Практическая работа №7

Тема: Кривые второго порядка.

Каждый студент выполняет один и тот же номер варианта во всех задачах. Для каждой кривой, где это возможно, выполните схематическое построение и отметьте найденные геометрические элементы. В таблицах M_x, M_y обозначают координаты точки M; аналогично обозначаются координаты других точек. Через $\rho(M, D)$ обозначено расстояние от точки M до прямой D.
Параметр параболы $p > 0$ равен расстоянию от фокуса до директрисы. В системе координат с началом в вершине уравнение имеет вид $y^2 = \pm 2px$ или $x^2 = \pm 2py$; знак определяет направление ветвей. Для $y^2 = 2px$ фокус имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а директриса задаётся уравнением $x = -\frac{p}{2}$.

Содержание

1 Общее уравнение кривой второго порядка **2**
- 1.1 Распознавание типа кривой . . . 2
- 1.2 Параллельный перенос системы координат . . . 4
- 1.3 Поворот и перенос системы координат . . . 5

2 Окружность **6**
- 2.1 Центр, радиус и касательная . . . 6

3 Эллипс **7**
- 3.1 Геометрические элементы эллипса . . . 7
- 3.2 Эллипс по фокальному свойству . . . 8
- 3.3 Директриальное свойство эллипса . . . 9

4 Гипербола **10**
- 4.1 Геометрические элементы и асимптоты . . . 10
- 4.2 Гипербола по фокальному свойству . . . 11
- 4.3 Директриальное свойство гиперболы . . . 12

5 Парабола **13**
- 5.1 Парабола, заданная уравнением . . . 13
- 5.2 Парабола по фокусу и директрисе . . . 14
- 5.3 Парабола по вершине и точке . . . 15

6 Единое фокусно-директриальное определение **16**
- 6.1 Классификация по эксцентриситету . . . 16

1 Общее уравнение кривой второго порядка

1.1 Распознавание типа кривой

1. Общее уравнение кривой имеет вид

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Для каждого из четырёх наборов коэффициентов своего варианта определите тип кривой. Укажите, является ли кривая невырожденной и действительной. Ответ обоснуйте с помощью выражения $B^2 - 4AC$ и выделения полных квадратов. Индексы a, b, c, d в таблицах обозначают четыре разных уравнения: для каждого используйте соответствующий набор A, B, C, D, E, F.

Значения параметров выберите по номеру своего варианта.

Таблица 1: Таблица значений

Вариант	A_a	B_a	C_a	D_a	E_a	F_a	A_b	B_b	C_b	D_b	E_b	F_b
1	1	0	4	10	24	57	4	0	−9	32	−36	−8
2	1	0	9	8	0	7	1	0	−16	4	64	−76
3	4	0	9	24	−54	81	4	0	−16	0	−160	−464
4	1	0	16	4	160	388	9	0	−16	−36	−32	−124
5	4	0	16	8	64	4	4	0	−25	−32	150	−261
6	9	0	16	0	−32	−128	9	0	−25	90	−200	−400
7	4	0	25	−8	−200	304	16	0	−25	96	0	−256
8	9	0	25	−36	200	211	25	0	−36	50	288	−1451
9	16	0	25	−96	50	−231	1	0	−4	−2	−24	−39
10	25	0	36	−200	−144	−356	1	0	−9	−6	18	−9
11	1	0	4	−10	−40	121	4	0	−9	−40	90	−161
12	1	0	9	10	54	97	1	0	−16	8	−64	−64
13	4	0	9	32	0	28	4	0	−16	16	64	−112
14	1	0	16	6	−96	137	9	0	−16	0	−160	−544
15	4	0	16	16	160	352	4	0	−25	−16	−50	−109
16	9	0	16	18	64	−71	9	0	−25	−72	150	−306
17	4	0	25	0	−50	−75	16	0	−25	160	−200	−400
18	9	0	25	−18	−200	184	25	0	−36	150	0	−675
19	16	0	25	−64	200	64	1	0	−4	2	32	−67
20	25	0	36	−150	72	−639	1	0	−9	−2	−54	−89
21	1	0	4	−8	−16	28	4	0	−9	−24	18	−9
22	1	0	9	−10	−90	241	1	0	−16	−10	160	−391
23	4	0	9	40	54	145	4	0	−16	32	−64	−64
24	1	0	16	8	0	0	9	0	−16	36	64	−172
25	4	0	16	24	−96	116	4	0	−25	0	−250	−725
26	9	0	16	36	160	292	9	0	−25	−36	−50	−214
27	4	0	25	8	100	4	16	0	−25	−128	150	−369
28	9	0	25	0	−50	−200	25	0	−36	250	−288	−851
29	16	0	25	−32	−200	16	1	0	−4	6	0	5
30	25	0	36	−100	288	−224	1	0	−9	2	72	−152

