполняется $P \subseteq P'$. Если неподвижная точка $P$ совпадает в модели со значением некоторой формулы $\omega(q_1, \ldots, q_n)$, то говорим, что эта формула


[1]Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант N 99-01-00600, и Сибирского Отделения Российской Академии Наук, ПСО РАН N 473, грант N 3.




$\omega(q_1, \ldots, q_n)$ определяет неподвижную точку $P$ в данной модели, и называем эту формулу определяющей.

В дальнейшем в формулировках теорем об определимости неподвижных точек оператора $F_\varphi$ будем подразумевать, что переменные формулы $\varphi$ содержатся среди $p, q_1, \ldots, q_n$, а переменные определяющих формул содержатся среди $q_1, \ldots, q_n$.

Если переменная $p$ входит в формулу $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ только позитивно, т.е. каждое вхождение находится под действием четного числа отрицаний, то назовем эту формулу позитивной по $p$, а оператор $F_\varphi$ назовем позитивным оператором.

Временной П-формулой называем формулу, составленную с помощью связок $\wedge$, $\vee$, $\Box_L$, $\Box_R$ из формул, не содержащих $\Box_L$, $\Box_R$, $\Diamond_L$ и $\Diamond_R$. Если формула $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ является П-формулой, то оператор $F_\varphi$ назовем временным П-оператором.

Далее слово "временной"будем опускать.

Модель называем линейно упорядоченной, если она частично упорядочена и линейна.

**Теорема 1** *Для любого позитивного П-оператора $F_\varphi$ существует П-формула $\omega$, определяющая наименьшую неподвижную точку этого оператора в любой конечной линейно упорядоченной модели $< W, \leq, v >$.*

**Доказательство** Сначала сделаем с формулой $\varphi$ следующее преобразование. Пронесем все отрицания к переменным и константам, сократим двойные отрицания. После этого переменная $p$ не будет находиться по действием отрицания. Заменим на $\bot$ все вхождения $p$, не находящиеся под действием модальности. Нетрудно доказать, что это не изменит наименьших неподвижных точек. Рассмотрим полученную формулу. Она составлена с помощью связок $\wedge$, $\vee$, $\Box_L$ и $\Box_R$ из переменной $p$ и формул, не содержащих $p$. Рассмотрим вхождение $\wedge$, участвующее в этом составлении данной формулы из $p$ и формул, не содержащих $p$. Вынесем его через $\Box_L$, $\Box_R$ и $\vee$ наружу. Тогда $\varphi$ представляется в виде $\bigwedge_s \theta_1^s$, где каждая формула $\theta_1^s$ является в общем случае дизъюнкцией формулы, не содержащей $p$, и формул с главными связками $\Box_L$ и $\Box_R$. Дизъюнкцию всех дизъюнктивных слагаемых формулы $\theta_1^s$, не содержащих $p$, обозначим $\psi_1^s$. Если таких нет, то для единообразия рассуждений добавим $\bot$. Тогда $\theta_1^s$ имеет вид $\psi_1^s \vee \bigvee_i \Box_L \theta_i^s \vee \bigvee_i \Box_R \theta_i^s$. Значения индекса $i$ у $\Box_L \theta_i^s$ и $\Box_R \theta_i^s$ различны.

Зафиксируем некоторую формулу $\theta_1^s$. Будем вводить обозначения ее подформул и строить некоторое конечное частично упорядоченное множество, элементам которого приписаны формулы. Это множество будем называть полным деревом для формулы $\theta_1^s$.

**Построение 2** Возьмем элемент, который будем обозначать $\bar{\theta}_1^s$ и припишем ему $\psi_1^s$. Рассматриваем отношение "слева направо", т.е. если $x \leq y$, то считаем, что $x$ лежит левее чем $y$. Левее элемента $\bar{\theta}_1^s$ возьмем элементы $\bar{\theta}_i^s$ для всех формул $\Box_L \theta_i^s$, т.е. полагаем $\dot{\theta}^s_i \leq \bar{\theta}^s_1$. Между собой эти элементы $\dot{\theta}^s_i$ несравнимы. Правее элемента $\bar{\theta}^s_1$ возьмем элементы $\dot{\theta}^s_i$ для всех формул $\Box_R\theta^s_i$, т.е. полагаем $\bar{\theta}^s_1 \leq \dot{\theta}^s_i$. Элементы $\dot{\theta}^s_i$ также несравнимы между собой.

Для всех элементов $\dot{\theta}^s_i$ проделаем следующее. Приведем формулу $\theta^s_i$ к виду аналогичному виду $\theta^s_1$. Единственное различие состоит в том, что $\theta^s_i$ может содержать $p$ в качестве дизъюнктивного слагаемого. Дизъюнкцию всех дизъюнктивных слагаемых, не содержащих $p$, обозначим $\psi^s_i$. Если слагаемых, не содержащих $p$, нет, то добавим $\perp$. Элементу $\bar{\theta}^s_i$ припишем формулу $\psi^s_i$. Дизъюнктивные слагаемые формулы $\theta^s_i$ с главной связкой $\Box_L$ будем обозначать через $\Box_L\theta^s_k$, увеличив значение нижнего индекса так, чтобы он отличался от уже имеющихся значений. То же самое для $\Box_R\theta^s_k$. Левее $\bar{\theta}^s_i$ возьмем элементы $\bar{\theta}^s_k$ для всех дизъюнктивных слагаемых $\Box_L\theta^s_k$, входящих в $\theta^s_i$. При этом добавим в частичный порядок соотношения $\bar{\theta}^s_k \leq \bar{\theta}^s_i$. В частности, элементы $\bar{\theta}^s_k$ несравнимы между собой и несравнимы со всеми уже построенными элементами $x$, такими, что $x < \bar{\theta}^s_i$. Аналогично, правее $\bar{\theta}^s_i$ возьмем элементы $\bar{\theta}^s_k$ для всех дизъюнктивных слагаемых $\Box_R\theta^s_k$, входящих в $\theta^s_i$. При этом элементы $\bar{\theta}^s_k$ несравнимы между собой и несравнимы со всеми элементами $\bar{\theta}^s_i < x$.

Применяем эту процедуру ко всем $\theta^s_k$ и т.д. пока не исчерпаем подформулы. Закончив этот процесс, получим конечное частично упорядоченное множество с приписанными формулами, которое мы будем называть полным деревом для $\theta^s_1$. Построение закончено.

Если $\theta^s_i$ содержит $p$ в качестве дизъюнктивного слагаемого, то элемент $\bar{\theta}^s_i$ полного дерева назовем ответвляющим.

Дадим определение опровергающего дерева для формулы $\theta^s_1$.

1) Если $\theta^s_1$ имеет вид $\psi^s_1$ (тогда полное дерево состоит из одного элемента), то опровергающее дерево для $\theta^s_1$ совпадает с полным деревом для $\theta^s_1$. Такое опровергающее дерево назовем одноэлементным.

2) Если $\theta^s_1$ имеет вид $\psi^s_1 \vee \bigvee_i \Box_L\theta^s_i$, т.е. нет слагаемых вида $\Box_R\theta^s_i$, то переобозначим элемент $\bar{\theta}^s_1$, обозначим его $\bar{\theta}^s_{1L}$. В остальном опровергающее дерево совпадает с полным. Такое опровергающее дерево назовем левым.

3) Если $\theta^s_1$ имеет вид $\psi^s_1 \vee \bigvee_i \Box_R\theta^s_i$, т.е. нет слагаемых вида $\Box_L\theta^s_i$, то переобозначим элемент $\bar{\theta}^s_1$, обозначим его $\bar{\theta}^s_{1R}$. В остальном опровергающее дерево совпадает с полным. Такое опровергающее дерево назовем правым.

4) Пусть $\theta^s_1$ имеет вид $\psi^s_1 \vee \bigvee_i \Box_L\theta^s_i \vee \bigvee_i \Box_R\theta^s_i$. Заменим элемент $\bar{\theta}^s_1$ на два элемента $\bar{\theta}^s_{1L}$ и $\bar{\theta}^s_{1R}$ и припишем каждому из них $\psi^s_1$. Отношение сохраним, добавив $\bar{\theta}^s_{1L} \leq \bar{\theta}^s_{1R}$. Такое опровергающее дерево назовем двусторонним.

Определение опровергающего дерева закончено.

Заметим, что для каждой формулы $\theta^s_1$ имеется ровно одно опровергающее дерево.



Опровергающей структурой назовем любое предупорядоченное множество, которое можно построить следующим образом.

**Построение 3** Структуру строим из опровергающих деревьев. Считаем, что если опровергающее дерево для некоторой формулы $\theta^t_1$ построено по первому пункту определения опровергающего дерева, т.е. состоит из одного элемента, то у нас есть много экземпляров этого дерева. Если же опровергающее дерево для $\theta^t_1$ построено по остальным пунктам, то имеется только один экземпляр этого дерева.

Возьмем опровергающее дерево для некоторой формулы $\theta^s_1$. Назовем это дерево начальным. Вначале структура (недостроенная) состоит из одного начального опровергающего дерева для $\theta^s_1$.

1) Если опровергающее дерево для $\theta^s_1$ одноэлементное, то структура состоит из одного этого дерева. Элемент $\bar{\theta}^s_1$ назовем начальным элементом опровергающей структуры.

В остальных случаях добавим новый элемент $\bar{\theta}^s_1$, который назовем начальным элементом опровергающей структуры. Припишем элементу $\bar{\theta}^s_1$ формулу $\psi^s_1$.

2) Если опровергающее дерево для $\theta^s_1$ левое, то вставим $\bar{\theta}^s_1$ правее элемента $\bar{\theta}^s_{1L}$, т.е. добавим соотношение $\bar{\theta}^s_{1L} \leq \bar{\theta}^s_1$.

3) Если оно правое, то вставим $\bar{\theta}^s_1$ левее элемента $\bar{\theta}^s_{1R}$, т.е. добавим соотношение $\bar{\theta}^s_1 \leq \bar{\theta}^s_{1R}$.

4) Если оно двустороннее, то вставим $\bar{\theta}^s_1$ между элементами $\bar{\theta}^s_{1L}$ и $\bar{\theta}^s_{1R}$, т.е. добавим соотношения $\bar{\theta}^s_{1L} \leq \bar{\theta}^s_1 \leq \bar{\theta}^s_{1R}$.

Для каждого ответвляющего элемента $\bar{\eta}$ начального дерева проделаем следующую процедуру.

Рассмотрим опровергающее дерево для некоторой $\theta^t_1$ (здесь может быть $t = s$) и вставим в него элемент $\bar{\eta}$. Это означает следующее.

1) Если опровергающее дерево для $\theta^t_1$ одноэлементное, то возьмем экземпляр этого дерева и отождествим элементы $\bar{\eta}$ и $\bar{\theta}^t_1$. Припишем полученному элементу формулу, приписанную $\bar{\eta}$, и формулу $\psi^t_1$.

2) Если оно левое, то вставим $\bar{\eta}$ правее элемента $\bar{\theta}^t_{1L}$, т.е. добавим соотношение $\bar{\theta}^t_{1L} \leq \bar{\eta}$. Элементу $\bar{\eta}$ дополнительно припишем еще формулу $\psi^t_1$.

3) Если оно правое, то вставим $\bar{\eta}$ левее элемента $\bar{\theta}^t_{1R}$, т.е. добавим соотношение $\bar{\eta} \leq \bar{\theta}^t_{1R}$. Элементу $\bar{\eta}$ дополнительно припишем формулу $\psi^t_1$.

4) Если оно двустороннее, то вставим $\bar{\eta}$ между элементами $\bar{\theta}^t_{1L}$ и $\bar{\theta}^t_{1R}$, т.е. добавим соотношения $\bar{\theta}^t_{1L} \leq \bar{\eta} \leq \bar{\theta}^t_{1R}$. Элементу $\bar{\eta}$ дополнительно припишем формулу $\psi^t_1$.

Если $t \neq s$, то добавим в структуру это опровергающее дерево для $\theta^t_1$.

Затем все ответвляющие элементы дерева для $\theta^t_1$ (если $t \neq s$) вставляем в некоторые опровергающие деревья и добавляем эти деревья в структуру. Продолжаем вставлять ответвляющие элементы и добавлять деревья в структуру. Когда у всех деревьев из структуры ответвляющие элементы будут вставлены в деревья из структуры, прекратим процесс. Транзитивно замкнем полученное отношение. Построение закончено.

Морфизмом опровергающей структуры назовем сохраняющее порядок отображение $h$ этой структуры в модель $< W, \leq, v >$, удовлетворяющее условию: для любого элемента $\bar{\eta}$ этой структуры на элементе $h(\bar{\eta})$ опровергаются все формулы, приписанные элементу $\bar{\eta}$.

Опровергающей конфигурацией назовем опровергающую структуру и ее морфизм.

Образ начального элемента структуры назовем начальным элементом этой конфигурации.

**Лемма 4** *Пусть $P$ — неподвижная точка оператора $F_\varphi$ в конечной линейно упорядоченной модели $< W, \leq, v >$. Если $x \notin P$, то существует опровергающая конфигурация с начальным элементом $x$.*

**Доказательство** В качестве значения переменной $p$ возьмем $P$. Сначала сделаем следующее. Для каждой формулы $\theta_1^s$, которая опровергается хотя бы на одном элементе модели и не имеет вида $\psi_1^s$, построим отображение $h^s$ опровергающего дерева для $\theta_1^s$ в модель следующим образом.

Если опровергающее дерево для $\theta_1^s$ левое, то элемент $\bar{\theta}_{1L}^s$ отобразим в самый левый элемент $x^s$, на котором опровергается $\theta_1^s$.

Если опровергающее дерево для $\theta_1^s$ правое, то элемент $\bar{\theta}_{1R}^s$ отобразим в самый правый элемент $y^s$, на котором опровергается $\theta_1^s$.

Если опровергающее дерево для $\theta_1^s$ двустороннее, то элемент $\bar{\theta}_{1L}^s$ отобразим в самый левый элемент $x^s$, на котором опровергается $\theta_1^s$, а элемент $\bar{\theta}_{1R}^s$ отобразим в самый правый элемент $y^s$, на котором опровергается $\theta_1^s$.

Далее элементы опровергающего дерева для $\theta_1^s$ отображаются так.

Для всех $\Box_L \theta_i^s$ выполняется $x^s \not\models \Box_L \theta_i^s$. Выберем $z_i \leq x^s$ такое, что $z \not\models \theta_i^s$ и положим $h^s(\bar{\theta}_i^s)$ равным $z_i$. Для всех $\Box_R \theta_i^s$ выполняется $y^s \not\models \Box_R \theta_i^s$. Выберем $z_i \geq y^s$ такое, что $z_i \not\models \theta_i^s$ и положим $h^s(\bar{\theta}_i^s)$ равным $z_i$. Продолжая построение, получим искомое отображение. Отметим, что на образах элементов опровергающего дерева опровергаются приписанные им формулы.

Теперь будем строить структуру и ее морфизм. Так как $x \not\models p$, то $x \not\models \varphi$, и поэтому существует $s$ такое, что $x \not\models \theta_1^s$. В качестве начального возьмем опровергающее дерево для $\theta_1^s$.

Если опровергающее дерево для $\theta_1^s$ одноэлементное, то отображаем его в $x$. Структура состоит из одного этого дерева.

В остальных случаях, т.е. когда дерево для $\theta_1^s$ не одноэлементное, возьмем построенное отображение этого дерева. Добавим начальный элемент $\bar{\theta}_1^s$ и отобразим его в $x$.



Рассмотрим опровергающее дерево для $\theta_1^s$ и его отображение. Рассмотрим образ $h^s(\bar{\eta})$ ответвляющего элемента $\bar{\eta}$. Так как по построению $h^s(\bar{\eta}) \not\models p$, то $h^s(\bar{\eta}) \not\models \varphi$ и поэтому существует $t$ такое, что $h^s(\bar{\eta}) \not\models \theta_1^t$. Здесь может быть $t = s$. Отображение $h^t$ опровергающего дерева для $\theta_1^t$ мы уже построили.

Заметим, что $h^s(\bar{\eta}) \not\models \psi_1^t$.

Если опровергающее дерево для $\theta_1^t$ одноэлементное, то возьмем экземпляр дерева для $\theta_1^t$ и отождествим элементы $\bar{\eta}$ и $\bar{\theta}_1^t$.

Если опровергающее дерево для $\theta_1^t$ левое, то выполняется $h^t(\bar{\theta}_{1L}^t) \leq h^s(\bar{\eta})$. Вставим элемент $\bar{\eta}$ правее элемента $\bar{\theta}_{1L}^t$.

Если опровергающее дерево для $\theta_1^t$ правое, то выполняется $h^s(\bar{\eta}) \leq h^t(\bar{\theta}_{1R}^t)$. Вставим элемент $\bar{\eta}$ левее элемента $\bar{\theta}_{1R}^t$.

Если опровергающее дерево для $\theta_1^t$ двустороннее, то выполняется $h^t(\bar{\theta}_{1L}^t) \leq h^s(\bar{\eta}) \leq h^t(\bar{\theta}_{1R}^t)$. Вставим элемент $\bar{\eta}$ между элементами $\bar{\theta}_{1L}^t$ и $\bar{\theta}_{1R}^t$.

Добавим опровергающее дерево для $\theta_1^t$ к множеству деревьев. Продолжая процесс, получим опровергающую структуру и ее морфизм.

**Лемма 5** *Пусть задана линейно упорядоченная модель $< W, \leq, v >$ и опровергающая конфигурация с морфизмом $h$ и начальным опровергающим деревом для формулы $\theta_1^s$. Тогда элементы $h(\bar{\theta}_{1L}^s)$, $h(\bar{\theta}_{1R}^s)$ и элементы $h(\bar{\eta})$ для всех ответвляющих элементов $\bar{\eta}$ этого дерева являются начальными элементами некоторых опровергающих конфигураций.*

**Доказательство** Рассмотрим ответвляющий элемент $\bar{\eta}$. Пусть он вставлен в дерево для $\theta_1^t$. Выбросим из структуры начальный элемент $\bar{\theta}_1^s$. В это дерево для $\theta_1^t$ добавим новый начальный элемент $\bar{\theta}_1^t$. Положим $h(\bar{\theta}_1^t) = h(\bar{\eta})$. Рассмотрим подструктуру данной структуры, порожденную деревом для $\theta_1^t$. Это означает, что мы добавляем к дереву для $\theta_1^t$ все деревья, куда вставлены ответвляющие элементы дерева для $\theta_1^t$, затем добавляем деревья, в которые вставлены ответвляющие элементы добавленных деревьев и т.д., пока процесс не завершится. Отображение этой подструктуры составлено из отображений деревьев. Элемент $h(\bar{\eta})$ является начальным для этой конфигурации.

Теперь рассмотрим элементы $h(\bar{\theta}_{1L}^s)$ и $h(\bar{\theta}_{1R}^s)$. Отобразим элемент $\bar{\theta}_1^s$ в эти элементы. Структуру берем ту же самую. Лемма доказана.

Далее через $P^\nu$ будем обозначать множество элементов модели, не являющихся начальными ни для какой опровергающей конфигурации. Это множество возьмем в качестве значения переменной $p$.

**Лемма 6** *Пусть задана линейно упорядоченная модель $< W, \leq, v >$ и опровергающая конфигурация с морфизмом $h$ и начальным опровергающим деревом для формулы $\theta_1^s$. Тогда на начальном элементе конфигурации опровергается $\theta_1^s$.*

**Доказательство** Индукцией от вершин дерева докажем, что для любого элемента $\bar{\theta}^s_i$ начального опровергающего дерева выполняется $h(\bar{\theta}^s_i) \not\models \theta^s_i$.

БАЗИС. Пусть $\theta^s_i = p \vee \psi^s_j$. Так как $\bar{\theta}^s_i$ ответвляющий, то по лемме 5 выполняется $h(\bar{\theta}^s_i) \not\models p$. По определению опровергающей конфигурации на элементе $h(\bar{\theta}^s_i)$ опровергаются формулы, приписанные элементу $\bar{\theta}^s_i$. Таким образом, $h(\bar{\theta}^s_i) \not\models \psi^s_j$. Итак, $h(\bar{\theta}^s_i) \not\models \theta^s_i$.

ШАГ. Пусть $\theta^s_i = p \vee \psi^s_j \vee \bigvee_k \Box_L \theta^s_k \vee \bigvee_k \Box_R \theta^s_k$, случай $\theta^s_i = \psi^s_j \vee \bigvee_k \Box_L \theta^s_k \vee \bigvee_k \Box_R \theta^s_k$ рассматривается аналогично. Так как $\bar{\theta}^s_i$ ответвляющий, то по лемме 5 выполняется $h(\bar{\theta}^s_i) \not\models p$. По определению опровергающей конфигурации $h(\bar{\theta}^s_i) \not\models \psi^s_j$. По индукционному предположению $h(\bar{\theta}^s_k) \not\models \theta^s_k$. Так как морфизм сохраняет порядок, то элементы $h(\bar{\theta}^s_k)$ лежат в модели левее или правее элемента $h(\bar{\theta}^s_i)$ соответственно связке $\Box_L$ или $\Box_R$. Поэтому $h(\bar{\theta}^s_i) \not\models \Box_L \theta^s_k$ и $h(\bar{\theta}^s_i) \not\models \Box_R \theta^s_k$ соответственно. Итак, $h(\bar{\theta}^s_i) \not\models \theta^s_i$.

Наконец, получаем, что на элементах $h(\bar{\theta}^s_{1L})$, $h(\bar{\theta}^s_{1R})$ и начальном элементе $h(\bar{\theta}^s_1)$ опровергается $\theta^s_1$.

**Лемма 7** *В любой линейно упорядоченной модели $< W, \leq, v >$ выполняется*

$$\varphi(P', Q_1, \ldots, Q_n) \subseteq P'.$$

**Доказательство** Пусть $x \notin P'$. Рассмотрим опровергающую конфигурацию с начальным элементом $x$. Пусть начальным деревом в структуре будет опровергающее дерево для $\theta^s_1$. По лемме 6 на $x$ опровергается $\theta^s_1$ и поэтому опровергается $\varphi$. Таким образом, $x \notin \varphi(P', Q_1, \ldots, Q_n)$.

**Лемма 8** *В любой конечной линейно упорядоченной модели $< W, \leq, v >$ множество $P'$ является наименьшей неподвижной точкой.*

**Доказательство** Нетрудно доказать, что наименьшая неподвижная точка является пересечением всех множеств $P''$, для которых выполняется

$$\varphi(P'', Q_1, \ldots, Q_n) \subseteq P''.$$

Из леммы 7 следует, что наименьшая неподвижная точка содержится в $P'$. По лемме 4 множество $P'$ содержится в любой неподвижной точке, в том числе и в наименьшей. Итак, $P'$ — наименьшая неподвижная точка.

Закончим доказательство теоремы. Для каждой опровергающей структуры построим П-формулу, которая опровергается на элементе $x$ линейно упорядоченной модели $< W, \leq, v >$ тогда и только тогда, когда существует опровергающая конфигурация с этой опровергающей структурой и начальным элементом $x$. Возможны разные алгоритмы построения формулы.



ПЕРВЫЙ АЛГОРИТМ. Структура представляет собой предупорядоченное множество с приписанными формулами. Сделаем с ней следующее. Расширим бинарное отношение структуры так, чтобы получилась цепь сгустков. Затем склеим взаимодостижимые элементы, т.е. стандартным образом превратим предупорядоченное множество в частично упорядоченное. В нашем случае получится конечное линейно упорядоченное множество. Приписывание формул сохраним. В этом множестве некоторым элементам приписано несколько формул.

Для этого линейно упорядоченного множества построим соответствующую ему П-формулу. Нам нужно выразить то, что справа и слева от начального элемента находятся в данном порядке элементы, на которых опровергаются данные формулы.

Рассмотрим самый правый элемент этого линейно упорядоченного множества. Поставим ему в соответствие дизъюнкцию формул, приписанных этому элементу.

Рассмотрим второй справа элемент. Возьмем формулу, соответствующую самому правому элементу, и навесим на нее $\Box_R$. Поставим второму справа элементу в соответствие дизъюнкцию этой формулы и формул, приписанных этому элементу.

Таким образом дойдем до начального элемента. Затем, таким же образом движемся от самого левого элемента до начального элемента, навешивая $\Box_L$. Начальному элементу соответствует следующая формула. Возьмем формулу, соответствующую соседнему справа элементу, и навесим на нее $\Box_R$. Возьмем формулу, соответствующую соседнему слева элементу, и навесим на нее $\Box_L$. Возьме дизъюнкцию полученных формул и формул приписанных начальному элементу. Заметим, что получили П-формулу.

Возьмем коньюнкцию формул, соответствующим всем описанным выше расширениям отношения данной структуры. Эта коньюнкция опровергается на элементе модели тогда и только тогда, когда существует опровергающая конфигурация с этим начальным элементом и данной структурой.

ВТОРОЙ АЛГОРИТМ. Возьмем структуру. Склеим взаимнодостижимые элементы. Если после этого получится частично упорядоченное множество "без циклов", то строим формулу, двигаясь от вершин к начальному элементу. Если "циклы"остались, то доупорядочиваем всеми возможными способами до частично упорядоченного множества "без циклов"и для каждого доупорядочения строим формулу. Возьмем коньюнкцию формул, соответствующих всем доупорядочениям данной структуры.

Имеется конечное число опровергающих структур. В качестве $\omega(q_1, \ldots, q_n)$ рассмотрим коньюнкцию формул, сответствующих этим структурам. Эта коньюнкция является П формулой и опровергается на элементе $x$ линейно упорядоченной модели $< W, \leq, v >$ тогда и только тогда, когда существует опровергающая конфигурация с начальным элементом $x$. По лемме 8 в любой конечной линейно упорядоченной модели $< W, \leq, v >$ эта коньюнкция будет определять наименьшую неподвижную точку, Теорема доказана.

Аналогично доказывается

**Теорема 9** *Для любого позитивного* П*-оператора* $F_\varphi$ *существует* П*-формула ω, определяющая наименьшую неподвижную точку этого оператора в любой конечной строго линейно упорядоченной модели* $< W, <, v >$.

Можно построить пример оператора, который не имеет единой определяющей П-формулы для конечных строго линейно упорядоченных моделей и конечных линейно упорядоченных моделей.

Шкала $< Z, \leq >$ состоит из целых чисел с естественным линейным порядком, $< Z, < >$ – с естественным строгим линейным порядком, $< N, \leq >$ – из натуральных чисел с естественным линейным порядком, $< N', \leq >$ – с обратным линейным порядком $\ldots \leq 2' \leq 1' \leq 0'$, $< N, < >$ – с естественным строгим линейным порядком, $< N', < >$ – с обратным строгим линейным порядком $\ldots < 2' < 1' < 0'$.

**Теорема 10** *Для любого позитивного* П*-оператора* $F_\varphi$ *существует конечное множество* П*-формул такое, что для любой модели* $< Z, \leq, v >$ *наименьшая неподвижная точка определяется формулой из этого множества.*

Можно построить пример, показывающий, что вообще говоря, нельзя обойтись одной П-формулой.

Теоремы, аналогичные теореме 10, верны для моделей $< Z, <, v >$, $< N, \leq, v >$, $< N', \leq, v >$, $< N, <, v >$, $< N', <, v >$.

Упоминаемые здесь временные логики можно найти в [1].

Логика $LinTGr_2$ характеризуется классом всех конечных линейно упорядоченных шкал [1]. Поэтому из теоремы 1 получаем

**Следствие 11** *Для любой* П*-формулы* $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$*, позитивной по p, существует* П*-формула* $\omega(q_1, \ldots, q_n)$ *такая, что следующие формулы содержатся в* $LinTGr_2$

$$\omega \equiv \varphi(\omega, q_1, \ldots, q_n),$$

$$\Box(p \equiv \varphi(p, q_1, \ldots, q_n)) \to \Box(\omega \to p).$$

Кроме того известно [1], что

1) логика $LinW$ характеризуется классом всех конечных строго линейно упорядоченных шкал,

2) логика $LinTDum$ характеризуется шкалой $< Z, \leq >$,

3) логика $LinZD$ характеризуется шкалой $< Z, < >$,

4) логика $LinTDumM_0$ характеризуется шкалой $< N, \leq >$,



5) логика $LinTDumM_1$ характеризуется шкалой $< N', \leq >$,

6) логика $LinZD_1E_0$ характеризуется шкалой $< N, < >$,

7) логика $LinZD_0E_1$ характеризуется шкалой $< N', < >$.

Из этих характеризаций получаем аналогичные следствия для логик.

## Литература

[1] K. Segerberg, Modal logics with linear alternative relations, Theoria, 36(1970), N3, 301–322.

# Максимальные порядки на группах Длаба

**Медведев Н.Я.**

Медведев Николай Яковлевич
656010, Барнаул,
ул. Горно-Алтайская 21, кв. 100
дом. тел. (3852) 77-70-21

В работе приведено описание максимальных частичных порядков и минимальных изолированных частичных порядков групп Длаба [1] $D_H(\mathbf{I})$ , $D_{H*}(\mathbf{I})$ , $D_{*H}(\mathbf{I})$, $\bar{D}_H(\mathbf{I})$ единичного интервала $\mathbf{I} = [0,1]$ и $D_H$ , $D_{H*}$ расширенной действительной прямой $\bar{\mathbf{R}}$ , где $H$ – подгруппа ранга 1 мультипликативной группы положительных действительных чисел. Доказательства некоторых утверждений, ввиду их громоздкости, опущены.

Отметим, что ранее Ч.Холландом [2] было получено описание минимальных и максимальных частичных порядков группы $A(\mathbf{R})$ всех порядковых автоморфизмов линейно упорядоченного множества действительных чисел $\mathbf{R}$ .

## 1. Определения и вспомогательные результаты

Группа $G$ называется частично упорядоченной, если на ней определено отношение частичного порядка $\le$ , устойчивое относительно умножения слева и справа на элементы группы $G$ , то есть для любых $x, y, z \in G$ если $x \le y$ , то $zx \le zy$ и $xz \le yz$ . Хорошо известно, что любой частичный порядок группы $G$ единственным образом определяется полугруппой положительных элементов и что любая чистая инвариантная полугруппа $P$ группы $G$ определяет единственным образом частичный порядок на группе $G$ , при котором $P$ является полугруппой положительных элементов [3] (с. 16). Поэтому в дальнейшем мы определяем частичные порядки на группе либо задавая отношение $\le$ , либо определяя чистую инвариантную полугруппу.

Все необходимые факты по упорядоченным группам можно найти в [3] – [5], по теории групп – в [6].

Всюду в работе $\mathbf{R}$ обозначает естественно линейно упорядоченное множество действительных чисел, $\mathbf{I} = [0,1]$ — замкнутый единичный интервал $\mathbf{R}$ , $\bar{\mathbf{R}} = -\infty \cup \mathbf{R} \cup +\infty$ – естественно линейно упорядоченное расширенное множество действительных чисел, $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел.

Символ $S_G(M)$ обозначает инвариантную полугруппу группы $G$ , порожденную подмножеством $M$ . Для любого подмножества $X$
группы $G$ положим

$$I(X) = \{g \in G |\ g^n \in X \text{ для некоторого } n \in \mathbf{N}\}$$

Через $S$ обозначим множество всех монотонно возрастающих (не более, чем счетных) последовательностей $\Sigma$ ,

$$\Sigma = \{\xi_\iota | 1 \le \iota \le \tau, \text{ где } \iota, \tau \text{ - ординалы, } \xi_\iota \in \mathbf{I}(\bar{\mathbf{R}})\}$$

всех возможных типов $\tau$ вполне упорядоченных последовательностей, обладающих наибольшим элементом и таких, что $0 < \xi_\sigma (-\infty < \xi_\sigma)$ $\xi_\sigma = \sup\{\xi_\iota | \iota < \sigma\}$ для

*Работа поддержана РФФИ (грант N 99-01-00156) и грантовым центром НГУ Минобразования РФ (грант №1)



каждого предельного числа $\sigma$ , $\sigma \le \tau$ . Пусть $H$ — произвольная подгруппа мультипликативной группы положительных действительных чисел. Через $D_H(\mathbf{I})$ ($D_{H*}$) обозначим множество всех монотонно возрастающих функций $(x)f$ из группы порядковых автоморфизмов $\mathbf{I}$ ($\bar{\mathbf{R}}$) , таких, что для $f$ существует последовательность $\Sigma_f$ , $\Sigma_f = \{\xi_\iota | \iota \le \tau\}$ из $S$ такая, что $(\xi)f = \xi$ для всех $\xi$ , $\xi \notin [\xi_1, \xi_\tau]$ , $0 \le \xi_1$, $\xi_\tau \le 1$ ($-\infty \le \xi_1$, $\xi_\tau \le +\infty$) и $f$ — линейная функция на каждом отрезке $[\xi_\iota, \xi_{\iota+1}]$ , причем значения правой производной $(x)f'^m$ функции $f$ в точках $\xi_\iota$
содержатся в подгруппе $H$ . Числа $\xi_\iota$ называем *точками излома* функции $f$ . Эти упорядочиваемые группы были определены ранее Длабом в [1].

Подгруппа $D_H(\mathbf{I})$ ( $D_H$ ) в группе $\bar{D}_H(\mathbf{I})$ ( $\bar{D}_H$ ) определяются следующим образом: неединичный элемент $f$ принадлежит $D_H(\mathbf{I})$
($D_H$) тогда и только тогда, когда $0 < \xi_1 < \xi_\tau < 1$ ( $-\infty < \xi_1 < \xi_\tau < +\infty$ ).

Подгруппа $D_{H*}(\mathbf{I})$ ( $D_{H*}$ ) в группе $\bar{D}_H(\mathbf{I})$ ( $\bar{D}_H$ ) определяются следующим образом: неединичный элемент $f$ принадлежит $D_{H*}(\mathbf{I})$ ($D_{H*}$) тогда и только тогда, когда $0 < \xi_1 < \xi_\tau \le 1$ ( $-\infty < \xi_1 < \xi_\tau \le +\infty$ ).

Подгруппа $D_{*H}(\mathbf{I})$ ( $D_{*H}$ ) в группе $\bar{D}_H(\mathbf{I})$ ( $\bar{D}_H$ ) определяются следующим образом: неединичный элемент $f$ принадлежит $D_{*H}(\mathbf{I})$ ($D_{*H}$) тогда и только тогда, когда $0 \le \xi_1 < \xi_\tau < 1$ ( $-\infty \le \xi_1 < \xi_\tau < +\infty$ ).

Очевидно, что подгруппы $D_H(\mathbf{I})$ , $D_{*H}(\mathbf{I})$ , $D_{H*}(\mathbf{I})$ ( $D_H$ , $D_{*H}$ , $D_{H*}$ ) являются собственными нормальными подгруппами в группе $\bar{D}_H(\mathbf{I})$ ( $\bar{D}_H$ ).

Длабом [1] показано, что для любой подгруппы $H$ ранга 1 мультипликативной группы положительных действительных чисел группа $D_H(\mathbf{I})$ допускает два различных линейных порядка. Для группы $D_H$ аналогичное утверждение доказано В.М.Копытовым [4, с.131]. Эти два порядка определяются следующим образом. Для произвольного элемента $f \in D_H$ полагаем $f > e$ ($f >' e$) при порядке $P_0$ ($P_0^{-1}$) если и только если значение правой производной $(\xi_1)f'^m$ в первой точке излома $\xi_1 \in \Sigma_f$ больше (меньше) 1 при линейном порядке группы $H$ . В работе [7] автором совместно с А.В.Зенковым показано, что для любой подгруппы $H$ ранга 1 мультипликативной группы положительных действительных чисел группы $D_{H*}(\mathbf{I})$ и $D_{H*}$ имеют в точности два различных линейных порядка, определяемых (как и в группах $D_H(\mathbf{I})$ , $D_H$ ) значением правой производной в первой точке излома. Эти порядки обозначим $P_*$ и $P_*^{-1}$ соответственно. В этой же работе показано, что группы $D_{*H}(\mathbf{I})$ и $\bar{D}_H(\mathbf{I})$ имеют четыре различных линейных порядка, а мощность множества различных линейных порядков групп $\bar{D}_H$ и $\bar{D}_{*H}$ несчетна.

Открытый интервал $(b, c) \subseteq \mathbf{I}(\bar{\mathbf{R}})$ называется *опорным* интервалом функции $(x)f$ , если $(b)f = b$ , $(c)f = c$ и $(x)f \ne x$ для любого $x \in (b, c)$ . Числа $b$ и $c$ соответственно будем называть левым и правым концом опорного интервала $(b, c)$ . Очевидно, что для всех точек $x$ из опорного интервала $(b, c)$ выполняется $(x)f > x$ или $(x)f < x$ . Естественно упорядоченное множество концов опорных интервалов функции $(x)f$ обозначим через $A_f$ . В дальнейшем точку первого излома (левый конец первого опорного интервала) функции $(x)f$ будем обозначать через $b_1$ .

Пусть $G$ – одна из групп $D_{*H}(\mathbf{I})$ , $D_{H*}(\mathbf{I})$ , $D_H(\mathbf{I})$ , $\bar{D}_H(\mathbf{I})$, $D_{H*}$ , $D_H$ . Будем говорить, что элементы $f$ и $g$ из $G$ имеют одинаковые *базисные характеристики*, если существует элемент $h$ из группы $G$ такой, что $(A_f)h = A_g$ , $(b_\alpha)f'^m = ((b_\alpha)h)g'^m$ , где $b_\alpha$ – левый конец опорного интервала $(b_\alpha, c_\alpha) \in A_f$ функции $(x)f$ . В [1] и [4] доказано, что элементы $f$ и $g$ группы $G$ сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые базисные характеристики.

Хорошо известно, что множество всех частичных порядков в любой группе замкнуто относительно произвольных пересечений и, следовательно, образует полную нижнюю полурешетку относительно пересечения. Из лемме Цорна следует, что любой частичный порядок содержится в некотором максимальном частичном порядке. Те же самые утверждения выполняются и для изолированных частичных порядков группы. Тривиальный частичный порядок $P = \{e\}$ является наименьшим частичным порядком в любой группе и этот же тривиальный частичный порядок является наименьшим изолированным частичным порядком в любой упорядочиваемой группе. В общем случае минимальных (изолированных) нетривиальных частичных порядков может и не быть как, например, в случае аддитивной группы целых чисел, но если они есть, то мощность множества всех минимальных (изолированных) нетривиальных частичных порядков либо четное натуральное число, либо бесконечна. Отметим также, что любая нильпотентная группа без кручения не имеет минимальных нетривиальных частичных порядков.

Следующее утверждение показывает, что в группах Длаба нет нетривиальных минимальных частичных порядков.

**Предложение 1.1.** *Для любой подгруппы $H$ мультипликативной группы положительных действительных чисел любая подгруппа групп $\bar{D}_H(\mathbf{I})$, $D_{H*}$ не имеет нетривиальных минимальных частичных порядков.*

**Следствие 1.1.** *Свободная группа $F_n$ конечного или счетного ранга $n$ группа Томпсона $G_2 = \langle a, b \mid [a, b^2a^{-1}b^{-1}] = [a, b^4a^{-1}b^2] = e \rangle$ не имеют нетривиальных минимальных частичных порядков.*

**Доказательство 1.1.** *Действительно, в [1] и [9] показано, что эти группы изоморфно вложимы в группу $D_H$ и, значит, не имеют нетривиальных минимальных частичных порядков.*

Как отмечалось ранее группы Длаба единичного интервала $\mathbf{I} = [0, 1]$ и расширенной действительной прямой $\bar{\mathbf{R}}$ являются упорядочиваемыми группами, поэтому тривиальный частичный порядок $P = \{e\}$ является в них наименьшим изолированным частичным порядком.

Для произвольного элемента $g$ группы $G$ через $Is_G(g)$ обозначим пересечение всех инвариантных изолированных полугрупп группы $G$, содержащих элемент $g$ и единичный элемент $e$ группы $G$. Другими словами $Is_G(g)$ является пересечением всех изолированных частичных порядков, содержащих элемент $g$. В дальнейшем будем называть $Is_G(g)$ ***изолированным частичным порядком, порожденным элементом*** $g$.

Теперь для произвольного элемента $g$ группы $G$ рассмотрим следующие подмножества:

$$J_1 = I(g, e), J_2 = S_G(J_1) \ \ldots, J_{2n} = S_G(J_{2n-1}),\ J_{2n+1} = I(J_{2n})(n \in \mathrm{N})$$

Очевидно, что

$$J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots \subseteq J_k \subseteq J_{k+1} \subseteq \ldots$$

Положим $Q(g) = \bigcup\limits_{k \in \mathrm{N}} J_k$.

**Предложение 1.2.** *Пусть $G$ – упорядочиваемая группа и $g$ – произвольный неединичный элемент группы $G$. Тогда $Q(g) = Is_G(g)$.*



## 2. Группы Длаба интервала [0, 1]

В этом разделе и далее мы считаем, что $H$ является подгруппой ранга 1 мультипликативной группы положительных действительных чисел.

Пусть $0 < b < c < 1$ и $r \in H$, $r > 1$. Положим $(x)q_1$ равной произвольной функции из группы $D_H(\mathbf{I})$, удовлетворяющей следующим условиям: 1) $supp(q_1) = (b, c)$, 2) $(b)q_1'^{\,n} = r$, $r \in H$, $r > 1$. Обозначим через $Q_1 = Is_{D_H(\mathbf{I})}(q_1)$ изолированный частичный порядок группы $D_H(\mathbf{I})$, порожденный любым элементом $q_1$.

**Лемма 2.1.** *Изолированный частичный порядок $Q_1$ группы $D_H(\mathbf{I})$, порожденный элементом $q_1$ является минимальным нетривиальным изолированным частичным порядком в группах $D_{*H}(\mathbf{I})$, $D_{H*}(\mathbf{I})$, $D_H(\mathbf{I})$, $\bar{D}_H(\mathbf{I})$.*

Выберем числа $b, c, d$ из интервала $\mathbf{I} = [0, 1]$ такие, что $0 < b < c < d < 1$ и положительные действительные числа $r_1, r_2 \in H$, такие, что $r_1 > 1$, $r_2 < 1$. Положим $(x)q_2$ равной произвольной функции из группы $D_H(\mathbf{I})$, удовлетворяющей следующим условиям: 1) $supp(q_2) = (b, c) \cup (c, d)$, 2) $(b)q_2'^{\,n} = r_1$, $(c)q_2'^{\,n} = r_2$, $r_1, r_2 \in H$, $r_1 > 1$, $r_2 < 1$.

**Лемма 2.2.** *Инвариантная полугруппа $S_{D_H(\mathbf{I})}(q_2)$ группы $D_H(\mathbf{I})$, порожденная элементом $(x)q_2$ содержит все элементы $g$ группы $D_H(\mathbf{I})$ удовлетворяющие следующим условиям:1) $supp(g) =$
$(\hat{b}_1, \hat{c}_1) \cup (\hat{b}_2, \hat{c}_2)$, где $\hat{b}_1, \hat{c}_1, \hat{b}_2, \hat{c}_2$ – произвольные числа из интервала $\mathbf{I} = [0, 1]$, такие, что $0 < \hat{b}_1 < \hat{c}_1 = \hat{b}_2 < \hat{c}_2 < 1$, 2) $(\hat{b}_1)g'^{\,n} = r_1$ и $(\hat{b}_2)g'^{\,n} = h$, $h \in H$, $h < 1$.*

Обозначим через $Q_2 = Is_{D_H(\mathbf{I})}(q_2)$ изолированный частичный порядок группы $D_H(\mathbf{I})$, порожденный любым элементом $q_2$.

**Лемма 2.3.** *Изолированный частичный порядок $Q_2$ является минимальным нетривиальным изолированным частичным порядком в группах $D_H(\mathbf{I})$ $D_{*H}(\mathbf{I})$, $D_{H*}(\mathbf{I})$, $\bar{D}_H(\mathbf{I})$.*

Пусть $0 < b < 1$ и $r \in H$, $r > 1$. Положим $(x)q_3$ равной произвольной функции из группы $D_{H*}(\mathbf{I})$, удовлетворяющей следующим условиям: 1) $supp(q_3) = (b, 1)$, 2) $(b)q_3'^{\,n} = r$, $r \in H$, $r > 1$. Обозначим через $Q_3 = Is_{D_{H*}(\mathbf{I})}(q_3)$ изолированный частичный порядок группы $D_{H*}(\mathbf{I})$, порожденный любым элементом $q_3$.

**Лемма 2.4.** *Изолированный частичный порядок $Q_3$ является минимальным нетривиальным изолированным частичным порядком в группах $D_{H*}(\mathbf{I})$, $\bar{D}_H(\mathbf{I})$.*

Выберем числа $b, c$ из интервала $\mathbf{I} = [0, 1]$ такие, что $0 < b < c < 1$. Положим $(x)q_4$ равной произвольной функции из группы $D_{H*}(\mathbf{I})$, удовлетворяющей следующим условиям: 1) $supp(q_4) = (b, c) \cup (c, 1)$, 2) $(b)q_4'^{\,n} = r_1$, $(c)q_3'^{\,n} = r_2$, $r_1, r_2 \in H$, $r_1 > 1$, $r_2 < 1$. Обозначим через $Q_4 = Is_{D_{H*}(\mathbf{I})}(q_4)$ изолированный частичный порядок группы $D_{H*}(\mathbf{I})$, порожденный любым элементом $q_4$.

**Лемма 2.5.** *Изолированный частичный порядок $Q_4$ является минимальным нетривиальным изолированным частичным порядкомв группах $D_{H*}(\mathbf{I})$, $\bar{D}_H(\mathbf{I})$.*

Пусть $0 < c < 1$ b $r \in H$, $r > 1$. Положим $(x)q_5$ равной произвольной функции из группы $D_{*H}(\mathbf{I})$, такой, что $supp(q_5) = (0, c) \cup (c, 1)$ и $(0)q_5'^{\,n} = r$.

Теперь для чисел $b, c$ таких, что $0 < b < c < 1$ и $r_1, r_2 \in H$, $r_1 > 1$, $r_2 < 1$ через $(x)q_6$ обозначим функцию из группы $D_{*H}(\mathbf{I})$, такую, что: 1) $supp(q_6) = (0, b) \cup (b, c)$, 2) $(0)q_6'^{\,n} = r_1$, $(b)q_6'^{\,n} = r_2$.

Обозначим через $Q_5$ и $Q_6$ изолированные частичные порядки группы $D_{H*}(\mathbf{I})$, порожденные элементами $q_5$ и $q_6$ соответственно.

**Лемма 2.6.** *Изолированные частичные порядки $Q_5$ и $Q_6$ являются минимальными нетривиальными изолированным частичными порядками в группах $D_{*H}(\mathbf{I})$ , $D_H(\mathbf{I})$*

Теперь для произвольного числа $r \in H$ рассмотрим функцию $q_7$ такую, что $supp(q_7)$ $(0,1)$ и $(0)q_7'^{n} = r$ . Через $Q_7$ обозначим изолированный частичный порядок группы $D_H(\mathbf{I})$ , порожденный элементом $q_7$ .

Через $Q_8$ обозначим изолированный частичный порядок группы $D_H(\mathbf{I})$ , порожденный элементом $q_8$ , таким, что: 1) $supp(q_8) = (0,b) \cup (b,1)$ $(0 < b < 1)$ 2) $(0)q_8'^{n} = r_1$, $(b)q_8'^{n} = r_2$ $(r_1, r_2 \in H,\ r_1 > 1,\ r_2 < 1)$ .

**Лемма 2.7.** *Изолированные частичные порядки $Q_7$ и $Q_8$ являются минимальными нетривиальными изолированным частичными порядками в группе $D_H(\mathbf{I})$ .*

**Теорема 2.1.** *1) Любой минимальный нетривиальный изолированный частичный порядок группы $D_H(\mathbf{I})$ совпадает с одним из порядков $Q_1^{\pm 1}$, $Q_2^{\pm 1}$ .*

*2) Любой минимальный нетривиальный изолированный частичный порядок группы $D_{H*}(\mathbf{I})$ совпадает с одним из порядков $Q_1^{\pm 1}$, $Q_2^{\pm 1}$, $Q_3^{\pm 1}$, $Q_4^{\pm 1}$ .*

*3) Любой минимальный нетривиальный изолированный частичный порядок группы $D_{*H}(\mathbf{I})$ совпадает с одним из порядков $Q_1^{\pm 1}$, $Q_2^{\pm 1}$, $Q_5^{\pm 1}$, $Q_6^{\pm 1}$ .*

*4) Любой минимальный нетривиальный изолированный частичный порядок группы $D_H(\mathbf{I})$ совпадает с одним из порядков $Q_1^{\pm 1}$, $Q_2^{\pm 1}$, $Q_3^{\pm 1}$, $Q_4^{\pm 1}$ , $Q_5^{\pm 1}$, $Q_6^{\pm 1}$ , $Q_7^{\pm 1}$, $Q_8^{\pm 1}$ .*

**Лемма 2.8.** *Пусть $G$ - одна из групп Длаба $D_H(\mathbf{I})$ , $D_{*H}(\mathbf{I})$, $D_{H*}(\mathbf{I})$, $D_H(\mathbf{I})$, $M$ - произвольный максимальный частичный порядок группы $G$ и $M$ изолирован в $G$. Тогда для любого минимального изолированного частичного порядка $P$ группы $G$ выполняется либо включение $P \subseteq M$ , либо $P^{-1} \subseteq M$ .*

**Доказательство 2.1.** *Поскольку $M$ - изолирован и $P \not\subseteq M$ , то $M \cap P$ тоже является изолированным частичным порядком. Так как $M \cap P \subseteq P$, $P \neq M \cap P$, то ввиду минимальности $P$ выполняется $M \cap P = \{e\}$ . Тогда $M \cdot P^{-1}$ является частичным порядком. Поскольку $M$ максимален, то $M = M \cdot P^{-1}$ и $M \supseteq P^{-1}$ .*

**Лемма 2.9.** *Пусть $G$ - одна из групп Длаба $D_H(\mathbf{I})$ , $D_{*H}(\mathbf{I})$, $D_{H*}(\mathbf{I})$, $D_H(\mathbf{I})$, и $M_1$ , $M_2$ - максимальные частичные порядки группы $G$ , причем $M_1$, $M_2$ изолированы в $G$. Если множества минимальных изолированных частичных порядков, содержащихся в $M_1$ и $M_2$ совпадают, то $M_1 = M_2$ .*

**Доказательство 2.2.** *Пусть $G = D_H(\mathbf{I})$ , $M_1 \neq M_2$ и $g \in M_1 \setminus M_2$ . Тогда ввиду максимальности порядка $M_2$ выполняется $e \in S_{D_H(\mathbf{I})}(g, M_2)$ . Поэтому $m \in S_{D_H(\mathbf{I})}(g^{-1})$ для некоторого элемента $m \in M_2$ . Поэтому для некоторого минимального изолированного частичного порядка $P$ выполняются включения*

$$P \subseteq Is_{D_H(\mathbf{I})}(m) \subseteq Is_{D_H(\mathbf{I})}(g^{-1}) \subseteq M_1^{-1}$$

*Таким образом $P^{-1} \subseteq M_1$ и по нашему предположению, $P^{-1} \subseteq M_2$ . Но это не возможно, поскольку $P \subseteq Is_{D_H(\mathbf{I})}(m) \subseteq M_1$ . Справедливость утверждения для остальных групп рассматриваются аналогично.*

Таким образом в группах $D_H(\mathbf{I})$, $D_{*H}(\mathbf{I})$, $D_{H*}(\mathbf{I})$, $D_H(\mathbf{I})$, может быть соответственно не более 4, 16, 16 и 256 различных частичных порядков, являющихся одновременно максимальными и изолированными.

В группе $D_H(\mathbf{I})$ определим частичный порядок $R^+ = \{g \in D_H(\mathbf{I}) \mid \exists \alpha \in (0,1)((\alpha)g = \alpha$ и $\forall \beta \in (0,1), \beta \geq \alpha,\ (\beta)g \geq \beta)\}$ .



**Теорема 2.2.** *Группа $D_H(\mathbf{I})$ имеет в точности 4 различных частичных порядка, являющихся максимальными и изолированными.*

**Теорема 2.3.** *Группа $D_{H*}(\mathbf{I})$ имеет в точности 10 различных частичных порядка, являющихся максимальными и изолированными.*

**Доказательство 2.3.** *Пусть $M$ - произвольный максимальный и изолированный частичный порядок. Как отмечалось ранее, возможны 16 различных случаев.*

*1) $M \supseteq Q_1^{+1}, Q_2^{+1}, Q_3^{+1}, Q_4^{+1}$ . В этом случае $M = P_*$ . Максимальность и изолированность линейного порядка $P_*$ очевидна.*

*2) $M \supseteq Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, Q_3^{-1}, Q_4^{-1}$ . В этом случае $M = P_*^{-1}$ . Максимальность и изолированность линейного порядка $P_*^{-1}$ очевидна.*

*3) $M \supseteq Q_1^{+1}, Q_2^{+1}, Q_3^{+1}, Q_4^{-1}$ . Определим частичный порядок $M$ на группе $D_{H*}(\mathbf{I})$ по следующему правилу: $g \in M$ если $g \in D_H(\mathbf{I})$ и $g \in P_0$ или $g \in D_{H*}(\mathbf{I}) \setminus D_H(\mathbf{I})$ и $g \in R^+$ . Непосредственная проверка показывает что $M$ является максимальным и изолированным частичным порядком на группе $D_{H*}(\mathbf{I})$ .*

*4) $M \supseteq Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, Q_3^{-1}, Q_4^{+1}$ . В этом случае $M$ совпадает с порядком, обратном к порядку, определенному в случае 3).*

*5) $M \supseteq Q_1^{+1}, Q_2^{+1}, Q_3^{-1}, Q_4^{+1}$ . Определим частичный порядок $M$ на группе $D_{H*}(\mathbf{I})$ по следующему правилу: $g \in M$ если $g \in D_H(\mathbf{I})$ и $g \in P_0$ или $g \in D_{H*}(\mathbf{I}) \setminus D_H(\mathbf{I})$ и $g \in R^-$ . Непосредственная проверка показывает что $M$ является максимальным и изолированным частичным порядком на группе $D_{H*}(\mathbf{I})$ .*

*6) $M \supseteq Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, Q_3^{+1}, Q_4^{-1}$ . В этом случае $M$ совпадает с порядком, обратном к порядку, определенному в случае 5).*

*7) $M \supseteq Q_1^{+1}, Q_2^{-1}, Q_3^{+1}, Q_4^{+1}$ . Несложно заметить, что такого порядка быть не может.*

*8) $M \supseteq Q_1^{-1}, Q_2^{+1}, Q_3^{-1}, Q_4^{-1}$ . Несложно заметить, что такого порядка быть не может.*

*9) $M \supseteq Q_1^{-1}, Q_2^{+1}, Q_3^{+1}, Q_4^{+1}$ . Несложно заметить, что такого порядка быть не может.*

*10) $M \supseteq Q_1^{+1}, Q_2^{-1}, Q_3^{-1}, Q_4^{-1}$ . Такого порядка нет.*

*11) $M \supseteq Q_1^{+1}, Q_2^{+1}, Q_3^{-1}, Q_4^{-1}$ . Несложно заметить, что такого порядка быть не может.*

*12) $M \supseteq Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, Q_3^{+1}, Q_4^{+1}$ . Такого порядка нет.*

*13) $M \supseteq Q_1^{+1}, Q_2^{-1}, Q_3^{+1}, Q_4^{-1}$ . Положим $M = R^+ \cap D_{H*}(\mathbf{I})$ . Непосредственная проверка показывает что $M$ является максимальным и изолированным частичным порядком на группе $D_{H*}(\mathbf{I})$ .*

*14) $M \supseteq Q_1^{-1}, Q_2^{+1}, Q_3^{-1}, Q_4^{+1}$ . В этом случае $M = R^+ \cap D_{H*}(\mathbf{I})^{-1}$ .*

*15) $M \supseteq Q_1^{-1}, Q_2^{+1}, Q_3^{+1}, Q_4^{-1}$ . Определим частичный порядок $M$ на группе $D_{H*}(\mathbf{I})$ по следующему правилу: $g \in M$ если $g \in D_H(\mathbf{I})$ и $g \in R^-$ или $g \in D_{H*}(\mathbf{I}) \setminus D_H(\mathbf{I})$ и $g \in R^+$ . Непосредственная проверка показывает что $M$ является максимальным и изолированным частичным порядком на группе $D_{H*}(\mathbf{I})$ .*

*16) $M \supseteq Q_1^{+1}, Q_2^{-1}, Q_3^{-1}, Q_4^{+1}$ . В этом случае $M$ совпадает с порядком, обратным к порядку, определенному в случае 15).*

**Теорема 2.4.** *Группа $D_{*H}(\mathbf{I})$ имеет в точности 10 различных частичных порядка, являющихся максимальными и изолированными.*

**Доказательство 2.4.** *Пусть $M$ - произвольный максимальный и изолированный частичный порядок. Как отмечалось ранее, возможны 16 различных случаев.*

*1) $M \supseteq Q_1^{+1}, Q_2^{+1}, Q_5^{+1}, Q_6^{+1}$. В этом случае $M$ совпадает с линейным порядком, определяемым полугруппой положительных элементов ${}_*P$, состоящей из элементов, значение правой производной которых в первой точке излома больше либо равна 1. Максимальность и изолированность линейного порядка ${}_*P$ очевидна.*

*2) $M \supseteq Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, Q_5^{-1}, Q_6^{-1}$. В этом случае $M = {}_*P^{-1}$. Максимальность и изолированность линейного порядка ${}_*P^{-1}$ очевидна.*

*3) $M \supseteq Q_1^{+1}, Q_2^{+1}, Q_5^{+1}, Q_6^{-1}$. Такого порядка нет.*

*4) $M \supseteq Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, Q_5^{-1}, Q_6^{+1}$. Такого порядка нет.*

*5) $M \supseteq Q_1^{+1}, Q_2^{+1}, Q_5^{-1}, Q_6^{+1}$. Такого порядка нет.*

*6) $M \supseteq Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, Q_5^{+1}, Q_6^{-1}$. Такого порядка нет.*

*7) $M \supseteq Q_1^{+1}, Q_2^{-1}, Q_5^{+1}, Q_6^{+1}$. Определим частичный порядок $M$ на группе $D_{*H}(\mathbf{I})$ правилу: $g \in M$ если $(0)g' > 1$ или $g \in D_H(\mathbf{I})$ и $g \in R^+$. Непосредственная проверка показывает что $M$ является максимальным и изолированным частичным порядком на группе $D_{*H}(\mathbf{I})$.*

*8) $M \supseteq Q_1^{-1}, Q_2^{+1}, Q_5^{-1}, Q_6^{-1}$. В этом случае $M$ совпадает с порядком, обратным к порядку, определенному в случае 7).*

*9) $M \supseteq Q_1^{-1}, Q_2^{+1}, Q_5^{+1}, Q_6^{+1}$. Определим частичный порядок $M$ на группе $D_{*H}(\mathbf{I})$ правилу: $g \in M$ если $(0)g' > 1$ или $g \in D_H(\mathbf{I})$ и $g \in R^-$. Непосредственная проверка показывает что $M$ является максимальным и изолированным частичным порядком на группе $D_{*H}(\mathbf{I})$.*

*10) $M \supseteq Q_1^{+1}, Q_2^{-1}, Q_5^{-1}, Q_6^{-1}$. В этом случае $M$ совпадает с порядком, обратным к порядку, определенному в случае 9).*

*11) $M \supseteq Q_1^{+1}, Q_2^{+1}, Q_5^{-1}, Q_6^{-1}$. Определим линейный порядок $M$ на группе $D_{*H}(\mathbf{I})$ правилу: $g \in M$ если $(0)g' < 1$ или $g \in D_H(\mathbf{I})$ и $g \in P_0$. Максимальность и изолированность линейного порядка $M = M$ очевидна.*

*12) $M \supseteq Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, Q_5^{+1}, Q_6^{+1}$. В этом случае $M$ совпадает с порядком, обратным к порядку, определенному в случае 11).*

*13) $M \supseteq Q_1^{+1}, Q_2^{-1}, Q_5^{+1}, Q_6^{-1}$. В этом случае положим $M = R^+ \cap D_{*H}(\mathbf{I})$. Непосредственная проверка показывает что $M$ является максимальным и изолированным частичным порядком на группе $D_{*H}(\mathbf{I})$.*

*14) $M \supseteq Q_1^{-1}, Q_2^{+1}, Q_5^{-1}, Q_6^{+1}$. В этом случае $M$ совпадает с порядком, обратным к порядку, определенному в случае 13).*

*15) $M_{15} \supseteq Q_1^{-1}, Q_2^{+1}, Q_5^{+1}, Q_6^{-1}$. Такого порядка нет.*

*16) $M \supseteq Q_1^{+1}, Q_2^{-1}, Q_5^{-1}, Q_6^{+1}$. Такого порядка нет.*

**Теорема 2.5.** *Группа $\bar{D}_H(\mathbf{I})$ имеет в точности 40 различных частичных порядков, являющихся максимальными и изолированными.*

**Доказательство 2.5.** *Пусть $M$ – произвольный максимальный и изолированный частичный порядок группы $\bar{D}_H(\mathbf{I})$. Как отмечалось ранее, возможны 256 различных случаев. Доказательство состоит в детальном рассмотрении всех этих случаев и проводится аналогично доказательству теорем 2.2.– 2.4. Ограничимся лишь тем, что приведем список всех максимальных частичных изолированных порядков группы $\bar{D}_H(\mathbf{I})$. Этот список фактически совпадает со списком максимальных частичных порядков группы $A(\mathbf{R})$, приведенной в работе Холланда [2] при соответствующей модификации. Введем следующие обозначения:*

$L^+ = \{g \in D_H(\mathbf{I}) \mid (\xi_1)g'' > 1\}$,

$longL^+ = \{g \in \bar{D}_H(\mathbf{I}) \setminus D_{H*}(\mathbf{I})\} \cap L^+$,

$bL = D_{H*}(\mathbf{I})$, $b = D_H(\mathbf{I})$.



$R^+ = \{g \in \bar{D}_H(\mathbf{I}) \mid \exists\alpha(\alpha \in (0,1), (\alpha)g > \alpha$ и $\forall\beta \in (0,1), \beta \geq \alpha, (\beta)g \geq \beta)\}$,

$longR^+ = \{g \in D_H(\mathbf{I}) \setminus D_{*H}(\mathbf{I})\} \cap R^+$,

$bR = D_{*H}(\mathbf{I})$, $L^- = (L^+)^{-1}$, $R^- = (R^+)^{-1}$.

*В таблице используются следующие обозначения: слева стоят знаки, при которых минимальный изолированный порядок $Q_i (1 \geq i \geq 8)$ содержится в максимальном изолированном частичном порядке $M$, а справа – описание этого максимального изолированного частичного порядка.*

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Максимальные частичные порядки |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - | - | - | + | - | - | - | - | $longL^- \cup (bL \cap longR^-) \cup (b \cap L^-)$ |
| + | - | - | + | - | - | - | - | $longL^- \cup (bL \cap longR^-) \cup (b \cap R^+)$ |
| - | - | - | - | - | - | - | - | $L^-$ |
| - | - | + | - | - | - | - | - | $longL^- \cup (bL \cap longR^+) \cup (b \cap L^-)$ |
| + | - | + | - | - | - | - | - | $longL^- \cup (bL \cap longR^+) \cup (b \cap R^+)$ |
| - | + | - | + | - | - | - | - | $longL^- \cup (bL \cap longR^-) \cup (b \cap R^-)$ |
| + | + | - | + | - | - | - | - | $longL^- \cup (bL \cap longR^-) \cup (b \cap L^+)$ |
| + | + | + | + | - | - | - | - | $longL^- \cup (bL \cap L^+)$ |
| - | + | + | - | - | - | - | - | $longL^- \cup (bL \cap longR^+) \cup (b \cap R^-)$ |
| + | + | + | - | - | - | - | - | $longL^- \cup (bL \cap longR^+) \cup (b \cap L^+)$ |
| - | + | - | + | - | - | - | + | $longR^- \cup (bR \cap longL^-) \cup (b \cap R^-)$ |
| + | + | - | + | - | - | - | + | $longR^- \cup (bR \cap longL^-) \cup (b \cap L^+)$ |
| - | + | - | + | - | + | - | + | $R^-$ |
| - | + | - | + | + | + | - | + | $longR^- \cup (bR \cap longL^+) \cup (b \cap R^-)$ |
| + | + | - | + | + | + | - | + | $longR^- \cup (bR \cap longL^+) \cup (b \cap L^+)$ |
| - | - | - | + | - | - | - | + | $longR^- \cup (bR \cap longL^-) \cup (b \cap L^-)$ |
| + | - | - | + | - | - | - | + | $longR^- \cup (bR \cap longL^-) \cup (b \cap R^+)$ |
| + | - | - | + | + | - | - | + | $longR^- \cup (bR \cap R^+)$ |
| - | - | - | + | + | + | - | + | $longR^- \cup (bR \cap longL^+) \cup (b \cap L^-)$ |
| + | - | - | + | + | + | - | + | $longR^- \cup (bR \cap longL^+) \cup (b \cap R^+)$ |

*Кроме этих двадцати частичных порядков нужно добавить еще двадцать порядков, являющихся обратными к приведенным в таблице (нужно везде в таблице + заменить на -).*

Замечание. В таблице максимальных частичных порядков группы $A(\mathbf{R})$ приведенной в работе [2] (стр. 207) восьмая строка сверху приведена неверно. Вместо $longL^+ \cup (b \cap L^+)$ должно быть $longL^+ \cup (bL \cap L^+)$ (иначе частичный порядок, описанный в строке 7 строго содержит порядок из строки 8).

## 3. Группы Длаба числовой прямой

Для групп $D_H$, $D_{H*}$ рассуждения аналогичны проведенным. Рассмотрим $q_1^*, q_2^* \in D_H$, такие, что:

1) $(x)q_1^* = (x)q_1$ для всех $x \in \mathbf{I}$ и $(x)q_1^* = x$ для всех $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{I}$,

2) $(x)q_2^* = (x)q_2 =$ для всех $x \in \mathbf{I}$ и $(x)q_2^* = x$ для всех $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{I}$.

Обозначим через $Q_1^*$ и $Q_2^*$ изолированные порядки группы $D_H$, порожденные элементами $(x)q_1^*$, $(x)q_2^*$ соответственно. Несложно заметить, что $Q_1^*$ и $Q_2^*$ являются изолированными порядками также и группы $D_{H*}$.

Теперь определим функции $(x)q_3^*$ и $(x)q_4^*$.

Пусть $0 < b < c = +\infty$ и $r \in H,\ r > 1$. Положим $(x)q_5^*$ равной произвольной функции из группы $D_{H*}$, удовлетворяющей следующим условиям: 1) $A_{q_5^*} = (b, +\infty)$, 2) $(b)q_5^{*(n)} = r$, $r \in H,\ r > 1$. Обозначим через $Q_3 - Is_{D_{H*}}(q_5^*)$ изолированный частичный порядок группы $D_{H*})$, порожденный любым элементом $q_5^*$ и $e$.

Выберем действительные числа $b, c$, такие, что $0 < b < c < +\infty$. Положим $(x)q_4^*$ равной произвольной функции из группы $D_H(\mathbf{I})$, удовлетворяющей следующим условиям: 1) $A_{q_4} = (b, c) \cup (c, +\infty)$, 2) $(b)q_4^{*n} = r_1$, $(c)q_4^{*n} = r_2^{-1}$, где $r_1, r_2 \in H$, $r_1 > 1, r_2 < 1$. Обозначим через $Q_4$ изолированный частичный порядок группы $D_{H*}(\mathbf{I})$, порожденный любым элементом $q_4^*$ и $e$.

Отметим, что в книге [4] (стр. 130) для группы $D_H$ доказана справедливость утверждения, аналогичного предложению 3.3 из работы [1]. Для группы $D_{H*}$ выполнимость аналога предложения 3.3 работы [1] проверяется непосредственно.

**Теорема 3.1.** *1) Любой минимальный нетривиальный изолированный частичный порядок группы $D_H$ совпадает с одним из порядков $Q_1^{\pm}$, $Q_2^{\pm}$.*

*1) Любой минимальный нетривиальный изолированный частичный порядок группы $D_{H*}$ совпадает с одним из порядков $Q_1^{\pm}$, $Q_2^{\pm}$,*
*$Q_3^{\pm}$, $Q_4^{\pm}$.*

**Теорема 3.2.** *1) Группа $D_H$ имеет в точности 4 различных частичных порядка, являющихся максимальными и изолированными.*

*2) Группа $D_{H*}$ имеет в точности 10 различных частичных порядка, являющихся максимальными и изолированными.*

**Доказательство 3.1.** *Аналогично доказательству Теорем 2.2, 2.3.*

Отметим, что в [7] доказано, что группы Длаба расширенной числовой прямой $D_{*H}$ и $\bar{D}_H$ имеют несчетное множество различных линейных порядков. Поэтому результат, аналогичный теореме 2.3 для них неверен.

Теперь покажем, что требование изолированности в условиях теорем 2.2, 2.3 и 3.1 на самом деле излишне.

**Теорема 3.3.** *Для любой подгруппы $H$ ранга 1 мультипликативной группы положительных действительных чисел любой максимальный порядок на группах $D_H(\mathbf{I})$, $D_{H*}(\mathbf{I})$, $D_{*H}(\mathbf{I})$, $\bar{D}_H(\mathbf{I})$, $D_{H*}$, $D_H$ является изолированным.*

**Доказательство 3.2.** *По критерию Холлистера [8] в группе $G$ без кручения любой максимальный частичный порядок является изолированным, если и только если для любого неединичного элемента $g \in G$, любого натурального числа n и любого элемента $t \in S_G(g)$ выполняется $S_G(g^n) \cap S_G(t) \neq \emptyset$. Дальнейшее доказательство теоремы состоит в непосредственной проверке выполнимости этого критерия для групп Длаба.*

Из теоремы 3.3. непосредственно следует

**Теорема 3.4.** *1) Группы $D_H$ и $D_H(\mathbf{I})$ имеют в точности 4 различных максимальных частичных порядка и 4 различных минимальных изолированных частичных порядка.*

*2) Группы $D_{H*}$, $D_{H*}(\mathbf{I})$ и $D_{*H}(\mathbf{I})$ имеют в точности 10 различных максимальных частичных порядков и 8 различных минимальных изолированных частичных порядков.*

*3) Группа $D_H(\mathbf{I})$ имеет в точности 40 различных максимальных частичных порядков и 16 различных минимальных изолированных частичных порядков.*



ЛИТЕРАТУРА


1. Dlab V. *On a family of simple ordered groups.* J. Austral. Math. Soc., **8**, N 3 (1968), 591-608.
2. Holland C.W. *Partial orders of the group of automorphisms of the real line.* Contemporary Mathematics, **137**, (part 1) (1992), 197-207.
3. Копытов В.М., Медведев Н.Я. *Правоупорядоченные группы.* Новосибирск, Научная книга (НИИ МИОО НГУ), 1996.
4. Копытов В.М., *Решеточно упорядоченные группы.* М., Наука, 1984.
5. Kopytov V.M., Medvedev N.Ya. *The theory of lattice-ordered groups.* Kluwer Academic Publisher, Dordrecht-Boston-New York, 1994.
6. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. *Основы теории групп.* М.; Наука, 1977.
7. Зенков А.В., Медведев Н.Я. *О группах Длаба.* Алгебра и логика (в печати).
8. Hollister H.A. *Groups in which every maximal partial order is isolated.* Proc. Amer. Math. Soc., 19, (1968), 467-469.
9. Glass A.M.W. *Ordered permutation groups.* London Math. Soc. Lec. Notes Ser. 1981.
10. Brin M.G., Squier C.C. *Groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line.* Invent. Math. 79(1985), 485-498.

# О порождениях класса всех полигонов

**Е. В. Овчинникова**

Россия
630092 Новосибирск-92
НГТУ
Кафедра Алгебры и мат. логики
e-mail: algebra@nstu.ru

Напомним, что *полугруппой* называется алгебра с одной двухместной ассоциативной операцией. Полугруппа с единицей называется ***моноидом***.

Пусть $S$ — моноид, 1 — единица в $S$.

Левым *$S$-полигоном* называется алгебра ${}_SA = \langle A, \{f_s \mid s \in S\}\rangle$ с одноместными операциями, в которой для всех $s, t \in S$ выполняются следующие тождества:

$$\forall x\ (f_1(x) = x),$$

$$\forall x\ (f_s(f_t(x)) = f_{st}(x)).$$

В дальнейшем под полигонами будем понимать левые полигоны, символы $f_s$ будут часто отождествляться с символами $s$, и при этом вместо записи $f_s(x)$ будет использоваться запись $sx$.

Через $S\text{-}Act$ будем обозначать класс всех $S$-полигонов.

Пусть $\{{}_SA_i\}_{i\in I}$ — семейство $S$-полигонов, ${}_SA_i = \langle A_i, \{f_s^i \mid s \in S\}\rangle$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ для $i \neq j$, $i, j \in I$. Тогда на множестве $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ можно следующим образом определить структуру $S$-полигона:
для каждого $a \in A$ полагаем

$$f_s(a) = f_s^i(a),$$

если $a \in A_i$, $s \in S$. Полигон ${}_SA = \langle A, \{f_s \mid s \in S\}\rangle$ называется *дизъюнктным объединением* полигонов ${}_SA_i$ и обозначается через $\bigsqcup\limits_{i\in I} {}_SA_i$.

Напомним, что класс $K$ алгебр сигнатуры $\Sigma$ называется ***многообразием***, если $K$ состоит из всех алгебр, удовлетворяющих некоторой системе тождеств.



Обозначим через $T^n(\Sigma)$ множество всех термов сигнатуры $\Sigma$, зависящих от $n$ переменных, через $F_K(\alpha)$ — свободную алгебру многообразия $K$ с $\alpha$ свободными порождающими.

**Факт 1** [1, с. 169]. *Если $K$ — многообразие сигнатуры $\Sigma$, $t_1, t_2$ — термы из $T^n(\Sigma)$, то выполнимо*

$$K \models \forall x_1, \ldots, x_n\ (t_1(x_1, \ldots, x_n) = t_2(x_1, \ldots, x_n))$$

*тогда и только тогда, когда выполнимо*

$$F_K(n) \models t_1(a_1, \ldots, a_n) = t_2(a_1, \ldots, a_n),$$

*для свободных порождающих $a_1, \ldots, a_n$ алгебры $F_K(n)$.*

Для произвольного класса алгебр $K$ обозначим через
$\mathbf{S}(K)$ класс всех алгебр, изоморфных подалгебрам из $K$,
$\mathbf{H}(K)$ — класс всех алгебр, изоморфных гомоморфным образам алгебр из $K$,
$\mathbf{P}(K)$ — класс всех алгебр, изоморфных декартовым произведениям алгебр из $K$.

Через $Id(K)$ обозначим совокупность всех тождеств, истинных в $K$. Для системы тождеств $Id$ обозначим через $K(Id)$ класс всех алгебр, на которых истинны все тождества из $Id$.

Известная *теорема Биркгофа* утверждает, что класс алгебр $K$ является многообразием тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия гомоморфных образов, подалгебр и декартовых произведений, т.е.

$$K = \mathbf{HSP}(K).$$

Из теоремы Биркгофа следует, что для произвольной алгебры $\mathcal{A}$ справедливо следующее соотношение:

$$K(Id(\mathcal{A})) = \mathbf{HSP}(\mathcal{A}). \qquad (1)$$

Если многообразие $K$ совпадает с $\mathbf{HSP}(\mathcal{A})$ для некоторой алгебры $\mathcal{A}$, то говорят, что $K$ ***порождается алгеброй*** $\mathcal{A}$. Из факта 1.2.1 следует, что любое многообразие порождается своей свободной счетно порожденной алгеброй.

Так как класс всех $S$-полигонов $S\text{-}Act$ задается тождествами, то он является многообразием.

Через ${}_SF(\alpha)$ будем обозначать свободный полигон класса $S\text{-}Act$ с $\alpha$ свободными порождающими. Нетрудно понять, что свободный $\alpha$-порожденный полигон изоморфен дизъюнктному объединению $\alpha$ изоморфных копий полигона ${}_SS$:

$${}_SF(\alpha) \cong \bigsqcup_{i\in\alpha} {}_SA_i,$$

где ${}_SA_i \cong {}_SS$.

Обозначим для произвольного класса полигонов $K$ через

$\mathbf{D}(K)$ класс всех полигонов, изоморфных дизъюнктным объединениям полигонов из $K$, получаем, что

$$S\text{-}Act = \mathbf{HD}({}_SS).$$

Заметим, что если сигнатура $\Sigma$ состоит из одноместных функциональных символов, то множество всех термов сигнатуры $\Sigma$ совпадает с множеством $T^1(\Sigma)$. Поэтому любое тождество, истинное в классе $S$-полигонов, содержит не более двух переменных. Тогда из факта 1 следует

**Предложение 2** *Для любого моноида $S$ справедливо следующее соотношение*

$$S\text{-}Act = \mathbf{HSP}({}_SF(2)).$$

В следующем утверждении дается характеризация моноидов, для которых полигон, порождающий класс всех полигонов, имеет наиболее простое строение.

**Теорема 3** *Выполнимо соотношение*

$$S\text{-}Act = \mathbf{HSP}({}_SS)$$

*тогда и только тогда, когда моноид $S$ не содержит левого нуля.*

Доказательство. Предположим, что $S\text{-}Act = \mathbf{HSP}({}_SS)$, и $0$ — левый ноль моноида $S$. Тогда

$${}_SS \models \forall x, y\ (0x = 0y)$$

и в силу (1),

$$S\text{-}Act \models \forall x, y\ (0x = 0y).$$

Рассмотрим полигоны ${}_SA$ и ${}_SB$ из класса $S\text{-}Act$, для которых $A \cap B = \emptyset$. Тогда ${}_SA \sqcup {}_SB \in S\text{-}Act$ и, следовательно,

$${}_SA \sqcup {}_SB \models \forall x, y\ (0x = 0y).$$

Получаем, что для произвольных элементов $a \in A$ и $b \in B$ справедливо

$${}_SA \sqcup {}_SB \models 0a = 0b,$$

а, значит, $0a \in A \cap B$ и, следовательно, $A \cap B \neq \emptyset$, — противоречие.

Предположим теперь, что $S$ не содержит левого нуля. Любое тождество сигнатуры $S$-полигона имеет вид

$$\begin{array}{l}\forall x\ \ (s_1(s_2(\ldots s_n(x)\ldots)) = t_1(t_2(\ldots t_k(x)\ldots)))\\ \text{или}\\ \forall x, y\ \ (s_1(s_2(\ldots s_n(x)\ldots)) = t_1(t_2(\ldots t_k(y)\ldots))).\end{array} \qquad (2)$$



Из тождеств, задающих полигон, следует, что если в моноиде $S$ выполнимо $s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_n = s$, то

$$S\text{-}Act \models \forall x\ \ (s_1(s_2(\ldots s_n(x)\ldots)) = s(x))$$

и, следовательно, тождества (2) эквивалентны тождествам

$$\forall x\ (sx = tx),$$

$$\forall x, y\ (sx = ty)$$

соответственно, где $t = t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_k$ в моноиде $S$.

Если

$${}_SS \models \forall x\ (sx = tx),$$

то

$${}_SS \models s1 = t1,$$

т.е. это возможно только при $s = t$. Аналогично получаем, что если

$${}_SS \models \forall x, y\ (sx = ty),$$

то $s = t$.

Таким образом, если на полигоне ${}_SS$ кроме тождеств, используемых при определении понятия полигона, выполняются еще какие-то тождества, то они имеют вид

$$\forall x\ (sx = sx)$$

или

$$\forall x, y\ (sx = sy).$$

Первое из них тривиально, а второе выполняется на ${}_SS$ тогда и только тогда, когда $s$ — левый ноль моноида $S$.

Так как по предположению в $S$ нет левого нуля, то

$${}_SS \not\models \forall x, y\ (sx = sy)$$

для любого $s \in S$. Таким образом, $Id({}_SS) = Id(S\text{-}Act)$ и, следовательно,

$$S\text{-}Act = \mathbf{HSP}({}_SS). \ \square$$

Определим с помощью понятия связности из [2] два специальных типа конгруэнций на полигонах и покажем, что посредством таких конгруэнций можно получить любую конгруэнцию полигона.

Элементы $x, y \in {}_SA$ называются *связанными* (обозначается $x \sim y$), если существуют $n \in \omega$, $a_0, \ldots, a_n \in A$, $s_1, \ldots, s_n \in S$ такие, что $x = a_0$, $y = a_n$, и $a_i = s_i a_{i-1}$ или $a_{i-1} = s_i a_i$. При этом будем говорить, что $x$ и $y$ связаны *посредством кортежей* $(a_0, \ldots, a_n) \in A^{n+1}$ и $(s_1, \ldots, s_n) \in S^n$.

Полигон ${}_SA$ называется *связанным*, если элемент $x$ связан с элементом $y$ для любых $x, y \in A$.

**Замечание 4.** *1. Отношение $\sim$ является конгруэнцией на полигоне ${}_SA$, которая называется конгруэнцией связности полигона ${}_SA$.*

*2. Для любого элемента $x \in {}_SA$ класс $x/\sim$ образует подполигон полигона ${}_SA$.*

Для любого $x \in A$ подполигон ${}_S(x/\sim)$ называется ***компонентой связности*** полигона ${}_SA$.

Пусть ${}_SA$ — полигон. Обозначим через $\mathrm{Con}({}_SA)$ решетку конгруэнций полигона ${}_SA$, через $1_{{}_SA}$ и $0_{{}_SA}$ — единицу и ноль в решетке $\mathrm{Con}({}_SA)$ соответственно.

Конгруэнцию $\theta \in \mathrm{Con}({}_SA)$ назовем конгруэнцией *1-го типа*, если $\theta \cap \sim\, = 0_{{}_SA}$. Конгруэнцию $\theta \in \mathrm{Con}({}_SA)$ назовем конгруэнцией *2-го типа*, если $\theta \le \sim$.

Заметим, что конгруэнции 1-го типа отождествляют элементы, принадлежащие различным компонентам связности, а конгруэнции 2-го типа — элементы, связанные друг с другом.

В дальнейшем нам понадобятся следующие две теоремы из [1].

**Факт 5.** [1, с. 61]. *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, $\theta$ — конгруэнция алгебры $\mathcal{A}$. Тогда*

$$\mathrm{Con}\,\mathcal{A}/\theta \cong ([\theta); \le),$$

*где $[\theta) = \{\psi \mid \psi \ge \theta\}$ — главный идеал решетки* $\mathrm{Con}\,\mathcal{A}$, *порожденный $\theta$.*

**Факт 6.** [1, с. 62] (Вторая теорема об изоморфизме). *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, $\theta, \eta$ — конгруэнции на $\mathcal{A}$ и $\eta \le \theta$. Тогда*

$$\mathcal{A}/\theta \cong \mathcal{A}/\eta\,/(\theta/\eta)\,.$$

**Замечание 7.** *Если $\sim$ — конгруэнция связности и $\theta$ — конгруэнция 2-го типа полигона ${}_SA$, то $\sim/\theta$ является конгруэнцией связности полигона ${}_SA/\theta$.*

Для произвольного класса $S$-полигонов $K$ обозначим через $\mathbf{H}_i(K)$ класс всех полигонов, изоморфных фактор-полигонам полигонов из $K$ по конгруэнциям i-го типа, где $i \in \{1, 2\}$.

**Теорема 8.** *Для любого класса $S$-полигонов $K$ выполняется равенство*

$$\mathbf{H}(K) = \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2(K).$$

Доказательство. Включение $\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2(K) \subseteq \mathbf{H}(K)$ очевидно. Докажем обратное включение. Предположим, что ${}_SA \in K$, $\theta \in \mathrm{Con}({}_SA)$. Обозначим через $\eta$ конгруэнцию $\theta \cap \sim$ на ${}_SA$. Очевидно, $\eta$ является конгруэнцией 2-го типа. В силу факта 5 из равенства $\theta \cap \sim\, = \eta$ на полигоне ${}_SA$ следует равенство $\theta/\eta \cap \sim/\eta = 0_{{}_SA/\eta}$ на полигоне ${}_SA/\eta$, т.е. в силу замечания 7 $\theta/\eta$ является конгруэнцией 1-го типа полигона ${}_SA/\eta$. Из факта 6 получаем ${}_SA/\theta \cong {}_SA/\eta\,/(\theta/\eta)$, и, следовательно, ${}_SA/\theta \in \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2(K)$. □

*ЛИТЕРАТУРА*



1. *Gratzer G.* Universal algebra. Springer-Verlag New York Inc. 1979.

2. *Мустафин Т. Г.* О стабильностной теории полигонов // Теория моделей и ее применение. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-е, 1988. — (Тр. АН СССР. Сиб. отд-е. Ин-т математики; Т.8), с.92-107.

# On Computability Over Models Of Decideble Theories

V.G. Puzarenko

RUSSIA,
Novosibirsk,
ac. Koptug street, 4,
Institute of mathematics
e-mail: vagrig@math.nsc.ru

Recursion theory on hereditarily finite sets over single-sorted models can be considered as a natural generalization of computability on $\mathbf{N}$.

In §2 criterium of $\Sigma$-definability of subsets on hereditarily finite sets over models of finite signatures. The statement is that any $\Sigma$-predicate on $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$ is definable by some computable sequence containing goedel numbers of $\exists$-formulas of language of $\mathcal{M}$.

§3 is devoted to a characterization of a simplest theory (in sense Ershov's definition [1]) in terms of hereditarily finite sets over models of the theory.

§5 contains algebraic description of semilattice of $m\Sigma$- and $T\Sigma$-degrees on hereditarily finite sets over models of simplest theories.

All the basic notions used in this paper is introduced in §1. Terminology of the paper is made consistent with terminology of [1].

## §1. BASIC NOTIONS.

**Lemma 1** *Let* $\mathbf{A}$ *be* KPU*-model and let* $P$ *be a transitive* $\Sigma$*-subset such that* $\mathbf{A}\lceil\mathbf{P}$ *is* KPU*-model. Then any* $\Sigma$*-predicate on* $\mathbf{A}\lceil\mathbf{P}$ *is* $\Sigma$*-predicate on* $\mathbf{A}$.

**Definition 1** Let $\mathbf{A}$ be KPU-model. $B \subseteq \mathbf{A}$ is called *a pure subset*, if $B \subseteq \{x \in A | sp(x) = \emptyset\}$). If $\mathbf{A}$ is a hereditarily finite set, then we will denote a pure part of such KPU-model as $HF_\emptyset$.

**Lemma 2** *Let* $\mathbf{HF}(\mathcal{A})$ *be a hereditarily finite set over an arbitrary model* $\mathcal{A}$*. Then any* $\Sigma_n$*-predicate on naturals is* $\Sigma_n$*-predicate on* $\mathbf{HF}(\mathcal{A})$ *with the natural identification of naturals and ordinals of* $\mathbf{HF}(\mathcal{A})$.

Proof. It follows immediately from Theorem 2.1.1[1] and Lemma 1. □

Consider hereditarily finite set $\mathbf{D} = \mathbf{HF}(\omega)$ over the standard model of arithmetics. Define a constructivization $\varepsilon$ of $\mathbf{D}$ as follows:

$$\varepsilon(n) \rightleftharpoons \begin{cases} k(\in \omega), & if\ n = 2k+1; \\ \emptyset, & if\ n = 0; \\ \{\varepsilon(k_i) \mid n = 2(2^{k_0} + \ldots + 2^{k_s}),\ k_0 < \ldots < k_s\}, & otherwise. \end{cases} \tag{1}$$

$\varepsilon$ is $\Sigma_D$-function by $\Sigma$-recursion theorem. The function induces an one-to-one constructivization $\delta$ of $T = \{t_\kappa \mid \kappa \in \omega\}$. Definition of a term $t_\kappa$ can be found in [1]. However, as it will be shown in this paper, the term is uniformly definable by some $\Sigma$-formula in any hereditarily finite set (moreover, it is $\Delta$-definable). The constructivization of the terms can be identified with $\Sigma$-function on $\mathbf{HF}(\omega)$, mapping $n$ to $\delta(n)$ such that $sp(\delta(n))$ is a proper initial segment of naturals. We will denote number of elements of $sp(\varepsilon(\kappa))$ as $n_\kappa$. It is not difficult to verify that the function $\kappa \mapsto n_\kappa$ is recursive. Moreover, $\mathbf{HF}(\omega)$ has the following property:

[1]Работа выполнена при поддержке ФЦП "Интеграция" проект 274



**Lemma 3** $P \subseteq (\mathrm{HF}(\omega))^n$ *is* $\Sigma$*-predicate on* $\mathbf{HF}(\omega) \Leftrightarrow \varepsilon^{-1}(P) \rightleftharpoons \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \mathbf{N} | \langle \varepsilon(\mathbf{a_1}), \ldots, \varepsilon(\mathbf{a_n})\rangle \in \mathbf{P}\}$ *is r.e. In addition,* $\Lambda_n \rightleftharpoons \{m \in \mathbf{N} | \varepsilon(\mathbf{m}) \in^{\mathbf{D}} \varepsilon(\mathbf{n})\}$ *is strongly computable.*

In this paper we will need the following

**Lemma 4** *Let* $\mathbf{A} = \mathbf{HF}(\mathcal{M}_0)$, $\mathbf{B} = \mathbf{HF}(\mathcal{M}_1)$ *be hereditarily finite sets over* $\mathcal{M}_0 = \langle M_0, \sigma_0\rangle$, $\mathcal{M}_1 = \langle M_1, \sigma_1\rangle$ *respectively and let* $X_0 \subseteq M_0$, $X_1 \subseteq M_1$ *be arbitrary equivalent sets. Then any isomorphism* $f$ *between* $X_0$ *and* $X_1$ *has an unique extension to an isomorphism* $f^\#$ *between hereditarily finite sets* $HF(X_0)(\subseteq A)$ *and* $HF(X_1)(\subseteq B)$.

*Furthermore, if* $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ *and* $f$ *is* $\Sigma_A$*-function, then* $f^\#$ *is.*

The first part of this lemma is proved by induction on rank and the second part by $\Sigma$-recursion method.

Let $\mathbf{C}$ be $KPU$-model and $FUN(C)$ be a set of all the $C$-finite functions. We will denote the composition operation of $f, g \in FUN(C)$ as $\mathrm{comp}(f,g) \rightleftharpoons g \circ f$. The operation is $\Sigma$-definable (moreover, it is $\Delta_0$-definable).

**Lemma 5** *Let* $\mathbf{A}_0 = \mathbf{HF}(\mathcal{A})$ *be an arbitrary hereditarily finite set. Then there exists 4-ary* $\Delta$*-predicate* $Un$ *on* $\mathbf{A}_0$ *such that*

$$\langle a, \kappa, g_0, g_1\rangle \in Un \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{HF}(\mathcal{A}) \models (x_0 = t_\kappa(x_1, \ldots, x_k))[\gamma_{g_0'}], \\ \mathbf{HF}(\omega) \models (x_0 = t_\kappa(x_1, \ldots, x_k))[\gamma_{\varepsilon g_1'}]; \end{cases}$$

*where* $g_0' = g_0 \cup \{\langle 0, a\rangle\}$, $g_1' = g_1 \cup \{\langle 0, \kappa\rangle\}$ *and* $g_0$, $g_1$ *are isomorphisms between proper initial segments of naturals and* $sp(a)$, $\varepsilon^{-1}(sp(\varepsilon(\kappa)))$ *respectively.*

Proof. Define $\Sigma$-formula $\Phi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ as follows:
$(U(x_0) \wedge N'(x_1) \wedge (x_2 = \{\langle 1, x_0\rangle\}) \wedge (x_3 = \{\langle 1, x_1\rangle\})) \vee (\neg U(x_0) \wedge \neg N'(x_1) \wedge N(x_1)) \wedge \exists f(fun(f) \wedge (f : \langle TC(x_0), \in^{\mathbf{A}_0}\rangle \cong \langle TC(\varepsilon(x_1)), \in^{\mathbf{HF}(\omega)}\rangle) \wedge (\rho(f\lceil x_0) = \varepsilon(x_1)) \wedge (x_2 : ((n_{x_1} + 1) \setminus \{\emptyset\}) \longrightarrow sp(x_0)) \wedge (x_3 : ((n_{x_1} + 1) \setminus \{\emptyset\}) \longrightarrow \varepsilon^{-1} sp(\varepsilon(x_1))) \wedge (x_2 \text{ is bijection}) \wedge (x_3 \text{ is bijection}) \wedge (\mathrm{comp}(x_3, \varepsilon\lceil\rho x_3) = comp(x_2, f))))$,

where $N$ and $N'$ are sets consisting of ordinals and "odd" ordinals respectively. It isn't difficult to verify that $\Phi$ is equivalent to some $\Sigma$- and $\Pi$-formulas, so $\Phi^{\mathbf{A}_0}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ is $\Delta$-predicate.

We will prove by induction on construction of $t_\kappa$, that the predicate satisfies lemma's conditions.

a) If $\varepsilon(\kappa) \in HF_\emptyset$, then $(\langle a, \kappa, g_0, g_1\rangle \in Un \Leftrightarrow ((a = \varepsilon(\kappa)) \wedge (g_0 = g_1) \wedge (g_0 = \emptyset)))$. Really, if $\langle a, \kappa, g_0, g_1\rangle \in Un$, then by induction on rank of $\varepsilon(\kappa)$ it can be shown that $a = \varepsilon(\kappa)$. $g_0 = g_1 = \emptyset$ follows from an existension of a bijection between $sp(a)$ and $sp(\varepsilon(\kappa))$.

$b)$ If $\varepsilon(\kappa) \in \omega$, then $(\langle a, \kappa, g_0, g_1\rangle \in Un \Leftrightarrow ((a = t_\kappa(a)) \wedge (\varepsilon(\kappa) = t_\kappa(\varepsilon(\kappa))) \wedge (g_0 = \{\langle 1, a\rangle\}) \wedge (g_1 = \{\langle 1, \kappa\rangle\})))$.

$c)$ Let $\varepsilon(\kappa) = \{\varepsilon(\kappa')\}$ and $\varepsilon(\kappa') \notin \omega$.

If $\langle a, \kappa, g_0, g_1\rangle \in Un$, then $\langle a', \kappa', g_0, g_1\rangle \in Un$ and $a = \{a'\}$. Then by definition of $t_\kappa$ and by inductive hypothesis, $a = t_\kappa(g_0(1), \ldots, g_0(n_\kappa))$ and $\varepsilon(\kappa) = t_\kappa(\varepsilon(g_1(1)), \ldots, \varepsilon(g_1(n_\kappa))$. Inverse, if $a = t_\kappa(g_0(1), \ldots, g_0(n_\kappa)))$ and $\varepsilon(\kappa) = t_\kappa(\varepsilon(g_1(1)), \ldots, \varepsilon(g_1(n_\kappa)))$, then by inductive hypothesis, $\langle a', \kappa', g_0,$
$g_1\rangle \in Un$. In this case, it follows from definition of $Un$ that there exists $A_0$-finite isomorphism $f_0$ between $\langle TC(a'), \in\rangle$ and $\langle TC(\varepsilon(\kappa')), \in\rangle$ such that $\varepsilon \circ g_1 = f_0 \circ g_0$. Then $f (\rightleftharpoons f_0 \cup \{\langle a', \kappa'\rangle\})$ is a function from definition of $Un$ such that $\langle a, \kappa, g_0, g_1\rangle \in Un$.

$d)$ A case $\varepsilon(\kappa) = \{\varepsilon(\kappa')\} \subset \omega$ is considered as well as $b)$.

$e)$ Consider a case when $\varepsilon(\kappa) = \varepsilon(\kappa_0) \cup \varepsilon(\kappa_1)$.

First establish $(\Rightarrow)$. If $\langle a, \kappa, g_0, g_1\rangle \in Un$, then there exists $A_0$-finite isomorphism $f_0$ between $\langle TC(a), \in\rangle$ and $\langle TC(\varepsilon(\kappa)), \in\rangle$ such that $\varepsilon \circ g_1 = f_0 \circ g_0$. Let $a_0 \rightleftharpoons f_0^{-1}(\varepsilon(\kappa_0))$ and $a_1 \rightleftharpoons f_0^{-1}(\varepsilon(\kappa_1))$. It follows from definition of $TC$ that $TC(a) = TC(a_0) \cup TC(a_1)$ and $\langle a_i, \kappa_i, g_0^i, g_1^i\rangle \in Un$, where $g_0^i \rightleftharpoons g_0 \circ \varphi_i$ and $\varphi_i$ is $A_0$-finite isomorphism between some initial segment of naturals without 0 and $g_0^{-1}(sp(a_i))$; $g_1^i \rightleftharpoons \varepsilon^{-1} \circ f_0 \circ g_0^i$, $i = 0, 1$. $f$ from definition of $Un$ can be defined as $f_0 | TC(a_i)$. Then by definition of $t_\kappa$ and by inductive hypothesis, $a = t_{\kappa_0}(g_0^0(1), \ldots, g_0^0(n_{\kappa_0})) \cup t_{\kappa_1}(g_0^1(1), \ldots, g_0^1(n_{\kappa_1})) = t_\kappa(g_0(1), \ldots, g_0(n_\kappa))$. Inverse, if $a = t_\kappa(u_1, \ldots, u_{n_\kappa})$, then $a = a_0 \cup a_1$ and $a_i = t_{\kappa_i}(u_1^i, \ldots, u_{n_{\kappa_i}}^i)$, $i = 0, 1$. By inductive hypothesis, $\langle a_i, \kappa_i, g_0^i, g_1^i\rangle \in Un$ for appropriate functions $g_0^i, g_1^i$, $i = 0, 1$. Furthermore, $f_0$ and $f_1$ from definition of $Un$ can be choosed so that $f_0 \cup f_1$ is also a function. Let $h_0 \rightleftharpoons \varepsilon \circ g_1^0 \circ (g_0^0)^{-1}$ and $h_1 \rightleftharpoons \varepsilon \circ g_1^1 \circ (g_0^1)^{-1}$. Then $h_0 : sp(a_0) \rightleftarrows sp(\varepsilon(\kappa_0))$ and $h_1 : sp(a_1) \rightleftarrows sp(\varepsilon(\kappa_1))$. It follows from definition of $t_\kappa$ that $h \rightleftharpoons h_0 \cup h_1$ is one-to-one correspondence between $sp(a)$ and $sp(\varepsilon(\kappa))$. Then there exists an unique isomorphism $h^\#$ between $HF(sp(a))$ and $HF(sp(\varepsilon(\kappa)))$, extending $h$. Then $f_0 \rightleftharpoons h^\# [TC(a_0)$, $f_1 \rightleftharpoons h^\# [TC(a_1)$ and a function $f \rightleftharpoons f_0 \cup f_1$ from definition of $Un$ such that $\langle a, \kappa, g_0, g_1\rangle \in Un$ for appropriate functions $g_0, g_1$. □

## §2. Σ-DEFINABLE CRITERIUM.

HF-language is definable part of $L_{\omega_1,\omega}$. In this section there is an answer to the question "What formulas of infinite language correspond to Σ-formulas?".

For simplicity of presentation we will differ two sorts of variables. That are variables for urelements and common variables. We will denote them as $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ respectively.

Let $\mathcal{M} (= \langle M, \sigma\rangle)$, $\mathbf{HF}(\mathcal{M}) = \langle HF(M), \sigma^*\rangle$ be an arbitrary model of some finite signature and a hereditarily finite set over the model respectively.

Let's consider an arbitrary RQ-formula $\Phi(x_0)$ of signature $\sigma^*$ with one free variable (possibly with parameters from M). Then there exist formulas $\Phi_\kappa, \kappa \in HF(\omega)$, such that

$$\mathbf{HF}(\mathcal{M}) \models \Phi(x_0)^{x_0}_{t_\kappa(u_0, \ldots, u_{n_\kappa - 1})}[\gamma] \Leftrightarrow \mathbf{HF}(\mathcal{M}) \models \Phi_\kappa(u_0, \ldots, u_{n_\kappa - 1})[\gamma] \qquad (2)$$

for any denoting $\gamma : \{u_0, \ldots, u_{n_\kappa - 1}\} \to$ M. Furthermore, $\Phi_\kappa$ can be found effectively from $\Phi$ and $\kappa$.



**Lemma 6** *There exists recursive function $G : RQFor^1_{\sigma^*} \times HF(\omega) \to RQFor_{\sigma^*}$ ($RQFor^1$ is a collection consisting of RQ-formulas with one free variable) such that*

$$\mathbf{HF}(\mathcal{M}) \models (G(\Phi, \kappa)(u_0, \ldots, u_{n_\kappa - 1}) \leftrightarrow \Phi_\kappa(u_0, \ldots, u_{n_\kappa - 1}))[\gamma]$$

*for any denoting $\gamma$.*

PROOF. Let $g$ be Σ-function mapping a number $n$ of $\Phi(x_0)$ to a number of $\exists x_n((x_n = x_0) \wedge \Phi(x_0)^{x_0}_{x_n})$. Clearly, $\Phi(x_0) \equiv \exists x_n((x_n = x_0) \wedge \Phi(x_0)^{x_0}_{x_n})$. Note that a procedure

$$\exists x_n((x_n = x_0) \wedge \Phi(x_0)^{x_0}_{x_n}) \mapsto \exists x_n \exists x_{n+1} \exists x_{n+2}(Un(x_n, \kappa, x_{n+1}, x_{n+2}) \wedge \bigwedge_{1 \le i \le n_\kappa} (u_{i-1} = x_{n+1}(i)) \wedge \Phi(x_0)^{x_0}_{x_n}$$

is recursive. Denote it as $s(m, \kappa)$, where $m$ is a number of $\exists x_n((x_n = x_0) \wedge \Phi(x_0)^{x_0}_{x_n})$. Then $s(g(\Phi), \kappa)$ satisfies lemma's conditions. □

Let $nt(n) \rightleftharpoons 2n + 1, n \in \mathbf{N}$. Then define $T_\omega$ as follows:

$$\{\langle a, b, c\rangle | Un(a, \varepsilon^{-1}\delta(b), c, (nt[(|sp(\delta(b))| \setminus \{0\}) ) \cup \{\langle |sp(\delta(b))|, 1\rangle\}\}.$$

Note that $T_\omega$ is Δ-predicate such that

$$\langle a, \delta^{-1}\varepsilon(\kappa), g\rangle \in T_\omega \Leftrightarrow (a = t_\kappa^{\mathbf{HF}(\mathcal{M})}(g_1, \ldots, g_{n_\kappa})).$$

**Definition 2** Let $f$ and $g$ are finite function defined on initial segments of naturals. We will define a concatenation operation concat$(f, g)$ as follows:

$$\text{concat}(f, g)(n) \rightleftharpoons \begin{cases} f(n), & \text{if } n \in \delta f; \\ g(k), & \text{if } n = \delta f + k, k \in \delta g; \\ \text{undefined}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Using Σ-recursion method it will be established the operation is Σ-definable. From now on we use the following notations:

-if $s_0, s_1, \ldots, s_{m-1} \in$ M, then $\bar{s} \rightleftharpoons \{\langle i, s_i\rangle | i < m\}$;

-if $g$ is a finite function with a domain $\delta g \subset \mathbf{N} \setminus \{\mathbf{0}\}$, then $\tau(g) \rightleftharpoons \{\langle i - 1, g(i)\rangle | i \in \delta g\}$ (it is not difficult to verify the operation $\tau$ is Σ-definable).

**Theorem 1** (**Σ-definable criterium**)*Let $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$ is a hereditarily finite set over a model $\mathcal{M} = \langle M, \sigma\rangle$. Then $A \subseteq$ HF(M) is definable by some Σ-formula $\Phi(x_0, u_0, \ldots, u_{m-1})$ with parameters $s_0, \ldots, s_{m-1}$ iff there exists a computable sequence $A_n^\Phi$ of goedel numbers for ∃-formulas of signature $\sigma$ such that*

$$A = \{a | \exists n \exists g(T_\omega(a, n, g) \wedge \exists \varphi((\varphi \in A_n^\Phi) \wedge (\mathcal{M} \models \varphi[\gamma_{\text{concat}(\tau(g), \bar{s})}])))\}.$$

*Moreover, there exists an effective procedure that allows us to pass from Σ-formula ( the computable sequence) to some computable sequence (Σ-formula).*

PROOF. First we establish $(\Leftarrow)$. Since predicate $Tr_\Sigma$ of satisfaction of Σ-formulas is Σ-definable, $A$ is Σ-predicate. Inverse, by lemma 6 there exists a recursive function $G$ mapping numbers of Σ-formulas with one free general variable to numbers of Σ-formulas with free variables for urelements having specific properties. By Σ-reflection principle (see proposition 2.3.1[1]) from the number of $\Sigma$-formula $\Phi$ we can effectively obtain th number of some $\Sigma_1$-formula $\zeta(\Phi)$ such that $\Phi \equiv_{KPU} \zeta(\Phi)$. Thus $G' \rightleftharpoons \zeta G(\Phi, \varepsilon^{-1}\delta(n))$ is recursive function. It follows from construction [1](§3.4) that there exists recursiv function $H(\Phi, k)$ with domain $Dom(H) = \{\langle\Phi, k\rangle | k \in \mathbf{N}, \Phi$ is $\Sigma_1$-formula with variable for ureelements $\}$ and with range $Range(H) \subseteq For_\sigma$, and

$$\Phi \equiv \bigvee_{k\in\omega} H(\Phi, k).$$

To complete this proof we have to note that a computable sequence $A_n^\Phi \rightleftharpoons \{m \in \omega | \exists k(m = H(G'(\Phi, n), k)\}$ satisfies theorem's conditions. $\square$

## §3. ON CHARACTERIZATION OF SIMPLEST THEORIES.

Hereditarily finite sets aren't only objects for research of computable properties of model but they allow sometimes to describe model-theoretical properties.

**Definition 3** A theory $T$ is called *regular*, if it is decidable and model complete.

**Definition 4** A theory $T$ is called *simplest* if $T$ is regular complete $\omega$-categorical and ha a decidable set of complete formulas.

The next theorem is an original characterization of simplest theories in terms of heredi tarily finite sets over models of such theories.

**Theorem 2** *Let $T$ be a complete $\omega$-categorical theory. Then the following conditions ar equivalent:*

*1) $T$ is decidable and a predicate*

$$\{\langle n, a\rangle | a \in \mathrm{M}^k \text{ realizes a type } p_n(x_0, \ldots, x_{k-1})\} \tag{3}$$

*is $\Sigma_{\mathbf{HF}(\mathcal{M})}$-definable for any model $\mathcal{M} \models T$ and any computable collection of all the type $\{p_n | n \in \omega\}$ of the theory $T$;*

*2) a predicate*

$$\{\langle n, a\rangle | a \in \mathrm{M}^k \text{ realizes a type } p_n(x_0, \ldots, x_{k-1})\}$$

*is $\Sigma_{\mathbf{HF}(\mathcal{M})}$-definable for some model $\mathcal{M} \models T$ and some computable collection of all th types $\{p_n | n \in \omega\}$ of the theory $T$;*

*3) $T$ is decidable and a predicate*

$$\{\langle n, m, x\rangle | \exists a \in \mathrm{M}^{n_\kappa}((x = t_\kappa(a)) \wedge (\mathcal{M} \models p_n(a))), \text{ where } \kappa = \varepsilon^{-1}\delta(m)\}$$

*is $\Sigma_{\mathbf{HF}(\mathcal{M})}$-definable for any computable sequence of all the types $\{p_n | n \in \omega\}$ of theory $T$ and any model $\mathcal{M} \models T$;*

*4) there exist an expansion $\sigma'$ of the signature $\sigma$ by a finite number of constant $c_0, \ldots, c_{n-1}$ and a complete formula $\varphi_0(x_0, \ldots, x_{n-1})$ such that $T'(\rightleftharpoons Th(T \cup \{\varphi_0(c_0, \ldots, c_{n-1})\}))$ is a simplest theory.*



PROOF. The implication $(1 \Rightarrow 2)$ and the equivalence $(1 \Leftrightarrow 3)$ are obvious. First we establish $(2 \Rightarrow 4)$. Decidability of $T$ follows from computability of collection of all the types of $T$ (closed formulas belonging to $p_0$ form $T$) and completeness of this theory (if $T$ is complete and enumerably axiomatizable then $T$ is decidable). This implies $Th(T \cup \{\varphi_0(c_0, \ldots, c_{n-1})\})$ is decidable complete $\omega$-categorical for any complete formula $\varphi_0(x_0, \ldots, x_{n-1})$.

Let $\Psi(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ be $\Sigma$-formula with parameters $s_0, \ldots, s_{n-1}$ from M defining the predicate

$$\{\langle n, a\rangle | a \in \mathrm{M}^k \text{ realizes } p_n(x_0, \ldots, x_{k-1})\}.$$

By Ryll Nardzevsky's Theorem there exists a complete formula $\varphi_0(x_0, \ldots, x_{n-1})$ such that $\mathcal{M} \models \varphi_0(x_0, \ldots, x_{n-1})[\gamma_g]$, where $g = \{\langle i, s_i\rangle | i < n\}$. By Theorem 1 there exsists a proper computable sequence $B_n$ of goedel numbers of $\exists$-formulas of $\sigma$. Consider a computable sequence $C_n \rightleftharpoons B'_n \setminus \{\varphi | \mathcal{M} \models \neg\varphi\}$, where $B'_n \rightleftharpoons \{\exists x_k \ldots \exists x_{k+n-1}(\varphi \wedge (\varphi_0)^{x_0, \ldots, x_{n-1}}_{x_k, \ldots, x_{k+n-1}}) | \varphi \in B_n\}$. It follows from Ryll-Nardzevsky's Theorem elements of $C_n$ are numbers of complete $\exists$-formulas. This implies that

$$C \rightleftharpoons \{\varphi | \exists\varphi_0((T \vdash (\varphi_0 \leftrightarrow \varphi)) \wedge (\varphi_0 \in \bigcup_{n\in\omega} C_n))\}$$

consists of complete formulas. It is obvious the set is enumerable, but enumerability of complete formulas of $T'$ set is equivalent to decidability if $T'$ is decidable. The latter implies a set of all the goedel numbers of complete formulas of $T'$ is decidable. A model completeness follows from definition of $C_n$ and Ryll-Nardzevsky's Theorem(any consistent with $T'$ formula is equivalent to a finite disjunction of complete formulas of $T'$).

We will show that $(4 \Rightarrow 1)$. Decidability of $T$ follows from decidability of $T'$. Let $\mathcal{M} \models T$ and let $\{p_n | n \in \omega\}$ be a computable collection of all the types of $T$. Define an auxilary $\Sigma$-formula $\Psi(x_0, x_1)$ as follows:

$$\exists\varphi\exists\varphi'((\varphi \in p_{x_0}) \wedge (\varphi' \in ComFor_{\sigma'}) \wedge (T' \vdash (\varphi \leftrightarrow \varphi')) \wedge Tr_{\Sigma}(\varphi', concat(x_1, \bar{s})),$$

where $ComFor_{\sigma'}$ is a set of all the $\exists$-formulas of $\sigma'$, that are equivalent to some complete formulas of $T$ (it is decidable since the complete formulas of $T'$ set is) and $\bar{s} \rightleftharpoons \{\langle i, s_i\rangle | i < n\}$. Then $\Sigma$-formula $\Psi'(x_0, x_1)$ defines a predicate (3) , where

$$\Psi'(n, \langle g(0), \ldots, g(\delta g - 1)\rangle) \Leftrightarrow \Psi(n, g),$$

$\square$

**Note 1** Indeed a predicate $\eta$ from Theorem 2(3) defines an encoding of all the types realized on $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$ by elements of some binary $\Delta$-predicate on $\mathbf{N}$ (see Proposition 3.4.5[1] and Theorem 3.4.1[1]). Moreover, using the following relation

$$\langle n, m, a\rangle \notin \eta \Leftrightarrow \forall g \in (n_\kappa + 1) \times sp(a) \neg T_\omega(a, m, g) \vee$$

$$\exists g(T_\omega(a, m, g) \wedge \forall \pi \in S_m \exists\varphi \in p_n \exists\varphi_0 \in ComFor_{\sigma'}((T' \vdash (\varphi \leftrightarrow \neg\varphi_0))$$

$$\wedge(\mathcal{M}' \models \varphi_0^\pi[\gamma_{\pi(g)}]))) \text{ (where } \kappa = \varepsilon^{-1}\delta(m),$$

$\mathcal{M}' \models T'$ is the expansion of $\mathcal{M}$) we conclude $\eta$ is $\Delta$-predicate.

**Lemma 7** *Let $\mathcal{M}$ be a model of a decidable categorical in some infinite power theory. Then the next conditions hold:*

*a) any pure $\Delta_{\mathbf{HF}(\mathcal{M})}$-subset is $\Delta$-subset on $\mathbf{HF}(\emptyset)$;*

*b) any pure $\Sigma_n$-subset on $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$ is $\Sigma_n$-subset on $\mathbf{HF}(\emptyset)$, $n \geq 1$.*

PROOF. If $\mathcal{M}$ is $\omega$-saturated, then by Proposition 3.4.5[1] and Theorem 3.4.2[1] $f : \mathbf{HF}(\mathcal{M}') \preceq \mathbf{HF}(\mathcal{M})$ for any decidable saturated model $\mathcal{M}'$. If $A \subseteq HF_\emptyset$ is defined by formula $\Phi(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$ with parameters $s_0, \ldots, s_{k-1}$ from M and $\langle n_0, \ldots, n_{k-1}\rangle \equiv \langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle$, where $n_i \in \mathrm{M}', i < k$, then by Theorem 3.4.1[1]

$$\begin{gathered}\mathbf{HF}(\mathcal{M}) \models \Phi(\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{k-1}})[\gamma_{\mathrm{concat}(\mathbf{g}, \bar{\mathbf{n}})}] \Leftrightarrow \\ \mathbf{HF}(\mathcal{M}') \models \Phi(\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{k-1}})[\gamma_{\mathrm{concat}(\mathbf{g}, \bar{\mathbf{n}})}],\end{gathered}$$

where $g = \langle 0, a\rangle$, $a \in HF_\emptyset$.

It remains to apply $\Sigma$-reflection principle and the following

**Note 2** Any $\Delta_0$-formula on $\mathbf{HF}(\mathcal{M}')$ of a decidable model $\mathcal{M}'$ is equivalent to some $\Sigma$- and $\Pi$-formula on $\mathbf{HF}(\emptyset)$.

## §4. ON ALGEBRAIC PROPERTIES OF DEGREES.

Notions of $m\Sigma$- and $T\Sigma$-degrees generalize corresponding notions on classical recursion theory. It will be shown that there exist isomorphisms between upper semilattices of definable degrees on $\mathbf{N}$ and $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$, where a theory of model $\mathcal{M}$ is simplest. First we introduce notions concerning a common theory of $m\Sigma$- and $T\Sigma$-degrees on an arbitrary KPU-model $\mathbf{A}$.

**Definition 5** Let $B, C \subseteq A$. Let's say that $B$ is *$m\Sigma$-reducible* to $C$ ($B \leq_{m\Sigma} C$), if there exists $\Sigma$-predicate $R \subseteq A^2$ such that $\delta R = A$ and $((a_0 \in B) \Leftrightarrow (a_1 \in C))$ for any pair $\langle a_0, a_1\rangle \in R$.

**Note 3** Instead of predicate $R$ from definition we will often consider $R' \subseteq A^2$ such that $\delta R'$ is $\Delta$-predicate containing $B$ and $((a_0 \in B) \Leftrightarrow (a_1 \in C))$ for any pair $\langle a_0, a_1\rangle \in R$.

**Definition 6** Let $B, C \subseteq A$. Let's say that $B$ *$T\Sigma$-reducible* to $C$ ($B \leq_{T\Sigma} C$), if there exist binary $\Sigma$-operators $F_0$, $F_1$ such that $\langle C, A \setminus C\rangle \in \delta_c F_i$, $i = 0, 1$, $B = F_0(C, A \setminus C)$, $A \setminus B = F_1(C, A \setminus C)$.

**Definition 7** Let $B, C \subseteq A$. $B$ is called *$\Sigma^C$-predicate* ($B \in \Sigma^C(A)$), if there exist binary $\Sigma$-operator $F$ such that $\langle C, A \setminus C\rangle \in \delta_c F$, $B = F(C, A \setminus C)$.

Define the following notions: $T\Sigma$-($m\Sigma$-)equivalence, $T\Sigma$-($m\Sigma$-)degrees and order $\leq$ on $T\Sigma$-($m\Sigma$-)degrees induced with pre-order $\leq_{T\Sigma}$ ($\leq_{m\Sigma}$).

**Definition 8** Let $B, C \subseteq A$. Let's say that $B$ is *$m\Sigma$-equivalent* to $C$ ($B \equiv_{m\Sigma} C$), if $B \leq_{m\Sigma} C$ and $C \leq_{m\Sigma} B$.

**Definition 9** Let $\emptyset \neq B \subset A$. *$m\Sigma$-degree of $B$* is called

$$\mathbf{b} = d_{m\Sigma}(B) \rightleftharpoons \{B' \subset A | B' \equiv_{m\Sigma} B\}.$$



**Definition 10** Let $\emptyset \neq B, C \subset A$. Then $d_{m\Sigma}(C) \leq d_{m\Sigma}(B) \stackrel{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} (C \leq_{m\Sigma} B)$.

**Definition 11** Let $B, C \subseteq A$. $B$ *is $T\Sigma$-equivalent to* $C$ ($B \equiv_{T\Sigma} C$), if $B \leq_{T\Sigma} C$ and $C \leq_{T\Sigma} B$.

**Definition 12** Let $B \subseteq A$. *$T\Sigma$-degree of $B$* is called

$$\mathbf{b} = d_{T\Sigma}(B) \rightleftharpoons \{B' \subseteq A | B' \equiv_{T\Sigma} B\}.$$

**Definition 13** Let $B, C \subseteq A$. Then $d_{T\Sigma}(C) \leq d_{T\Sigma}(B) \stackrel{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} (C \leq_{T\Sigma} B)$.

**Proposition 1** *A collection of $m\Sigma$-degrees $(L_m(\mathbf{A}), \leq)$ form a distributive upper semilattice for any* KPU*-model* $\mathbf{A}$.

PROOF. It is shown in [1](see Proposition 2.8.1) that $L_m(\mathbf{A})$ is an upper semilattice and $d_{m\Sigma}(B) \vee d_{m\Sigma}(C) = d_{m\Sigma}(B \oplus C)$.

We will show $L_m(\mathbf{A})$ is distributive. Let $\emptyset \neq B, C_0, C_1 \subset A$ such that $B \leq_{m\Sigma} C_0 \oplus C_1$. Then there exist a binary $\Sigma_A$-predicate $R$ and $\Sigma$-formula $\Phi(x_0, x_1)$ defining $R$. Without loss of ambiguity, we can assume that

$$\mathbf{A} \models \forall x_0 \forall x_1 (\Phi(x_0, x_1) \to \exists x_2 ((x_1 = \langle x_2, 0\rangle) \vee (x_1 = \langle x_2, 1\rangle))).$$

Really, fix $a \in A \setminus C_0$. Then $\Sigma$-formula

$$\begin{gathered}(\exists x_2((x_1 = \langle x_2, 0\rangle) \vee (x_1 = \langle x_2, 1\rangle)) \wedge \Phi(x_0, x_1)) \vee \\ \exists x_3 \forall x_2 \in TC(x_3)(x_3 \neq \langle x_2, 0\rangle) \wedge (x_3 \neq \langle x_2, 1\rangle) \wedge \Phi(x_0, x_3) \wedge (x_1 = \langle a, 0\rangle))\end{gathered}$$

has this property.

By $\Sigma$-reflection principle there exists $\Delta_0$-formula such that $\Phi(x_0, x_1) \equiv_{\mathrm{KPU}} \exists x_2 \Phi'(x_0, x_1, x_2)$. We will show $B_0 \oplus B_1 \equiv_{m\Sigma} B$ and $B_i \leq_{m\Sigma} C_i, i = 0, 1$, for

$$B_i \rightleftharpoons \{\langle a, b, c\rangle | \Phi'(a, b, \langle c, i\rangle) \text{ for some } c \in C_i\}, i = 0, 1.$$

Fix $b' \notin B$, $c_0' \notin C_0$, $c_1' \notin C_1$. Then $B$ is $m\Sigma$-reducible to $B_0 \oplus B_1$ via

$$F \rightleftharpoons \{\langle a, b\rangle | \bigvee_{i=0}^{1} \exists u \exists c (\Phi'(u, a, \langle c, i\rangle) \wedge (b = \langle\langle u, a, c\rangle, i\rangle))\}.$$

It is also not difficult to verify that $B_i \leq_{m\Sigma} C_i$ and $B_i \leq_{m\Sigma} B$, where $i = 0, 1$, via

$$\begin{gathered}R_i \rightleftharpoons \{\langle a, b\rangle | \exists u \exists c ((a = \langle u, c, b\rangle) \wedge \Phi'(u, c, \langle b, i\rangle) \vee \\ \exists d ((a = \langle u, c, d\rangle) \wedge \neg\Phi'(u, c, \langle d, i\rangle) \wedge (b = c_i')) \vee \\ \forall u \in TC(a) \forall c \in TC(a) \forall d \in TC(a)((a \neq \langle u, c, d\rangle) \wedge (b = c_i'))\},\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}Q_i \rightleftharpoons \{\langle a, b\rangle | \exists u \exists c ((a = \langle u, b, c\rangle) \wedge \Phi'(u, b, \langle c, i\rangle) \vee \\ \exists d ((a = \langle u, d, c\rangle) \wedge \neg\Phi'(u, d, \langle c, i\rangle) \wedge (b = b')) \vee \\ \forall u \in TC(a) \forall c \in TC(a) \forall d \in TC(a)((a \neq \langle u, c, d\rangle) \wedge (b = b'))\}\end{gathered}$$

respectively. $\square$

Further, we will denote $L_m(\mathbf{HF}(\mathcal{M}))$ as $L_m(\mathcal{M})$.

**Lemma 8** *Let $\gamma^*$ be $\Sigma$-definable one-to-one correspondence between* $\mathbf{HF}(\emptyset)$ *and* $\mathbf{N}$ *and let $A, B \subseteq HF(\emptyset)$. Then the next conditions hold:*

*a)* $((A \leq_{m\Sigma} B) \Leftrightarrow (\gamma^*(A) \leq_m \gamma^*(B)))$;

*b)*$((A \leq_{T\Sigma} B) \Leftrightarrow (\gamma^*(A) \leq_T \gamma^*(B)))$;

*c)* $\gamma^*(A) \equiv_{m\Sigma} A$.

**Lemma 9** *Let $\mathcal{M}$ be a model of a simplest theory $T$ and let $Q$ be any definable subset on* $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$. *Then $Q \equiv_{m\Sigma} Q_0$ for some subset $Q_0 \subseteq HF_\emptyset(\subseteq \mathrm{HF}(\mathrm{M}))$ from the same class of arithmetical hierarchy as $Q$.*

PROOF. Let $\Phi(x_0, s_0, \ldots, s_{k-1})$ be a formula with parameters from M such that $Q = \Phi^{\mathbf{HF}(\mathcal{M})}[x_0]$. Consider an expansion $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{M}, c_0, \ldots, c_{k-1}\rangle$ of $\mathcal{M}$. By Theorem 2 and Note 1, $\eta_{\mathcal{M}'}$ is $\Delta_{\mathbf{HF}(\mathcal{M}')}$-predicate. It follows from definition of $\Delta$-predicate that $\eta_{\mathcal{M}'}$ is $\Delta_{\mathbf{HF}(\mathcal{M})}$-definable. Then $Q \leq_{m\Sigma} Q_0$ via $\eta^{-1}_{\mathcal{M}'}$, where

$$Q_0 \rightleftharpoons \{\langle n, m\rangle \in \mathbf{N}^2 | \langle \mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{x}, \rangle \in \eta_{\mathcal{M}'} \quad \textbf{for} \quad \textbf{some} \quad \mathbf{x} \in \mathbf{Q}\} \tag{4}$$

□

$m\Sigma$-equivalence $Q$ and $Q_0$ follows from Notes 3, 1.

**Lemma 10** *Let $\mathcal{M}$ be a model of a simplest theory and let $A, B \subseteq \mathrm{HF}(\mathrm{M})$ such that $A \in \Sigma^B(\mathrm{HF}(\mathrm{M}))$, $B \subseteq \mathrm{HF}(\emptyset)$. Then there exists $A_0 \subseteq \mathrm{HF}(\emptyset)$ such that $A_0 \equiv_{m\Sigma} A$.*

PROOF. Fix $A \in \Sigma^B(\mathrm{HF}(\mathrm{M}))$, $B \subseteq \mathrm{HF}(\emptyset)$. By Definition, there exists $\Sigma$-operator $F$ such that $A = F(B, \mathrm{HF}(\mathrm{M}) \setminus B)$. Let $a \in A$. Then there exist $b_0 \subseteq B$, $b_1 \subseteq \mathrm{HF}(\mathrm{M}) \setminus B$ such that $\langle\langle b_0, b_1\rangle, a\rangle \in \Gamma^*_F$ and $\Gamma^*_F$ is $\Sigma$-predicate. Let $\Phi(x_0, x_1, x_2)$ be $\Sigma$-formula with parameters $s_0, \ldots, s_{m-1}$ from M such that $\Gamma^*_F = \Phi^{\mathbf{HF}(\mathcal{M})}[x_0, x_1, x_2]$ and let $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{M}, c_0, \ldots, c_{k-1}\rangle$ be an expansion of $\mathcal{M}$. For proving this assumption it is sufficient to show that

$$a \in A, t^{\mathrm{HF(M')}}(a) = t^{\mathrm{HF(M')}}(a') \Rightarrow a' \in A. \tag{5}$$

Really, then $A \leq_{m\Sigma} A_0$ via $\eta^{-1}_{\mathcal{M}'}$, where

$$A_0 \rightleftharpoons \{a_0 \in \mathbf{N} | \exists a \in A(\langle a_0, a\rangle \in \eta_{\mathcal{M}'})\}.$$

$A_0 \leq_{m\Sigma} A$ follows from note 1.

We will show (5) holds. It follows from $\omega$-homogeneity of $\mathcal{M}'$ and Theorem 3.4.1[1] that there exists $b'_1 \subseteq \mathrm{HF}(\mathrm{M}) \setminus B$ such that $t^{\mathbf{HF}(\mathcal{M}')}(b_1, a) = t^{\mathbf{HF}(\mathcal{M}')}(b'_1, a')$. Then $\langle b_0, b'_1, a'\rangle \in \Gamma^*_F$ and our theorem holds. □

**Proposition 2 (Ideal theorem.)** *Let $\mathcal{M}$ be a model of a simplest theory and let $\mathcal{HF}^{T\Sigma}_\emptyset$ ($\mathcal{HF}^{m\Sigma}_\emptyset$) be a set of all the $T\Sigma$-($m\Sigma$-)degrees, containing subsets of $HF_\emptyset(\subseteq \mathrm{HF}(\mathrm{M}))$. Then $\mathcal{HF}^{T\Sigma}_\emptyset$ ($\mathcal{HF}^{m\Sigma}_\emptyset$) is an ideal of a semilattice of $T\Sigma$-($m\Sigma$-)degrees on* $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$.

PROOF. It is evident that $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} \in \mathcal{HF}^r_\emptyset$ for any $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{HF}^r_\emptyset$ $(r \in \{m\Sigma, T\Sigma\})$. The second condition from definition of an ideal follows from previous lemma. □

**Definition 14** Let $\mathbf{A}$ be KPU-model and $\mathbf{b} \in L_m(\mathbf{A})$. Let's say that $\mathbf{b}$ is *enumerable(definable)* $m\Sigma$ degree, if there exists $\Sigma_A$-subset (a definable subset) $B \in \mathbf{b}$.



**Theorem 3** *Let $\mathcal{M}$ be a model of a simplest theory. Then the next conditions hold:*

*a) the natural embedding of naturals into* $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$ *induces an isomorphism between semilattices $L^0_m$ ($L^0_T$) of r.e. m-(T-)degrees and $L^0_m(\mathcal{M})$ ($L^0_T(\mathcal{M})$) of enumerable $m\Sigma$-($T\Sigma$-)degrees of* $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$;

*б) the natural embedding of naturals into* $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$ *induces an isomorphism between semilattices $L'_m$ ($L'_T$) of arithmetical m-(T-)degrees and $L'_m(\mathcal{M})$ ($L'_T(\mathcal{M})$) of definable $m\Sigma$-($T\Sigma$-)degrees of* $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$;

*в) the natural embedding of naturals into* $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$ *induces an isomorphism of $L_m$ ($L_T$) of m-(T-)degrees onto the ideal $\mathcal{HF}^{m\Sigma}_\emptyset$ ($\mathcal{HF}^{T\Sigma}_\emptyset$) of $m\Sigma$-($T\Sigma$-)degrees of* $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$.

PROOF follows immediately from the proposition 2 and the lemmas 7, 2, 9, 8. □

## Literature.


1. Ershov Yu.L. Definability and computability. Novosibirsk, 1996.
2. Barwise J. Admissible sets and structures; Berlin, Springer, 1975.
3. Rudnev V.A. Universal recursive function on admissible sets; Algebra i logika, 25(1986),N4, 425-435.
4. Ershov Yu.L. Theory of numberings, Moscow, Nauka, 1977.
5. Ershov Yu.L. $\Sigma$-definability in admissible sets; DAN USSR, 1985, 285,N4, 792-795.
6. Ershov Yu.L. Lovenheim-Scolem-Maltsev's Theorem for definable models; Logical methods in computer science (Computation systems, 148), 9-17, Novosibirsk, 1993.
7. Baldwin J.T., Lachlan. On strongly minimal sets; J. of symbolic logic, 36, N1, 1971.
8. Keisler G., Chan C.C., Model theory, Moscow, 1977.
9. Goncharov S.S. Countable boolean algebras and decidability, Novosibirsk, 1996.
10. Rogers C. Theory of recursive function and effective computability. M., Mir, 1972.
11. Rudnev V.A., On existension of inseparable pair in recursion theory on admissible sets, Algebra i logika, 27, N1, 48-56, 1988.

# Об определимости решеток решеткой своих подрешеток

**А.Г.Пинус**

Россия
630092 г.Новосибирск
пр. Маркса, 20,
Новосибирский Государственный Технический Университет
кафедра Алгебры и математической логики
e-mail: algebra@nstu.ru

Памяти Али Ивановича Кокорина

. В монографии Г.Гретцера [1] под номером 1.4 сформулирована проблема: описать решетки $L$ обладающие следующим свойством: для любой решетки $M$ изоморфизм $SkbL \cong SubM$ влечет изоморфизм решеток $L$ и $M$. Здесь $SubL$ - решетка подрешеток решетки $L$. Так как $SubL \cong SubL^*$, где $L^*$ - решетка двойственная решетке $L$, то более естественным и общим образом проблема Г.Гретцера должна быть сформулирована как: описать решетки $L$ обладающие следующим свойством: для любой решетки $M$ изоморфизм $SubL \cong SubM$ влечет один из изоморфизмов $L \cong M$, либо $L \cong M^*$. Решетки обладающие этим свойством назовем *решетками определимыми решеткой своих подрешеток*. В настоящей работе подобные решетки описаны для ряда классов конечных решеток.

Заметим, что описание пар всех решеток с изоморфными решетками подрешеток было дано в работе [2], но это довольно тяжелое описание мало пригодно к решению указанной проблемы Г.Гретцера. С другой стороны ряд достаточных условий (разложимость в нетривиальное прямое произведение, простота, наличие слабых дополнений, модулярность плюс квазинеразложимость или полумодулярность плюс строгая атомность плюс квазинеразложимость и т.д.) для определимости решетки решеткой своих подрешеток найден в работах [3] -[7]. Найденные в данной работе достаточные условия частично перекрываются с некоторыми условиями из работ [3] -[7], частично независимы от них.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда Фундаментальных исследований (грант №99-01-00571)



В силу идемпотентности решеточных операций любой элемент решетки $L$ образует одноэлементную подрешетку (один из минимальных элементов решетки $SubL$). Таким образом, для любых решеток $L$ и $M$ изоморфизм решеток $SubL$ и $SubM$ позволяет считать решетки $L$ и $M$ обладающими общим основным множеством с совпадающими решетками своих подрешеток: $SubL = SubM$.

Отметим теперь ряд понятий выразимых в терминах решетки $SubL$ и, тем самым, сохраняющихся при изоморфизме $SubL \cong SubM$. Любая цепь решетки $L$ является ее подрешеткой и характеристическое свойство цепей среди всех подрешеток решетки $L$ суть: супремум любых двух одноэлементных подрешеток цепи является двухэлементной подрешеткой. Таким образом в терминах $SubL$ выразимо понятие: данная подрешетка решетки $L$ является максимальной цепью в $L$. Под *конусом* $a \uparrow\downarrow$ *сравнимых с* $a \in L$ *элементов* решетки $L$ понимаем множество $\{x \in L | x \leq a$ или $a \leq x\}$. Под *нижним конусом* $a \downarrow$ - множество $\{x \in L | x \leq a\}$, под *верхним* $a \uparrow$ - множество $\{x \in L | a \leq x\}$. При этом

$$a \uparrow\downarrow = a \downarrow \cup a \uparrow \text{ и } a \downarrow \cap a \uparrow = \{a\}.$$

Очевидно, что конус $a \uparrow\downarrow$ является объединением всех максимальных цепей решетки $L$ содержащих элемент $a$. Тем самым, если $\varphi$ - изоморфизм $SubL$ на $SubM$ и $\varphi'$ индуцированная $\varphi$ биекция $L$ на $M$, то для любого $a \in L$ $\varphi(a \downarrow\uparrow) = \varphi'(a) \downarrow\uparrow$.

Под *границей* $GrL$ *решетки* $L$ будем понимать пересечение всех максимальных цепей решетки $L$, т.е. $GrL = \{x \in L | (x \downarrow\uparrow) = L\}$. В частности, если $L$ обладает нулем 0 и единицей 1, то $\{0, 1\} \subseteq GrL$ и если $GrL = \{0, 1\}$, то для любого $a \in L \setminus GrL$ существует $b \in L$ несравнимый с $a$ $(b \| a)$. Элементы, принадлежащие границе назовем *узлами* решетки $L$. В силу того, что понятие границы определяется через понятие максимальной цепи, если $\varphi$ - изоморфизм $SubL$ на $SubM$, то $\varphi(GrL) = GrM$.

Для любых двух решеток $L_1$ и $L_2$ под их *ординальной суммой* $L_1 \oplus L_2$ будем понимать решетку, основное множество которой суть дизъюнктное объединение основных множеств решеток $L_1$ и $L_2$, каждый элемент решетки $L_1$ меньше любого элемента решетки $L_2$ и, при этом, $L_1$ и $L_2$ являются подрешетками решетки $L_1 \oplus L_2$. Для любой подрешетки $L'$ решетки $L = L_1 \oplus L_2$ имеет место равенство $L' = L_1' \oplus L_2'$, где $L_i' = L' \cap L_i$. Обратно, если $L_i'$ суть подрешетки решеток $L_i$, то $L_1' \oplus L_2'$ является подрешеткой решетки $L$. Таким образом, $Sub(L_1 \oplus L_2) \cong SubL_1 \times SubL_2$ и, тем самым, $Sub(L_1 \oplus L_2) \cong Sub(L_2 \oplus L_1)$. С другой стороны, если для некоторой решетки $L$ имеет место $SubL \cong M_1 \times M_2$, то тривиальные рассуждения (т.к. под элементом $< a_1, a_2 > \in M_1 \times M_2$, где $a_i$ - атомы в $M_i$, лежат ровно четыре элемента: $< \emptyset, \emptyset >, < a_1, \emptyset >, < \emptyset, a_2 >, < a_1, a_2 >$, то элемент $< a_1, a_2 >$ соответствует двухэлементной подрешетке решетки $L$ и, значит, любая пара элементов $b_i \in N_i$, где $M_i \cong SubN_i$, сравнима в решетке $L$ и т.д.) приводят к тому, что $L \cong N_1 \oplus N_2$ для некоторых решеток $N_1, N_2$ таких, что либо $SubN_1 = M_1$, $SubN_2 = M_2$, либо $SubN_2 = M_1$, $SubN_1 = M_2$. Таким образом имеет место

ЛЕММА 1. *Для любой решетки $L$ нетривиальное разложение $SubL \cong M_1 \times M_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $M_i \cong SubN_i$ для некоторых решеток $N_1$ и $N_2$ и при этом $L \cong N_1 \oplus N_2$ или $L \cong N_2 \oplus N_1$.*

Решетку $L$ назовем *квазинеразложимой*, если она непредставима в виде ординальной суммы каких-либо решеток, т.е. если $SubL$ прямо неразложима.

Для любого элемента $a$ решетки $L$ совокупность выпуклых квазинеразложимых подрешеток решетки $L$ содержащих элемент $a$ является направленной вверх по включению. Действительно, если $a \in L_1, L_2$ и $L_i$ квазинеразложимы и выпуклы, то пусть $L_3$ - наименьшая выпуклая подрешетка решетки $L$ включающая в себя $L_1$ и $L_2$. Допустим, что $L_3$ разложима в ординальную сумму: $L_3 = L_4 \oplus L_5$ и пусть $a \in L_4$, но тогда $L_i = (L_i \cap L_4) \oplus (L_i \cap L_5)$ и, тем самым, $L_i \cap L_5 = \emptyset$ для $i = 1, 2$, что противоречит выбору $L_3$ как наименьшей выпуклой подрешетки включающей $L_1$ и $L_2$. Доказанная направленность влечет существование наибольшей выпуклой квазинеразложимой подрешетки решетки $L$ содержащей элемент $a$ для любого $a \in L$ и ее единственность. Обозначим эту подрешетку как $L_a$ и назовем ее *квазинеразложимым слагаемым* решетки $L$. При этом для любого $b \in L_a$ имеет место $L_b = L_a$. Так же без труда замечается, что для $a, b \in L$, если $L_a \neq L_b$, то $a$ и $b$ сравнимы в $L$ и при этом для любых $c \in L_a$, $d \in L_b$ сравнение $a < b$ имеет место тогда и только тогда, когда $c < d$.

Для любых решеток $L_i (i \in I)$ и любого линейно упорядоченного множества $I$, аналогично ординальной сумме двух решеток, определима ординальная сумма $\oplus_{i \in I} L_i$. Таким образом, если $A = \{a_i | i \in I\} \subseteq L$ - совокупность представителей из разбиения $\{L_a | a \in L\}$ решетки $L$, то $L = \oplus_{a \in A} L_a$ является разложением решетки $L$ в ординальную сумму квазинеразложимых решеток $L_a (a \in A)$ и подобное представление решетки $L$ единственно. Без труда, аналогично доказательству леммы 1 доказывается следующее ее обобщение.

ЛЕММА 2. Если $L = \oplus_{i \in I} L_i$ представление решетки $L$ ординальной суммой квазинеразложимых решеток $L_i$, то $SubL \cong \Pi_{i \in I} SubL_i$ и обратно, любое представление $SubL \cong \Pi_{i \in I} M_i$ влечет представимость решетки $L = \oplus_{i \in I} L_i$, где $M_i \cong SubL_i$, для любого линейного упорядоченного множества $I$.

Тем самым, т.к. в случае бесконечности $I$, существуют различные неизоморфные определенные на $I$ линейные порядки, *если решетка $L$ определима решеткой $SubL$, то $L$ разложима в конечную сумму квазинеразложимых решеток. При этом, квазинеразложимые слагаемые решетки $L$ должны быть попарно изоморфны друг другу и, в случае, когда $L$ сама не является квазинеразложимой, самодвойственны ($L_i \cong L_i^*$).*

Для решеток $L_1$ с единицей 1 и $L_2$ с нулем 0 под их *ординальной склейкой* $L_1 \oplus' L_2$ будем понимать решетку построенную аналогично решетке $L_1 \oplus L_2$ при отождествлении 0 и 1. Заметим, что $Gr(L_1 \oplus' L_2) = GrL_1 \cup GrL_2$. Решетку $L$ назовем *неразложимой*, если она квазинеразложима и не представима в виде ординальной склейки неодноэлементных



решеток. Таким образом, в частности, *конечная решетка $L$ неразложима тогда и только тогда, когда $|L| > 2$ и $|GrL| = 2$.*

Пусть теперь $L$ конечная квазинеразложимая решетка, $GrL = \{0, 1, a_1, \cdots, a_n\}$ и при этом $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Пусть $L_0 = [0, a_1]$, $L_i = [a_i, a_{i+1}]$ при $1 \leq i < n$, $L_n = [a_n, 1]$. Тогда $L = L_0 \oplus' L_1 \oplus' \cdots \oplus' L_n$ и т.к. $L$ квазинеразложима, то граница $L$ не содержит пар элементов покрывающих друг друга в $L$, т.е. для $0 \leq i \leq n$ $|L_i| > 2$, а для $i = 0, n$ $|L_i \cap \cup_{j \neq i} L_j| = 1$. Все указанные особенности строения решетки $L$ выразимы на языке решетки $SubL$ и, тем самым, имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Если $L$ конечная решетка, $L = L_0 \oplus' L_1 \oplus' \cdots \oplus' L_n$, $|L_i| > 2$, $|GrL_i| = 2$ и для некоторой решетки $L'$ имеет место изоморфизм $SubL \cong SubL'$, то существуют подрешетки $L_i'$ решетки $L'$ такие, что $L' = L_0' \oplus' L_1' \oplus' \cdots \oplus' L_n'$ и$SubL_i \cong SubL_i'$ для $0 \leq i \leq n$.

Доказательство. В силу замеченного выше найдутся подрешетки $L_i'$ решетки $L'$ такие, что $L_0' \cup L_1' \cup \cdots \cup L_n' = L'$, $|GrL_i'| = 2$ для всех $0 < i \leq n$, $L_i' \cap L_j' \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $j = i + 1$, при этом элементы $a \in L_i'$, $b \in L_j'$ (при $i \neq j$) всегда сравнимы, $L_i' \cap L_{i+1}' = GrL_i' \cap GrL_{i+1}'$ и $|L_i' \cap L_{i+1}'| = 1$ для $0 \leq i < n$. Все эти свойства $L'$ и влекут представление $L'$ в виде $L_0' \oplus L_1' \oplus \cdots \oplus L_n'$ так что при этом $SubL_i \cong SubL_i'$ при $0 \leq i \leq n$. Лемма доказана.

Из утверждения этой леммы вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 4. Если квазинеразложимая конечная решетка $L$ является ординальной склейкой неразложимых решеток определимых решетками своих подрешеток, то сама $L$ определима решеткой $SubL$.

Действительно, пусть $L = L_0 \oplus' L_1 \oplus' \cdots \oplus' L_n, L_i$ неразложимы и определимы решетками $SubL_i$. Рассмотрим случай когда $n > 0$ и пусть для некоторой решетки $L'$ имеет место изоморфизм $SubL' \cong SubL$. В силу предшествующей леммы найдутся неразложимые решетки $L_i'$ такие, что $L' = L_0' \oplus' L_1' \oplus' \cdots \oplus' L_n'$ и $SubL_i' \cong SubL_i$. В силу определимости решеток $L_i$ решетками $SubL_i$, для любого $0 \leq i \leq n$ имеет место либо $L_i \cong L_i'$, либо $L_i^* \cong L_i'$. Так как при этом нулевые элементы решеток $L$ и $L_0$ совпадают и являются тем единственным элементом из $GrL_0$, который не входит в $L_0 \cap \bigcup_{i \neq 0} L_i$, то нулевые элементы решеток $L_0'$ и $L'$ так же должны совпадать, т.е. $L_0 \cong L_0'$ и, значит, при этом изоморфизме единица решетки $L_0$ переходит в единицу решетки $L_0'$. Продолжая эти рассуждения получаем, что $L_i = L_i'$ для любого $0 \leq i \leq n$ и, тем самым, $L \cong L'$. Лемма доказана.

Любая конечная решетка $L$ представима в виде конечной ординальной суммы квазинеразложимых решеток, каждая из которых представима, в свою очередь, в виде ординальной склейки неразложимых решеток, назовем последние *ординальными составляющими* решетки $L$.

Назовем неразложимую решетку *толстой*, если для любых ее различных элементов $a, b$ отличных от 0 и 1 конуса $(a \downarrow\uparrow)$ и $(b \uparrow\downarrow)$ несравнимы по включению. К примеру, любая булева решетка является толстой, любая решетка $M_n (n \geq 2)$ - толстая и т.д. В связи с этим заметим (см., к примеру [8]), что любая булева алгебра $B$ формульно определима в решетке $SubB$ своих подалгебр. Укажем еще одну характеризацию толстых решеток.

ЛЕММА 5. Неразложимая решетка $L$ является толстой тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in L \setminus \{0,1\}$ таких, что $a < b$ существует $c, d \in L$ со свойствами: $c < b$, $c \parallel a$ и $a < d$, $b \parallel d$.

Доказательство. Пусть $L$ толстая решетка и $a, b \in L \setminus \{0,1\}$, $a < b$. Конуса $(a \uparrow\downarrow)$, $(b \uparrow\downarrow)$ несравнимы по вложению и, значит, существует $d \in (a \uparrow\downarrow) \setminus (b \uparrow\downarrow)$. Тогда $d \in (a \downarrow) \setminus (b \uparrow\downarrow)$, т.е. $a < d$ и $d \parallel b$. Аналогично замечается существование $c$ такого, что $c < b$ и $c \parallel a$.

Пусть теперь решетка $L$ обладает указанными в формулировке леммы свойствами. Покажем, что $L$ - толстая. Пусть $a, b \in L \setminus \{0,1\}$ и $a < b$, пусть $c, d$ таковы, что $c < b$, $c \parallel a$, $a < d$, $b \parallel d$. Тогда $c \in (b \downarrow\uparrow) \setminus (a \downarrow\uparrow)$, $d \in (a \downarrow\uparrow) \setminus (b \downarrow\uparrow)$, т.е. конуса $(a \downarrow\uparrow)$, $(b \downarrow\uparrow)$ несравнимы и в этом случае. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Любая конечная толстая неразложимая решетка определима решеткой своих подрешеток.

Доказательство. Пусть $L$ конечная толстая неразложимая решетка. В силу неразложимости $L$, $GrL = \{0,1\}$. Выше уже отмечалось что граница $L$ определяется в терминах решетки $SubL$. Фиксируем один из элементов $GrL$. Пусть это будет 0 (в случае фиксации 1 мы будем иметь дело с решеткой двойственной к $L$). Заметим, что пара $< SubL, 0 >$ однозначно определяет порядок $<$ на $L$. Действительно, пусть $a \in L \setminus \{0,1\}$. Тогда, т.к. $L$ толстая и неразложимая, то $Gr(a \downarrow\uparrow) = \{0,1,a\}$, $Gr(a \uparrow) = \{a,1\}$, $Gr(a \downarrow) = \{0,a\}$. Для любого элемента $b \in L$ имеет место следующая цепочка эквивалентностей (т.к. любая конечная решетка имеет непустую границу):

$b \leq a \Leftrightarrow b \in (a \downarrow) \Leftrightarrow$ существуют $C_1, C_2 \in SubL$ такие, что
$(a \downarrow\uparrow) = C_1 \cup C_2$, $C_1 \cap C_2 = \{a\}$, $|GrC_1| = |GrC_2| = 2$
и для некоторого $i \in \{1,2\}$ имеют место включения $0 \in C_i$, $b \in C_i$ (если $C_i \cap (a \downarrow) \neq \emptyset$ и $C_i \cap (a \uparrow) \neq \emptyset$ то $|GrC_i| \leq 3$).

Тем самым решетка $L$ определима решеткой $SubL$. Лемма доказана.

Произвольную решетку $L$ назовем *толстой*, когда толстыми являются все ее ординальные составляющие. В силу утверждений леммы 4, леммы 6 и замеченного вслед за леммой 2 имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Конечная толстая решетка $L$ определима решеткой своих подрешеток тогда и только тогда, когда все ее ординальные слагаемые попарно изоморфны друг другу и самодвойственны в случае, когда их число превышает единицу, т.е. когда $L$ не является квазинеразложимой.

Назовем теперь неразложимую решетку *квазитолстой*, если для любых ее элементов $a, b$ имеет место либо $(a \downarrow\uparrow) = (b \downarrow\uparrow)$, либо $(a \downarrow\uparrow) \parallel (b \downarrow\uparrow)$.

На произвольной решетке $L$ введем отношение эквивалентности $\sim$:



$a \sim b$ тогда и только тогда, когда $(a \downarrow\uparrow) = (b \downarrow\uparrow)$. Очевидно, что если $a \sim b$, то $a$ и $b$ сравнимы в $L$.

ЛЕММА 7. Для любой решетки $L$, если $a_1 \sim a_2$, $a_1 \leq b \leq a_2$ и $d \in L \setminus (a_1 \downarrow\uparrow)$, то $b \wedge d \in (a_1 \downarrow)$, $b \vee d \in (a_2 \uparrow)$ и, тем самым, $b \wedge d = a_1 \wedge d$, $b \vee d = a_2 \vee d$.

Доказательство. Покажем лишь первое включение. Так как $b \wedge d \leq a_2$, то $b \wedge d \in (a_2 \downarrow\uparrow) = (a_1 \downarrow\uparrow)$. Если при этом $b \wedge d \in (a_1 \uparrow)$, то $b \wedge d \geq a_1$ и, тем самым, $d \in (a_1 \downarrow\uparrow)$ в противоречии с выбором $d$. Лемма доказана.

Лемма 8. Для любой решетки $L$, если $a_1 \sim a_2$, $b_1 \sim b_2, a_1 < b_1 < a_2$, $b_1 < b_2$ и $b_2 \not\leq a_2$, то $a_1 \sim b_1$.

Доказательство. Так как $(a_1 \downarrow\uparrow) = (a_2 \downarrow\uparrow)$ и $a_1 < b_1 < a_2$, то $(b_1 \downarrow\uparrow) \subseteq (a_1 \downarrow\uparrow)$. Так как $(b_1 \downarrow\uparrow) = (b_2 \downarrow\uparrow)$ и $b_1 < a_2 \leq b_2$ (несравнимыми $b_1$ и $a_2$ быть не могут, так как тогда несравниммы по включению и конусы $(b_2 \downarrow\uparrow)$, $(a_2 \downarrow\uparrow)$), то $(a_1 \downarrow\uparrow) = (a_2 \downarrow\uparrow) \subseteq (b_2 \downarrow\uparrow) = (b_1 \downarrow\uparrow)$. Тем самым, $(a_1 \downarrow\uparrow) = (b_1 \downarrow\uparrow)$, т.е. $a_1 \sim b_1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Если неразложимая решетка $L$ квазитолстая, то классы эквивалентности по $\sim$ выпуклы.

Действительно, пусть $a_1 < b < a_2$ и $(a_1 \downarrow\uparrow) = (a_2 \downarrow\uparrow)$. Тогда $(b \downarrow) \subseteq (a_2 \downarrow)$, $(b \uparrow) \subseteq (a_1 \uparrow)$ и, значит $(b \downarrow\uparrow) \subseteq (a_2 \downarrow) \cup (a_1 \uparrow) \subseteq (a_1 \downarrow\uparrow) \cup (a_2 \downarrow\uparrow) = (a_1 \downarrow\uparrow)$. Так как $L$ квазитолстая, то имеет место равенство $(b \downarrow\uparrow) = (a_1 \downarrow\uparrow)$ и лемма доказана.

Если $L$ конечная квазитолстая неразложимая решетка, то в силу утверждений трех последних лемм классы эквивалентности по $\sim$ представляют собой конечные выпуклые цепи, а любая система представителей из этих классов образует толстую подрешетку $L'$ решетки $L$ и все подобные подрешетки решетки $L$ изоморфны друг другу. В силу леммы 6 порядок на толстой подрешетке $L'$ определим решеткой $SubL'$ (с точностью до двойственного). Тем самым, свойства решетки $L$ (определяющие порядок на $L$): на $L$ существует разбиение на подрешетки являющиеся конечными цепями, выбор любой системы представителей из этого разбиения образует подрешетку решетки $L$, эта подрешетка толстая и определимый этой подрешеткой порядок является порядком между цепями, образующими разбиение $L$ (не зависит от выбора конкретных представителей в этих цепях) - эти свойства сохраняются при изоморфизме $SubL \cong SubM$. Тем самым, имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 10. Любая квазитолстая конечная неразложимая решетка определима решеткой своих подрешеток.

Произвольную решетку назовем *квазитолстой* тогда и только тогда, когда квазитолстыми являются ее ординальные составляющие.

Утверждение леммы 10 и замеченное вслед за леммой 2 влечет следующее обобщение теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Конечная квазитолстая решетка $L$ определима решеткой своих подрешеток тогда и только тода, когда все ее ординальные слагаемые попарно изоморфны друг другу и самодвойственны, в случае если их число превышает единицу, т.е. когда $L$ не является квазинеразложимой.

## ЛИТЕРАТУРА


1. G.Gratzer. General Lattice Theory. Second edition.- Birkhauser Verlag, Basel, 1996.

2. Н.Д.Филлипов. Проекции решеток. Матем. сб., 70(112), 1966, с.36-54.

3. K.M.Koh, Lattices and their sublattice-lattices.- Sea. Bull. Math., v.10, №2, 1986, p.128-135.

4. C.C.Chen, K.M.Koh, K.L.Teo, On the sublattice-lattice of a lattice.- Alg. univ., v.19, №1, 1984, p. 61-73.

5. G.Takach, Notes on sublattice-lattices.- Periodica Math. Hung. v.35, №3, 1997, p.215-224.

6. G. Takach, On the sublattice-lattices of lattices.- Publ. Math (Debrecen), v.52, №1-2, 1998, p.121-126.

7. G. Takach, Lattices characterized by their sublattice-lattices.- Alg. univ., v.37, №4, 1997, p.422-425.

8. А.Г.Пинус. Теории 2-го порядка конгруэнц-дистрибутивных многообразий.- сб. "Алгебра, логика, приложения", из-во ИрГУ, Иркутск, 1994, с.102-110.




# О СКЕЛЕТАХ МНОГООБРАЗИЙ РЕШЕТОК


**А.Г. Пинус, Я.Л. Мордвинов**

Россия
630092 Новосибирск, НГТУ
Кафедра алгебры и математической логики
e-mail: algebra@nstu.ru


Инициатива изучения типов изоморфизма алгебраических систем с различными естественными отношениями и операциями на этих типах восходит к А. Тарскому. В работах первого автора были введены понятия скелетов эпиморфности и вложимости различных классов универсальных алгебр и получен ряд результатов о строении этих скелетов для конгруэнц-дистрибутивных и, в особенности, дискриминаторных многообразий. Обзор основных результатов см., к примеру, [1], [2]. В частности, в работах первого [3], [4] и второго [5] авторов описаны дискриминаторные многообразия, счетные скелеты которых являются полурешетками (напомним, что в работе [3] доказано, что полные скелеты любых нетривиальных конгруэнц-дистрибутивных многообразий полурешетками не являются). В работах [6] – [8] получены частные результаты связанные с проблемой покрытия в скелетах эпиморфности конгруэнц-дистрибутивных многообразий. В настоящей работе проблема покрытия и проблема, когда счетный скелет многообразия является полурешеткой, рассмотрены для такого классического примера конгруэнц-дистрибутивных многообразий как многообразие решеток.

Напомним необходимые определения. Для любого класса $\mathfrak{K}$ универсальных алгебр, через $\Im\mathfrak{K}$ обозначим совокупность типов изоморфизма $\mathfrak{K}$-алгебр, а через $\mathfrak{K}_{\aleph_0}$ — совокупность всех не более чем счетных $\mathfrak{K}$-алгебр. На $\Im\mathfrak{K}$ введем два отношения квазипорядка: $a \ll b$ $(a \leq b)$ тогда и только тогда, когда алгебра с типом изоморфизма $a$ является эпиморфным образом (изоморфно вложима в) алгебры с типом изоморфизма $b$. Квазиупорядоченный класс $\langle \Im\mathfrak{K}; \ll \rangle$ $(\langle \Im\mathfrak{K}; \leq \rangle)$ назовем скелетом эпиморфности (вложимости) класса $\mathfrak{K}$. Переход от $\Im\mathfrak{K}$ к $\Im\mathfrak{K}_{\aleph_0}$ приводит к понятиям счетных скелетов. Пусть $\equiv_{\ll}$ $(\equiv_{\leq})$ — естественная эквивалентность порожденная квазипорядком $\ll$ $(\leq)$. Будем говорить, что скелет $\langle \Im\mathfrak{K}; \ll \rangle$ $(\langle \Im\mathfrak{K}; \leq \rangle)$ является полурешеткой, если таковой является фактор $\langle \Im\mathfrak{K}/ \equiv_{\ll}; \ll \rangle$ $(\langle \Im\mathfrak{K}/ \equiv_{\leq}; \leq \rangle)$. Элемент $b \in \Im\mathfrak{K}$ является покрытием элемента $a \in \Im\mathfrak{K}$ в скелете $\langle \Im\mathfrak{K}; \ll \rangle$, если $a \ll b$, $b \not\ll a$ и для любого $c \in \Im\mathfrak{K}$ неравенства $a \ll c \ll b$ влекут одно из неравенств $c \ll a$ или $b \ll c$.

Поскольку нетривиальные многообразия решеток не являются дискриминаторными, то приведенные выше работы, в которых описаны дискриминаторные многообразия с полурешеточными скелетами, оставляли открытым вопрос о многообразиях решеток, счетные скелеты которых суть полурешетки. Ответ на него дан в следующей теореме 1 и следствии 2.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого нетривиального многообразия решеток $\mathcal{M}$ счетный скелет вложимости многообразия $\mathcal{M}$ не является полурешеткой.*

*Доказательство.* В работе [3] было введено понятие дыры в квазипорядке $\langle K; \leq \rangle$. Четверка элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in K$ образует в $\langle K; \leq \rangle$ дыру, если $a_1 \leq b_1$, $b_1 \not\leq$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00571)

$a_1$, $a_2 \le b_2$, $b_2 \not\le a_2$, $a_1 \le b_2$, $b_2 \not\le a_1$, $a_2 \le b_1$, $b_1 \not\le a_2$, пары $a_1, a_2$ и $b_1, b_2$ состоят из несравнимых элементов, и не существует элемента $c \in K$ такого, что $a_1 \le c$, $a_2 \le c$, $c \le b_1$, $c \le b_2$. Очевидно, что если в $\langle K; \le\rangle$ существует дыра, то $\langle K; \le\rangle$ не может быть полурешеткой. Таким образом для доказательства того, что скелет $\langle \Im\mathcal{M}_{\aleph_0}; \le\rangle$ не является полурешеткой, достаточно указать в нем дыру. Более того, т. к. каждое нетривиальное многообразие решеток включает в себя многообразие дистрибутивных решеток, то достаточно указать дыру в скелете $\langle D_{\aleph_0}; \le\rangle$, где $D$ — многообразие дистрибутивных решеток.

Пусть $F_0$ — решетка всех конечных подмножеств множества $\omega$, а $B_1$ — решетка всех конечных и ко-конечных подмножеств множества $\omega$. Пусть $B_2$ — решетка, полученная из $F_0$ помещением под каждым ее атомом $a$ экземпляра $F_a$ решетки $F_0$ так, что для $a \ne b$ — атомов $F_0$ $F_a \cap F_b = \{\emptyset\}$. Пусть $B^1$ аналогичным образом получается из решетки $B_1$, т. е. под каждым атомом $a$ решетки $B_1$ помещаем экземпляр $F_a$ решетки $F_0$ так, что для $a \ne b$ — атомов $B_1$ $F_a \cap F_b = \{\emptyset\}$. Решетку $B^2$ получаем из решетки $F_0$ помещением под каждым ее атомом $a$ экземпляра $B_a$ решетки $B_1$, отождествляя наибольший элемент решетки $B_a$ с атомом $a$, и так, что для $a \ne b$ — атомов $F_0$ $B_a \cap B_b = \{\emptyset\}$. Вложения, соответствующие неравенствам $B_1 \le B^1$, $B_2 \le B^2$, $B_1 \le B^2, B_2 \le B^1$ очевидны. Так как в решетке $B_1$ существует цепь элементов порядкового типа $\omega^*$, а в $B_2$ подобных цепей нет, но, в свою очередь, в $B_2$ существует цепь порядкового типа $\omega + \omega$, в то время как в решетке $B_1$ подобных цепей нет, то решетки $B_1$ и $B_2$ друг в друга не вложимы. Подобным же образом замечается невложимость друг в друга и решеток $B^1$ и $B^2$. (Надо рассмотреть цепи порядковых типов $\omega + \omega^*$ и $\omega^* + \omega$.)

Пусть теперь $B$ — некоторая решетка вложимая в решетки $B^1$ и $B^2$ и в которую, в свою очередь вложимы решетки $B_1$ и $B_2$. Пусть $\phi_i$ — это вложение решетки $B_i$ в $B$, а $\psi_i$ — вложение $B$ в $B^i$. Рассматривая вложения $\psi_2\phi_1$ и $\psi_2\phi_2$ решеток $B_1$ и $B_2$ в решетку $B^2$, без труда замечается существование подрешетки $B'$ решетки $\psi_2(B)$ такой, что $B' \cong B_2$ и для любых $a \in B_1$ и $b \in B'$, $\psi_2\phi_1(a) \wedge \psi_2\phi_2(b) = \emptyset$. Тем самым, для вложений $\phi_1$ и $\phi_2$ можно дополнительно предположить, что для любых $a \in B_1$ и $b \in B_2$ $\phi_1(a) \wedge \phi_2(b) = \emptyset$. Пусть $1_{B_1}$ — наибольший элемент решетки $B_1$ (в частности, под ним есть цепь порядкового типа $\omega^*$). В силу указанного выше предположения о вложениях $\phi_1$ и $\phi_2$ в решетке $B$ существует элемент $(\phi_1(1_{B_1}))$ под которым есть цепь типа $\omega^*$ и такой, что в $B$ существует счетный набор цепей $L_i$ $(i \in \omega)$ порядкового типа $\omega$ таких, что для любых $i \ne j \in \omega$, любых $a_i \in L_i$, $b_j \in L_j$ $a_i \wedge b_j = \emptyset$ и $a_i \wedge \phi_1(1_{B_1}) = \emptyset$. В силу вложимости $B$ в решетку $B^1$, подобные элемент $\psi_1(\phi_1(1_{B_1}))$ и цепи $\psi_1(L_i)$ $(i \in \omega)$ должны были бы существовать и в решетке $B^1$. Что, как легко убедиться, невозможно. Тем самым, существование решетки $B$ с указанными выше свойствами ведет к противоречию, т. е. четверка решеток $B_1, B_2, B^1, B^2$ действительно образует дыру в счетном скелете многообразия дистрибутивных решеток. Теорема доказана.

Напомним, что алгебра $\mathcal{A}$ называется ретрактивной, если для любого эпиморфизма $\phi$ алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{B}$ существует вложение $\psi$ алгебры $\mathcal{B}$ в алгебру $\mathcal{A}$ такое, что отображение $\phi\psi$ тождественно на $\mathcal{B}$, $\phi\psi = id_{\mathcal{B}}$.

ЛЕММА 1. Любая решетка, вложимая в ретрактивную булеву алгебру является ретрактивной.

Доказательство. Отождествим решетку $L$ с подрешеткой некоторой ретрактивной булевой алгебры $B$. Пусть $\phi$ — некоторый эпиморфизм решетки $L$ на решетку $L_1$. Положим $J_1 = \{a \wedge \neg b | b < a,\ a, b \in L \text{ и } \phi(a) = \phi(b)\} \subseteq B$. Пусть $J$ — идеал булевой алгебры $B$, порожденный множеством $J_1$. Заметим, что для любых $a, b \in L$ равенство $a/J = b/J$ имеет место тогда и только тогда, когда $\phi(a) = \phi(b)$. Достаточно рассмотреть случай, когда $b < a$. Пусть $a/J = b/J$. Тогда найдутся $n \in \omega$ и пары $c_1, c_1', \dots, c_n, c_n' \in L$ такие, что $c_i' < c_i$, $\phi(c_i) = \phi(c_i')$ и $a \setminus b \le \vee_{i=1}^n (c_i \setminus c_i')$. Но тогда $a = (a \wedge \vee_{i=1}^n c_i) \vee b$ и, тем самым, $\phi(a) = \phi((a \wedge \vee_{i=1}^n c_i) \vee b) = (\phi(a) \wedge \vee_{i=1}^n \phi(c_i)) \vee \phi(b) = (\phi(a) \wedge \vee_{i=1}^n \phi(c_i')) \vee \phi(b) = \phi(a \wedge \vee_{i=1}^n c_i') \vee \phi(b)$. Но $a \wedge \vee_{i=1}^n c_i' = b \wedge \vee_{i=1}^n c_i'$ и, тем самым, $\phi(a) = \phi(b \wedge \vee_{i=1}^n c_i') \vee \phi(b) = (\phi(b) \wedge \vee_{i=1}^n \phi(c_i)) \vee \phi(b) == \phi((b \wedge \vee_{i=1}^n c_i) \vee b) = \phi(b)$.

То есть, действительно, $a/J = b/J$ тогда и только тогда, когда $\phi(a) = \phi(b)$. В силу этого существует гомоморфизм $\phi_1$ булевой алгебры $B$ на булеву алгебру $B_1 \supseteq L_1$, $B_1 \cong B/J$, продолжающий отображение $\phi$. В силу же ретрактивности булевой алгебры $B$ найдется вложение $\psi_1$ булевой алгебры $B_1$ в булеву алгебру $B$ такое, что $\phi_1\psi_1 = id_{B_1}$. По доказанному выше можно считать, что $\psi = \psi_1|_{L_1}$ будет вложением решетки $L_1$ в решетку $L$ и, тем самым, $\phi\psi = id_{L_1}$. Лемма доказана.

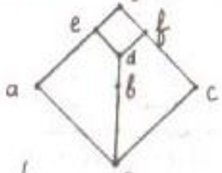
СЛЕДСТВИЕ 1. Любая не более чем счетная дистрибутивная решетка ретрактивна.

Утверждение следствия с помощью леммы легко выводится из следующих фактов: любая счетная дистрибутивная решетка вложима в счетную булеву алгебру, все счетные булевы алгебры интервальны, а последние, как хорошо известно [9], ретрактивны.

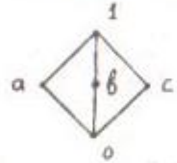
СЛЕДСТВИЕ 2. Счетный скелет эпиморфности любого нетривиального многообразия решеток не является полурешеткой.

Действительно, в доказательстве теоремы 1 построены четыре дистрибутивные решетки, образующие дыру в счетном скелете вложимости любого нетривиального многообразия решеток. В силу утверждения следствия 1 эти решетки будут образовывать дыру в счетном скелете эпиморфности любого нетривиального многообразия решеток, а, значит, этот скелет не может быть полурешеткой.

Заметим, что утверждение следствия 1 для произвольных, даже конечных решеток неверно. Действительно, рассмотрим следующую решетку $L$.




$L$




$M_3$

Отображение $\phi$ такое, что $\phi(1) = \phi(e) = \phi(d) = \phi(f) = 1$, $\phi(a) = a$, $\phi(b) = b$, $\phi(c) = c$, $\phi(0) = 0$ является эпиморфизмом $L$ на $M_3$. В то же время, как легко видеть, $L$ не содержит подрешеток, изоморфных решетке $M_3$.

Приведем также контрпример на следствие 1 для несчетных дистрибутивных решеток. Напомним, что семейство $S \subseteq P(\omega))$ подмножеств множества $\omega$ называется почти дизъюнктным, если для любых $A, B \in S$ имеет место $|A| = \aleph_0$ и $|A \cap B| < \aleph_0$. Хорошо известно [9] существование континуальных почти дизъюнктных семейств $S$ подмножеств $\omega$. Пусть $B$ — булева подалгебра булевой алгебры $P(\omega)$ всех подмножеств множества $\omega$, порожденная семейством $S$ и всеми конечными подмножествами $\omega$. Пусть $F$ — фильтр Фреше булевой алгебры $B$ и $\phi$ — канонический эпиморфизм $B$ на $B/F$. Так как $B/F$ изоморфна булевой алгебре всех конечных и коконечных под- множеств континуального множества, то $B/F$ не вложима в $B$ (даже как решетка). Тем самым, дистрибутивная решетка $B$ не ретрактивна.

Перейдем теперь к проблеме существования покрытий в скелетах эпиморфности многообразий решеток. В работе [8] отмечено, что любая решетка $L$ имеет покрытие в скелете эпиморфности многообразия всех решеток. Точно так же любая модулярная решетка $L$ в скелете эпиморфности многообразия модулярных решеток имеет покры- тие — $L \times M_{\aleph}$, где $M_{\aleph}$ — простая модулярная решетка, состоящая из наибольшего, наименьшего элементов и $\aleph$ атомов, а $\aleph$ — кардинал, следующий за $|L|$. Таким обра- зом, основной интерес представляет вопрос о покрытиях решеток в произвольных многообразиях, содержащих эти решетки.

Коидеалом решетки $L$ будем называть дополнение к любому идеалу решетки $L$ или, иначе, прообраз множества всех ненулевых элементов при любом эпиморфизме решетки $L$ на решетку с нулем.

Через $L_1 + L_2$ будем обозначать лексикографическую сумму любых двух частично упорядоченных множеств $L_1$ и $L_2$. Соответственно, если $K$ — коидеал решетки $L$, то через $0 + K$ обозначается решетка, полученная добавлением к $K$ внешнего нуля. С другой стороны, любая решетка $L$ с нулем представима в виде $0_L + K_L$, где $K_L$ — коидеал ненулевых элементов решетки $L$, а $0_L$ — нуль решетки $L$.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого нетривиального многообразия $M$, для любой $M$-решетки $L$ с нулем или единицей в скелете эпиморфности $M$ существует покрытие решетки $L$.*

Доказательство. Предположим, что $L$ имеет нуль $0_L$. Наличие в $L$ единицы рас- сматривается двойственным образом. Итак, $L = 0_L + K_L$. Пусть $\alpha$ — наименьший ординал такой, что $L^* = 0_L + \alpha^* + K_L \not\ll L$. Здесь $\alpha^*$ — порядок, двойственный ординалу $\alpha$. Покажем, что $L^*$ является покрытием решетки $L$ в скелете эпиморф- ности многообразия $\mathcal{M}$. Прежде всего заметим, что т. к. $L^*$ является подрешеткой решетки $L \times 2^{|\alpha|}$, где 2 — двухэлементная решетка, то $L^* \in \mathcal{M}$. Неравенство $L \ll L^*$ очевидно. Таким образом, остается показать, что для любой решетки $L_1$ такой, что $L \ll L_1 \ll L^*$ либо $L_1 \ll L$, либо $L^* \ll L_1$. Пусть $\psi$ — эпиморфизм $L^*$ на $L_1$, а $\phi$ — $L_1$ на $L$. Рассмотрим два случая: 1) $\alpha = 1$, 2) $\alpha > 1$.

1) В этом случае $L^* = 0_{L^*} + 0_L + K_L$. Если $\psi(0_{L^*}) = \psi(0_L)$, то ограничение $\psi$ на подрешетки $L$ решетки $L^*$ является эпиморфизмом $L$ на $L_1$, т. е. $L_1 \ll L$. Таким образом, будем считать, что $\psi(0_{L^*}) \neq \psi(0_L)$. Для $L_1$ имеет место представление $L_1 = 0_{L_1} + K_{L_1}$ и $\psi(L) = K_{L_1}$. Если $\phi(K_{L_1}) = L$, то очевидно неравенство $L^* \ll L_1$. Тем самым, считаем далее, что $\phi(K_{L_1}) \neq L$. Тогда $K_L = \phi(\psi(o_L)) + K^{(1)}$ для некоторого коидеала $K^{(1)}$. Итерация проведенных рассуждений, отправляясь от элемента $\phi(\psi(0_L))$ вместо $0_L$, приводит к тому, что если ни одно из неравенств $L_1 \ll L$, $L^* \ll L_1$ не имеет места, то $L = \omega + K^{(2)}$ для некоторого коидеала $K^{(2)}$. Но тогда $L^* \cong L$, что противоречит неравенству $L^* \not\ll L$. Тем самым, действительно, в этом случае $L^*$ есть покрытие решетки $L$ в скелете эпиморфности многообразия $M$.

2) Пусть $\alpha > 1$. Тогда нетрудно заметить неразложимость ординала $\alpha$, т. е. для любых ординалов $\beta_1, \beta_2$ из равенства $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ вытекает равенство $\beta_2 = \alpha$. Если $0_{L_1} \in \psi(\alpha^*)$, то как и в случае 1) получаем неравенство $L_1 \ll L$. Будем далее считать, что $0_{L_1} \notin \psi(\alpha^*)$. Если $\psi(\alpha^*) < \alpha^*$, то в силу определения $\alpha$ неравенство $L_1 \ll L$ так



же очевидно. Таким образом, считаем далее, что $0_{L_1} \notin \psi(\alpha^*)$ и порядковые типы $\psi(\alpha^*)$ и $\alpha^*$ совпадают. Тем самым $L_1 = 0_{L_1} + \alpha^* + K'$ для некоторого коидеала $K'$. Если при этом $\phi(K') = L$, либо $\phi(K') = K_L$, то неравенство $L^* \ll L_1$ очевидно. Итак, считаем далее, что $\phi(K')$ строго содержится в $K_{L_1}$. Тем самым, $K_L = \gamma^* + \phi(K')$ для некоторого ординала $\gamma \leq \alpha$. В случае, когда $\gamma < \alpha$, в силу равенства $\alpha^* = \alpha^* + \gamma^*$ получаем неравенство $L^* = 0_{L^*} + \alpha^* + \gamma^* + \phi(K') \ll 0_{L_1} + \alpha^* + K' = L_1$. Таким образом, остается рассмотреть лишь случай, когда $\gamma = \alpha$. Но тогда итерация проведенных рассуждений, в предположении, что ни одно из неравенств $L^* \ll L_1$, $L_1 \ll L$ не имеет места, влечет разложение $K_L = (\alpha^*) * \omega + K''$ для некоторого ординала $K''$ (здесь $(\alpha^*) * \omega$ — лексикографическое произведение порядков $\alpha^*$ и $\omega$). Но тогда изоморфизм $L$ и $L^*$ противоречит выбору $\alpha$ (такого, что $L^* \not\ll L$). Тем самым, и в случае 2) $L^*$ является покрытием решетки $L$ в скелете эпиморфности многообразия $\mathcal{M}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если $\mathcal{M}$ произвольное нетривиальное многообразие решеток с нулем (с единицей), то любая $\mathcal{M}$-решетка имеет покрытие в скелете эпиморфности многообразия $\mathcal{M}$.*

В связи с утверждением теоремы 2 естествен интерес к минимальным, в раз- личных смыслах, покрытиям решеток в скелетах эпиморфности. В частностия, к существованию одноэлементных расширений решетки $L$, являющихся покрытиями $L$ в скелетах эпиморфности. Примеры свободных бесконечно порожденных $\mathcal{M}$-алгебр показывают, что подобные покрытия могут и не существовать. Укажем, тем не ме- нее, на некоторые условия, гарантирующие существование подобных покрытий. Нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Если $\phi$ — эпиморфизм решетки с нулем $L$ на решетку $L_1$ и $K = \phi^{-1}(K_{L_1})$, то существует эпиморфизм $\psi$ решетки $L' = 0 + K$ на решетку $L_1$, совпада- ющий с $\phi$ на $K$.*

Доказательство. Из заключения леммы, отображение $\psi$ определено на решетке $0 + K$ однозначно и, тем самым, достаточно проверить, что $\psi$ — гомоморфизм. В силу определения $\psi$ для этого достаточно показать, что $\psi(a \wedge b) = \psi(a) \wedge \psi(b)$ для $a, b \in K$ таких, что $a \wedge b \in \phi^{-1}(0_{L_1})$. Действительно, т. к. $a \wedge b \in \phi^{-1}(0_{L_1})$, то $a \wedge b = 0_{L'}$ в решетке $L'$. Тогда $\psi(a) \wedge \psi(b) = \phi(a) \wedge \phi(b) = \phi(a \wedge b) = 0_{L'} = \psi(a \wedge b)$. Лемма доказана.

Решетку с нулем $L$ назовем несжимаемой вверх, если для любого ее коидеала $K \neq L$ и $K \neq K_L$ имеет место $L \not\ll 0 + K$. Двойственным образом определяется несжимаемость вниз.

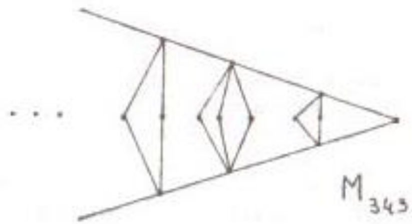
ТЕОРЕМА 3. *Для любого нетривиального многообразия решеток $\mathcal{M}$, любой не- сжимаемой вниз (вверх) решетки $L$ с нулем (с единицей) существует одноэлементное расширение $L^*$ решетки $L$, являющееся покрытием $L$ в скелете эпиморфности $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Будем считать $L$ решеткой с нулем. Пусть $L^*$ получается из $L$ добавлением внешнего нуля, т. е. $L^* = 0_{L^*} + 0_L + K_L$. Очевидно, что $L \ll L^*$. Заметим, что $L^* \not\ll L$. Действительно, в противном случае, если $\phi$ — эпиморфизм $L$ на $L^*$, то $\phi^{-1}(K_L)$ — коидеал решетки $L$, отличный от $K_L$, и в силу леммы 2 $L = 0_L + K_L \ll 0_L + \phi^{-1}(K_L)$ в противоречии с несжимаемостью решетки $L$ вверх. Из доказательства теоремы 2 вытекает, что $L^*$ является покрытием $L$ в скелете эпиморфности многообразия $\mathcal{M}$.

В работе [7] было доказано существование в любом нетривиальном конгруэнцдистрибутивном многообразии $\mathcal{M}$ пары алгебр $\mathcal{A}_1 \ll \mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_2 \not\ll \mathcal{A}_1$ таких, что $\mathcal{A}_1$ не имеет покрытия, лежащего в интервале $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2]$ скелета эпиморфности многообразия $\mathcal{M}$ (о таких покрытиях будем говорить как о покрытиях алгебры $\mathcal{A}_1$ относительно алгебры $\mathcal{A}_2$). В работе [8] были указаны некоторые достаточные условия того, чтобы алгебра $\mathcal{A}_1$ имела покрытие относительно алгебры $\mathcal{A}_2$, в частности в случае, когда $\mathcal{A}_1$ есть одноэлементная алгебра $1_{\mathcal{M}}$ (наименьший элемент скелета эпиморфности). Очевидно, что если $\mathcal{M}$ — полупростое многообразие (все подпрямо неразложимые $\mathcal{M}$-алгебры просты), то $1_{\mathcal{M}}$ имеет покрытие относительно любой неодноэлементной $\mathcal{M}$-алгебры. Таким образом, в многообразии дистрибутивных решеток, в многообразиях модулярных решеток $\mathcal{M}_n$ $(n \in \omega)$, наименьшем немодулярном многообразии решеток $\mathcal{N}$ одноэлементная решетка имеет покрытие относительно любой решетки рассматриваемого многообразия. Напомним, что многообразие $\mathcal{M}_n$ — это многообразие, порожденное решеткой $M_n$, а $\mathcal{N}$ — многообразие, порожденное пентагоном $N$. Для многообразия $\mathbb{L}$ всех решеток ситуация иная.

ТЕОРЕМА 4. В многообразии всех решеток существует континуум счетных решеток, относительно которых одноэлементная решетка не имеет покрытий в скелете эпиморфности этого многообразия.

Доказательство. Пусть $\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \rangle$ произвольная последовательность натуральных чисел не меньших чем 3. Атомы решетки $M_n$ обозначим как $c_1, \ldots, c_n$. Через $M_{\alpha_1\alpha_2}$ обозначим решетку, получаемую из решетки $M_{\alpha_2}$ подстановкой вместо атома $c_{\alpha_2}$ интервала, совпадающего с решеткой $M_{\alpha_1}$. Решетка $M_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ получается из решетки $M_{\alpha_3}$ подстановкой вместо атома $c_{\alpha_3}$ интервала, совпадающего с решеткой $M_{\alpha_1\alpha_2}$. Итерируя это построение получаем решетки $M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ для любого $n \in \omega$ и, наконец, полагаем $M_\alpha = \bigcup_{n\in\omega} M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$.



$M_{343\ldots}$

Без труда проверяется (в силу простоты решетки $M_n$), что для любой $\theta \in Con M_\alpha$, если $\theta \neq \nabla$, то существует $n \in \omega$ такое, что $M_\alpha/\theta \cong M_{\alpha^{(n)}}$, где $\alpha^{(n)}$ получается из последовательности $\alpha$ путем отбрасывания первых $n$ членов. Таким образом, если $\alpha$ — периодическая последовательность, то $M_\alpha$ — так называемая квазипростая решетка (см. [10]), и она сама является покрытием одноэлементной решетки. В случае же, когда $\alpha$ непериодическая, интервал $[1_{\mathbb{L}}, M_\alpha]$ в скелете эпиморфности многообразия $\mathbb{L}$ имеет порядковый тип $1 + \omega^*$ и, тем самым, одноэлементная решетка не имеет покрытия относительно решетки $M_\alpha$. Теорема доказана.

В заключение остановимся еще на одном вопросе, связанном со строением скелетов (счетных скелетов) многообразий решеток. В работах [11], [12], [13] доказано, что счетные скелеты вложимости и эпиморфности класса линейных порядков, конечно порожденных дискриминаторных многообразий являются наилучшими квазипорядками (т. е., в частности, в этих скелетах отсутствуют бесконечные убывающие цепи и любое множество несравнимых конечно). Для любого многообразия решеток $\mathcal{M}$, содержащего бесконечное число простых решеток с нулем и единицей (к примеру многообразия $\mathcal{M}_\omega$, порожденного решетками $M_n$ $(n \in \omega)$) счетный скелет вложимости многообразия $\mathcal{M}$ содержит интервал, изоморфный частично упорядоченному множеству $\langle P(\omega); \subseteq \rangle$ — множеству всех подмножеств множества $\omega$, упорядоченному теоретико-множественным включением. Подобным образом упорядочен, очевидным образом, интервал $[1_{\mathcal{M}}; \sum_{n\in\omega} L_n]$ в счетном скелете эпиморфности многообразия $\mathcal{M}$. Здесь $\sum_{n\in\omega} L_n$ — решетка, получаемая отождествлением нуля решетки $L_{n+1}$ с единицей решетки $L_n$, где $L_n$ $(n \in \omega)$ — простые попарно неизоморфные решетки из $\mathcal{M}$.

В этой связи представляют интерес следующие вопросы:

ВОПРОС 1. Будет ли счетный скелет эпиморфности (вложимости) любого конечнопорожденного многообразия решеток наилучшим квазипорядком?

В частности,

ВОПРОС 2. Будет ли счетный скелет эпиморфности (вложимости) многообразия дистрибутивных решеток наилучшим квазипорядком?

## Литература


[1] A.G. Pinus, Skeletons of congruence distributive varieties of algebras. - Alg. univ., v. 32 (1994), № 3, p. 531-544.

[2] А.Г. Пинус, Булевы конструкции в универсальной алгебре. - Успехи матем. наук, 47, № 4 (1992), 145-180.

[3] А.Г. Пинус, О многообразиях, скелеты которых являются решетками. - Алгебра и логика, 32, № 1 (1992), 74-82.

[4] А.Г. Пинус, О свойстве быть полурешеткой для счетных скелетов вложимости дискриминаторных многообразий. - Вопросы алгебры и логики. Труды ИМ СО РАН, т. 30 (1996), с. 119-125.

[5] Я.Л.Мордвинов, О многообразиях с полурешеточными счетными скелетами вложимости. - Алгебра и логика, 31, № 3 (1993), 288-307.

[6] А.Г. Пинус, О покрытиях в скелетах эпиморфности многообразий алгебр. - Алгебра и логика, 27, № 3 (1988), 316-326.

[7] А.Г. Пинус, Об интервалах и цепях в скелетах эпиморфности конгруэнц-дистрибутивных многообразий. - Алгебра и логика, 29, № 2 (1990), 207-219.

[8] А.Г. Пинус, К вопросу о покрытиях в скелетах эпиморфности многообразий. - Известия вузов. Математика, № 1 (1993), 48-55.

[9] S. Koppelberg, General theory of boolean algebras. in Handbook of boolean algebras, v. 1, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam - New York - Oxford - Tokyo, 1989.

[10] А.Г. Пинус, О квазипростых алгебрах. – в "Исследования алгебраических систем по свойствам их подсистем", Из-во УрГУ, Свердловск, 1987, 108-118.

[11] R. Laver, On Fraisse's order type conjecture. – Ann. Math., v. 93, № 1 (1971), p. 89-111.

[12] C. Landraitis. A combinatorial property of the homomorphism relation between countable order types. – J. Symb. Logic, v. 44, N 3 (1979), p. 403-411.

[13] А.Г. Пинус, О счетных скелетах конечно порожденных дискриминаторных многообразий. – Сиб. мат. журнал, 33, № 2 (1992), 190-195.



# Некоторые обобщения леммы Абьянкара

**К.Н.Пономарёв**

630092 Новосибирск-92,
пр. Маркса 20, НГТУ,
Кафедра алгебры и математической логики
e-mail: algebra@nstu.ru

Работа продолжает исследования автора, изложенные в работе [1]. Следуем всем определениям этой работы и предполагаем знакомство с ней читателя. Основной ее результат – теорема 2 – обобщается на случай произвольного (не обязательно конечного, не обязательно сепарабельного) расширения дискретно нормированного поля ненулевой характеристики $p$. Поэтому для формулировки результатов необходимо расширить понятие сильно разрешимого расширения полей из этой статьи. Включим в этот класс чисто несепарабельные конечные расширения (см. также замечание на стр. 248 книги [6]). А именно, конечное расширение полей $F/K$ называем *сильно разрешимым* в широком смысле, если оно есть сильно разрешимое сепарабельное расширение некоторого конечного чисто несепарабельного расширения.

Сразу отметим, что из отмеченности класса сильно разрешимых, класса чисто несепарабельных и класса конечных расширений следует отмеченность и введённого класса расширений (см. там же).

Сильно разрешимое расширение $K_2/K_1$ представляется башней *высоты $n$ квазициклических* расширений $K_2 = L_n/.../L_0 = K_1$, то есть таких расширений $L_{i+1}/L_i$, которые служат полем разложения полинома $f(X) - a, a \in L_i$. Здесь через $f$ обозначен либо одночлен $X^m, (m, p) = 1$, либо несепарабельный одночлен $X^p$, либо полином Артина – Шрайера $\wp(X)$.

**Соглашение** *Для простоты формулировок всех результатов в течение статьи предполагаем, что все поля содержат все корни из единицы и имеют ненулевую характеристику $p$. Кроме того, понятие разрешимого расширения будем употреблять только в приведённом выше широком смысле конечного сильно разрешимого расширения.*

Напомним, что через $l^\pi$ обозначаем ядро совершенства $l^\pi = \cap l^{p^n}$, а через $l^a$ алгебраическое замыкание поля $l$. Поле $l^\pi$ совершенное и любое его алгебраическое расширение совершенно, так что алгебраическое замыкание ядра совершенства совершенное замыкание, $l^{\pi a} = l^{a\pi}$.

Ключевое место в работе занимает такое максимальное обобщение теоремы 1 из [1].

**Теорема 1** *Пусть $L/K$ расширение полей. Пусть $L_0$ такое промежуточное дискретно нормированное поле для которого расширение $L/L_0$ конечно, а $L_0/K$ слабо неразветвлено.*

*Пусть $l_0/k$ расширение поля вычетов, отвечающее $L_0/K$. Предположим, что $l_0^{\pi a} \subseteq k$. Тогда в алгебраическом замыкании поля $K$ найдётся такое разрешимое вполне разветвлённое расширение $K'/K$ для которого расширение $LK'/K'$ слабо*

*Работа поддерживалась грантовым центром НГУ грант N2, а также Санкт-Петербургским грантовым центром грант 97-01.1-11

*неразветвлено относительно любого продолжения нормирования поля $L_0$ на поле $LK'$.*

Подробный анализ доказательства теоремы 1 из [1] показывает, что в этой статье установлена справедливость сформулированного утверждения в случае когда расширение $L/L_0$ является конечным и диким расширением Галуа. Доказательство теоремы 1 состоит в сведении общего случая к этому частному.

Автор имел в виду дальнейшие приложения этого результата для конечных накрытий алгебраических многообразий и установил такое обобщение теоремы 2 из [1].

**Следствие 1** *Пусть $L$ конечное расширение дискретно нормированного поля $K$, а поле вычетов $K$ функциональное. Тогда в алгебраическом замыкании поля $K$ найдётся такое вполне разветвлённое разрешимое расширение $K'/K$ для которого расширение $LK'/K'$ слабо неразветвлено относительно любого продолжения нормирования поля $K$ на поле $LK'$.*

В максимальной общности лемма Абьянкара формулируется для произвольных (не обязательно конечных) расширений дискретно нормированных полей, она состоит в приведении такого расширения к дикому расширению (см. предложение 2). Из теоремы 1 следует такое уточнение этого факта.

**Теорема 2** *Пусть $L/K$ расширение дискретно нормированных полей.*

*Пусть $l/k$ расширение поля вычетов, отвечающее $L/K$. Предположим, что $l^{es} \subseteq k$. Тогда в алгебраическом замыкании поля $K$ найдётся такое разрешимое вполне разветвлённое расширение $K'/K$ для которого расширение $LK'/K'$ слабо неразветвлено относительно любого продолжения нормирования поля $L$ на поле $LK'$.*

Законченный вид эта теорема приобретает в случае расширения поля вычетов $l/k$ *конечного типа* , то есть конечно порождённого расширения поля $k$. Именно в таком виде возможно его использование в алгебраической геометрии для изучения произвольных (не обязательно конечных) накрытий алгебраических многообразий.

**Следствие 2** *Пусть $L/K$ произвольное расширение дискретно нормированных полей, а поле вычетов поля $K$ функциональное. Предположим, что расширение поля вычетов отвечающее этому расширению есть расширение конечного типа. Тогда в алгебраическом замыкании поля $K$ найдётся такое разрешимое вполне разветвлённое расширение $K'/K$ для которого расширение $LK'/K'$ слабо неразветвлено относительно любого продолжения нормирования поля $L$ на поле $LK'$.*

Следующий результат доказывался в статье Х.Эппа [9]. Была доказана необходимость условия на расширение поля вычетов. К сожалению приведённое доказательство было законченным только для дискретно нормированных полей нулевой характеристики. Для этого случая этот результат недавно обобщен И.Жуковым [10]. В случае же дискретно нормированных полей ненулевой характеристики в доказательстве имелся пробел. А именно, ошибочно полагалось, что любое слабо неразветвлённое расширение полных дискретно нормированных полей состоит в чисто



несепарабельном расширении некоторого поля представителей. Однако в общем случае полное дискретно нормированное поле может иметь много сепарабельных слабо неразветвлённых расширений (см. лемму 5 [1]).

Здесь этот результат доказывается и для дискретно нормированных полей ненулевой характеристики $p$. Таким образом в полной общности завершено доказательство такой теоремы.

**Теорема 3 (Х.Эпп)** *Пусть $L/K$ расширение дискретно нормированных полей, а $l/k$ соответствующее расширение поля вычетов. Предположим, что все элементы поля $l^e$ сепарабельны над полем $k$, $l^s \subseteq k^s$. Тогда в алгебраическом замыкании поля $K$ найдётся такое конечное расширение $K'/K$ для которого расширение $LK'/K'$ слабо неразветвлено относительно любого продолжения нормирования поля $L$ на поле $LK'$.*

# 1 Чисто несепарабельные расширения.

Будем следовать методу работы [1] (см. §3) и опишем типы чисто несепарабельных расширений дискретно нормированного поля. В течение всего раздела используем, что если $K$ нормированное поле, то его нормирование однозначно продолжается на любое чисто несепарабельное расширение $L$ (см.[3]). Будем обозначать через $R(K)$ кольцо нормирования, через $k$ поле вычетов, а $^- : R(K) \to k$ обозначаем естественный эпиморфизм. Группа единиц кольца нормирования обозначается $U(K)$, а $\pi$ - некоторая униформизующая поля $K$.

Любое чисто несепарабельное расширение представляется башней расширений простой степени, так что достаточно рассмотреть чисто несепарабельные расширения простой степени.

Чисто несепарабельное расширение простой степени $L/K$ служит полем разложения полинома $X^p - a$ для некоторого $a \in K \setminus K^p$. Другие элементы, определяющие то же расширение, можно выбрать из множества $aK^p + K^p = (a + K^p)K^p$. Поэтому элемент $a$ который определяет расширение $L/K$ можно выбрать из кольца нормирования $R(K)$, такие элементы называем *представляющими* элементами расширения.

**Лемма 1** *Пусть $L/K$ чисто несепарабельное расширение дискретно нормированных полей простой степени. Тогда либо это расширение непосредственное, либо дикое. Во втором случае возможны два варианта:*

*1. Найдётся такой представляющий элемент $a \in R(K)$ для которого $ord(a) = 1$. В этом случае расширение вполне разветвлённое.*

*2. Найдётся такой представляющий элемент $a \in U(K)$ для которого $\bar{a} \notin k^p$. В этом случае расширение слабо неразветвлённое.*

Приступим к доказательству леммы. Непосредственное расширение поля $K$ содержится в его максимальном непосредственном расширении — пополнении $\overline{K}$. Чисто несепарабельные такие расширения простой степени отвечают представляющим элементам из поля $\overline{K}^p \cap K$. Будем предполагать, что расширение не является непосредственным, то есть поле $L$ не содержится в пополнении $\overline{K}$, так что $a \notin \overline{K}^p \cap K$. Поскольку расширение конечно, то композит $\overline{K}L$ является пополнением поля $L$. В силу структуры неразветвленных расширений (см. Предложение 7.1 главы 1 [2]) расширение полей $\overline{L} = L\cdot\overline{K}/\overline{K}$ простой степени является диким.

Выберем некоторое поле представителей для поля $\overline{K}$, будем отождествлять его с полем вычетов $k$ посредством естественного эпиморфизма.

Представим элемент $a$ в полном поле $\overline{K}$ в виде степенного ряда: $a = a_0 + a_1\pi + ..., a_i \in k$. В силу дикости расширения $a \in K, a \notin \overline{K}^p$, поэтому найдётся такой индекс $n$ для которого либо $a_n \neq 0$ и $(n,p) = 1$, либо $a_n \notin k^p$. Выберем наименьшее такое $n$. В силу плотности $K$ в поле $\overline{K}$ найдётся такой $b \in K$ для которого $a = b^p + a'_n\pi^n + ... = b^p + c$ с некоторыми возможно новыми коэффициентами. Здесь $c = a'_n\pi^n + ...$. Взамен представителя $a$ возьмём элемент $c$.

Случай 1: $(n,p) = 1$.Пусть $s, m \in \mathbf{Z}$ и $ns + pm = 1$. Покажем, что в качестве представляющего элемента можно выбрать элемент $c^s\pi^{pm}$ порядка единица. Действительно, пусть $x$ корень многочлена $X^p - c$, так что $L = K(x)$. Тогда $x^{ps} = c^s$, а элемент $y = x^s\pi^m$ является корнем неприводимого полинома $Y^p - c^s\pi^{pm}$. Очевидно включение $K(y) \subseteq K(x)$, из сравнения степени расширений следует равенство $K(x) = K(y)$. Это заканчивает рассмотрение этого случая.

Случай 2: $p|n$, но $a_n \notin k^p$. Пусть $n = pm$. Тогда в качестве представляющего можно выбрать $b = c\pi^{-mp} = c\cdot(\pi^{-m})^p$. Он принадлежит $U(R)$ и $\overline{b} = a_n \notin k^p$.

Доказательство леммы окончено.

Часто будем использовать лемму 7 из работы [1]:

**Лемма 2** *Пусть $L/K$ слабо неразветвленное расширение, а $K_1/K$ вполне разветвленное расширение которые содержатся в общем дискретно нормированном поле. Тогда $LK_1/K_1$ слабо неразветвленное расширение, а расширение $LK_1/L$ вполне разветвлено.*

**Предложение 1** *Пусть $L/L_0$ чисто несепарабельное расширение степени $p^n$ слабо неразветвленного расширения дискретно нормированных полей $L_0/K$. Пусть $K'/K$ вполне разветвлённое чисто несепарабельное расширение степени $p^m$. Тогда если $m \geq n$, то расширение $LK'$ слабо неразветвлено над полем $K'$ относительно любого продолжения нормирования поля $K$ на это поле.*

Доказательство. Будем предполагать поле $L_0$ максимальным слабо неразветвлённым расширением в расширении $L/K$. Если $L_0 = L$, то само расширение слабо неразветвлено и остаётся применить лемму 2. Поэтому будем предполагать $L \neq L_0$.

В чисто несепарабельном расширении $K'/K$ имеется подрасширение $K_n/K$ степени $p^n$. В силу леммы 2 достаточно доказать лемму для расширения $K_n/K$ взамен $K'/K$. Будем это предполагать и считать, что $n = m$.

Представим расширения башнями расширений простой степени $p$: $L = L_n/.../L_0 = K$ и $K' = K_n/.../K_0 = K$. Покажем, что для $i = 0, ..., n$ расширение $L_iK_i$ слабо неразветвлено над $K_i$. Для $i = 0$ доказывать нечего и это служит базой индукции по $i$.

Пусть уже доказана слабая неразветвлённость расширения $L_{i-1}K_{i-1}/K_{i-1}$. Расширение $L_iK_{i-1}/L_{i-1}K_{i-1}$ чисто несепарабельное расширение простой степени, а $L_{i-1}K_{i-1}/K_{i-1}$ слабо неразветвлено. Расширение $K_i/K_{i-1}$ вполне разветвлённое чисто несепарабельное простой степени. Таким образом в силу леммы 2 доказательство сводится к случаю в котором $|K' : K| = |L : L_0| = p, n = m = 1$, это будет предполагаться.



В силу максимальности поля $L_0$ среди слабо неразветвлённых расширений расширение $L/L_0$ не слабо разветвлено, оно вполне разветвлено. Пополнение расширения нормированных полей сохраняет индексы ветвления, поэтому можно перейти к пополнениям полей и считать их полными. Это и будем предполагать. Выберем в поле $K$ поле представителей, будем отождествлять его с полем вычетов посредством канонического эпиморфизма $^-$.

Используем лемму 1 и представим расширение $K'/K$ как поле разложения полинома $X^p - \pi$ для некоторой униформизующей $\pi$, а расширение $L/L_0$ как поле разложения полинома $Y^p - \pi\epsilon$ для некоторого $\epsilon \in U(K)$. Тогда расширение $LK'/L_0K'$ состоит в присоединении корня полинома $Z^p - \epsilon$, а $L_0K'/K'$ слабо неразветвлено по лемме 2.

Разложим $\epsilon$ по степеням $\pi$: $\epsilon = \alpha_0 + \alpha_1\pi + ..., \alpha_i \in k$. Пусть $\tau \in K'$ и $\tau^p = \pi$, $\tau$ - униформизующая поля $K'$. Тогда в поле $LK'$ элемент $\epsilon$ имеет разложение $\epsilon = \alpha_0 + \alpha_1\tau^p + ..., \alpha_i \in k$.

Если все элементы $\alpha_i \in k^p$, то $\epsilon \in K'^p$ и $LK' = L_0K'$. Доказательство завершено. Если же некоторое $\alpha_i \notin k^p$, то расширение $LK'/L_0K'$ слабо неразветвлено, оно состоит в чисто несепарабельном расширении поля вычетов $k$ посредством корня из такого элемента наименьшего индекса.

Доказательство окончено.

## 2 Лемма Абьянкара.

Следующее утверждение (см.[8], Exp.10, Lemme 3.6, P.279) установлено в середине 50-х годов в серии статей Ш.Абьянкара о алгебраической фундаментальной группе алгебраических многообразий. Своё название оно получило в докладе Ж.-П.Серра о этих работах на семинаре Н.Бурбаки.

**Лемма 3 (лемма Абьянкара)** *Пусть $L/K$ и $K'/K$ конечные расширения Галуа дискретно нормированного поля $K$ в его сепарабельном замыкании. Предположим, что эти расширения слабо разветвлены и их индексы ветвления равны $n$ и $m$ соответственно. Тогда если $n$ делит $m$, то расширение $LK'/K'$ неразветвлено относительно любого продолжения нормирования поля $K$ на поле $LK'$.*

Доказательство см.[8].

В максимальной общности это утверждение приводит к такому утверждению.

**Предложение 2** *Пусть $L'/L_0$ конечное сепарабельное расширение слабо неразветвленного расширения дискретно номированных полей $L_0/K$. Тогда найдётся такое $n = n(L/L_0) \in \mathbf{N}$ взаимно простое с $p$ для которого если расширение $K'/K$ вполне и слабо разветвлённое конечное сепарабельное расширение полей причём $n|e_r(K'/K)$, то расширение $LK'/L_0K'$ дикое. При этом $e_r(LK'/L_0K')$ делит $e_r(L/K)$ и является $p$-частью этого индекса.*

Доказательство. Если использовать лемму 2, то можно свести доказательство к случаю в котором $L_0 = K$. Действительно, любое вполне и слабо разветвлённое расширение $K'/K$ по этой лемме приводит к вполне и слабо разветвлённому расширению $K'L_0/L_0$. При этом из мультипликативности индексов ветвления имеем соотношение $e_r(K'/K) = e_r(K'L_0/L_0)$. Будем считать $K = L_0$.

Подрасширение дикого расширения дикое в силу мультипликативности редуцированного индекса ветвления. Поэтому доказательство сводится к случаю расширения Галуа $L/K$. Это будем предполагать.

Вполне разветвлённое расширение допускает единственное продолжение нормирования. Поэтому нормирование поля $K$ продолжается на поле $K'$ однозначно. Все продолжения нормирования поля $K$ на расширение $LK'$ определяются по продолжению нормирования поля $K'$ на это поле. Но расширение $LK'/K'$ является расширением Галуа и все эти продолжения сопряжены автоморфизмами Галуа. У сопряжённых нормирований индексы ветвления одинаковы, поэтому достаточно доказывать лемму для одного продолжения нормирования поля $K$ на композит $LK'$. Этим и ограничимся.

Пусть $K_V$ поле ветвления расширения Галуа $L/K$. Это максимальное ручное подрасширение, оно является расширением Галуа и $(e_r(K_V/K), p) = 1$. Расширение $K/K_V$ чисто дикое $p$-расширение Галуа, такое расширение разрешимо. Полагаем $n = e_r(K_V/K)$.

Рассмотрим произвольное вполне и слабо разветвлённое конечное сепарабельное расширение $K'/K$ степень которого делится на $n$, $n|e(K'/K)$. По лемме Абьянкара расширение $K_V K'/K'$ слабо неразветвлено, а расширение $LK'/K_V K'$ дикое в силу отмеченности разрешимых диких расширений (см. предложение 2 в [1]).

Для доказательства заключительного утверждения достаточно вычислить индексы ветвления. Предложение доказано.

**Замечание.** Вполне и слабо разветвлённое расширение индекса $m$ получается как поле разложения полинома $X^m - \tau$ для произвольной униформизующей $\tau$ поля $K$ ([2]гл.1 §8, предложение 8.1). Так что таких расширений достаточно много. Эти расширения - циклические, они разрешимы в сильном смысле.

## 3 Доказательство теоремы 1.

Обратимся к доказательству теоремы 1. Будем предполагать выполненными все её условия. Заметим вначале, что расширение $L/L_0$ можно предполагать нормальным. Если это не так, то достаточно доказать теорему для нормального замыкания $L^n$ расширения $L/L_0$. Отсюда следует её заключение для произвольного промежуточного поля, в частности и для расширения $L/K$. Будем предполагать расширение $L/L_0$ нормальным.

Представим нормальное расширение $L/L_0$ башней $L/L_{us}/L_0$ в которой расширение $L_{us}/L_0$ чисто несепарабельно, а $L/L_{us}$ сепарабельное расширение Галуа. Нормирование поля $L_0$ однозначно продолжается на чисто несепарабельное расширение $L_{us}/L_0$. К расширению $L_{us}/K$ применим предложение 1 и найдём такое вполне разветвлённое чисто несепарабельное расширение $K_1/K$ для которого расширение $L_{us}K_1/K_1$ слабо неразветвлено при любом продолжении нормирования. Расширение $L_{us}K_1/L_0$ чисто несепарабельно, так что на самом деле такое продолжение единственное.

**Замечание.** В качестве такого расширения можно взять поле разложения полинома $X^{p^m} - \pi$ для произвольной униформизующей $\pi$, $K_1 = K(\pi^{p^{-m}})$.

Расширение $LK_1/L_{us}K_1$ является конечным расширением Галуа. К башне $LK_1/L_{us}K_1/K_1$ применим предложение 2 и найдём такое вполне и слабо разветвлённое циклическое



расширение Галуа $K_2/K_1$ для которого расширение $LK_2/L_{us}K_2$ есть дикое расширение Галуа для любого продолжения нормирования поля $L_0$ на поле $LK_2$. Расширение $L_{us}K_2/K_2$ слабо неразветвлено по лемме 2.

**Замечание.** Расширение можно выбрать примитивным расширением посредством некоторого корня из любой униформизующей поля $K_1$, $K_2 = K_1(\tau^{1/n})$.

В силу вполне разветвлённости расширения $K_2/K$ по лемме 2 расширение $K_2L_0/L_0$ тоже вполне разветвлённое и поля вычетов в этих расширениях не увеличиваются. Так что к башне $LK_2/L_{us}K_2/K_2$ можно применить доказательство теоремы 1 из [1] и найти такое вполне разветвлённое дикое разрешимое расширение $K'/K_2$ для которого расширение $LK'/K'$ слабо неразветвлено относительно любого продолжения нормирования поля $K_2L_{us}$ на поле $K_2L$. В силу однозначности продолжения нормирования поля $L_0$ на поле $K_2L_{us}$ получаем слабую неразветвлённость расширения $LK'/K'$ для любого продолжения нормирования поля $L_0$ на поле $LK'$. Это завершает доказательство теоремы.

Следствие 1 немедленно следует из теоремы 1. Нужно положить $L_0 = K$ и использовать замечания из §4 [1]. Из предложения 3 этой работы следует включение $l^{ea} \subseteq k$.

## 4 Доказательство теоремы 2.

Обратимся к доказательству теоремы 2. Вначале приведём его для полных дискретно нормированных полей, а затем — в общем случае.

Пусть $L/K$ расширение полных дискретно нормированных полей с расширением поля вычетов $l/k$. По теореме Коэна [5] в поле $L$ выберем некоторое поле представителей $l'$. Пусть $\pi$ униформизующая поля $K$.

Обозначим $k_1' = l' \cap K$ - подполе в кольце нормирования поля $K$. В поле $K$ рассмотрим полное подполе, состоящее в замыкании поля частных примитивного расширения $k_1'(\pi)$, $F = k_1'((\pi))$. Это - полное дискретно нормированное поле с униформизующей $\pi$ и полем представителей $k_1'$. Так что расширение $K/F$ слабо неразветвлено. Заметим, что для расширения $L/F$ выполняется условие на расширение поля вычетов, более того, оно выполняется уже для полей представителей: $l'^{ea} \subset k_1'$. Это следует из двух лемм.

**Лемма 4** *Пусть $l/k$ расширение полей. Тогда включение $l^{ea} \subseteq k$ равносильно условиям:*

*1) $l^e = k^e$;*
*2) $k^{ea} \subseteq k$.*

Доказательство. Необходимость. Из включения $k \subseteq l$ следует, что $k^e \subseteq l^e$. Поскольку $l^{ea} \subseteq k$, то тем более $l^e \subseteq k$. Так что для любого натурального $n$ имеем $l^e = (l^e)^{p^n} =\subseteq k^{p^n}$ и $l^e \subseteq k^e$. Заключаем $l^e = k^e$. Поэтому $l^{ea} = k^{ea}$ и $k^{ea} \subseteq k$.

Достаточность очевидна так как из этих двух условий следуют включения: $l^{ea} = k^{ea} \subseteq k$. Доказательство окончено.

**Лемма 5** *Пусть $L$ полное дискретно нормированное поле, а $l$ его поле представителей. Тогда имеем $L^e = l^e$ и $l^{ea} \cap L \subseteq l$.*

Действительно, первое тождество легко следует из структурной теоремы для полных дискретно нормированных полей. Второе включение – из максимальности поля представителей $l$ среди всех подполей кольца нормирования поля $L$.

Действительно, в силу совершенности поля $l^e$ расширение $l^{ea}/l^e$ сепарабельно. Поэтому сепарабельно и расширение композита $(l^{ea} \cap L) \cdot l/l$ в поле $L$. Но такое расширение приводит к увеличению поля представителей, что невозможно.

Из этих замечаний следует, что в приведенных выше условиях имеем $l'^e = L^e \supseteq K^e = k'^e$. В силу условия $l^{ea} \subseteq k$ теоремы 2 для поля вычетов имеем равенство $l^e = k^e$. В частности $l'^e = k'^e$. Поэтому $l'^{ea} = k'^{ea} \subseteq k' \subseteq K \subseteq L$. Отсюда $l'^{ea} = l'^{ea} \cap L \subseteq l'$. Заключаем $l'^{ea} \subseteq K \cap l' = k'_1$. Таким образом расширение $L/F$ удовлетворяет всем утверждениям теоремы 2.

Заметим, что достаточно доказать утверждение теоремы 2 для расширения $L/F$. Действительно, любое вполне разветвлённое и разрешимое расширение $F'/F$ определяет по лемме 2 и по отмеченности класса разрешимых расширений вполне разветвлённое и разрешимое расширение $F'K/K$. Если же расширение $LF'/F'$ слабо неразветвлённое, то слабо неразветвлено и его подрасширение $LF' = LKF'/KF'$. Так что $K' = KF'$ – требуемое расширение. Далее будем предполагать, что $K = F = k'_1((\pi))$.

В поле $L$ рассмотрим замыкание $L_0$ поля частных примитивного расширения $l'(\pi)$. Опять по структурной теореме $L_0 = l'((\pi))$ и поле вычетов $L_0$ совпадает с полем $l$. В расширении $L/L_0$ не происходит расширения поля вычетов, поэтому $e_r(L/L_0) = [L : L_0]$ и расширение $L/L_0$ вполне разветвлённое и конечное расширение. Остаётся применить к башне $L/L_0/K$ теорему 1 и получить требуемое расширение $K'/K$. Это завершает доказательство теоремы 2 для полных полей. Обратимся к общему случаю.

Пусть $L/K$ расширение дискретно нормированных полей. Пополнение поля $L$ определяет расширение полных дискретно нормированных полей $\overline{L}/\overline{K}$. Применим доказанную выше часть теоремы к этому расширению и найдём такое вполне разветвлённое разрешимое расширение $\overline{K}'/\overline{K}$ для которого расширение $\overline{L}\overline{K}'/\overline{K}'$ слабо неразветвлено. Мы воспользуемся доказательством теоремы 1 и по этому расширению построим в поле $\overline{K}'$ такое вполне разветвлённое разрешимое расширение $K'/K$ для которого $\overline{K}' = K' \cdot \overline{K}$. Тогда расширение $LK'/K'$ содержится в башне слабо неразветвлённых расширений $\overline{L}K'/\overline{K}'/K'$ и само является слабо неразветвлённым. Так что это расширение удовлетворяет утверждению теоремы 2 для непрерывного продолжения $v$ нормирования поля $L$ на поле $LK'$.

Действительно, из доказательства торемы 1 следует, что расширение $\overline{K}'/\overline{K}$ представляется башней $\overline{K}' = \overline{K_3}/\overline{K_2}/\overline{K_1}/\overline{K}$. В этой башне расширение $\overline{K_1}/\overline{K}$ – поле разложения полинома $X^{p^n} - \pi$ для произвольной униформизующей $\pi \in \overline{K}$. В частности такую униформизующую можно выбрать из поля $K$. Это позволяет получить такое вполне разветвлённое разрешимое расширение $K_1/K$ для которого $K_1\overline{K} = \overline{K_1}$. Расширение $\overline{K_1}/K_1$ неразветвлено и поле $K_1$ плотно в поле $\overline{K_1}$.

Расширение $\overline{K_2}/\overline{K_1}$ поле разложения полинома $X^n - \tau$ для произвольной униформизующей $\tau \in \overline{K_1}$. Опять эту униформизующую можно выбрать из поля $K_1$. Опять получаем поле $K_2$ для которого $K_2\overline{K} = \overline{K_2}$ и расширение $\overline{K_2}/K_2$ неразветвлено и даже непосредственное.

Наконец $\overline{K_3}/\overline{K_2}$ сепарабельное вполне разветвлённое разрешимое расширение. По предложению 1 работы [1] найдется такое вполне разветвлённое разрешимое расширение $K_3/K_2$ для которого $K_3\overline{K} = \overline{K_3} = \overline{K}'$.



Таким образом для данного продолжения нормирования в качестве требуемого расширения следует положить $K' = K_3$. Для любого продолжения нормирования это следует из такого замечания.

**Лемма 6** *Пусть $L/K$ расширение дискретно нормированных полей, а $K'/K$ конечное расширение. Тогда редуцированный индекс ветвления расширения $e_r(LK'/K')$ не зависит от выбора продолжения нормирования поля $L$ на поле $LK'$.*

Обозначим $\overline{L}$ пополнение поля $L$, тогда замыкание подполя $K$ в этом поле приводит к пополнению $\overline{K}$ поля $K$, получаем расширение полных полей $\overline{L}/\overline{K}$.

Выберем некоторое продолжение нормирования поля $L$ на поле $LK'$. Поскольку пополнение не меняет группу нормирования, то редуцированный индекс ветвления расширения $LK'/K'$ относительного выбранного продолжения совпадает с индексом соответствующего расширения в пополнении этого поля $\overline{LK'}$ по данному нормированию. Но пополнение $\overline{LK'}$ есть конечное расширение полного поля $\overline{L}$. Хорошо известно, что нормирование полного нормированного поля однозначно продолжается на конечное расширение. Так что пополнение $\overline{LK'}$ (и $\overline{K'}$) не зависит от выбора продолжения нормирования. Отсюда следует утверждение.

Следствие 2 немедленно следует из теоремы. Опять нужно использовать §4 предыдущей статьи.

## 5 Доказательство теоремы 3.

Обратимся к теореме Эппа. Сведём доказательство этой теоремы к теореме 2.

**Лемма 7** *Пусть $K$ дискретно нормированное поле с полем вычетов $k$. Пусть $l/k$ некоторое сепарабельное расширение. Тогда найдётся такое неразветвлённое сепарабельное расширение поля $K$ до дискретно нормированного поля $L$ при котором расширение поля вычетов совпадает с расширением $l/k$. Кроме того, нормирование поля $K$ на это поле продолжается единственным образом.*

Доказательство. Сепарабельное расширение – объединение конечных сепарабельных расширений. В силу этого достаточно доказать лемму для конечных сепарабельных расширений. Это будет предполагаться.

Для полных полей утверждение хорошо известно (см. [2] гл.1 §7 теорема 7.1). В общем случае рассмотрим пополнение – полное дискретно нормированное поле $\overline{K}$. Пусть $\overline{L}$ неразветвленное сепарабельное расширение с требуемым расширением поля вычетов. Используем строение таких расширений (см. [2] гл.1 §7 предложение 7.1) и построим такое сепарабельное расширение $L/K$, которое плотно в $\overline{L}$. Используем предложение 7.1 (loc. cit.).

Расширение $\overline{L}/\overline{K}$ примитивно, оно получается посредством присоединения любого элемента $x \in \overline{L}$ образ которого в поле вычетов $\overline{x}$ – примитивный элемент расширения поля вычетов $l/k$. Пусть $g(X) \in \overline{K}[X]$ минимальный многочлен такого элемента с коэффициентами из кольца нормирования. Используем канонический гомоморфизм на поле вычетов, пусть $\overline{g}(X) \in k[X]$ соответствующий неприводимый и сепарабельный многочлен кольца $k[X]$. Представим $g(X) = a_0 + a_1X + ... + X^n, a_i \in \overline{K}$. Взамен элемента $x$ можно выбрать любой корень такого полинома $f(X) = b_0 + \ldots + X^n$ в котором $b_i \in \overline{K}$ и $ord(a_i - b_i) > 0$. В силу плотности $K$ в $\overline{K}$ такие коэффициенты можно выбрать уже в поле $K$. Пусть $f(X) \in K[X]$ соответствующий полином, а $x$ его корень. Тогда поле $L = K(x)$ плотно в $\overline{L}$, $L/K$ – неразветвлённое расширение степень которого совпадает со степенью расширения поля вычетов, $n = |L : K| = |l : k|$.

В силу соотношения на индексы ветвления и степени расширения поля вычетов заключаем, что нормирование поля $K$ на поле $L$ продолжается единственным образом. Лемма доказана.

Пусть выполнены условия теоремы 3. Рассмотрим расширение поля вычетов: $l^{oa} \cdot k/k$ поля $K$. Это расширение сепарабельно по условию. Воспользуемся леммой и построим такое неразветвлённое сепарабельное расширение $K_s/K$ расширение поля вычетов которого $k_s/k$ состоит в сепарабельном расширении $l^{oa} \cdot k/k$.

Выберем некоторое продолжение нормирования поля $L$ на поле $K_sL$. Расширение $K_sL/K_s$ уже удовлетворяет условиям теоремы 2. Воспользуемся этой теоремой и найдём такое разрешимое вполне разветвлённое расширение $K'/K_s$ для которого расширение $K'L/K'$ слабо неразветвлено для любого продолженя нормирования поля $K_sL$ на поле $K'L$. Выберем одно такое продолжение.

**Лемма 8** *Пусть $L/F/K$ башня расширений полей в которой расширение $F/K$ сепарабельно, а расширение $L/F$ сильно разрешимо. Тогда в поле $L$ найдётся такое конечное расширение $L'/K$ для которого $L = F \cdot L'$, а $F||L'$ над общей частью $F \cap L'$. В частности расширение $L'/L' \cap F$ сильно разрешимо.*

*Кроме этого, если поле $L$ дискретно нормированное, расширение $L/F$ вполне разветвлено, а $F/K$ неразветвлённое, то вполне разветвлено и расширение $L'/L' \cap F$.*

Докажем лемму индукцией по высоте $n$ башни сильно разрешимого расширения $L/F$. В случае $n = 0$ имеем $L = F$ и доказывать нечего. Это даёт базу индукции.

Предположим теперь утверждение доказанным для расширения $L/F$ с высотой башни меньше $n$. Докажем его для $n$. Представим это расширение в виде башни $L/L_1/F$ в которой расширение $L/L_1$ квазициклическое, а расширение $L_1/K$ меньшей высоты.

К башне $L_1/F/K$ применим предположение индукции и найдём такое конечное расширение $L_1'/K$ для которого $L_1' \cdot F = L_1$, $L_1'||F$ над полем $L_1' \cap F$. Расширение $L/L_1$ квазициклическое, это поле разложения некоторого полинома $f(X) - a, a \in L_1$. Где через $f$ обозначен либо одночлен $X^m, (m,p) = 1$, либо несепарабельный одночлен $X^p$, либо полином Артина – Шрайера $\wp$. Такое расширение получается присоединением к полю $L_1$ любого корня $b$ этого полинома. Поскольку $L_1' \cdot F = L_1$, то элемент $a$ можно представить в виде $a = \Sigma a_i b_i, a_i \in L_1', b_i \in F$. Полагаем $L' = L_1'(b_1, \ldots)$. Непосредственно проверяется, что $FL' = L$. Линейная разделённость $L'||F$ над полем $L' \cap F$ следует из гл.5 §2 предложения 7 книги [11].

Сильная разрешимость расширения $L'/L' \cap F$ легко устанавливается индукцией по высоте башни квазициклических расширений в расширении $L/F$.

Заключительное утверждение следует из нормированной отмеченности неразветвлённых расширений (лемма 1 [1]) и мультипликативности редуцированного индекса ветвления. Лемма доказана.



Продолжим доказательство теоремы 3. Применим лемму к башне $K'/K_s/K$. Пусть $K_2/K_1/K$ соответствующая конечная башня расширений в поле $K'$, здесь $K_1 = K_2 \cap K_s$. В силу $K' = K_2 \cdot K_s$ и неразветвлённости расширения $K_s/K$ расширение $K'/K_2$ неразветвлено. Поэтому расширение $LK'/K_2$ слабо неразветвлённое, таково же и подрасширение $LK_2/K_2$. Так что для данного продолжения нормирования поля $L$ на поле $LK_2$ расширение $LK_2/K_2$ слабо неразветвлено. В силу леммы 6 то же имеет место и для любого продолжения нормирвоания. Таким образом утверждение теоремы выполняется для конечного расширения $K_2/K$. Теорема 3 доказана.

## Литература


[1] К.Н.Пономарёв. Разрешимое устранение ветвления в расширениях дискретно нормированных полей. Алгебра и логика 36N??.

[2] Алгебраическая теория чисел. Сб. под ред. Дж.Касселса и А.Фрелиха. Мир, Москва, 1965.

[3] Ю.Л.Ершов, Проблемы разрешимости и конструктивные модели. Наука, Москва, 1980.

[4] О.Зарисский, П.Самюэль, Коммутативная алгебра. Том1. Изд-во ИЛ, Москва, 1963.

[5] О.Зарисский, П.Самюэль, Коммутативная алгебра. Том2. Изд-во ИЛ, Москва, 1963.

[6] С.Ленг,Алгебра. Мир, Москва, 1968.

[7] С.Ленг,Алгебраические числа. Мир, Москва, 1966.

[8] Revetements etales et Groupe Fondamental, Lect. Notes in Math. 224. Spr.-Verl. Heidelb., 1971.

[9] H.Epp,Eliminating wild ramification. Inv.math., 19, 235-249, 1973.

[10] I.B.Zhukov. Structure theorems for complete fields. Amer. Math. Soc. Transl.(2) 166, 175-192, 1995.

[11] Н.Бурбаки , Алгебра. Многочлены и поля, упорядоченные группы. Наука, Москва, 1965.

# ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНО ПОРОЖДЁННЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП МАТРИЦАМИ

**А.М.Попова**

Россия
630092 Новосибирск-92, пр. Маркса, 20
Новосибирский Государственный Технический Университет
Кафедра Алгебры и Математической Логики
e-mail: algebra@nstu.ru

В работе Суона [1] доказывается, что конечно порожденная нильпотентная группа без кручения имеет точное представление в группе целочисленных унитреугольных матриц. Используя метод Суона, доказывается эффективность такого представления

Пусть $G = gp(x_1, ..., x_r)$ - конечно порожденная нильпотентная группа без кручения. Стандартным образом (см.[2]) находим в $G$ нормальный ряд с бесконечными циклическими факторами $G \supset G_1 \supset ... \supset G_s \supset 1$ и проводим индукцию по длине ряда. Пусть $\rho : G_1 \longrightarrow UT_n(Z)$ - точное представление $G_1$ унитреугольными матрицами. Тогда $\rho$ индуцирует кольцевой гомоморфизм $\varphi : ZG_1 \longrightarrow Z_n$. Обозначим $K = ker\varphi$. В кольце $Z[\rho(G_1)]$ находим минимальную базу $e_0, e_1, ..., e_t$, где $e_0 = E, e_i = d_i e_{lm}, 1 \leq l < m \leq n, d_i \in Z$. Это делаем так, как описано в [3]. Пусть $b_i = \varphi^{-1}(e_i)$. Тогда элементы $b_0, b_1, ..., b_t$ образуют аддитивный базис фактор-кольца $ZG_1/K$. Пусть $h_1, ..., h_r$ - мальцевская база $G_1$.Она тоже находится эффективно (см.[2]). Перебираем слова от $h_1, ..., h_r$ длины 1,2,... .Если все слова длины $l$ линейно выражаются через слова меньшей длины ( по модулю $K$), то справедлива

ЛЕММА 1. Базис $K$ образуют элементы:

$$f_j = w_j - \sum_{i=0}^{t} \alpha_{ji} b_i, j = 1, ..., q, \text{ и } f_{il} = b_i h_l - \sum_{j=0}^{t} \gamma_{il}^j b_j,$$

где $w_1, ..., w_q$ - слова длины $l+1$, $\alpha_{ji}, \gamma_{il}^j \in Z$

Пусть $a$ - элемент, порождающий $G \pmod{G_1}$.

ЛЕММА 2. Эффективно находится такой идеал $I$ в $ZG_1$ и аддитвный базис $ZG_1/I$, что $I^a = I$.

Зная базис $K$, можем выписать базис $K^a$. Пусть $b_0, b_{i_1}, .., b_{i_p} \notin K^a, b_{i_{p+1}}, .., b_{i_t} \in K^a$. Выберем из последних базис $K^a \setminus K \cap K^a/K$, возьмем прообразы этого базиса в $K$, пусть это будут $b'_{i_{p+1}}, .., b'_{i_r}$. Элементы $b_0, ..., b_t, b'_{i_{p+1}}, .., b'_{i_r}$ образуют базис $ZG_1/K \cap K^a$. Теперь можно найти матричное представление $G_1$ в группе линейных преобразований $ZG_1/K \cap K^a$. Если это представление не унитреугольное, то от него можно перейти к унитреугольному так, как это делается в [2].После этого повторим всю процедуру. Т.к. размерность идеала на каждом шаге уменьшается, то на конечном шаге дойдем до идеала $I$ такого, что $I^a = I$. Лемма доказана.

Понятно, что $I$ - максимальный идеал с таким свойством. Обозначим $I_{G_1}$ разностный идеал в кольце $ZG_1$, порожденный всеми разностями $h - 1$, где $h \in G_1$. Понятно, что $K \subset I_{G_1}$, $I_{G_1}^{n+1} \subset K$. Пусть $I_1/I_{G_1}^{n+1}$ - периодическая часть $ZG_1/I_{G_1}^{n+1}$. Т.к. $I_{G_1}^{n+1}$ и $I_1$ инвариантны относительно $\alpha(x) = a^{-1}xa$, то $I_{G_1}^{n+1}, I_1 \subset I$. Теперь мы можем продолжить действие $G_1$ на $ZG_1/I$ до действия $G$, полагая, что $a$ действует



как $\alpha$. Наконец, возьмем прямую сумму полученного представления и представления $G/G_1 \cong UT_2(Z)$. Это и дает точное представление группы $G$ унитреугольными матрицами. Тем самым получена

ТЕОРЕМА. Существует алгоритм для нахождения точного представления конечно порожденной нильпотентной группы без кручения унитреугольными целочисленными матрицами.

Как следует из [4], группа единиц целочисленного группового кольца бесконечной нильпотентной группы не является тривиальной. В [3] эффективно находятся порождающие группы единиц целочисленной линейной оболочки произвольной конечно порождённой матричной группы. Поэтому полученный результат может быть использован для эффективного нахождения единиц целочисленных групповых колец бесконечных конечно порожденных нильпотентных групп без кручения.

## Литература

[1] *Swan R.* Representations of policyclic groups. Proc. Amer. Math. Soc., 18,№3 (1967), 573-574.

[2] *Каргаполов М.И.,Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. М. "Наука",1982,288с.

[3] *Попова А.М.* Группы обратимых элементов матричных колец. Сибирский мат. журнал,1999, том 40, №5,1127-1136.

[4] *Marcimiak Z.S., Sehgal S.G.* Zassenhaus Conjecture and Jufinite Nilpotent Groups, Journal of Algebra, V. 184, N1, august 15, 1996, 207-212.

# О КОНЕЧНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ РЕШЕТКАХ

**М. В. Семенова**

Россия
630090 Новосибирск-90
пр. Коптюга, 4
Институт математики СОРАН

Пусть $L$ — произвольная решетка, $x, y \in L$. Полагаем $x \ll y$, если для любого направленного вверх подмножества $D \subseteq L$, имеющего точную верхнюю грань $\bigvee D$, из $y \leq \bigvee D$ следует $x \leq d$ для некоторого $d \in D$. Решетка $L$ называется *непрерывной по Скотту*, если $a = \bigvee\{x \in L : x \ll a\}$ для любого $a \in L$. Элемент $x \in L$ *компактен*, если $x \ll x$. Решетка $L$ называется *алгебраической*, если $a = \bigvee\{x \in L : x \ll x \leq a\}$ для любого $a \in L$. Из определения следует, что любая алгебраическая решетка является непрерывной по Скотту.

Множество $U \subseteq L$ открыто в *топологии Скотта*, если

1) $x \leq y$ и $x \in U$ влечет $y \in U$;

2) $\bigvee D \in U$ влечет $D \cap U \neq \emptyset$ для любого направленного вверх подмножества $D \subseteq L$.

Решетка $L$ называется *ограниченной снизу* (см. [5]), если для любого гомоморфизма $h : FL(n) \to L$ и любого $a \in L$ множество $H_a = \{x \in FL(n) : h(x) \geq a\}$ либо пусто, либо содержит наименьший элемент. Здесь $FL(n)$ — свободная решетка от $n$ порождающих. *Ограниченные сверху* решетки определяются двойственным образом. Решетка называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу.

Понятие непрерывной (полной) решетки было введено Скоттом [6] и Ершовым [4]. (В работе [4] понятиям алгебраической и непрерывной по Скотту решетки соответствуют термины $\varphi$-пространства и $\alpha$-пространства соответственно.) Алгебраические и непрерывные по Скотту полные решетки изучались в [1]. Для произвольных решеток соответствующие определения были даны Адаричевой и Горбуновым в работе [2]. Там же они доказали, что любая свободная решетка с конечным

*Работа выполнена при поддержке Госкомитета РФ по высшему образованию (грант 1998г.) и ФЦП "Интеграция" (проект 274)



числом порождающих является алгебраической. В случае конечно определенных решеток это утверждение неверно. В работе Фриза [3] был построен пример решетки с четырьмя порождающими и конечным числом определяющих соотношений, в которой условие $a \prec b$ не имеет места ни для каких элементов $a, b \in L$. Таким образом, эта решетка не является алгебраической, поскольку любая алгебраическая решетка слабо атомна (см. [2]). Тем не менее, верна следующая теорема.

**Теорема 1.** *Для конечно определенной решетки $L$ следующие условия равносильны:*

*1) $L$ — алгебраическая решетка;*

*2) $L$ — слабо атомная решетка;*

*3) любой элемент из $L$ представим в виде суммы вполне неразложимых элементов;*

*4) $L$ является $F_0$-пространством в смысле Ершова в топологии Скотта;*

*5) $L$ аппроксимируется своими конечными гомоморфными образами при ограниченных гомоморфизмах.*

Для доказательства нам потребуется следующая

**Лемма 2.** *Любой ограниченный сверху гомоморфизм является полным*
*$\bigvee$-гомоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $f : L \to K$ — ограниченный сверху гомоморфизм. Достаточно показать, что $f$ сохраняет суммы по направленным вверх подмножествам. Пусть $D$ — направленное вверх подмножество в $L$ и существует $\bigvee D$. Если $f(\bigvee D) \neq \bigvee f(D)$, то найдется $b \in L$, такой что $f(d) \leq b < f(\bigvee D)$ для всех $d \in D$. Пусть $\alpha(b)$ — наибольший элемент в прообразе множества $F^x = \{x \in L : f(x) \leq b\}$. По условию $D \subseteq F^x$, поэтому $\bigvee D \leq \alpha(b)$, то есть $f(\bigvee D) \leq b$, что противоречит выбору $b$. □

Доказательство теоремы 1. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) имеет место для произвольных решеток и была доказана в [2]. Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 4) также справедлива для любых решеток; ее доказательство непосредственно вытекает из определений (см. [4]). Поскольку в непрерывной вверх решетке любой вполне неразложимый элемент компактен, то верна импликация 3) $\Rightarrow$ 1).

Покажем, что 2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $a \in L$ и $A = \{x \in CJ(L) : x \leq a\}$. Если $a$ не является супремумом множества $A$, то найдется верхняя граница $a_1$ множества $A$, такая что $a_1 < a$. Поскольку $L$ слабо атомна, имеем $a_1 \leq u \prec v \leq a$ для некоторых $u, v \in L$. Любая конечно определенная решетка удовлетворяет условию минимальности Фриза — Нейшна (см. [3, 5]), поэтому множество $V$ элементов решетки $L$, встречающихся хотя бы в одном неутончаемом разложении элемента $v$, конечно. Так как $u \prec v$, существует $v_1 \in V$, такой что $v_1 \not\leq u$. Пусть $v_1$ — минимальный элемент из $V$ с таким свойством. Покажем, что $v_1$ вполне неразложим. Имеем $v_1 \wedge u < v_1$. Если $v_1 \wedge u < x < v_1$ для некоторого $x \in L$, то $x \vee u = v$. Согласно условию минимальности Фриза — Нейшна, существует неутончаемое разложение $v = t_1 \vee \ldots \vee t_n$, такое что $\{t_1, \ldots, t_n\} \ll \{x, u\}$. Поскольку $u \prec v$, для некоторого $i \leq n$ имеем $t_i \not\leq u$. Таким образом, $t_i \leq x < v_1$, что противоречит минимальности элемента $v_1$. Поэтому $v_1 \wedge u \prec v_1$. Поскольку элемент $v_1$ принадлежит неутончаемому покрытию $v$, он неразложим. Отсюда и из последнего неравенства заключаем, что $v_1$ вполне неразложим. Имеем $v_1 \leq v \leq a$, то есть $v_1 \in A$ и поэтому $v_1 \leq a_1 \leq u$, что противоречит выбору $v_1$. Таким образом, $a = \bigvee A$.

Покажем, что 3) $\Leftrightarrow$ 5). Пусть $a \not\leq b$ в $L$. Тогда найдется вполне неразложимый элемент $x \in L$, такой что $x \leq a$ и $x \not\leq b$. Тогда согласно теореме 14 из [3] решетка $L(x)$ ограничена, и стандартный гомоморфизм $f : L \to L(x)$ разделяет элементы $a$ и $b$. Обратно, пусть решетка $L$ аппроксимируется своими гомоморфными образами при ограниченных гомоморфизмах. Положим $A = \{x \in CJ(L) : x \leq a\}$, где $a \in L$. Если $a$ не является супремумом множества $A$, то найдется верхняя граница $a_1$ множества $A$, такая что $a_1 < a$. Согласно предположению существует ограниченный гомоморфизм $f : L \to K$, где $K$ — конечная решетка, такой что $f(a_1) < f(a)$. Поэтому $x \leq f(a)$ и $x \not\leq f(a_1)$ для некоторого неразложимого элемента $x \in K$. Предположим, что $\beta(x) = \bigvee X$, где $\beta(x)$ — наименьший элемент в прообразе элемента $x$ при гомоморфизме $f$, а $X \subseteq L$. Тогда $x = f(\beta(x)) = \bigvee f(X)$ согласно лемме 2. Поскольку элемент $x$ неразложим, а множество $f(X)$ конечно, имеем $x = f(x_1)$ для некоторого $x_1 \in X$. Таким образом, $x_1 \geq \beta(x) \geq x_1$ и $\beta(x)$ вполне неразложим. Имеем $\beta(x) \leq \beta(f(x)) \leq a$, но $\beta(x) \not\leq a_1$, что противоречит выбору $a_1$. Следовательно, $a = \bigvee A$. Теорема полностью доказана. $\square$

Заметим, что равносильность условий 1), 2) и 3) для полудистрибутивных вверх конечно определенных решеток была доказана в [2] (см. также [5]). Определение $F_0$-пространства см. в [4].

Неизвестно, существует ли непрерывная по Скотту неалгебраическая конечно определенная решетка. Тем не менее, имеет место следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Любая конечно порожденная ограниченная решетка непрерывна по Скотту.*

Доказательство. Пусть решетка $L$ конечно порождена и эпиморфизм
$f : FL(n) \to L$ ограничен. Пусть также $a \in L$ и $\beta(a)$ — наименьший элемент в прообразе множества $F_a = \{x \in FL(n) : f(x) \geq a\}$. Поскольку $FL(n)$ — алгебраическая, $\beta(a) = \bigvee\{b : b \ll b \leq \beta(a)\}$. Так как множество $\{b : b \ll b \leq \beta(a)\}$ направлено вверх, согласно лемме 2 имеем $a = \bigvee\{f(b) : b \ll b \leq \beta(a)\}$. Покажем, что $f(b) \ll a$ для всех



$b \ll b \leq \beta(a)$. Пусть $a \leq \bigvee D$ для некоторого направленного вверх множества $D$. Тогда $\beta(d) \leq \beta(\bigvee D)$ для любого $d \in D$, а множество $D_1 = \{\beta(d) : d \in D\}$ направлено вверх. Если $\beta(\bigvee D) \neq \bigvee D_1$, то найдется $z \in FL(n)$, такой что $\beta(d) < z < \beta(\bigvee D)$ для всех $d \in D$. Но тогда $d \leq f(z)$ для всех $d \in D$, то есть $\bigvee D \leq f(z)$. Поэтому $z \geq \beta(\bigvee D)$, что противоречит выбору $z$. Таким образом, $b \ll b \leq \beta(a) \leq \beta(\bigvee D) = \bigvee D_1$. Отсюда по условию получаем $b \leq \beta(d)$ для некоторого $d \in D$. Следовательно, $f(b) \leq d$, что и требовалось. $\square$

## Литература


[1] *G. Gierz, K. H. Hoffman, K. Keimel, J. D. Lawson, M. Mislove, D. S. Scott*,A Compendium on Continuous Lattices, Springer Verlag, Berlin — New-York, 1980

[2] *K. V. Adaricheva, V. A. Gorbunov*, On continuous noncomplete lattices, Algebra Universalis, to appear

[3] *R. Freese*, Finitely presented lattises: canonical forms and the covering relation, Trans. Amer. Math. Soc., **312**(1989), 841–860

[4] *Ю. Л. Ершов*, Теория $A$-пространств, Алгебра и логика, **12**(1973), No 4, 369–416

[5] *R. Freese, J. Ježek, J. B. Nation*, Free Lattices, AMS, Providence, 1995

[6] *D. S. Scott*, Continuous lattices, in: Toposes, Algebraic Geometry and Logic, Lecture Notes in Mathematics, **274**(1972), 97–136.

# Ретрактные разложения компактных систем

М. С. Шеремет

Россия
630090 Новосибирск-90
пр. Коптюга, 4
Институт математики СОРАН

Система $\mathcal{A}$ называется *ретрактом* системы $\mathcal{B}$, если существуют вложение $e : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и гомоморфизм $r : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ такие, что $re : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ — тождественный гомоморфизм. Семейство систем $(\mathcal{A}_i : i \in I)$ называется *представлением* системы $\mathcal{B}$, если каждая $\mathcal{A}_i$ является ретрактом прямого произведения $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Система $\mathcal{B}$ называется *неразложимой*, если для любого ее представления $(\mathcal{A}_i : i \in I)$ $\mathcal{B}$ является ретрактом некоторой системы $\mathcal{A}_i$. Эти понятия были введены Д. Дуффусом и А. Райвелом в [3] для частично упорядоченных множеств, представления предикатных систем исследовались Л. Задори в [5].

Индукцией по числу элементов нетрудно доказать следующее утверждение (см. [3, Теорема 3.1]):

> *всякая конечная предикатная система $\mathcal{A}$ имеет конечное представление $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$, в котором все $\mathcal{A}_i$ неразложимы.*

В [5] предложен более конструктивный способ доказательства этого утверждения, представляющий больше информации о строении систем $\mathcal{A}_i$. Тем не менее, оба доказательства существенно используют конечность исходной системы $\mathcal{A}$. В данной работе находятся некоторые достаточные условия, которые гарантируют существование представления через неразложимые и для бесконечных систем.

Будем придерживаться терминологии и обозначений, принятых в [2]. Пусть $L$ — произвольная заданная сигнатура, $L_P$ — множество предикатных символов в $L$ и $n(P)$ — арность символа $P$. *Конгруэнцией* на $L$-системе $\mathcal{A}$ называется семейство $\theta = (\theta(P) : P \in \{\approx\} \cup L_P)$, удовлетворяющее следующим условиям:

C1) $\theta(\approx)$ — отношение эквивалентности на $\mathcal{A}$;

C2) $\theta(\approx)$ замкнуто относительно основных операций $\mathcal{A}$, т. е. $f(a_0, \ldots, a_{m-1}) = a_m$, $f(b_0, \ldots, b_{m-1}) = b_m$, и $(a_i, b_i) \in \theta(\approx)$, $i < m$, влечет $(a_m, b_m) \in \theta(\approx)$;

C3) $P \subseteq \theta(P) \subseteq A^{n(P)}$, $P \in L_P$.

C4) $\theta(P)$ замкнуто относительно $\theta(\approx)$, т. е. $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \theta(P)$ и $(a_i, b_i) \in \theta(\approx)$, $i < n$, влечет $(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in \theta(\approx)$.

Множество всех конгруэнций на системе $\mathcal{A}$ замкнуто относительно объединений по цепям и произвольных пересечений, следовательно, образует полную решетку, обозначаемую $\mathrm{Con}\,\mathcal{A}$. *Нулевая конгруэнция* $0_{\mathcal{A}} = (P_{\mathcal{A}} : P \in L_P)$ является наименьшим элементом $\mathrm{Con}\,\mathcal{A}$.

*Работа выполнена при поддержке Госкомитета РФ по высшему образованию (грант 1998г.) и ФЦП "Интеграция" (проект 274)



Пусть $\theta \in \mathrm{Con}\,\mathcal{A}$, $a/\theta$ обозначает смежный класс элемента $a \in A$ по эквивалентности $\theta(\approx)$ и $A/\theta = \{a/\theta : a \in A\}$. На множестве $A/\theta$ определяется *фактор-система* $\mathcal{A}/\theta$ по правилам

$$F^{\mathcal{A}/\theta}(a_0/\theta, \ldots, a_{m-1}/\theta) = F^{\mathcal{A}}(a_0, \ldots, a_{m-1})/\theta,$$

если $F$ — символ $m$-местной операции, и

$$P^{\mathcal{A}/\theta} = \{(a_0/\theta, \ldots, a_{n-1}/\theta : (a_0, \ldots, a_{n-1} \in \theta(P)\},$$

если $P$ — символ $n$-местного отношения. При этом отображение $f : a \mapsto a/\theta$ $(a \in A)$ становится гомоморфизмом из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A}/\theta$, $f$ называется *естественным гомоморфизмом*. Для введенного таким образом понятия конгруэнции справедливы теорема о гомоморфизмах и теоремы об изоморфизме [2, предложения 1.4.1, 1.4.3, 1.4.4].

Далее последовательности вида $a_0, a_1, \ldots$ будем обозначать кратко $\bar{a}$.

Пусть $\mathbf{K}$ — класс $L$-систем, тогда *множество* $\mathbf{K}$-*конгруэнций* это $\mathrm{Con}_{\mathbf{K}}\mathcal{A} = \{\theta \in \mathrm{Con}\,\mathcal{A} : \mathcal{A}/\theta \in \mathbf{K}\}$. Система $\mathcal{A}$ называется *подпрямо неразложимой в* $\mathbf{K}$, если $0_{\mathcal{A}} \neq \bigcap\{\theta \in \mathrm{Con}_{\mathbf{K}}\mathcal{A} : \theta \neq 0_{\mathcal{A}}\}$, т. е. если найдутся $P \in L_P$ и $\bar{a} \in A^{n(P)}$ такие, что $\bar{a} \in \theta(P)$ для всех $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathbf{K}}\mathcal{A} \setminus \{0_{\mathcal{A}}\}$. В этом случае система $\mathcal{A}$ называется $P(\bar{a})$-*неразложимой в* $K$.

**Предложение 1 [2].** 1) *Если $\theta = \bigcap_{i \in I} \theta_i$, где $\theta, \theta_i \in \mathrm{Con}\,\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}/\theta$ вложима в $\prod_{i \in I} \mathcal{A}/\theta_i$.*

2) *Если $\theta = \bigcup_{i \in I} \theta_i$, где $\theta, \theta_i \in \mathrm{Con}\,\mathcal{A}$ и $(\theta_i : i \in I)$ — цепь, то $\mathcal{A}/\theta$ — прямой предел систем $\mathcal{A}/\theta_i$, $i \in I$. В частности, если $\mathbf{K}$ замкнут относительно прямых пределов, то $\mathrm{Con}_{\mathbf{K}}\mathcal{A}$ замкнуто относительно объединений по цепям.*

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — $L$-системы и $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{B}$ называется *чистым расширением* системы $\mathcal{A}$, если для любых атомных формул $\mathsf{A}_i(\bar{\mathsf{x}}, \bar{\mathsf{y}})$, $i < n$, и элементов $\bar{a}$ из $A$ выполняется $\mathcal{A} \models \exists \bar{\mathsf{y}}\, \&_{i<n} \mathsf{A}_i(\bar{\mathsf{a}}, \bar{\mathsf{y}}) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \exists \bar{\mathsf{y}}\, \&_{i<n} \mathsf{A}_i(\bar{\mathsf{a}}, \bar{\mathsf{y}})$.

Система $\mathcal{A}$ называется *атомно компактной*, если для произвольного множества $\Sigma$ атомных формул сигнатуры $L$, обогащенной константами из $A$, множество $\Sigma$ выполнимо в $\mathcal{A}$ при условии, что каждая его конечная часть выполнима в $\mathcal{A}$.

**Предложение 2 [4].** *Система $\mathcal{A}$ является атомно компактной тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ является ретрактом любого своего чистого расширения.*

Система $\mathcal{A}$ называется *квазикомпактной*, если для произвольного множества $\Sigma \cup \{\mathsf{A}\}$ атомных формул сигнатуры $L$ множество $\Sigma \cup \{\neg\mathsf{A}\}$ выполнимо в $\mathcal{A}$ при условии, что каждая его конечная часть выполнима в $\mathcal{A}$. Понятие квазикомпактного класса систем было введено В. А. Горбуновым в [1]. Из основной теоремы этой работы и следствия 2.3.4 [2] получаем следующее утверждение.

**Предложение 3.** *Система $\mathcal{A}$ является квазикомпактной тогда и только тогда, когда класс $\mathbf{SP}(\mathcal{A})$ замкнут относительно прямых пределов.*

Здесь $\mathbf{S}$ и $\mathbf{P}$ обозначают операторы взятия подсистем и прямых произведений соответственно.

Пусть $\Phi$ — множество формул вида $\exists \bar{\mathsf{y}}\, \&_{i<n} \mathsf{A}_i(\bar{\mathsf{x}}, \bar{\mathsf{y}})$, где все $\mathsf{A}_i$ — атомные формулы сигнатуры $L$. Для каждой формулы $\mathsf{F}(\mathsf{x}_0, \ldots, \mathsf{x}_{k-1}) \in \Phi$ введем новый $k$-местный

предикатный символ $P_{\mathsf{F}}$ и пусть $L^* = L \cup \{P_{\mathsf{F}} : \mathsf{F} \in \Phi\}$. Определим класс $L^*$-систем **K** следующими предложениями:

$$\forall \bar{x}(P_{\mathsf{F}}(\bar{x}) \leftrightarrow \mathsf{F}(\bar{x})), \quad \mathsf{F}(\bar{x}) \in \Phi.$$

Нетрудно видеть, что для любой $L$-системы $\mathcal{A}$ существует единственная $L^*$-система $\mathcal{A}^*$, $L$-обеднение которой совпадает с $\mathcal{A}$, и $\mathbf{K} = \{\mathcal{A}^* : \mathcal{A}$ — $L$-система$\}$. Кроме того, для любых систем $\mathcal{A}^* \leq \mathcal{B}^*$ из **K** $\mathcal{B}$ является чистым расширением $\mathcal{A}$.

**Теорема.** *Пусть система $\mathcal{A}$ удовлетворяет следующим условиям:*
1) *$\mathcal{A}$ атомно компактна;*
2) *$\mathcal{A}^*$ квазикомпактна.*
*Тогда $\mathcal{A}$ имеет представление $(\mathcal{A}_i : i \in I)$ в котором все $\mathcal{A}_i$ неразложимы.*

Доказательство. Обозначим $\mathbf{A} = \mathbf{SP}(\mathcal{A}^*)$. Тогда в силу квазикомпактности $\mathcal{A}^*$ и предложений 3 и 1 получаем, что множество $\mathrm{Con}_{\mathbf{A}}\mathcal{A}^*$ замкнуто относительно объединений по цепям. Пусть $P$ — предикатный символ из $L^*$ и $\mathcal{A}^* \models \neg P(\bar{a})$, где $\bar{a} \in A^{n(P)}$. Тогда множество $\{\theta \in \mathrm{Con}_{\mathbf{A}}\mathcal{A}^* : \bar{a} \notin \theta(\mathrm{P})\}$ удовлетворяет условиям леммы Цорна. Пусть $\theta$ — некоторый максимальный элемент в этом множестве, $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*/\theta$ и $\bar{b} = \bar{a}/\theta$. Тогда $\bar{b} \in \theta'(P)$ для любой ненулевой конгруэнции $\theta'$ из $\mathrm{Con}_{\mathbf{A}}\mathcal{B}$. Пусть **M** — класс всех систем $\mathcal{C} \in \mathbf{A}$, $\mathcal{C} \leq \mathcal{B}$, которые являются $P(\bar{b})$-неразложимыми. Нетрудно проверить, что **M** замкнут относительно прямых пределов по вложениям. С другой стороны, так как $\mathbf{A} = \mathbf{SP}(\mathcal{A}^*)$, получаем $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{S}(\mathcal{A}^*)$, в частности, мощности систем из **M** ограничены. По лемме Цорна, существует максимальная по вложению система $\mathcal{C} \in \mathbf{M}$.

Проверим, что $\mathcal{C}$ — *абсолютный ретракт* в **A**, т. е. для любого расширения $\mathcal{D} \geq \mathcal{C}$, $\mathcal{D} \in \mathbf{A}$, $\mathcal{C}$ является ретрактом $\mathcal{D}$. Действительно, так как $\mathcal{D} \models \neg P(\bar{b})$, во множестве $\{\theta \in \mathrm{Con}_{\mathbf{A}}\mathcal{D} : \bar{b} \notin \theta(\mathrm{P})\}$ найдется максимальный элемент $\theta'$. Пусть $\mathcal{C}' = \mathcal{D}/\theta'$, $f : \mathcal{D} \to \mathcal{C}'$ — естественный гомоморфизм и $\bar{b}' = f(\bar{b})$. По построению $\mathcal{C}'$ является $P(\bar{b}')$-неразложимой системой, в частности, $\mathcal{C}' \models \neg P(\bar{b}')$. Но $f|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ отображает $\bar{b}$ в $\bar{b}'$, а $\mathcal{C}$ есть $P(\bar{b})$-неразложимая система в **A**. Следовательно, $f|_{\mathcal{C}}$ — вложение. В силу максимальности $\mathcal{C}$ в **M** получаем, что $f|_{\mathcal{C}}$ — изоморфизм и $\mathcal{C}$ — ретракт $\mathcal{D}$.

Поскольку $\mathcal{C}$ вложима в $\mathcal{A}^*$ получаем, что $\mathcal{C}$ — ретракт $\mathcal{A}^*$. Нетрудно также видеть, что класс **K** замкнут относительно ретрактов. Поэтому $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$, т. е. $\mathcal{C} = \mathcal{R}^*$ для некоторой $L$-системы $\mathcal{R}$, причем $\mathcal{R}$ — ретракт $\mathcal{A}$.

Таким образом, если $\mathcal{A}^* \models \neg P(\bar{a})$, то найдутся $\theta_{P,\bar{a}} \in \mathrm{Con}\,\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{R}_{P,\bar{a}}$ — ретракт $\mathcal{A}$ такие, что $\mathcal{A}^*/\theta \leq \mathcal{R}_{P,\bar{a}}$ и $\theta_{P,\bar{a}}(P) \not\ni \bar{a}$. Согласно предложению 1 получаем, что $\mathcal{A}^* \leq \prod\{\mathcal{R}_{P,\bar{a}} : \mathcal{A}^* \models \neg P(\bar{a})\}$, т. е. $\mathcal{A} \leq \prod \mathcal{R}_{P,\bar{a}}$ — чистое вложение. В силу атомной компактности $\mathcal{A}$ является ретрактом $\prod \mathcal{R}_{P,\bar{a}}$.

По построению всякая система $\mathcal{R}^*$ вида $\mathcal{R}^*_{P,\bar{a}}$ является $P(\bar{r})$ — неразложимой в **A** для некоторого $\bar{r} \in R^{n(P)}$. Проверим, что система $\mathcal{R}$ является неразложимой. Пусть $(\mathcal{R}_i : i \in I)$ — некоторое представление для $\mathcal{R}$, тогда все $\mathcal{R}^*_i \in \mathbf{A}$ и $\mathcal{R}^* \in \mathbf{SP}(\mathcal{R}^*_i)$. В частности, найдется гомоморфизм $f : \mathcal{R}^* \to \mathcal{R}^*_j$ такой, что $\mathcal{R}^*_j \models \neg P(\bar{r})$. В силу $P(\bar{r})$-неразложимости $\mathcal{R}^*$ в **A** получаем, что $f$ — вложение. А так как $\mathcal{R}^*$ — абсолютный ретракт в **A**, то $\mathcal{R}^*$ — ретракт $\mathcal{R}^*_j$, т. е. $\mathcal{R}$ — ретракт $\mathcal{R}_j$.



# Литература


[1] *В. А. Горбунов*, Об аксиоматизируемости репличных классов, Матем заметки, **35** (1984), N5, 641–645.

[2] *В. А. Горбунов*, Алгебраическая теория квазимногообразий, Новосибирск, Научная книга, 1999.

[3] *D. Duffus, I. Rival*, A structure theory for ordered sets, Discr. Math., **35** (1981), 53–118.

[4] *B. Węglorz*, Equationally compact algebras. I, Fund. Math., **59** (1966), 289–298.

[5] *L. Zádori*, Relational sets and categorical equivalence of algebras, Intern. J. Algebra and Comput., **7** (1997), N5, 561–576.

# Group Polygonometries With Symmetrical Conditions

**S. V. Sudoplatov**

Department of Algebra, NSTU
pr. Marksa, 20
Novosibirsk
630092 Russia
e-mail: algebra@nstu.ru

In this paper we define and investigate classes of group polygonometries having symmetrical conditions. On the one hand these classes give natural interpretations of classical and some nonstandard trigonometries. On the other hand the majority of collected in [1] results on group polygonometries can be carried to the symmetrical case.

We shall use notions and notations from [1-5]. By the symbol $\square$ we shall mark ends of proofs.

**1. Definition and preliminaries.** A system $\mathcal{P} = \langle P, L, I\rangle$, where $P$ is a set of *points*, $L$ is a set of *lines*, $I \subseteq P \times L$, is said to be a *precise* $(\lambda_1, \lambda_2)$*-pseudoplane* ($\lambda_1, \lambda_2$ are some cardinals), if it satisfies the followng conditions:

$$\forall p \in P\ \exists^{=\lambda_1} l \in L\ \ I(p,l),\quad \forall l \in L\ \exists^{=\lambda_2} p \in P\ \ I(p,l),$$

$$\forall p_1 \neq p_2 \in P\ \exists^{\leq 1} l \in L\ \ (I(p_1,l) \wedge I(p_2,l)),$$

$$\forall l_1 \neq l_2 \in L\ \exists^{\leq 1} p \in P\ \ (I(p,l_1) \wedge I(p,l_2)).$$

(Here $\exists^{=\lambda}$ means "there are exactly $\lambda$", $\exists^{\leq 1}$ means "there is not more than one".)

Let $\mathcal{P} = \langle P, L, \in\rangle$ be a $(\lambda_1,\lambda_2)$-pseudoplane. If $p_1, p_2$ are points of the pseudoplane $\mathcal{P}$, then the least number $n$, such that there are lines $l_1, \ldots, l_n$, for which $p_1 \in l_1$, $p_2 \in l_n$, $l_i \cap l_{i+1} \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, n-1$, is called the *distance* $d(p_1,p_2)$ between the points $p_1$ and $p_2$, if such a sequence of lines exists, and $d(p_1,p_2) \rightleftharpoons \infty$, if such sequence doesn't exist.

Let $\mathcal{P}' = \langle P', L', \in\rangle$ be a $(\lambda_1,\lambda_2)$-pseudoplane such that $P' \subseteq P$, $L' \subseteq L$, and $P'$, $L'$ are maximal subsets of $P$, $L$, such that distances between any two points are finite. Then $\mathcal{P}'$ is said to be the *connected component* of $\mathcal{P}$. The number of connected components of $\mathcal{P}$ will be denoted by $c(\mathcal{P})$. A pseudoplane $\mathcal{P}$ is called *connected*, if $c(\mathcal{P}) = 1$.

A precise $(\lambda_1,\lambda_2)$-pseudoplane $\mathcal{P}$ is said to be a *plane* (accordingly a *projective plane*), if: a) $\forall p_1 \neq p_2 \in P\ \exists^{=1} l \in L\ \ (I(p_1,l) \wedge I(p_2,l))$ (accordingly a and b) $\forall l_1 \neq l_2 \in L\ \exists^{=1} p \in P\ \ (I(p,l_1) \wedge I(p,l_2))$.

By $l(p_1,p_2)$ we denote the line passing through two given points $p_1$ and $p_2$, $p_1 \neq p_2$, by $p(l_1,l_2)$ the point of intersection of two given lines $l_1$ and $l_2$, $l_1 \neq l_2$.

Let $G_1$ be a linearly ordered group, $\mathrm{Pos}(G_1)$ be the positive cone of $G_1$, $G_2$ be a group. If $g_1$ is an element of $G_1$ we denote by $|g_1|$ the element $g_1' \in \mathrm{Pos}(G_1) \cup \{e\}$ such that $(g_1')^{\pm 1} = g_1$. Let $\mathcal{P} = \langle P, L \in\rangle$ be a *precise* $(|G_1|, |G_2|)$*-pseudoplane*. Now let $\langle G_1, G_2, \mathcal{P}\rangle$ be the system satisfying the following conditions:

1) for any line $l \in L$ there is an action of the set $\mathrm{Pos}(G_1) \cup \{e\}$ on the set of all subsets of $l$ such that



(a) if $X \subseteq l$, then $Xg_1 = \bigcup\{\{p\}g_1 \mid p \in X\}$, $g_1 \in \mathrm{Pos}(G_1) \cup \{e\}$;
(b) $\{p\}e = \{p\}$, $|\{p\}g_1| = 2$, $p \in l$, $g_1 \in \mathrm{Pos}(G_1)$;
(c) $(\{p\}g_1)g_1' = \{p\}(g_1g_1') \cup \{p\}|g_1(g_1')^{-1}|$, $p \in l$, $g_1, g_1' \in \mathrm{Pos}(G_1)$;
(d) if $p, p' \in l$, then there is exactly one element $g_1 \in \mathrm{Pos}(G_1) \cup \{e\}$ such that $p' \in \{p\}g_1$;

2) there is an element $\pi \in G_2 \setminus \{e\}$ such that for any point $p \in P$ there is an action of the group $G_2$ on the set $\bigcup\{l \in L \mid p \in l\}$ satisfying the following conditions:

(a) $pg_2 = p$ for any $g_2 \in G_2$;
(b) if $p'' = p'g_2$, $g_2 \in G_2 \setminus \{e\}$ and $p' \in \{p\}g_1$ on the line $l(p,p')$ then $p'' \in \{p\}g_1$ on the line $l(p,p'')$;
(c) if $p \in l$ then $lg_2 \in L$ and $l\pi = l$;
(d) if $p'' = p'g_2$ and $p'' = p'g_2'$ then $g_2 = g_2'$.

Below we shall denote $\{p\}g_1$ by $pg_1$.

If points $p'$ and $p''$ belong to a line $l$, the pair $p'{}^\frown p''$ is said to be a *segment*. If $p'' \in p'g_1$ for the set $l$ then the element $g_1$ is the *length* $|p'{}^\frown p''|$ between given points.

By the axioms 1 one can define a ternary relation on the set $P$ "to lie between". For any three collinear points $p, p', p''$ we shall say that $p'$ *lies between* $p$ *and* $p''$, if $|p{}^\frown p''| = |p{}^\frown p'| \cdot |p'{}^\frown p''|$.

If lines $l'$ and $l''$ have a common point $p$, a point $p'$ belongs to $l' \setminus \{p\}$, a point $p''$ belongs to $l'' \setminus \{p\}$ and $|p{}^\frown p'| = |p{}^\frown p''|$, then any 3-tuple $(p', p, p'')$ is said to be the *angle* between $l'$ and $l''$. Now if $l'' = l'g_2$ and $p'' = p'g_2$ for the set $\bigcup\{l \in L \mid p \in l\}$ then the element $g_2$ is the *angle value* $\angle(p', p, p'')$ of given angle.

In fact the angle value $\angle(p', p, p'')$ can be defined by 3-tuples $(p', p, p''')$ for any $p''' \in l''$ satisfying the following conditions: $p''' \neq p'$ and either $p''$ lies between $p'$ and $p'''$ or $p'''$ lies between $p'$ and $p''$. So we shall also right $(p', p, p''')$ for angles and $\angle(p', p, p''')$ for angle values.

A sequence of points $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ is said to be an *open polygon* (accordingly a *polygon*), if $p_i \neq p_{i+1}$, $p_n \neq p_1$ and there are lines $l(p_i, p_{i+1})$, $i = 1, \ldots, n-1$, (and $l(p_n, p_1)$).

Suppose moreover that $\langle G_1, G_2, \mathcal{P}\rangle$ satisfies the following condition:

3) if $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ and $(p_0', p_1', \ldots, p_n')$ are open polygons (or polygons), $|p_{i-1}{}^\frown p_i| = |p_{i-1}'{}^\frown p_i'|$, $1 \leq i \leq n$, $\angle(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) = \angle(p_{i-1}', p_i', p_{i+1}')$, $1 \leq i \leq n-1$, then there is a bijection $f : P \to P$ such that

(a) $f(p_i) = p_i'$, $0 \leq i \leq n$;
(b) $f(l)$ belongs to $L$ for any line $l \in L$, and $f(\{l \mid p \in l\}) = \{l \mid f(p) \in l\}$ for any point $p \in P$;
(c) for any line $l$ and its subsets $X'$ and $X''$ if $X'' = X'g_1$ on $l$, then $f(X'') = f(X')g_1$ on $f(l)$;
(d) for any point $p$ and $p', p'' \in \bigcup\{l \in L \mid p \in l\}$ if $p'' = p'g_2$ on the set $\bigcup\{l \mid p \in l\}$, then $f(p'') = f(p')g_2$ on the set $\bigcup\{l \mid f(p) \in l\}$.

Thus we shall say that the system $\langle G_1, G_2, \mathcal{P}\rangle$ forms the *polygonometry with a symmetrical condition*, or the *s-polygonometry* $\mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ of the group pair $(G_1, G_2)$ on the precise pseudoplane $\mathcal{P}$. A bijection $f$ satisfying the conditions 3,(a)–(d) is said to be an *automorphism* of s-polygonometry $\mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$.

Now we consider some corollaries of axioms.

**PROPOSITION 1.1.** 1. (The symmetry) *If* $p'' \in p'g_1$ *on some line* $l$, *then* $p' \in p''g_1$ *on* $l$.

2. (The commutativity of $G_1$) *The group $G_1$ is commutative.*

3. (The order ideal of $\pi$) $\pi^2 = e$.

4. (The centrality of $\pi$) *The element $\pi$ commutes with every element of $G_2$.*

**Proof.** 1. Suppose that $p'' \in p'g_1$ and $p' \notin p''g_1$. Then we have $g_1 \neq e$, $p'g_1 = \{p'', p'''\}$, $p''g_1 \cup p'''g_1 = (p'g_1)g_1 = (p'(g_1g_1)) \cup (p'|g_1g_1^{-1}|) = \{p^{(4)}, p^{(5)}\} \cup \{p'\}$ for some $p'''$, $p^{(4)}$ and $p^{(5)}$. So $p''g_1 = \{p^{(4)}, p^{(5)}\}$ and either $p'''g_1 = \{p^{(4)}, p'\}$ or $p'''g_1 = \{p^{(5)}, p'\}$. Now let $f$ be an automorphism such that $f(p') = p'$, $f(p''') = p''$. Then $f(\{p^{(4)}, p'\}) = \{p^{(4)}, p^{(5)}\}$ or $f(\{p^{(5)}, p'\}) = \{p^{(4)}, p^{(5)}\}$. So $p' = p^{(4)}$ or $p' = p^{(5)}$, but then $p' \in p''g_1$ that contradicts what has been assumed.

2. At first we shall show that $g_1g_1' = g_1'g_1$ for any $g_1, g_1' \in \mathrm{Pos}(G_1)$. Consider some point $p \in P$, a line $l \in L$ comprising $p$ and points $p', p'' \in l$ such that $p' \in pg_1$ and $p'' \in p(g_1g_1') \cap p'g_1'$. By the assertion 1 we have $p \in p'g_1 \cap p''(g_1g_1')$ and $p' \in p''g_1'$. So $p \in p''(g_1g_1') \cap (p''g_1')g_1$. If $p \in p''(g_1'g_1)$ then $g_1g_1' = g_1'g_1$ by the axiom 1,(d). If not then by 1,(c) we have $p \in p''|g_1'g_1^{-1}|$ and by 1,(d) either $g_1g_1' = g_1'g_1^{-1}$ or $g_1g_1' = (g_1'g_1^{-1})^{-1} = g_1(g_1')^{-1}$. In the first case we get $g_1g_1'g_1 = g_1'$ that contradicts to $g_1' < g_1g_1'g_1$. In the second case $g_1' = (g_1')^{-1}$ that is at variance with $e < g_1'$. Thus $g_1g_1' = g_1'g_1$ and $\mathrm{Pos}(G_1) \cup \{e\}$ is a commutative monoid. Now as it's well known the commutativity of $\mathrm{Pos}(G_1)$ implies the commutativity of $G_1$.

The proof of 3 is obvious.

4. Let $g_2$ be an element of $G_2$. Consider some point $p \in P$, a line $l$ comprising $p$, and the line $l' = lg_2$ by the action on $\cup\{\hat{l} \mid p \in \hat{l}\}$. Then

$$l(g_2\pi) = (lg_2)\pi = l'\pi = l' = lg_2 = (l\pi)g_2 = l(\pi g_2).$$

Now if $g_2\pi \neq \pi g_2$ then $g_2\pi = \pi g_2 \pi$, $g_2 = \pi g_2$ and $\pi = e$ that contradicts to $\pi \in G_2 \setminus \{e\}$. Hence $g_2\pi = \pi g_2$ for any $g_2 \in G_2$. $\square$

By the proposition 1.1 the length function

$$|\cdot^\frown\cdot| : \{(p', p'') \mid p', p'' \in l \text{ for some } l \in L\} \to \mathrm{Pos}(G_1) \cup \{e\}$$

is symmetrical and we shall consider $G_1$ as a commutative linearly ordered group with a group operation $+$ and $e = 0$.

**2. Polygons and $s$-polygonometrical sets.** Let $S = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ be a *polygon*. For the sides $p_i{}^\frown p_{i+1}$ and $p_n{}^\frown p_1$ of $S$ we define their *parameters* as the elements $a_i$ of the *side group* $G_1$ such that $p_{i+1} \in p_ia_i$ on $l(p_i, p_{i+1})$, $i = 1, \ldots, n-1$ and $p_1 \in p_na_n$ on $l(p_n, p_1)$. Accordingly for the angles $(p_{i-1}, l(p_{i-1}, p_i), l(p_i, p_{i+1}), p_{i+1})$, $i = 2, \ldots, n-1$, $(p_{n-1}, l(p_{n-1}, p_n), l(p_n, p_1), p_1)$ and $(p_n, l(p_n, p_1), l(p_1, p_2), p_2)$ of $S$ we define their *parameters* as elements $\alpha_i$ of the *angle group* $G_2$ such that $\angle(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) = \alpha_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n-1$, $\angle(p_{n-1}, p_n, p_1) = \alpha_{n-1}$ and $\angle(p_n, p_1, p_2) = \alpha_n$. So the parameters of $S$ are defined by the matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Any matrix $S = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{Pos}(G_1) \cup \{0\}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in G_2$, is said to be a *$(G_1, G_2)^s$-$n$-gon* or simply a *$(G_1, G_2)^s$-polygon*. The elements $a_1, \ldots, a_n$



(accordingly $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$) together with their occurence to $S$ are the *sides* (the *angles*) of $S$.

We shall denote the set of all $(G_1, G_2)^s$-$n$-gons corresponding to $n$-gons of a $s$-polygonometry $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ by $\mathbf{S}_n(\mathrm{spm})$ or by $\mathbf{S}_n(G_1, G_2, \mathcal{P})$, $\mathbf{S}(\mathrm{spm}) \rightleftharpoons \mathbf{S}(G_1, G_2, \mathcal{P}) \rightleftharpoons \bigcup_{n \geq 3} \mathbf{S}_n(\mathrm{spm})$.

If $S = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ is a $(G_1, G_2)^s$-$n$-gon, $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, then any $2n-3$ parameters of $S$, among which there are not some $a_k\alpha_ka_{k+1}$, or $\alpha_ka_{k+1}\alpha_{k+1}$, or $a_n\alpha_na_1$ or $\alpha_na_1\alpha_1$, are called *defining*. It's easy to see that if the correspondent defining parameters of $(G_1, G_2)^s$-polygons $S_1, S_2 \in \mathbf{S}_n(\mathrm{spm})$ are equal, then $S_1 = S_2$. In particular, $(G_1, G_2)^s$-triangles of $\mathbf{S}_3(\mathrm{spm})$ with nonzero parameters from $G_1$ are uniquely defined by any side and adjacent angles or by any two sides and an angle between them.

Any matrix $\begin{pmatrix} a_i & a_{i+1} & \cdots & a_n & a_1 & \cdots & a_{i-1} \\ \alpha_i & \alpha_{i+1} & \cdots & \alpha_n & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{i-1} \end{pmatrix}$ is said to be a *cyclic permutation* of the matrix $S = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$. A matrix $\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ \alpha_{n-1}^{-1} & \alpha_{n-2}^{-1} & \cdots & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix}$ is said to be a *turn* of $S$.

Let $S_1 = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{k-1} & a_k & \cdots & a_m \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{k-1} & \alpha_k & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix}$ and

$S_2 = \begin{pmatrix} a_m & \cdots & a_{k+1} & a_k & b_{m-k+2} & \cdots & b_n \\ \alpha_{m-1}^{-1} & \cdots & \alpha_k^{-1} & \beta_{m-k+1} & \beta_{m-k+2} & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$ be $(G_1, G_2)^s$-polygons. We shall call the $(G_1, G_2)^s$-polygon

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{k-1} & b_{m-k+2} & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{k-1} \cdot \beta_{m-k+1} & \beta_{m-k+2} & \cdots & \beta_{n-1} & \beta_n \cdot \alpha_m \end{pmatrix},$$

where $q > 3$, $q = k - 1 + (n - (m - k + 2) + 1) = n - m + 2k - 2$, the *joining* of the $(G_1, G_2)^s$-polygons $S_1$ and $S_2$ over the border $(a_k, a_{k+1}, \ldots, a_m)$.

If $\mathbf{S}$ is a set of $(G_1, G_2)^s$-polygons, by $GN(\mathbf{S})$ we denote the closure of $\mathbf{S}$ under cyclic permutations, turns and joinings. By $\mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^s$ we denote the closure under cyclic permutations of the set of the matrixes

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_1' & g_1 + g_1' \\ \pi & e & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 & g_1 & 0 \\ e & \pi \cdot g_2 & g_2^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pi \cdot g_2 & g_2' & (g_2')^{-1}g_2^{-1} \end{pmatrix},$$

where $g_1, g_1' \in \mathrm{Pos}(G_1) \cup \{0\}$, $g_2, g_2' \in G_2$.

Denote by $\mathbf{S}^0(G_1, G_2)$ the set of $(G_1, G_2)^s$-polygons having a side 0.

A $s$-polygonometry $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ is said to be a *$s$-trigonometry* of a group pair $(G_1, G_2)$, if $\mathbf{S}(\mathrm{spm}) = GN(\mathbf{S}_3(\mathrm{spm}) \cup \Delta_e(G_1, G_2)^s) \setminus \mathbf{S}^0(G_1, G_2)$. Such a $s$-polygonometry spm will be denoted by $\mathrm{strm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$.

A set $\mathbf{S}$ of $(G_1, G_2)^s$-polygons is said to be a *$s$-polygonometrical*, if it satisfies the following conditions:

1) if $\Delta$ is a $(G_1, G_2)^s$-triangle and some of its elements is equal to 0 or $e$, then $\Delta \in \mathbf{S}$ iff $\Delta \in \mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^s$;

2) any $(G_1, G_2)^s$-polygon $S \in \mathbf{S}$ with nonzero sides is uniquely defined by any its defining parameters;

3) $GN(\mathbf{S}) = \mathbf{S}$.

**THEOREM 2.1.** *Let $\mathbf{S}$ be a set of $(G_1, G_2)^s$- polygons. The following conditions are equivalent:*

*(1) $\mathbf{S}$ is a s-polygonometrical set;*

*(2) on some precise $(|G_1|, |G_2|)$-pseudoplane $\mathcal{P}$ there is a s-polygonometry* spm $=$ spm$(G_1, G_2, \mathcal{P})$ *such that* $\mathbf{S} = GN(\mathbf{S}(\mathrm{spm}) \cup \mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^s)$.

**Sketch of proof** uses the proof of [6, theorem 1].

(1) $\Rightarrow$ (2). Denote by $l_0$ the set of all elements of $G_1$. Define the action of $G_1$ on $l_0$ by the following way: for any $p \in l_0$ and $g_1 \in \mathrm{Pos}(G_1) \cup \{0\}$ suppose that $pg_1 = \{p+g_1, p-g_1\}$. If $G_2$ is finite (accordingly infinite) consider $|G_2|-1$ ($|G_2|$) copies of $l_0$ with copies of actions and identify the element 0 and all its copies. Now copies of $l_0$ form the set of lines $L_0$ for which we define an arbitrary action satisfying the axioms 2.

If the set of lines $L_n$ and the correspondent system of actions is already constructed we expand the set $L_n$ to the set $L_{n+1}$ by $|G_2|-1$ (or by $|G_2|$ for the infinite group $G_2$) copies of $l_0$ for any point $p \in \cup L_n \setminus \cup L_{n-1}$ by identifications of $p$ and copies of 0 and by isomorphisms of the system $L_0$ to the system of lines comprising points $p \in \cup L_n \setminus \cup L_{n-1}$. For any step $n$ if an open polygon $(p_1, \dots, p_{n+1})$ corresponds to a matrix $S = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbf{S}$ then we identify the points $p_1$ and $p_{n+1}$ and we define $\angle(p_{n-1}, p_1, p_2) \rightleftharpoons \alpha_n$. For the pseudoplane $\mathcal{P} = \langle \cup \bigcup_{n \in \omega} L_n, \bigcup_{n \in \omega} L_n, \in \rangle$ and the correspondent system of actions one check the axioms of $s$-polygonometries and for this $s$-polygonometry spm $=$ spm$(G_1, G_2, \mathcal{P})$ one get $\mathbf{S} = GN(\mathbf{S}(\mathrm{spm}) \cup \mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^s)$.

The implication (2) $\Rightarrow$ (1) is obvious. □

If pm is a $s$-trigonometry, $\mathbf{S}$ is a $s$-polygonometrical set and $\mathbf{S} = GN(\mathbf{S}(\mathrm{spm}) \cup \mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^s)$, then $\mathbf{S}$ is said to be a *$s$-trigonometrical set*.

Let $(G_1, G_2)$ and $(G_1', G_2')$ be group pairs, $\varphi_i$ be an embedding map of $G_i$ to $G_i'$, $i = 1, 2$, $\varphi_1$ preserve the order of $G_1$ (i.e. $\mathrm{Pos}(G_1) \subseteq \mathrm{Pos}(G_1')$), $\varphi_2(\pi) = \pi$, spm (accordingly spm$'$) be a $s$-polygonometry of $(G_1, G_2)$ (of $(G_1', G_2')$) on a precise pseudoplane $\mathcal{P} = \langle P, L, \in \rangle$ ($\mathcal{P}' = \langle P', L', \in \rangle$).

A map $f : P \to P'$ is said to be an *embedding* of the polygonometry spm to the polygonometry spm$'$ (denote by $f : \mathrm{pm} \hookrightarrow \mathrm{spm}'$), if

1) $f$ is injective;

2) for any line $l \in L$ there is a unique line $l' \in L'$ (denoted by $l(\mathcal{P}', f(l))$) such that $f(l) \subseteq l'$;

3) if $p_2 \in p_1 g_1$ on $l(p_1, p_2)$ in spm, then $f(p_2) \in f(p_1) \cdot \varphi_1(g_1)$ on $l(f(p_1), f(p_2))$ in spm$'$;

4) if $l_2 = l_1 g_2$ on the set $\{l \mid p(l_1, l_2) \in l\}$ in spm, then $l(\mathcal{P}', f(l_2)) = l(\mathcal{P}', f(l_1)) \cdot \varphi_2(g_2)$ on the set $\{l' \mid p(l(\mathcal{P}', f(l_1)), l(\mathcal{P}', f(l_2))) \in l'\}$ in spm$'$.

If $G_1$ is a subgroup of $G_1'$, and $G_2$ is a subgroup of $G_2'$, we shall suppose that $\varphi_1 = \mathrm{id}_{G_1}$ and $\varphi_2 = \mathrm{id}_{G_2}$.

A $s$-polygonometry spm is said to be (*identically*) *embeddable* to a $s$-polygonometry spm$'$, if there is an embedding $f$ : spm $\hookrightarrow$ spm$'$ (being an identical function). If a $s$-polygonometry spm of a pair $(G_1, G_2)$ is identically embeddable to a $s$-polygonometry spm$'$ of a pair $(G_1', G_2')$, $G_1 \le G_1'$, $G_2 \le G_2'$, then the $s$-polygonometry spm is called a *$(G_1, G_2)$-$s$-subpolygonometry* of spm$'$.



$S$-polygonometries spm $=$ spm$(G_1, G_2, \mathcal{P})$ and spm$' =$ spm$(G_1, G_2, \mathcal{P}')$ are called *isomorphic* (denoted by spm $\simeq$ spm$'$), if there is a bijection $f : P \to P'$ being an embedding of spm to spm$'$.

For a $s$-polygonometry spm $=$ spm$(G_1, G_2, \mathcal{P})$ the number $c(\mathcal{P})$ will be denoted by $c$(spm). A $s$-polygonometry spm is said to be *connected*, if $c$(spm) $= 1$. Any connected $s$-subpolygonometry of the $s$-polygonometry spm and of the same group pair is said to be a *connected component* of spm.

The following theorem is analogous to [6, theorem 3].

**THEOREM 2.2.** *The following conditions are equivalent:*

(1) spm $\simeq$ spm$'$;

(2) $\mathbf{S}$(spm) $= \mathbf{S}$(spm$'$) *and* $c$(spm) $= c$(spm$'$).

**Sketch of proof.** The implication (1) $\Rightarrow$ (2) is obvious.

(2) $\Rightarrow$ (1). It's enough to show that any connected components $K$ of spm and $K'$ of spm$'$ are isomorphic. We construct an isomorphism $f : K \rightrightarrows K'$ by the following way. Pick any points $p_1, p_2 \in K$ and $p_1', p_2' \in K'$ such that there are lines $l(p_1, p_2)$, $l(p_1', p_2')$ and $|p_1 \hat{\ } p_2| = |p_1' \hat{\ } p_2'|$. Let $p$ be an arbitrary point of $K$, $S = (p_1, \dots, p_n)$ be an open polygon of $K$ such that $p_n = p$; let $(p_1', \dots, p_n')$ be an open polygon of $K'$ such that the matrix of its parameters coincides with the matrix of parameters of $S$. Then $f(p) \rightleftharpoons p_n'$ and one check that $f$ is an isomorphism. □

Thus for the definition of a $s$-polygonometry it's enough to define its set of $(G_1, G_2)^s$-polygons and its number of connected components.

**3. Examples.** 1. Let $G_1$ be a commutative linearly ordered group, $G_2$ be a group with an element $\pi$ such that $\pi^2 = e$ and $\pi$ commutes with any element of $G_2$. It's easy to see that $\mathbf{S} = GN(\mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^s)$ is a $s$-polygonometrical set defining a connected $s$-polygonometry spm$_t$ which doesn't have $n$-gons, $n \ge 3$, with pairwise different vertexes lying on pairwise different lines. Any $s$-polygonometry spm$_t$ is called a *tree $s$-polygonometry*.

2. Let $\langle [0, 2\pi), + \rangle$ be a factor-group of $\langle \mathbf{R}, + \rangle$ by the congruence relation $\{(x, x+2\pi k) \mid x \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}\}$. Consider the following set of $(\langle \mathbf{R}, +, < \rangle, \langle [0, 2\pi), + \rangle)$-polygons:

$\mathbf{S} = GN\left(\left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c > 0,\ 0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi,\ \alpha + \beta + \gamma = \pi,\ \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \right\} \cup \mathbf{\Delta}_0(\langle \mathbf{R}, + \rangle, \langle [0, 2\pi), + \rangle)^s \right)$. It's easy to see that $\mathbf{S}$ is a $s$-trigonometrical set corresponding to the trigonometry on the Euclidean plane.

This example has natural generalizations both to $s$-trigonometries on the Euclidean spaces $\mathbf{R}^n$, $n \ge 3$, of group pairs $(\langle \mathbf{R}, +, < \rangle, \langle [0, 2\pi) \times [0, \pi)^{n-2}, + \rangle)$ and to $s$-trigonometry on the plane $({}^*\mathbf{R})^2$ of hyper-real numbers ${}^*\mathbf{R}$ of group pair $(\langle {}^*\mathbf{R}, +, < \rangle, \langle [0, 2\pi), + \rangle)$.

3. Consider an interpretation of the spherical trigonometry [7] on a sphere $S$ of radius $r$, in which diametrically opposite points are identified and diametrical circles with identified diametrically opposite points form the set of lines. Let $G_1$ be the group $\langle \mathbf{R}, +, < \rangle$, $G_2$ be the group $\langle [0, 2\pi), + \rangle$. Denote by $\mathbf{S}$ the set $GN\left(\left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \,\middle|\, 0 < a, b, c < \pi r,\ 0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi,\ a, b, c \text{ and } \alpha, \beta, \gamma \text{ are side lengthes and angle values of some triangle on } S \right\} \cup \mathbf{\Delta}_0(G_1, G_2)^s \right)$. Obviously $\mathbf{S}$ is a $s$-trigonometrical set, and if in its

connected $s$-trigonometry we factorize the group $(\mathbf{R},+,)$ by the group $(\{k\pi r \mid k\in\mathbf{Z}\},+)$, identify correspondent points on lines, we get the spherical trigonometry on $S$.

**4. Embeddings.** In this section we consider the main results concerning embeddings of $s$-polygonometries and to $s$-polygonometries.

The following theorem is analogous to [6, theorem 6].

**THEOREM 4.1.** *Let* $\mathrm{spm}=\mathrm{spm}(G_1,G_2,\mathcal{P})$ *and* $\mathrm{spm}'=\mathrm{spm}(G_1',G_2',\mathcal{P}')$ *are $s$-polygonometries, $G_1\le G_1'$ as ordered groups, $G_2\le G_2'$. The following conditions are equivalent:*

(1) *the $s$-polygonometry* spm *is embeddable to the $s$-polygonometry* spm$'$;

(2) *the set* $\mathbf{S}(\mathrm{spm})$ *is equal to the set of $(G_1,G_2)^s$-polygons of* $\mathbf{S}(\mathrm{spm}')$, *and the $s$-polygonometry* $\mathrm{spm}(G_1',G_2',\mathcal{P}')$ *has at least* $c(\mathrm{spm})$ *of pairwise disjoint $(G_1,G_2)$-$s$-subpolygonometries.*

**Sketch of proof.** (1) $\Rightarrow$ (2). By the embedding $f:\mathrm{spm}\hookrightarrow\mathrm{spm}'$ any $(G_1,G_2)^s$-polygon of $\mathbf{S}(\mathrm{spm})$ belongs to $\mathbf{S}(\mathrm{spm}')$. Conversely let be a $(G_1,G_2)^s$-polygon $S\in\mathbf{S}(\mathrm{spm}')\setminus\mathbf{S}(\mathrm{spm})$ correspondent to some polygon $(p_1',p_2',\dots,p_n')$ of spm$'$. Consider a polygon $(p_1,p_2,\dots,p_n)$ of spm such that $|p_i\,p_{i+1}|=|p_i'\,p_{i+1}|$, $i=1,\dots,n-1$, and $\angle(p_{i-1},p_i,p_{i+1})=\angle(p_{i-1}',p_i',p_{i+1}')$, $i=2,\dots,n-1$. Obviously there are no embeddings transforming $p_i$ to $p_i'$, $i=1,\dots,n$, that contradicts to the existence of the embedding $f$.

As the embedding transforms connected components of spm to pairwise disjoint $(G_1,G_2)$-$s$-subpolygonometries of spm$'$, the number of such disjoint $s$-polygonometries must be at least $c(\mathrm{spm})$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Using given conditions we can define an embedding $f:\mathrm{spm}\hookrightarrow\mathrm{spm}'$ like the definition of isomorphism from the proof of theorem 2.2. □

From the theorem 2.2 and 4.1 one has the following corollaries.

**COROLLARY 4.2.** *Any two mutually embeddable $s$-polygonometries are isomorphic.*

**COROLLARY 4.3.** *If $G_1$ is an ordered subgroup of $G_1'$, $G_2$ is a subgroup of $G_2'$ such that $\pi\in G_2$ and* spm$'$ *is a $s$-polygonometry of the group pair $(G_1',G_2')$, then there is a $(G_1,G_2)$-$s$-subpolygonometry* spm *of* spm$'$ *iff the set of $(G_1,G_2)^s$-polygons of* $GN(\mathbf{S}(\mathrm{spm}')\cup\mathbf{\Delta}_c(G_1',G_2')^s)$ *is $s$-polygonometrical.*

At the same time it's possible to extend $s$-polygonometries from pairs $(G_1,G_2)$ to pairs $(G_1',G_2')$.

**THEOREM 4.4.** *If $G_1$ is an ordered subgroup of a linearly ordered group $G_1'$, $G_2$ is a subgroup of $G_2'$, and* spm *is a $s$-polygonometry of the group pair $(G_1,G_2)$, then there is a $s$-polygonometry* spm$'$ *of the group pair $(G_1',G_2')$ such that* spm *is a $s$-subpolygonometry of* spm$'$.

**Sketch of proof.** One have to show that the set $GN(\mathbf{S}(\mathrm{spm})\cup\mathbf{\Delta}_c(G_1',G_2')^s)$ is a $s$-polygonometrical and it corresponds to a $s$-polygonometry spm$'$ satisfying the assertion of theorem. □

In the $s$-polygonometry $\mathrm{spm}(G_1,G_2,\mathcal{P})$ by *polygons hindering to passing of lines through points* or *$h_p$-polygons* we call polygons $(p_1,p_2,\dots,p_{2n})$, $n\ge2$, $p_n\ne p_{2n}$ corresponding to $(G_1,G_2)^s$-polygons as following

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta & \alpha_{n-1}^{-1} & \alpha_{n-2}^{-1} & \dots & \alpha_1^{-1} & \gamma \end{pmatrix},$$

$\beta,\gamma\ne e$, as well as their cyclic permutations. By *polygons hindering to intersecting of lines* or *$h_l$-polygons* we call polygons $(p_1,p_2,\dots,p_{2n})$, $n\ge2$, $l(p_1,p_{2n})\ne l(p_n,p_{n+1})$ corresponding to $(G_1,G_2)^s$-polygons as following

$$\begin{pmatrix} b & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n & c & a_n & \dots & a_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha_n^{-1} & \alpha_{n-1}^{-1} & \dots & \alpha_1^{-1} \end{pmatrix},$$

as well as their cyclic permutations.

**THEOREM 4.5.** 1. *A $s$-polygonometry* spm *is embeddable to a $s$-polygonometry in which any two points have a common line (accordingly any two lines have a nonempty intersection) iff* spm *doesn't have $h_p$-polygons ($h_l$-polygons).*

2. *A $s$-polygonometry* spm *is embeddable to a $s$-trigonometry on a projective plane iff* spm *doesn't have $h_p$-polygons and $h_l$-polygons.*

**Sketch of proof** uses the proof of [6, theorem 8]. Obviously if spm has $h_p$-polygons ($h_l$-polygons), then correspondent polygons have points (lines) such that they can not have a common line (point) in any expanded $s$-polygonometry.

Now suppose that $\mathrm{spm}=\mathrm{spm}(G_1,G_2,\mathcal{P})$ doesn't have $h_p$-polygons and w.l.o.g. it has a countable set of points. Consider the group $G^0=G_1$ and copies $G^i$ of the group $\mathbf{Z}$, $i\in\omega\setminus\{0\}$. Let $1_i$ be the unity of $G^i$, $i\ge1$, $\bar G_1$ be the direct sum $\sum\limits_{i\in\omega}G^i$ with the lexicographical order, $\bar G_2$ be the group

$$\langle G_2,\{g_n\mid n\in\omega\}\parallel R(G_2),\{\pi g_n=g_n\pi\mid n\in\omega\}\rangle,$$

where $R(G_2)$ is the set of definienses of $G_2$. For the convenience we shall right $\sum\limits_{i=0}^{l}G^i$ for every $\bar G_1$-subgroup of all functions $f$ such that $\mathrm{supp}(f)\subseteq\{1,\dots,l\}$, and $\langle G_2,g_0,\dots,g_m\rangle$ for every subgroup of $\bar G_2$ generated by $G_2$ and $g_0,\dots,g_m$.

Now let $\nu$ be an enumeration of the set

$$\left(\mathrm{Pos}(\bar G_1\cup\{0\}\right)\times\bar G_2\times\left(\mathrm{Pos}(\bar G_1)\cup\{0\}\right).$$

By induction we shall construct a chain of $s$-polygonometrical sets $\mathbf{S}_k$, $k\in\omega$, of group pairs $\left(\sum\limits_{i=0}^{l(k)}G^i,\langle G_2,g_0,\dots,g_{m(k)}\rangle\right)$ by the following conditions:

1) $\mathbf{S}_0=GN(\mathbf{S}(\mathrm{spm})\cup\mathbf{\Delta}_c(G_1,G_2)^s)$;

2) if $\mathbf{S}_k$ is already constructed and $\nu(k)=(a,\alpha,b)$, then

i) if $\mathbf{S}_k$ comprises some matrix $\begin{pmatrix} a & b & \cdot \\ \alpha & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$, we define $\mathbf{S}_{k+1}\rightleftharpoons\mathbf{S}_k$;

ii) if $\mathbf{S}_k$ doesn't comprise any matrix $\begin{pmatrix} a & b & \cdot \\ \alpha & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$, we consider the leasts $l\ge l(k)$ and $m\ge m(k)$ such that $a,b\in\sum\limits_{i=0}^{l}G^i$ and $\alpha\in\langle G_2,g_0,\dots,g_m\rangle$. Then we define $l(k+1)\rightleftharpoons l$,

$m(k+1) \rightleftharpoons m$ and

$$\mathbf{S}_{k+1} \rightleftharpoons \mathbf{S} = GN\left(\mathbf{S}_k \cup \mathbf{\Delta}_e\left(\sum_{i=0}^{l(k+1)} G^i, \langle G_2, g_0, \ldots, g_{m(k+1)}\rangle\right)^s\right),$$

if some matrix $\begin{pmatrix} a & b & \cdot \\ \alpha & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ belongs to $\mathbf{S}$. Otherwise we define $l(k+1) \rightleftharpoons l+1$, $m(k+1) \rightleftharpoons m+2$ and

$$\mathbf{S}_{k+1} \rightleftharpoons GN\left(\mathbf{S}_k \cup \left\{\begin{pmatrix} a & b & 1_{l+1} \\ \alpha & g_{m+1} & g_{m+2}\end{pmatrix}\right\} \cup\right.$$
$$\left. \cup \mathbf{\Delta}_e\left(\sum_{i=0}^{l(k+1)} G^i, \langle G_2, g_0, \ldots, g_{m(k+1)}\rangle\right)^s\right).$$

Now one can check that $\bigcup_{k\in\omega} \mathbf{S}_k$ is a $s$-polygonometrical set defining a $s$-polygonometry comprising spm and such that any two points have a common line.

If spm doesn't have $h_l$-polygons, using the dual construction we embeds spm to a $s$-polygonometry in which any two lines have a common point.

Now combining given and dual constructions we get that any $s$-polygonometry without $h_p$- and $h_l$-polygons is embeddable to a $s$-polygonometry on a projective plane. □

Analogous to [8, theorem 4.7] the following theorem asserts that any two $s$-polygonometries are compatible.

**THEOREM 4.6.** *For any two $s$-polygonometries* spm *and* spm′ *there is a $s$-polygonometry* spm″ *such that* spm *and* spm′ *are embeddable to* spm″.

**Sketch of proof.** Let spm be $\mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$, spm′ be $\mathrm{spm}(G'_1, G'_2, \mathcal{P}')$. One can check that for the lexicographically ordered group $\bar{G}_1 = G_1 \oplus G'_1$ and for the group $\bar{G}_2 = G_2 *_{\{e,e\}} G'_2$ the set $GN(\mathbf{S}(\mathrm{spm}) \cup \mathbf{S}(\mathrm{spm}') \cup \mathbf{\Delta}_e(\bar{G}_1, \bar{G}_2)^s)$ is $s$-polygonometrical and spm and spm′ are embeddable to a correspondent $s$-polygonometry spm″ having $c(\mathrm{spm}) + c(\mathrm{spm}')$ connected components. □

An undirected coloured graph $\Gamma = \langle M, \langle R_i \mid i \in I\rangle\rangle$ is said to be *embeddable* to a $s$-polygonometry $\mathrm{spm}(G_1, G_2, \langle P, L, \in\rangle)$, if there are injections $f : M \to P$, $\varphi : I \to G_1$, such that for any $a, b \in M$ the following condition holds:

$$(a, b) \in R_i \Leftrightarrow f(b) = f(a)\varphi(i) \text{ on some line.}$$

Analogously to [9, theorem 3.1] the following theorem witnesses that the classification problem for $s$-polygonometries is difficult enough.

**THEOREM 4.7.** *Let $\Gamma = \langle M, \langle R_i \mid i \in I\rangle\rangle$ be an edge-coloured undirected graph without loops. The following conditions are equivalent:*

1) *$\Gamma$ is embeddable to some $s$-polygonometry;*

2) *$\Gamma$ is embeddable to some $s$-trigonometry of the group pair $(G_1, G_2)$, where $G_1$ is a lexicographically ordered direct sum of $\lambda = |\Gamma| + \omega$ copies of the group $\mathbf{Z}$, $G_2$ is the direct product of the group $\mathbf{Z}_2$ and of a free $\lambda$-generated group $F_\lambda$;*

3) *any edge $[a, b]$ from $\Gamma$ has exactly one colour.*

**Sketch of proof.** The implications $(2) \Rightarrow (1)$ and $(1) \Rightarrow (3)$ are obvious.



$(3) \Rightarrow (2)$. W.l.o.g. we shall suppose that $\Gamma$ is countable graph with the set of edges $\{u_n \mid n \in \omega\}$ such that for any $n \in \omega$ graphs $\Gamma_n$ consisting of edges $u_0, \ldots, u_n$ are connected. Bring the copy $G^k$ of linearly ordered group $\mathbf{Z}$ in correspondence with any edge $u_n$ of colour $k$. By induction on $n$ we shall construct a $s$-polygonometry spm such that $\Gamma$ is embeddable to spm.

Let $k_0$ be the colour of $u_0$. We define $\mathrm{spm}_0 \rightleftharpoons \mathrm{spm}_t(G^{k_0}, \mathbf{Z}_2, \mathcal{P}_0)$. Mark a pair of points $p_1^0$ and $p_2^0$ such that $|p_1^0 p_2^0| = 1_{G^{k_0}}$ and bring it in correspondence with $u_0$. Now suppose that a $s$-polygonometry $\mathrm{spm}_{n-1}$ of group pair $(\tilde{G}_1^{n-1}, \tilde{G}_2^{n-1})$ on a pseudoplane $\mathcal{P}_{n-1}$ is already constructed, and there is an embedding $\varphi_{n-1}$ of the graph $\Gamma_{n-1}$ to $\mathrm{spm}_{n-1}$. If $u_n$ corresponds to a pair of points $p_1$ and $p_2$ from $\Gamma_{n-1}$ and the $u_n$-colour group $G^k$ is in $\tilde{G}_1^{n-1}$ we define $\tilde{G}_1^n \rightleftharpoons \tilde{G}_1^{n-1}$, add to $\tilde{G}_2^{n-1}$ new free generators $g$ and $g'$ and add to the set $\mathbf{S}(\mathrm{spm}_{n-1})$ a $(\tilde{G}_1^n, \tilde{G}_2^n)^s$-polygon comprising the image of $u_n$ with new side length $1_{G^k}$ and new angle values $g$ and $g'$. Thus we get a $s$-polygonometry $\mathrm{spm}_n$ of group pair $(\tilde{G}_1^n, \tilde{G}_2^n)$. If $u_n$ has a new colour $k$, we repeat this process adding $G^k$ to $\tilde{G}_1^{n-1}$. Thus $\varphi_n = \varphi_{n-1}$ is an embedding of $\Gamma_n$ to $\mathrm{spm}_n$.

If $u_n = \{x, y\}$ has only one point $x$ in $\Gamma_{n-1}$, we add the group $G^k$ to the group $\tilde{G}_1^{n-1}$ (if $u_n$ has a new colour $k$) and add a new free generator $g$ to $\tilde{G}_2^{n-1}$ to get the group pair $(\tilde{G}_1^n, \tilde{G}_2^n)$. Then we define a $s$-polygonometry $\mathrm{spm}_n$ adding to $\mathbf{S}(\mathrm{spm}_{n-1})$ the set $\mathbf{\Delta}_e(\tilde{G}_1^n, \tilde{G}_2^n)^s$. By the image of $u_n$ we take any set $\{\varphi_{n-1}(x), p\}$ with a new point $p$ such that $|\varphi_{n-1}(x)\,p| = 1_{G^k}$, and $\varphi_n \rightleftharpoons \varphi_{n-1} \cup \{(x, p)\}$.

One can check that $\Gamma$ is embeddable to a $s$-polygonometry spm with $\mathbf{S}(\mathrm{spm}) = \bigcup_{i\in\omega} \mathbf{S}(\mathrm{spm}_n)$. □

**COROLLARY 4.8.** *Any undirected graph without loops is embeddable to some $s$-trigonometry.*

## 5. Homomorphisms and factor-$s$-polygonometries.

Let $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$, $\mathrm{spm}' = \mathrm{spm}(G'_1, G'_2, \mathcal{P}')$ be some $s$-polygonometries, $\mathcal{P} = \langle P, L, \in\rangle$, $\mathcal{P}' = \langle P', L', \in\rangle$, $\varphi_i : G_i \to G'_i$ be group homomorphisms, $i = 1, 2$, $\varphi_1(\mathrm{Pos}(G_1)) \subseteq \mathrm{Pos}(G'_1)$, $\varphi_2(\pi_{G_2}) = \pi_{G'_2}$. A function $f : P \to P'$ is said to be a *homomorphism* of the $s$-polygonometry spm to the $s$-polygonometry spm′ (denoted by $f : \mathrm{spm} \to \mathrm{spm}'$), if the following conditions are satisfied:

1) for any line $l \in L$ there is a line $l' \in L'$, such that $f(l) \subseteq l'$;

2) if $p_2 \in p_1 g_1$ on the line $l$ in the $s$-polygonometry spm, then $f(p_2) \in f(p_1) \cdot \varphi_1(g_1)$ on the line $l'$ concluding the set $f(l)$ in the $s$-polygonometry spm′;

3) if $p_2 = p_1 g_2$ on the set of points of lines comprising some intersection point $p$ in the $s$-polygonometry spm, then $f(p_2) = f(p_1)\varphi_2(g_2)$ on the set of points of lines comprising the point $f(p)$ in spm′.

If $\varphi_1, \varphi_2$ are group isomorphisms and $f$ is a bijection, the homomorphism $f$ is said to be an *isomorphism* of the $s$-polygonometries and will be denoted by $f : \mathrm{spm} \xrightarrow{\sim} \mathrm{spm}'$.

Any homomorphism $f : \mathrm{spm} \to \mathrm{spm}'$ induces a $s$-polygonometry of the pair $(\varphi_1(G_1), \varphi_2(G_2))$ on a set $f(P)$. This $s$-polygonometry is said to be the *homomorphic image* of the $s$-polygonometry spm by the homomorphism $f$ and it will be denoted by $f(\mathrm{spm})$.

An equivalence relation $\theta$ on the set $P$ of the $s$-polygonometry $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \langle P, L, \in\rangle)$ is said to be a *congruence*, if there is a convex normal subgroup $H_1 \trianglelefteq G_1$, a normal subgroup $H_2 \trianglelefteq G_2$ and a $s$-polygonometry

$\mathrm{spm}/\theta \rightleftharpoons \mathrm{spm}(G_1/H_1, G_2/H_2, \langle P/\theta, \{l/\theta \mid l \in L\}, \in\rangle)$, such that if a $(G_1,G_2)^s$-polygon $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ belongs to $\mathbf{S}(\mathrm{spm})$, then the $(G_1/H_1, G_2/H_2)^s$-polygon $\begin{pmatrix} a_1H_1 & a_2H_1 & \dots & a_nH_1 \\ \alpha_1H_2 & \alpha_2H_2 & \dots & \alpha_nH_2 \end{pmatrix}$ belongs to $GN(\mathbf{S}(\mathrm{spm}/\theta) \cup \mathbf{\Delta}_e(G_1/H_1, G_2/H_2)^s)$.

Notice that a $s$-polygonometry $\mathrm{spm}/\theta$ can be not unique. For exapmle, if a $s$-polygonometry spm doesn't comprise a line $l(p_1,p_2)$, then the line $l(p_1/\theta, p_2/\theta)$ in $\mathrm{spm}/\theta$ can exist. Also by the $\theta$-identification of points $p_1, p_n$, which don't have a line $l(p_1,p_n)$ and are the ends of open polygon $(p_1,p_2,\dots,p_n)$, the angle value $\angle(p_{n-1}/\theta, p_1/\theta, p_2/\theta))$ need not be unique.

Any $s$-polygonometry $\mathrm{spm}/\theta$ is said to be a *factor-s-polygonometry* of the $s$-polygonometry *spm* by the congruence $\theta$. A homomorphism $f : \mathrm{spm} \to \mathrm{spm}/\theta$, mapping any point of the $s$-polygonometry spm to the $\theta$-class comprising it, is said to be a *natural homomorphism*. If $f : \mathrm{spm} \to \mathrm{spm}'$ is a homomorphism, the relation $\mathrm{Ker}(f) \rightleftharpoons \{\langle p_1,p_1\rangle \mid f(p_1) = f(p_2)\}$ is a congruence of the $s$-polygonometry spm and it is said to be the *kernel* of the homomorphism $f$.

By the theorem on homomorphisms for ordered groups we get

**THEOREM 5.1.** (The theorem on homomorphisms) *If $f : \mathrm{spm} \to \mathrm{spm}'$ is a homomorphism, then there is an isomorphism $f'$ of the s-polygonometry $f(\mathrm{spm})$ onto some s-polygonometry $\mathrm{spm}/\mathrm{Ker}(f)$, such that $ff'$ is a natural homomorphism.*

Let $\alpha$ be an element of the angle group $G_2$, $K = (p_1,p_2,\dots,p_n)$ be an open polygon in the $s$-polygonometry $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1,G_2,\mathcal{P})$,

$$\mathbf{S} = GN\Big(\mathbf{S}(pm) \cup \mathbf{\Delta}_e(G_1,G_2)^s \cup$$

$$\cup \left\{\begin{pmatrix} |p_1\hat{\ }p_2| & |p_2\hat{\ }p_3| & \dots & |p_{n-2}\hat{\ }p_{n-1}| & |p_{n-1}\hat{\ }p_n| \\ \angle(p_1,p_2,p_3) & \angle(p_2,p_3,p_4) & \dots & \angle(p_{n-2},p_{n-1},p_n) & \alpha \end{pmatrix}\right\}\Big)$$

be a $s$-polygonometrical set. Denote by $\mathrm{VI}_{\alpha,K}(\mathrm{spm})$ the connected $s$-polygonometry of the group pair $(G_1,G_2)$ correspondent to $\mathbf{S}$. The operation $\mathrm{VI}_{\alpha,K}$ is said to be the *$\alpha$-identification* of points $p_1, p_n$ by the open polygon $K$.

Let $AK = \{(\alpha_i, K_i) \mid i \in \lambda\}$ be a family of pairs for which there are $s$-polygonometries $\mathrm{VI}_{\alpha_i,K_i}(\mathrm{spm})$, $i \in \lambda$, and $GN(\bigcup_{i\in\lambda} \mathbf{S}(\mathrm{VI}_{\alpha_i,K_i}(\mathrm{spm})) \cup \mathbf{\Delta}_e(G_1,G_2)^s)$ is a $s$-polygonometrical set. Denote by $\mathrm{VI}_{AK}(\mathrm{spm})$ a connected $s$-polygonometry correspondent to this set.

**PROPOSITON 5.2.** *Any connected s-polygonometry* spm *of a group pair $(G_1,G_2)$ is isomorphic to a s-polygonometry $\mathrm{VI}_{AK}(\mathrm{spm}_t)$, where $\mathrm{spm}_t = \mathrm{spm}_t(G_1,G_2,\mathcal{P}))$ is a tree s-polygonometry.*

**Proof** is analogous to the proof of [9, proposition 1.3]. Consider the set $AK$ of all possible pairs $(\alpha, K)$, $K = (p_1,p_2,\dots,p_n)$, of $\mathrm{spm}_t$ such that some $(G_1,G_2)^s$-polygon

$$\begin{pmatrix} |p_1\hat{\ }p_2| & |p_2\hat{\ }p_3| & \dots & |p_{n-2}\hat{\ }p_{n-1}| & |p_{n-1}\hat{\ }p_n| \\ \angle(p_1,p_2,p_3) & \angle(p_2,p_3,p_4) & \dots & \angle(p_{n-2},p_{n-1},p_n) & \alpha \end{pmatrix}$$

belongs to $\mathbf{S}(\mathrm{spm})$. Obviously, $\mathrm{spm} \simeq \mathrm{VI}_{AK}(\mathrm{spm}_t)$. $\square$

Denote by $\mathbf{Con}(\mathrm{spm})$ the set of all congruences of a connected $s$-polygonometry $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1,G_2,\mathcal{P})$, by $\mathbf{Con}_{\mathrm{VI}}(\mathrm{spm})$ the set of all congruences of spm, whose factor doesn't



change the group pair of the $s$-polygonometry, by $\mathbf{Con}_F(\mathrm{spm})$ the set of all minimal congruences $\theta \in \mathbf{Con}(\mathrm{spm})$ among congruences defining factor-$s$-polygonometries $\mathrm{pm}/\theta$ of fixed group pairs $(G_1/H_1, G_2/H_2)$. Notice that if $\theta$ belongs to $\mathbf{Con}_F(\mathrm{spm})$, then the factor-$s$-polygonometry $\mathrm{spm}/\theta$ is uniquely defined by the $s$-polygonometrical set

$$GN\left(\left\{\begin{pmatrix} a_1H_1 & \dots & a_nH_1 \\ \alpha_1H_2 & \dots & \alpha_nH_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbf{S}(\mathrm{pm})\right\} \cup\right.$$

$$\left.\mathbf{\Delta}_e(G_1/H_1, G_2/H_2)^s\right).$$

Denote this $s$-polygonometry by $\mathrm{spm}/(H_1,H_2)$.

**PROPOSITION 5.3.** *For any congruence $\theta \in \mathbf{Con}(\mathrm{spm})$ and for any factor-s-polygonometry $\mathrm{spm}/\theta$ there are unique congruences $\theta_F \in \mathbf{Con}_F(\mathrm{spm})$ and $\theta^* \in \mathbf{Con}_{\mathrm{VI}}(\mathrm{spm}/\theta_F)$ such that the factor-s-polygonometry $\mathrm{spm}/\theta$ is isomorphic to a factor-s-polygonometry $(\mathrm{spm}/(H_1,H_2))/\theta^*$, where $\mathrm{spm}/(H_1,H_2)$ is the factor-s-polygonometry of s-polygonometry* spm *by the congruence $\theta_F$.*

**COROLLARY 5.4.** *Any connected s-polygonometry having $\lambda$ points is isomorphic to a factor-s-polygonometry of a tree s-polygonometry $spm_t(A, \mathbf{Z}_2 \times F, \mathcal{P})$, where $A$ is a free Abelian linearly ordered group with $\max(\lambda,\omega)$ free generators, $F$ is a free group with $\max(\lambda,\omega)$ free generators.*

**6. Partial algebras associated with group $s$-polygonometries.** Let $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1,G_2,\mathcal{P})$ be some $s$-polygonometry. From the fact that in $\mathbf{S}_3(\mathrm{spm})$ parameters of any $(G_1,G_2)^s$-triangle $\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ are uniquely defined by any three defining parameters the following conditions produce 3-ary partial functions $f^3_{ra} : X_{ra} \to G_2$, $f^3_{ms} : X_{ms} \to \mathrm{Pos}(G_1)$, $f^3_{la} : X_{la} \to G_2$, $f^3_{rs} : X_{rs} \to \mathrm{Pos}(G_1)$, $f^3_{ma} : X_{ms} \to G_2$, $f^3_{ls} : X_{ls} \to \mathrm{Pos}(G_1)$, $X_{ra}, X_{ma}, X_{la} \subseteq \mathrm{Pos}(G_1) \times G_2 \times \mathrm{Pos}(G_1)$, $X_{rs}, X_{ms}, X_{ls} \subseteq G_2 \times \mathrm{Pos}(G_1) \times G_2$:

$$\begin{array}{lll} f^3_{ra}(a,\alpha,b) = \beta, & f^3_{ms}(a,\alpha,b) = c, & f^3_{ls}(a,\alpha,b) = \gamma, \\ f^3_{rs}(\alpha,b,\beta) = c, & f^3_{ma}(\alpha,b,\beta) = \gamma, & f^3_{ls}(\alpha,b,\beta) = a. \end{array}$$

Notice that if $\mathcal{P}$ is a projective plane, then the domains of the maps are equal to $\mathrm{Pos}(G_1) \times G_2 \times \mathrm{Pos}(G_1)$ and $G_2 \times \mathrm{Pos}(G_1) \times G_2$ accordingly.

In any $s$-polygonometry $(G_1,G_2)^s$-triangles with zero or unit parameters form the set $\mathbf{\Delta}_e(G_1,G_2)^s$. So any 4-tuple of sequential parameters of such $(G_1,G_2)^s$-triangles is defining. Two remainig parameters are defined by 4-ary partial functions $f^4_{rs}, f^4_{ls}, f^4_{ra}, f^4_{la}$ by the conditions:

$$\begin{array}{l}
f^4_{rs}(g_1,e,g_1,\pi g_2) = 0,\ f^4_{ls}(g_1,e,g_1,\pi g_2) = g_2^{-1}, \\
f^4_{rs}(g_1,\pi g_2,0,g_2^{-1}) = g_1,\ f^4_{ls}(g_1,\pi g_2,0,g_2^{-1}) = e, \\
f^4_{rs}(0,g_2^{-1},g_1,e) = g_1,\ f^4_{ls}(0,g_2^{-1},g_1,e) = \pi g_2, \\
f^4_{ra}(e,g_1,\pi g_2,0) = g_2^{-1},\ f^4_{la}(e,g_1,\pi g_2,e) = g_1, \\
f^4_{ra}(\pi g_2,0,g_2^{-1},g_1) = e,\ f^4_{la}(\pi g_2,e,g_2^{-1},g_1) = g_1, \\
f^4_{ra}(g_2^{-1},g_1,e,g_1) = \pi g_2,\ f^4_{la}(g_2^{-1},g_1,e,g_1) = 0, \\
f^4_{rs}(0,\pi g_2,0,g_2') = 0,\ f^4_{ls}(0,\pi g_2,0,g_2') = (g_2')^{-1}g_2^{-1}, \\
f^4_{ra}(\pi g_2,0,g_2',0) = (g_2')^{-1}g_2^{-1},\ f^4_{la}(\pi g_2,0,g_2',0) = 0.
\end{array}$$

Supplement these functions using the following conditions:

$$\begin{aligned}
&f^4_{rs}(a,\alpha,b,f^3_{ra}(a,\alpha,b)) = f^3_{ms}(a,\alpha,b),\\
&f^4_{ls}(a,\alpha,b,f^3_{ra}(a,\alpha,b)) = f^3_{la}(a,\alpha,b),\\
&f^4_{rs}(\alpha,b,\beta,f^3_{rs}(\alpha,b,\beta)) = f^3_{ma}(\alpha,b,\beta),\\
&f^4_{ls}(\alpha,b,\beta,f^3_{rs}(\alpha,b,\beta)) = f^3_{la}(\alpha,b,\beta).
\end{aligned}$$

Analogously for any $n > 3$ define $(2n-3)$-ary partial functions $f^{2n-3}_{ra}$, $f^{2n-3}_{ms}$, $f^{2n-3}_{la}$, $f^{2n-3}_{rs}$, $f^{2n-3}_{ma}$, $f^{2n-3}_{ls}$, which for $(G_1,G_2)^s$-$n$-gons $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$ of $\mathbf{S}_n(\mathrm{spm})$ satisfy the following conditions:

$$\begin{aligned}
&f^{2n-3}_{ra}(a_1,\alpha_1,\dots,a_{n-2},\alpha_{n-2},a_{n-1}) = \alpha_{n-1},\\
&f^{2n-3}_{ms}(a_1,\alpha_1,\dots,a_{n-2},\alpha_{n-2},a_{n-1}) = a_n,\\
&f^{2n-3}_{la}(a_1,\alpha_1,\dots,a_{n-2},\alpha_{n-2},a_{n-1}) = \alpha_n,\\
&f^{2n-3}_{rs}(\alpha_1,a_2,\dots,\alpha_{n-2},a_{n-1},\alpha_{n-1}) = a_n,\\
&f^{2n-3}_{ma}(\alpha_1,a_2,\dots,\alpha_{n-2},a_{n-1},\alpha_{n-1}) = \alpha_n,\\
&f^{2n-3}_{ls}(\alpha_1,a_2,\dots,\alpha_{n-2},a_{n-1},\alpha_{n-1}) = a_1.
\end{aligned}$$

Define $(2n-2)$-ary partial functions $f^{2n-2}_{rs}$, $f^{2n-2}_{la}$, $f^{2n-2}_{ra}$, $f^{2n-2}_{ls}$, $(n > 3)$, which for $(G_1,G_2)^s$-$n$-gons $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$ of $GN(\mathbf{S}(\mathrm{spm})\cup\mathbf{\Delta}_e(G_1,G_2)^s)$ satisfy the following conditions:

$$\begin{aligned}
&f^{2n-2}_{rs}(a_1,\alpha_1,\dots,a_{n-1},\alpha_{n-1}) = a_n,\ f^{2n-2}_{la}(a_1,\alpha_1,\dots,a_{n-1},\alpha_{n-1}) = \alpha_n,\\
&f^{2n-2}_{ra}(\alpha_1,a_2,\dots,\alpha_{n-1},a_n) = \alpha_n,\ f^{2n-2}_{ls}(\alpha_1,a_2,\dots,\alpha_{n-1},a_n) = a_1.
\end{aligned}$$

Denote by $\Sigma$ the language consisting of the group operation symbols $+_1$, $-_1$, $\cdot_2$, $(\cdot)^{-1}_2$, the constant symbols 0 and $e$ and the predicate symbols $f^{2n-3}_{ra}$, $f^{2n-3}_{ms}$, $f^{2n-3}_{la}$, $f^{2n-3}_{rs}$, $f^{2n-3}_{ma}$, $f^{2n-3}_{ls}$, $f^{2n-2}_{rs}$, $f^{2n-2}_{la}$, $f^{2n-2}_{ra}$, $f^{2n-2}_{ls}$, $n \geq 3$. The partial algebra $\mathcal{A} = \langle \mathrm{Pos}(G_1)\cup\{0\}\cup G_2, \Sigma\rangle$ constructed above is said to be the *s-polygonometrical algebra* over the group pair $(G_1,G_2)$. The s-polygonometrical algebra $\mathcal{A}$ correspondent to the s-polygonometry spm will be denoted by $\mathcal{A}(\mathrm{spm})$.

By the theorems 2.1 and 2.2 analogously to [10, theorem 2.3] we get the following:

**THEOREM 6.1.** *The following conditions are equivalent:*
(1) $\mathrm{spm}(G_1,G_2,\mathcal{P}) \simeq \mathrm{spm}(G_1,G_2,\mathcal{P}')$;
(2) $\mathcal{A}(\mathrm{spm}(G_1,G_2,\mathcal{P})) = \mathcal{A}(\mathrm{spm}(G_1,G_2,\mathcal{P}'))$ *and* $c(\mathcal{P}) = c(\mathcal{P}')$.

Two theories $T_0$ and $T_1$ of languages $\Sigma_0$ and $\Sigma_1$ accordingly are said to be *like*, if for any model $M_i \models T_i$, $i = 0,1$, there are formulas of the theory $T_i$ defining in $M_i$ predicates, functions and constants of the language $\Sigma_{1-i}$, such that the correspondent algebraic system of the language $\Sigma_{1-i}$ is a model of $T_{1-i}$.

**THEOREM 6.2.** 1. *The class of all s-polygonometrical algebras is axiomatizable.*
2. *The class of all s-polygonometrical algebras over projective planes is axiomatizable and its theory is like to a finitely axiomatizable theory.*

**Proof** is analogous to the proofs of [10, theorem 3.7] and of the assertion in [10, section 1]. □



Let $\mathcal{A}$ be a s-polygonometrical algebra with the universe $\mathrm{Pos}(G_1)\cup\{0\}\cup G_2$. A subalgebra $\mathcal{A}'$ of $\mathcal{A}$ is said to be *closed*, if $\mathcal{A}'$ is defined on a set $\mathrm{Pos}(G_1')\cup\{0\}\cup G_2'$, where $G_1'$ is some linearly ordered subgroup of $G_1$ with the order induced by $G_1$, $G_2'$ is some subgroup of $G_2$ comprising the element $\pi$ and $\mathrm{dom}(f^{2n-3}_\xi)_{\mathcal{A}'} = \mathrm{dom}(f^{2n-3}_\xi)_{\mathcal{A}}\cap((\mathrm{Pos}(G_1')\cup\{0\})\times G_2'\times\dots\times(\mathrm{Pos}(G_1')\cup\{0\}))$, $\xi\in\{ra,ms,la\}$, $\mathrm{dom}(f^{2n-3}_\xi)_{\mathcal{A}'} = \mathrm{dom}(f^{2n-3}_\xi)_{\mathcal{A}}\cap(G_2'\times(\mathrm{Pos}(G_1')\cup\{0\})\times\dots\times G_2')$, $\xi\in\{rs,ma,ls\}$, $\mathrm{dom}(f^{2n-2}_\eta)_{\mathcal{A}'} = \mathrm{dom}(f^{2n-2}_\eta)_{\mathcal{A}}\cap((\mathrm{Pos}(G_1')\cup\{0\})\times G_2'\times\dots\times(\mathrm{Pos}(G_1')\cup\{0\})\times G_2')$, $\eta\in\{rs,la\}$, $\mathrm{dom}(f^{2n-2}_\eta)_{\mathcal{A}'} = \mathrm{dom}(f^{2n-2}_\eta)_{\mathcal{A}}\cap(G_2'\times(\mathrm{Pos}(G_1')\cup\{0\})\times\dots\times G_2'\times(\mathrm{Pos}(G_1')\cup\{0\}))$, $\eta\in\{ra,ls\}$. If $\mathcal{A}'$ is a closed subalgebra of an algebra $\mathcal{A}(\mathrm{spm})$ of a connected s-polygonometry spm, then there is a connected s-subpolygonometry spm$'$ of the s-polygonometry spm, such that $\mathcal{A}(\mathrm{spm}') = \mathcal{A}'$.

Let $G_1'$ be a linearly ordered factor group of the linerly ordered group $G_1$ by a convex subgroup $H_1$ with the order induced by $G_1$, $G_2'$ be a factor group of the group $G_2$ by a subgroup $H_2$ with $\pi \notin H_2$. $\mathcal{A}$ is a s-polygonometrical algebra with the universe $\mathrm{Pos}(G_1)\cup\{0\}\cup G_2$. Suppose that the following conditions are satisfied:

1) if $f^{2n-3}_{ra}(a^1_1,\alpha^1_1,\dots,a^1_{n-1}) = \alpha^1_{n-1}$, $a^1_1 - a^2_1 \in H_1$, $\alpha^1_1\cdot(\alpha^2_1)^{-1}\in H_2,\dots,a^1_{n-1}-a^2_{n-1}\in H_1$ and the equality $f^{2n-3}_{ra}(a^2_1,\alpha^2_1,\dots,a^2_{n-1}) = \alpha^2_{n-1}$ is defined, then $\alpha^1_{n-1}\cdot(\alpha^2_{n-1})^{-1}\in H_2$, $f^{2n-3}_{ms}(a^1_1,\alpha^1_1,\dots,a^1_{n-1}) - f^{2n-3}_{ms}(a^2_1,\alpha^2_1,\dots,a^2_{n-1})\in H_1$, $f^{2n-3}_{la}(a^1_1,\alpha^1_1,\dots,a^1_{n-1})\cdot(f^{2n-3}_{la}(a^2_1,\alpha^2_1,\dots,a^2_{n-1}))^{-1}\in H_2$;

2) if $f^{2n-3}_{rs}(\alpha^1_1,a^1_2\dots,\alpha^1_{n-1}) = a^1_n$, $\alpha^1_1\cdot(\alpha^2_1)^{-1}\in H_2$, $a^1_2 - a^2_2\in H_1,\dots,\alpha^1_n\cdot(\alpha^2_n)^{-1}\in H_2$ and the equality $f^{2n-3}_{rs}(\alpha^2_1,a^2_2,\dots,\alpha^2_{n-1}) = a^2_n$ is defined, then $a^1_n - a^2_n\in H_1$, $f^{2n-3}_{ma}(\alpha^1_1,a^1_2,\dots,\alpha^1_{n-1})\cdot f^{2n-3}_{ma}(\alpha^2_1,a^2_2,\dots,\alpha^2_{n-1}))^{-1}\in H_2$, $f^{2n-3}_{ls}(\alpha^1_1,a^1_2,\dots,\alpha^1_{n-1}) - f^{2n-3}_{ls}(\alpha^2_1,a^2_2,\dots,\alpha^2_{n-1})\in H_1$.

Then any partial algebra $\mathcal{A}'$ with the universe $\mathrm{Pos}(G_1')\cup\{0\}\cup G_2'$ and correspondent operations $f^{2n-3}_\xi$ and $f^{2n-2}_\eta$ on the cosets is said to be a *factor-algebra* of the algebra $\mathcal{A}$ by the group pair $(H_1,H_2)$. Any factor-algebra $\mathcal{A}'$ corresponds to some factor-s-polygonometry of the given s-polygonometry spm.

Let $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1,G_2,\mathcal{P})$ and $\mathrm{spm}' = \mathrm{spm}(G_1',G_2',\mathcal{P}')$ be connected s-polygonometries. By a *free product* of the s-polygonometries spm and spm$'$ we call a connected s-polygonometry of the group pair $(G_1\oplus G_1', G_2 *_{\mathbf{Z}_2} G_2')$ (where $G_1\oplus G_1'$ is the lexicographically ordered group, $\mathbf{Z}_2 = \{e,\pi\}$) generated by the polygonometrical set $GN(\mathbf{S}(\mathrm{spm})\cup\mathbf{S}(\mathrm{spm}')\cup\mathbf{\Delta}_e(G_1\oplus G_1', G_2 *_{\mathbf{Z}_2} G_2'))$.

**PROPOSITION 6.3.** 1. *The class of all polygonometrical algebras with any algebra $\mathcal{A}$ contains any its closed subalgebra and its factor-algebra.*

2. *The class of all polygonometrical algebras is closed under intersections, under free products and is not closed under Cartesian products.*

**Proof** is immediate. We have only to note that the square of any s-polygonometrical algebra with $|G_1| > 1$ is not a s-polygonometrical algebra. □

Denote by $\mathcal{K}^{\mathrm{spm}}_{\mathrm{hom}}$ (accordingly $\mathcal{K}^{\mathrm{spa}}_{\mathrm{hom}}$) the homomorphism category with all connected group s-polygonometries (with all s-polygonometrical algebras) as its objects, and with homomorphisms of one s-polygonometry (s-polygonometrical algebra) to another as its morphisms. Denote by $\mathcal{A}$ the map that compares to each connected s-polygonometry spm its s-polygonometrical algebra $\mathcal{A}(\mathrm{spm})$.

As [10, proposition 5.1] we get the following:

**THEOREM 6.4.** 1. *The map $\mathcal{A}$ is a functor from the category $\mathcal{K}^{\mathrm{spm}}_{\mathrm{hom}}$ to the category $\mathcal{K}^{\mathrm{spa}}_{\mathrm{hom}}$.*

2. *If* spm *and* spm′ *are connected s-polygonometries, $\bar{\varphi} : \mathcal{A}(\mathrm{spm}) \to \mathcal{A}(\mathrm{spm}')$ is a homomorphism, then $\bar{\varphi} = \mathcal{A}(\varphi)$ for some homomorphism $\varphi : \mathrm{spm} \to \mathrm{spm}'$.*

3. *If $\varphi : \mathrm{spm} \to \mathrm{spm}'$, $\psi : \mathrm{spm} \to \mathrm{spm}'$ are homomorphisms of the category $\mathcal{K}^{\mathrm{spm}}_{\mathrm{hom}}$ and $\mathcal{A}(\varphi) = \mathcal{A}(\psi)$, then $\psi = \chi \cdot \varphi$ for some automorphism $\chi : \mathrm{spm}' \tilde{\to} \mathrm{spm}'$.*

**7. Automorphism groups of *s*-polygonometries.** The following theorems analogously to [9, theorem 5.4 and 6.1] describe automorphism groups of given *s*-polygonometries and the class of automorphism groups of *s*-polygonometries.

**THEOREM 7.1.** *If $GN(\mathbf{S})$ is a s-polygonometrical set defining a s-polygonometry* $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ *by some set $\mathbf{S}$ of $(G_1, G_2)^s$-polygons, then the automorphism group* Aut(spm) *of the s-polygonometry* spm *is isomorphic to a Cartesian wreath product of the group* $G_0 = \left\langle \mathrm{Pos}(G_1) \cup \{0\}, G_2 \parallel R_2, \{0 = \pi\}, \left\{ a_1\alpha_1 \ldots a_n\alpha_n = e \,\middle|\, \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbf{S} \cup \mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^s \right\} \right\rangle$ *with a symmetrical group $\mathrm{S}_{c(\mathrm{spm})}$ of a $c(\mathrm{spm})$-element set, where $R_2$ is the set of definienses of $G_2$. If $c(\mathrm{spm}) = 1$, then the subgroup*

$$\bar{G}_1 = \{e, \pi\} \cup \mathrm{Pos}(G_1) \,\dot{\cup}\, \pi\mathrm{Pos}(G_1) \,\dot{\cup}\, \mathrm{Pos}(G_1)\pi \,\dot{\cup}\, \pi\mathrm{Pos}(G_1)\pi$$

*(accordingly $G_2$) is isomorphic to any line (point) stabilizer.*

**Sketch of proof.** In consecutive order we show the following.

1 W.l.o.g. $c(\mathrm{spm}) = 1$ and it is enough to prove that $\mathrm{Aut}(\mathrm{spm}) \simeq G_0$.

2. Any automorphism $f \in \mathrm{Aut}(\mathrm{spm})$ is uniquely defined by arbitrary pairs $(p_1, p_2)$ and $(p_1', p_2')$ such that there are lines $l(p_1, p_2)$, $l(p_1', p_2')$, and $f(p_1) = p_1'$, $f(p_2) = p_2'$.

3. The group $\bar{G}_1$ is isomorphic to line stabilizers and the group $G_2$ is isomorphic to point stabilizers. Here for given pair of points $(p_1, p_2)$ with the line $l = l(p_1, p_2)$ the isomorphism $\bar{G}_1 \simeq \mathrm{St}_l$ can be defined by the following conditions. The element $\pi$ corresponds to the automorphism $f \in \mathrm{St}_l$ such that $f(p_1) = p_1$, $f(p_2) \neq p_2$ ($f$ is the $\pi$-turn fixing the point $p_1$); the element $g_1 \in \mathrm{Pos}(G_1)$ corresponds to the automorphism $f \in \mathrm{St}_l$ such that $f(p_1) = p_1'$, $f(p_2) = p_2'$, $|p_1 \hat{\ } p_1'| = g_1$, and points $p_2$ and $p_2'$ lie between $p_1$ and $p_1'$, or $p_1'$ lies between $p_1$ and $p_2$ and $p_1$ lies between $p_1'$ and $p_2'$ ($f$ is the translation along the segment $p_1 \hat{\ } p_1'$ plus the $\pi$-turn fixing the point $p_1'$).

4. Any product $a_1\alpha_1 \ldots a_n\alpha_n$ (where $a_i \in \bar{G}_1$, $\alpha_i \in G_2$, $i = 1, \ldots, n$) corresponds to an the automorphism along an according open polygon, and this product corresponds to the identical automorphism, if $\begin{pmatrix} a_1' & \cdots & a_n' \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbf{S} \cup \mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^s$, where $a_i' = a_i$ for $a_i \neq \pi$ and $a_i' = 0$ for $a_i = \pi$.

5. The identity of words of polygon parameters imply the identity of words of according cyclic permutations, turns and joinings, i.e. $GN(\mathbf{S} \cup \mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^s)$ induces the same set of definienses as the set of definienses for $\mathbf{S} \cup \mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^s$. □

**THEOREM 7.2.** *A group $G$ is isomorphic to an automorphism group of a s-polygonometry of a group pair $(G_1, G_2)$, iff $G$ is isomorphic to a group $G_0 \wr \mathrm{S}_\lambda$ with some element $\pi \in G_0 \setminus \{e\}$ and some cardinality $\lambda$ satisfying the following conditions:*



1) *$G_1$ is a commutative linearly ordered group and*

$$\bar{G}_1 = \{e, \pi\} \cup \mathrm{Pos}(G_1) \,\dot{\cup}\, \pi\mathrm{Pos}(G_1) \,\dot{\cup}\, \mathrm{Pos}(G_1)\pi \,\dot{\cup}\, \pi\mathrm{Pos}(G_1)\pi$$

*is a subgroup of $G_0$, $G_2 \leq G_0$, $G_1 \cap G_2 = \{e, \pi\}$;*

2) *the group $G_0$ is generated by the set $\bar{G}_1 \cup G_2$;*

3) *if $g_1, g_1' \in \mathrm{Pos}(G_1)$, then $g_1g_1' = (g_1 - g_1')\pi$ for $g_1' < g_1$, $g_1g_1' = \pi(g_1' - g_1)\pi$ for $g_1 < g_1'$, $g_1g_1' = e$ for $g_1 = g_1'$, $g_1\pi g_1' = g_1 + g_1'$, $\pi^2 = e$;*

4) *$\pi$ is a central element of $G_2$;*

5) *if $a_1\alpha_1 \ldots a_{n-2}\alpha_{n-2}a_{n-1}\alpha_{n-1}a_n\alpha_n = e$ and $a_1\alpha_1 \ldots a_{n-2}\alpha_{n-2}a_{n-1}\alpha_{n-1}' a_n'\alpha_n' = e$, $a_i \in \mathrm{Pos}(G_1)$, $\alpha_i \in G_2 \setminus \{e\}$, $1 \leq i \leq n$, $n \geq 3$, then $\alpha_{n-1} = \alpha_{n-1}'$, $a_n = a_n'$, $\alpha_n = \alpha_n'$;*

6) *if $\alpha_1a_1 \ldots \alpha_{n-2}a_{n-2}\alpha_{n-1}a_{n-1}\alpha_na_n = e$ and $\alpha_1a_1 \ldots \alpha_{n-2}a_{n-2}\alpha_{n-1} a_{n-1}'\alpha_n'a_n' = e$, $a_i \in \mathrm{Pos}(G_1)$, $\alpha_i \in G_2 \setminus \{e\}$, $1 \leq i \leq n$, $n \geq 3$, then $a_{n-1} = a_{n-1}'$, $\alpha_n = \alpha_n'$, $a_n = a_n'$;*

7) *if $a_1\alpha_1a_2\alpha_2a_3\alpha_3 = e$, $a_3 \in G_2$, then $\alpha_1 \in \bar{G}_1$ or $a_1, a_2 \in G_2$;*

8) *if $a_1\alpha_1a_2\alpha_2a_3\alpha_3 = e$, $\alpha_1 \in \bar{G}_1$, then $\alpha_2, \alpha_3 \in \bar{G}_1$ or $a_3 \in G_2$.*

**Proof.** The necessity of the conditions 1–8 appears from the theorem 7.1 and the definition of *s*-polygonometrical set.

For the sufficiency we shall show that the set $\mathbf{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1' & \cdots & a_n' \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \,\middle|\, a_1', \ldots, a_n' \in \mathrm{Pos}(G_1) \cup \{0\}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in G_2, a_i = a_i' \text{ for } a_i' > 0, a_i = \pi \text{ for } a_i' = 0, a_1\alpha_1 \ldots a_n\alpha_n = e, n \geq 3 \right\}$ is *s*-polygonometrical.

Obviously the set $\mathbf{S}$ is closed under cyclic permutations, and by the conditions $g_1^2 = e$ for any $g_1 \in \mathrm{Pos}(G_1)$ it is closed under turns and joinings, i.e $GN(\mathbf{S}) = \mathbf{S}$.

The conditions 5 and 6 imply that any $(G_1, G_2)^s$-$n$-gon $S \in \mathbf{S}$ with nonzero sides is uniquely defined by any its $2n - 3$ defining parameters.

It is obvious that $\mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^s \subseteq \mathbf{S}$, and now we shall show that if $\Delta = \begin{pmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}$ and some element $a_i'$ is equal to 0 (w.l.o.g. $i = 3$) or $\alpha_j$ is equal to $e$ (w.l.o.g. $j = 1$), then $\Delta \in \mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^s$.

1. Suppose that $a_3' = 0$. By the definition of $\mathbf{S}$ we have $a_1\alpha_1a_2\alpha_2\pi\alpha_3 = e$. Then by the condition 7, $\alpha_1 = e$, or $\alpha_1 = \pi$, or $a_1 = a_2 = \pi$.

If $\alpha_1 = e$, then $a_1ea_2\alpha_2\pi\alpha_3 = \{\text{by the condition 4}\} = a_1a_2\pi\alpha_2\alpha_3 = e$, so $\alpha_2\alpha_3 = e$ or $\alpha_2\alpha_3 = \pi$. The case $\alpha_2\alpha_3 = e$ is impossible for $a_1, a_2 \in \mathrm{Pos}(G_1) \cup \{\pi\}$. For the case $\alpha_2\alpha_3 = \pi$ we have $a_1a_2 = e$, i.e. $a_1 = a_2$. Hence $\alpha_2 = \pi\alpha_3^{-1}$ and $\Delta = \begin{pmatrix} a_1' & a_1' & 0 \\ e & \pi\alpha_3^{-1} & \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^s$.

If $\alpha_1 = \pi$, then $a_1\pi a_2\alpha_2\pi\alpha_3 = \{\text{by the conditions 3, 4 and } (a_1 + a_2)' = a_1' + a_2'\} = (a_1 + a_2)\pi\alpha_2\alpha_3 = e$. Then $a_1 = a_2 = \pi$ and $\alpha_2\alpha_3 = e$. Thus $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pi & \alpha_2 & \alpha_2^{-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^s$.

If $a_1 = a_2 = \pi$, then $\pi\alpha_1\pi\alpha_2\pi\alpha_3 = \pi\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = e$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \pi$, $\alpha_3 = \pi(\alpha_1\alpha_2)^{-1}$ and $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \pi(\alpha_1\alpha_2)^{-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^s$.

2. Suppose now that $\alpha_1 = e$. Then $a_1a_2\alpha_2a_3\alpha_3 = e$ and by the condition 8, $\alpha_2, \alpha_3 \in \{e, \pi\}$ or $a_3 = \pi$.

If $\alpha_2 = e$, then $a_1 a_2 a_3 \alpha_3 = e$, and so $a_1 a_2 a_3 = e$ (that is impossible) or $a_1 a_2 a_3 = \alpha_3 = \pi$. Thus $a_2 = a_1 \pi a_3 = a_1 + a_3$ and $\Delta = \begin{pmatrix} a'_1 & a'_1 + a'_3 & a'_3 \\ e & e & \pi \end{pmatrix} \in \mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^*$.

If $\alpha_2 = \pi$, then $a_1 a_2 \pi a_3 \alpha_3 = e$, and so $a_1 a_2 \pi a_3 = \alpha_3 = \pi$ (that is impossible) or $a_1 a_2 \pi a_3 = \alpha_3 = e$. Thus $a_1 = a_2 \pi a_3 = a_2 + a_3$ and $\Delta = \begin{pmatrix} a'_2 + a'_3 & a'_2 & a'_3 \\ e & \pi & e \end{pmatrix} \in \mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^*$.

If $a_3 = \pi$, then $a_1 a_2 \alpha_2 \pi \alpha_3 = e$ that imply $\Delta \in\in \mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^*$ as shown above.

Consequently by the theorems 2.1 and 7.1 we get $\mathbf{S} = GN(\mathbf{S}(\mathrm{spm}) \cup \mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^*)$ for some $s$-polygonometry $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ with $c(\mathrm{spm}) = \lambda$, and $\mathrm{Aut}(\mathrm{spm}) \simeq (G_0 \,\bar{\imath}\, \mathrm{S}_\lambda)$. □

For the $s$-polygonometry $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \langle P, L, \in \rangle)$ by $\mathcal{M}(\mathrm{spm})$ we denote the system $\langle P, \langle Q^{(2)}_{g_1} \mid g_1 \in \mathrm{Pos}(G_1) \cup \{0\} \rangle, \langle R^{(3)}_{g_2} \mid g_2 \in G_2 \rangle \rangle$, where $Q_{g_1} = \{(p, p') \mid p' \in pg_1$ on some line $l \in L\}$, $g_1 \in \mathrm{Pos}(G_1) \cup \{0\}$, $R_{g_2} = \{(p', p, p'') \mid$ there are lines $l(p, p'), l(p, p'')$ and $\angle(p', p, p'') = g_2\}$, $g_2 \in G_2$. The theory $T(\mathrm{spm}) = \mathrm{Th}(\mathcal{M}(\mathrm{spm}))$ is said to be the *theory of $s$-polygonometry* spm.

Let spm be a $s$-polygonometry on a $(|G_1|, |G_2|)$-plane, $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ be a tuple of some pairwise different elements of $\mathcal{M}(\mathrm{spm})$, $n \geq 2$. Denote by $[\bar{p}]$ the tuple $(a_1, \alpha_1, a_2, \ldots, \alpha_{n-2}, a_{n-1})$ of the sequential side and angle parameters of the open polygon $p$. Let $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ be a formula of the theory $T(\mathrm{spm})$, $n \geq 2$. Denote by $[\varphi]$ the set $\{[\bar{p}] \mid \mathcal{M}(\mathrm{spm}) \models \varphi(\bar{p})\}$.

Analogously to [9, proposition 8.3] we get the following:

**PROPOSITION 7.3.** *Let $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 2$, be formulas of a theory $T(\mathrm{spm})$ of a $s$-polygonometry on a plane, and these formulas are satisfiable for tuples having pairwise different elements only. The following conditions are equivalent:*

(1) $T(\mathrm{spm}) \vdash \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})$;

(2) $[\varphi] = [\psi]$.

This assertion admits a natural generalization to an arbitrary connected $s$-polygonometry. Thus the properties of $s$-polygonometrical theories can be described using automorphism groups Aut(spm).

## 8. The number of models of everywhere finitely defined $s$-polygonometries.

A $s$-polygonometry $\mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ is said to be *everywhere finitely defined*, if for any $n$ there is only finite number of $(G_1, G_2)^*$-$n$-gons correspondent to $n$-gons without repeated vertexes and sides.

By $I(T, \lambda)$ we denote the number of pairwise nonisomorphic models of a theory $T$ and of a cardinality $\lambda$.

The proof of the following theorem is analogous to the proofs of [11, theorem 4 and corollary 7].

**THEOREM 8.1.** *Let $T$ be the theory of an everywhere finitely defined $s$-polygonometry $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$, where $G_1$ is a non-zero (i.e. infinite) linearly ordered group, $\omega \leq \max(|G_1|, |G_2|) \leq \omega_\alpha$. Then the theory $T$ is totally transcendental of Morley rank $\omega$ and $I(T, \omega_\alpha) = (\max(|G_1|, |G_2|, |\alpha|))^\omega$.*

## 9. $S$-trigonometries with functions sin and cos.

We consider a generalization



of the basic trigonometrical functions to $s$-trigonometries of pairs (a linearly ordered ring with a unity, a group).

A $s$-trigonometry strm of a group pair $(\langle G_1, +, < \rangle, \langle G_2, \cdot \rangle)$ on a plane, where $R = \langle G_1, +, \cdot, < \rangle$ is a linearly ordered ring with a unity 1, is said to be a *$s$-trigonometry with functions* sin *and* cos, or *sc $s$-trigonometry*, if there is a central element $\alpha_\perp$ of $G_2$ such that

(1) $\alpha_\perp^2 = \pi$;

(2) $G_2$ has a linear order $\leq$ such that

a) $e$ is the least element and $e < \alpha_\perp < \pi < \pi\alpha_\perp$;

b) if $e < \alpha < \alpha_\perp$, then $\alpha_\perp < \alpha\alpha_\perp < \pi$, $\pi < \alpha\pi < \pi\alpha_\perp$, $\pi\alpha_\perp < \alpha\pi\alpha_\perp$;

c) if $\alpha_\perp < \alpha < \pi$, then $\pi < \alpha\alpha_\perp < \pi\alpha_\perp$, $\pi\alpha_\perp < \alpha\pi$, $e < \alpha\pi\alpha_\perp < \alpha_\perp$;

d) if $\pi < \alpha < \pi\alpha_\perp$, then $\pi\alpha_\perp < \alpha\alpha_\perp$, $e < \alpha\pi < \alpha_\perp$, $\alpha_\perp < \alpha\pi\alpha_\perp < \pi$;

e) if $\pi\alpha_\perp < \alpha$, then $e < \alpha\alpha_\perp < \alpha_\perp$, $\alpha_\perp < \alpha\pi < \pi$, $\pi < \alpha\pi\alpha_\perp < \pi\alpha_\perp$;

(3) if $e < \alpha < \alpha_\perp$, $f^3_{ia}(a_1, \alpha, 1) = \alpha_\perp$ and $f^3_{ia}(a_2, \alpha, 1) = \alpha_\perp$, then $a_1 = a_2$;

(4) for any $\alpha \in G_2$ there is an element $a$ such that $f^3_{ia}(a, \alpha, 1) = \alpha_\perp$ iff $e < \alpha < \alpha_\perp$.

Define functions $\cos : G_2 \to G_1$ and $\sin : G_2 \to G_1$ in the sc-$s$-trigonometry strm by the following equalities:

1) $\cos e = 1$, $\sin e = 0$, $\cos \alpha_\perp = 0$, $\sin \alpha_\perp = 1$, $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, $\cos(\pi\alpha_\perp) = 0$, $\sin(\pi\alpha_\perp) = -1$;

2) if $e < \alpha < \alpha_\perp$ and $f^3_{ia}(a, \alpha, 1) = \alpha_\perp$, then

$\cos \alpha = a$, $\sin \alpha = f^3_{ms}(a, \alpha, 1)$,

$\cos(\alpha\alpha_\perp) = -a$, $\sin(\alpha\alpha_\perp) = \sin \alpha$,

$\cos(\alpha\pi) = -a$, $\sin(\alpha\pi) = -\sin \alpha$,

$\cos(\alpha\pi\alpha_\perp) = a$, $\sin(\alpha\pi\alpha_\perp) = -\sin \alpha$.

**THEOREM 9.1.** *Any $s$-trigonometry of a pair (a linearly ordered ring with a unity, a group) on a plane is embeddable to some sc-$s$-trigonometry.*

**Proof** uses the proof of [12, theorem 2]. Let strm be a $s$-trigonometry on a plane of a pair $(R, G_2)$, where $R$ is a linearly ordered ring with a unity. Denote by $\lambda$ the cardinality $\max\{|R|, |G_2|, \omega\}$. Consider a linearly ordered free $\lambda$-generated ring $R_\lambda$ with a unity and free generators $r_i > 0$, $i \in \lambda$. Let $F_\lambda$ be a $\lambda$-generated group with free generators $g_i$, $i \in \lambda$. Denote by $R'$ the lexicographically linearly ordered ring $R \times R_\lambda$ and by $G''_2$ a group $\langle G_2 \times F_\lambda, \{\alpha_\perp\} \parallel R(G_2 \times F_\lambda), \{\alpha_\perp^2 = (\pi, e)\}, \{\alpha_\perp g = g\alpha_\perp \mid g \in G_2 \times F_\lambda\} \rangle$, where $R(G_2 \times F_\lambda)$ is the set of definienses of $G_2 \times F_\lambda$. We shall identify elements $r \in R$ (accordingly $g \in G_2$) and $(r, 0) \in R'$ ($(g, e) \in G_2 \times F_\lambda$).

Now we split the set $(G_2 \times F_\lambda) \setminus \{e, \pi\}$ into two classes $X_1$ and $X_2$ such that $X_2 = X_1\pi$. Consider an arbitrary linear order $\leq$ on the set $X_1$ and expand it to the linear order on the set $G''_2$ by the following way:

a) if $x_1, x'_1 \in X_1$, $x_1 < x'_1$ and $\alpha_0 \in \{\alpha_\perp, \pi, \pi\alpha_\perp\}$, then $x_1\alpha_0 < x'_1\alpha_0$;

b) if $x_1 \in X_1$, then $e < x_1 < \alpha_\perp$, $\alpha_\perp < x_1\alpha_\perp < \pi$, $\pi < x_1\pi < \pi\alpha_\perp$ and $\pi\alpha_\perp < x_1\pi\alpha_\perp$.

Thus the group $G_2$ satisfies the conditions (1) and (2), and we shall show that the $s$-trigonometry strm is embeddable to some sc-$s$-trigonometry strm$'$ of the pair $(R', G''_2)$.

Further w.l.o.g. we shall suppose that $\lambda = \omega$. Let $\nu : \omega \to X$ is an enumeration of the set $Y = (\mathrm{Pos}(R') \times (G''_2 \setminus \{e\}) \times \mathrm{Pos}(R')) \cup X_1$. Construct a family of $s$-trigonometries $\mathrm{strm}_n$, $n \in \omega \cup \{-1\}$. Denote by $\mathrm{strm}_{-1}$ some connected $s$-trigonometry satisfying the following: $\mathbf{S}(\mathrm{strm}_{-1}) = GN(\mathbf{S}(\mathrm{strm}) \cup \mathbf{\Delta}_e(R', G''_2)^*) \setminus \mathbf{S}^0(R', G''_2)$.

If a $s$-trigonometry $\mathrm{strm}_n$ is already constructed $\nu(n+1) = (a, \alpha, b)$ and $\begin{pmatrix} a & b & \cdot \\ \alpha & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_3(\mathrm{strm}_n)$, then we define $\mathrm{strm}_{n+1} \rightleftarrows \mathrm{strm}_n$.

If $\nu(n+1) = (a, \alpha, b)$ and $f_{la}(a, \alpha, b)$ doesn't exist, consider the least generators $r_i, g_j, g_{j+1}$ that don't take part in decompositions of parameters of non-trivial triangles from $\mathrm{strm}_n$ to generators. Now we define a connected $s$-trigonometry $\mathrm{strm}_{n+1}$ by the following:

$$\mathbf{S}(\mathrm{strm}_{n+1}) = GN\left(\mathbf{S}(\mathrm{strm}_n) \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b & r_i \\ \alpha & g_j & g_{j+1} \end{pmatrix} \right\}\right) \setminus \mathbf{S}^0(R', G_2').$$

If $\nu(n+1) = \alpha$ and $f_{ra}(a, \alpha, 1) = \alpha_\perp$ for some $a$, then $\mathrm{strm}_{n+1} \rightleftarrows \mathrm{strm}_n$. If $f_{la}(a, \alpha, 1)$ is not defined, we consider the least generators $r_i, r_{i+1}, g_j$ that don't take part in decompositions of parameters of non-trivial triangles from $\mathrm{strm}_n$ to generators. Then we define a connected $s$-trigonometry $\mathrm{strm}_{n+1}$ by the following:

$$\mathbf{S}(\mathrm{strm}_{n+1}) = GN\left(\mathbf{S}(\mathrm{strm}_n) \cup \left\{ \begin{pmatrix} r_i & 1 & r_{i+1} \\ \alpha & g_j & \alpha_\perp \end{pmatrix} \right\}\right) \setminus \mathbf{S}^0(R', G_2').$$

The final $s$-trigonometry $\mathrm{strm}'$ is defined by the following condition: $\mathbf{S}(\mathrm{strm}') = \bigcup\limits_{n \in \omega} \mathbf{S}(\mathrm{strm}_n)$. $\square$

**10. Conclusion.** We considered a natural generalization of classical trigonometries to the symmetrical case for pairs (a linearly ordered group, a group). Below we define the class of dual $s$-polygonometries for which our results can be obviously transformed. Let $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \langle, P, L, \in\rangle)$ be a $s$-polygonometry. The system $\langle G_2, G_1, \langle L, P, \ni\rangle\rangle$ is said to be the ***dual s-polygonometry*** to the $s$-polygonometry spm (it is denoted by $\mathrm{spm}^+$), if the group actions on the subsets of lines and on the sets of points in spm are transformed to the correspondent actions on the sets of points and the subsets of lines in $\mathrm{spm}^+$, and $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbf{S}(\mathrm{spm})$ iff $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathbf{S}(\mathrm{spm}^+)$.

On the other hand we can factorise groups $G_1$ of $s$-polygonometries to get not necessary linearly ordered groups. It leads to the considerations as polygonometries with symmetrical conditions of finite systems (in particular, of systems over finite fields) as well as of generic projective planes over graphs [13].

## References


[1] *Sudoplatov S. V.* Group polygonometries and related algebraic systems (an informative survey) // Contributions to General Algebra 11. Klagenfurt: Verlag Johannes Heyn, 1999. P. 191–210.

[2] *General* algebra. V. 1, 2 (Edited by L.A.Skornyakov). Moscow: Nauka, 1990, 1991. (in russian)

[3] *Kokorin A. I., Kopytov V. M.* Linearly ordered groups. Moscow: Nauka, 1972. (in russian)





[4] *Handbook* of Mathematical logic. V. 1, Model theory (Edited by Yu. L. Ershov, E. A. Palyutin, A. D. Taimanov). Moscow: Nauka, 1982. (in russian)

[5] *Harary F.* Graph theory. Moscow: Mir, 1973. (in russian)

[6] *Sudoplatov S. V.* On the embedding relation in the class of trigonometries of groups // Algebra and Logic. 1994. V. 33, N 4. P. 429–447.

[7] *Stepanov N. N.* Spherical trigonometry. Moscow, Leningrad: ONTI NKTP USSR, 1948. (in russian)

[8] *Sudoplatov S. V.* Group pair polygonometries // Siberian Math. J. 1997. V. 38, N 4. P. 925–931.

[9] *Sudoplatov S. V.* On the classification of group polygonometries. — Preprint (passed to "Trudy Instituta Matematiki SO RAN"). (in russian)

[10] *Sudoplatov S. V.* Partial algebras associated with group pair polygonometries // Algebra and Logic. 1997. V. 36, N 4. P. 454–476.

[11] *Sudoplatov S. V.* The number of models of theories of everywhere finitely defined polygonometries // Siberian Math. J. 1999. V. 40, N 3. P. 689–694.

[12] *Sudoplatov S. V.* Trigonometries with functions sin and cos // Algebra and Model Theory (Edited by A. G. Pinus and K. N. Ponomaryov). Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University, 1997. P. 169–172. (in russian)

[13] *Baldwin J. T., Shi N.* Stable generic structures // Ann. Pure and Appl. Logic. 1996. V. 79. P. 1–35.

# Minimal fields and bad fields in non-zero characteristic

**Frank Wagner**

Frank O Wagner, Mathematical Institute, University of Oxford, 24--29 St Giles', Oxford OX1 3LB, UK
e-mail: wagner@maths.ox.ac.uk, wagner@desargues.univ-lyon1.fr

## Introduction

In this paper, we shall use the Frobenius endomorphism $x \mapsto x^p$ (and its powers) to study fields of characteristic $p > 0$.

**Definition 1** A field of characteristic $p > 0$ is *perfect* if every element has a (unique) $p$-th root.
If $K$ is any field, an element $x \in K$ is *absolutely algebraic* if $x$ is the root of a non-trivial polynomial over the prime field of $K$.

It is easy to see that the collection of absolutely algebraic numbers forms a subfield $K_a$ of $K$; in non-zero characteristic $K_a$ is locally finite.

**Proposition 1** *Let $K$ be a perfect field of characteristic $p \neq 0$; if $K$ has additional structure, assume that some power $\sigma$ of the Frobenius endomorphism is an automorphism of $K$. Then the model-theoretic algebraic closure of $\emptyset$ is equal to the field-theoretic algebraic closure of*
*$\emptyset$ (which is $K_a$).*

*Proof:* Clearly $K_a$ is contained in the model-theoretic algebraic closure of
$\emptyset$. Suppose now that $x \in K - K_a$. Since $K$ is perfect (or by assumption), $\sigma$ is an automorphism of $K$ such that $x$ has infinitely many $\emptyset$-definable set, and $x$ is not model-theoretically algebraic over $\emptyset$. □

## 1 Minimal Fields

**Definition 2** An infinite structure $\mathcal{M}$ is minimal if every definable subset (using parameters in $\mathcal{M}$) is finite or cofinite.

Minimal groups have been classified long ago by Reineke [4]: they are either abelian divisible with only finitely many elements of any given order, or elementary abelian of prime exponent $p$ for some prime $p$. However, a corresponding classification of minimal fields has not yet been obtained; Podewski conjectured them to be algebraically closed. (It is easy to see that every algebraically closed field is minimal, since it allows elimination of quantifiers.) Schmücker [5] has shown that a minimal field has no extension of degree five. We shall prove Podewski's conjecture in non-zero characteristic.

*Heisenberg-Stipendiat der Deutschen Forschungsgemeinschaft (Wa899/2-1)



**Definition 3** Let $K$ be a field of characteristic $p$. A *radical* extension of $K$ is an extension of the form $K(\alpha)$, where $\alpha^n \in K$ for some $n > 0$ or $\alpha^p - \alpha \in K$ (in case $p \neq 0$). $K$ is *radically closed* if it has no radical extensions.

The following lemma is well-known:

**Lemma 2** *A minimal field $K$ is radically closed.*

*Proof:* Note first that both $K^+$ and $K^\times$ are minimal groups. As the images of the definable endomorphisms $x \mapsto x^n$ of $K^\times$ (for $n < \omega$) and $x \mapsto x^p - x$ of $K^+$ (for $\mathrm{char}(K) = p$) are infinite, they must be co-finite. But a co-finite infinite subgroup must be the whole group, so these endomorphisms are surjective. In particular, $K$ is perfect, and has no proper extension $K(\alpha)$ with $\alpha^p - \alpha \in K$.

If $K$ is not radically closed, let $L$ be a radical extension of minimal degree, say of degree $n$ (and necessarily $n \neq p$). As the $n$-th roots of unity are adjoined by a sequence of radical extensions of degree less than $n$, they must already be contained in $K$ by minimality of $n$. But every $x \in K$ has an
$n$-th root in $K$, so all $n$-th roots of all elements in $K$ are already contained in $K$, a contradiction. □

The next lemma is also standard.

**Lemma 3** *If $\mathcal{M}$ is a minimal structure and $X$ is an algebraically closed (in the model-theoretic sense) infinite subset of $\mathcal{M}$, then $X$ is an elementary submodel of $\mathcal{M}$.*

*Proof:* Consider a sentence $\exists x \varphi(x, m)$ with parameters $\bar{m} \in X$. If it is true in $\mathcal{M}$, then either $\varphi(x, \bar{m})$ defines a finite set which must be contained in $X$, since $X$ is algebraically closed. Or it defines a co-finite set; since $X$ is infinite we can find $x_0 \in X$ with $\mathcal{M} \models \varphi(x_0, \bar{m})$. In either case there is $x \in X$ with $\mathcal{M} \models \varphi(x, \bar{m})$. Hence $X \prec \mathcal{M}$. □

**Theorem 4** *A minimal field $K$ of non-zero characteristic is algebraically closed.*

*Proof:* Since $K$ has no radical extension, neither does $K_a$. But $K_a$ is a
locally finite field, and every algebraic extension of a locally finite field is radical. So $K_a$ is algebraically closed; in particular it is infinite. As $K_a$ is equal to the model-theoretic algebraic closure of $\emptyset$ by Proposition 1, which is an elementary substructure of $K$ by Lemma 3, it follows that $K$ itself is algebraically closed. □

We call a field $K$ *almost algebraically closed* if every non-constant
polynomial function over $K$ has co-finite image. As in the proof of Lemma 2, one sees that an almost algebraically closed field is radically closed.

**Conjecture 1** *An almost algebraically closed field is algebraically closed.*

Our methods do not quite suffice to treat the conjecture. However, while minimality requires *all* definable subsets to be finite or co-finite, and almost minimality only provides for certain existentially defined sets to be finite or co-finite, we can deal with an intermediate case (again in non-zero characteristic).

**Proposition 5** *Supppose $K$ is a field such that every $\exists\forall$-definable set is finite or co-finite. Then $K$ is algebraically closed.*

*Proof:* If again $K_a$ denotes the subfield of algebraic numbers in $K$, then $K_a$ is locally finite radically closed, and hence algebraically closed. Suppose now $K$ is not algebraically closed and consider a polynomial $f(x) = \sum_i a_i x^i$ which has no zero in $K$. Let $\{a_i : i \in I\}$ be the coefficients of $f$ which are in $K_a$, and $\{a_i : i \in J\}$ those coefficients of $f$ which are in $K - K_a$. We choose $f$ such that $|J|$ is minimal; as $K_a$ is algebraically closed, $J \neq \emptyset$.

Pick $j_0 \in J$. As $K$ is perfect, we may again consider the Frobenius automorphism $\sigma$ of $K$. There is a power $\sigma^n$ of $\sigma$ which fixes the set $\{a_i : i \in I\}$ pointwise, as it is a finite set contained in $K_a$. Put

$$Y = \{y \in K : \exists (y_j : j \in J - \{j_0\}) \forall x\, [y x^{j_0} + \sum_{i \in I} a_i x^i + \sum_{j \in J - \{j_0\}} y_j x^j \neq 0]\};$$

then $Y$ contains all the images of $a_{j_0}$ under the powers of $\sigma^n$. These images are distinct (since $a_{j_0} \notin K_a$), so $Y$ is infinite and intersects $K_a$. Pick $a'_{j_0} \in K_a \cap Y$. Then there are $a'_j \in K$ for $j \in J - \{j_0\}$ such that $\sum_{i \in I} a_i x^i + \sum_{j \in J} a'_j x^j = 0$ has no solution in $K$, and this has fewer coefficients in $K - K_a$, a contradiction. □

## 2 Bad Fields

**Definition 4** A *bad field* is a field $K$ of finite Morley rank with a distinguished predicate $T$ for a proper infinite multiplicative subgroup.

**Proposition 6** *Let $(K, T)$ be a bad field. Then the absolutely algebraic numbers form an elementary substructure of $(K, T)$.*

*Proof:* As a field of finite Morley rank is algebraically closed, and hence perfect, the Frobenius endomorphism $\sigma$ is an automorphism of $K$. Furthermore,

$\sigma(T) \leq T$; since an injective endomorphism must preserve Morley rank and degree, $\sigma(T) = T$ and $\sigma$ is an automorphism of $(K, T)$.

Now let $X$ be a $K_a$-definable non-empty subset of $K$ (in the full bad field structure); we have to show that $X \cap K_a \neq \emptyset$. Clearly, we may assume that every $K_a$-definable subset of $X$ has the same Morley rank and degree as $X$. If $X$ is finite, then $X \subset acl(K_a) = acl(\emptyset) = K_a$, by Proposition 1 and we are done. So assume that $X$ is infinite; we shall derive a contradiction.

By the appropriate version of the Zil'ber Indecomposability Theorem for the family $\{xX : x \in K_a\}$, there are $n < \omega$, elements $x_1, \ldots, x_n \in K_a$, and a definable subgroup $H \subset x_1 X + \cdots + x_n X$, such that $(xX + H)/H$ is finite for all $x \in K_a$ (this takes care of the fact that $X$ need not be additively indecomposable). Replacing $H$ by $\bigcap_{x \in K_a^\times} xH$ (which is a finite subintersection), we may assume that $H$ is invariant under multiplication by elements in $K_a^\times$. So the definable subring $\{x \in K : xH \leq H\}$ of $K$ is infinite. But a field of finite Morley rank has no proper infinite definable subrings, so $xH \leq H$ for all $x \in K$. Since $H$ cannot be trivial, $K = H = x_1 X + \cdots + x_n X$.

Let $n$ be minimal such that there are elements $x_1, \ldots, x_n \in K_a$ with $RM(x_1 X + \cdots + x_n X) = RM(K)$. By minimality of $RM(X)$, for any $y \in K_a$ the set

$$X(y) = \{x \in X : \exists y_2, \ldots, y_n \in X\ x_1 x + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = y\}$$



has the same Morley rank and degree as $X$, that is $X$ and $X(y)$ contain the same types of maximal Morley rank, say $p_1, \ldots, p_d$. Thus

$$\models \bigwedge_{i=1}^{d} d_{p_i} x\ x \in X(y)$$

for all $y \in K_a$ (where $d_{p_i}$ is the defining scheme for $p_i$). However, any property generically true for $K_a$ must be generically true for the smallest definable superfield of $K_a$ by [6], which equals $K$ by finiteness of rank. If $y'$ is generic for $K$ over $K_a$, then $RM(X(y')) = RM(X)$ and there is $x \in X(y')$ independent of $y'$. So $y' - x_1 x$ is also generic for $K$, and $x_2 X + \cdots + x_n X$ has maximal Morley rank, contradicting our minimal choice of $n$. □

## References


[1] A. Borovik and A. Nesin *Groups of Finite Morley Rank* Oxford University Press, Oxford, United Kingdom 1994.

[2] B. P. Poizat. *Groupes Stables.* Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah, Villeurbanne, France, 1987.

[3] K.-P. Podewski. Minimale Ringe. *Math. Phys. Semesterberichte*, 22:193–197, 1973.

[4] J. Reineke. Minimale Gruppen. *Zeitschr. math. Logik Grundl. Math.*, 21:357–359, 1975.

[5] R. Schmücker. Almost algebraically closed fields. Preprint, 1995.

[6] F. O. Wagner. Subgroups of stable groups. *J. Symb. Logic*, 55:151–156, 1990.

[7] F. O. Wagner. *Stable Groups (LMS Lecture Notes 240).* Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1997.

**B.S. Baizhanov.** *Orthgonality of one-types in weakly o-minimal theories.*
In this paper properties of one-types over sets in a weakly o-minimal theory are studied. In Section 2 six basic kinds of one-types over sets are distinguished. In Section 3 notions of neighbourhood of a set in one-type, weak and almost orthogonality of one-types are introduced. It is proved that a non-weak (non-almost) orthogonality is equivalence relation and each $\mathcal{L}^{w}$-class of the equivalence contains one-types of only one kind from six basic ones. In Section 4 it is proved that all the one-types of each $\mathcal{L}^{w}$-class which contains at least one definable one-type are definable. Some lemmas of the paper have analogies in o-minimal theories.

**I. Chajda, R. Halaš.** *Local coherence for locally regular algebras.*
The concept of a locally coherent algebra was introduced by the first author recently. Here we study connections between locally regular and locally coherent algebras. Especially the condition is find when added to local regularity gives local coherency. For varieties of algebras this condition is also necessary.

**S. Givant, M. Andréka.** *Relation algebras and groups.*
The following theorem is formulated: every atomic diagonally measurable relation algebra is canonically embeddable in a generalized group relation algebra.

**K. Glazek.** *Algebras of operations.*
A short survey of different kinds of algebras of operations is given.

**A. Grishkov.** *Three aspects of the exponential map.*
Let $G$ be a Lie group, $L$ its Lie algebra and let $Exp : L \to G$ be the exponencial map. In this paper we generalize this map in the case of a solvable algebraic group in characteristic 0 or in the case of nilpotent group in characteristic $p > 0$.

**V.M. Kopitov.** *New results on the semilinear ordered groups.*
A partially right-ordered group $G$ is called a ***semilinearly ordered group*** if it is a directed up group and every its two elements with a common lower bound are comparable. S.A.Adeleke, M.A.E.Dummet and P.M.Neumann have written in [1] that the notion of a semilinearly ordered group was presented in 1903 by G.Frege. This notation was introduced in connection with the question on minimality and independence of an axiom system of the field of real numbers. A statement of the semilinearly ordered groups theory there is in the book [4]. In the presented work a survey of some new results are proposed.

It is proved that the normalizer of the union of positive cone and negative cone of semilinearly ordered group $G$ is a convex right ordered subgroup. The new descriptions of extensions for semilinearly ordered groups are presented. It is reported that there exist a group $G$ with the semilinear order $P$, such that $P$ is not extended to the right order of $G$. Every right ordered group is embedded into any simple group which is a semilinear ordered group. There are the non-hopfian groups with the nontrivial semilinear order.

**S.I. Mardaev.** *Fixed points of the time operators.*
We study the definability of least fixed points of propositional bimodal $\Pi$-formulas in temporal models. Natural temporal Kripke models were considered. In these models the least fixed points of temporal positive $\Pi$-formulas are definable.

**N.Ja. Medvedev.** *Maximum orders on the Dlab groups.*
In this work the description of maximal partial orders and minimal isolated partial orders of Glab groups $D_H(\mathbf{I})$, $D_{H*}(\mathbf{I})$, $D_{*H}(\mathbf{I})$, $D_H(\mathbf{I})$ of the unit interval $\mathbf{I} = [0,1]$ and $D_H$, $D_{H*}$ of the extended real line $\hat{\mathbf{R}}$ where $H$ is a subgruop of rank 1 of the multiplicative group of positive real numbers has been given.

**E.V. Ovchnnikova.** *On the generation of the class of all polygons.*
Two types of congruences on acts are defined. It is shown that any congruence can be constructed by such congruences. It is proved that variety of all $S$-acts is generated by free one-generated act iff the monoid $S$ doesn't have left zeros.

**V.G. Puzarenko.** *On computability over models of decidable theories.*
The $\Sigma$-definability of hereditarily finite sets over algebraic systems is studied. A criterium of $\Sigma$-definability is proved and the characterization of simple theories is obtained on the base of that criterium. A partly algebraic description of distributive upper semilattice $m\Sigma$- and $T\Sigma$-degrees of hereditarily finite sets over models of simple theories is given.

**A.G. Pinus.** *On definability of lattices by its lattice of sublattices.*
Some sufficient conditions for definability of lattice by its lattices of sublattices are given.

**A.G. Pinus, Ja.L. Mordvinov.** *On skeletons of varieties of lattices.*
It is proved that the countable skeletons of any nontrivial variety of lattices are not semi-lattices. The question of existance of covers in the skeletons of epimorphisms of varieties of lattices is investigated.

**K.N. Ponomaryov.** *Some generalizations of Abhyankar lemma.*
The author gives some generelizations of Abhyankar lemma about elimination of ramification in tame ramified extentions of valued fields. The author gives a new proof of Epp theorem.

**A.M. Popova.** *Effectiveness of presentation of finitely generated nilpotent matrix groups.*
The effectiveness of representation of finitely generated nilpotent groups. Using Swan's method the author proves the effectiveness of such representation.

**M.V. Semenova.** *On finite definable lattices.*
Some characterisations of finite definable algebraic lattices are given.

**M.S. Sheremet.** *Retractive decompositions of compact systems.*
Some connections between atom compactness of algebraic systems and retractive decomposition of this system are given.

**S.V. Sudoplatov.** *Group polygonometries with symmetrical conditions.* The notion of group polygonometry with the symmetrical condition is defined. It's shown that classical trigonometries can bt interpreted as such polygonometries, and a lot of results for group polygonometries can be transformed to the symmetrical case.

**F. Wagner.** *Minimal fields abd bad fields in non-zero characteristic.* A minimal field of non-zero characteristic is algebraically closed. The algebraic numbers of a bad field of non-zero characteristic form an elementary substructure.



CONTENTS

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ 2

Лицензия № 021040 от 22.02.96. Подписано в печать 09.12.99. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Тираж 220 экз. Уч.-изд. л. 9,9. Печ. л. 11. Изд. № 1357.
Заказ № 817 Цена договорная.

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20