Таблица 2: Таблица значений

Вариант	A_c	B_c	C_c	D_c	E_c	F_c	A_d	B_d	C_d	D_d	E_d	F_d
1	1	0	0	8	16	32	1	0	1	2	6	14
2	1	0	0	−2	12	61	1	0	1	−4	−4	17
3	1	0	0	10	8	9	1	0	1	−10	8	57
4	1	0	0	0	4	8	1	0	1	6	−2	35
5	1	0	0	−10	−4	45	1	0	1	0	10	61
6	1	0	0	2	−8	9	1	0	1	−6	0	58
7	1	0	0	−8	−12	−20	1	0	1	10	−10	54
8	1	0	0	4	−16	68	1	0	1	4	2	14
9	1	0	0	−6	16	9	1	0	1	−2	−8	33
10	1	0	0	6	12	57	1	0	1	−8	4	45
11	1	0	0	−4	8	−20	1	0	1	8	−6	61
12	1	0	0	8	4	20	1	0	1	2	6	59
13	1	0	0	−2	−4	−19	1	0	1	−4	−4	12
14	1	0	0	10	−8	41	1	0	1	−10	8	50
15	1	0	0	0	−12	−24	1	0	1	6	−2	26
16	1	0	0	−10	−16	105	1	0	1	0	10	50
17	1	0	0	2	16	−15	1	0	1	−6	0	45
18	1	0	0	−8	12	52	1	0	1	10	−10	99
19	1	0	0	4	8	−28	1	0	1	4	2	9
20	1	0	0	−6	4	9	1	0	1	−2	−8	26
21	1	0	0	6	−4	−7	1	0	1	−8	4	36
22	1	0	0	−4	−8	28	1	0	1	8	−6	50
23	1	0	0	8	−12	4	1	0	1	2	6	46
24	1	0	0	−2	−16	−79	1	0	1	−4	−4	57
25	1	0	0	10	16	−7	1	0	1	−10	8	45
26	1	0	0	0	12	24	1	0	1	6	−2	19
27	1	0	0	−10	8	−15	1	0	1	0	10	41
28	1	0	0	2	4	−3	1	0	1	−6	0	34
29	1	0	0	−8	−4	4	1	0	1	10	−10	86
30	1	0	0	4	−8	36	1	0	1	4	2	54

1.2 Параллельный перенос системы координат

2. Кривая задана уравнением

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

С помощью параллельного переноса приведите уравнение к каноническому виду. Найдите вершину, ось симметрии, параметр, фокус и директрису параболы.

Значения параметров выберите по номеру своего варианта.

Таблица 3: Таблица значений

Вариант	D	E	F
1	8	20	56
2	4	16	−44
3	0	12	36
4	−4	8	−12
5	−8	4	32
6	10	−4	29
7	6	−8	−31
8	2	−12	1
9	−2	−16	81
10	−6	−20	−11
11	−10	20	−55
12	8	16	48
13	4	12	−32
14	0	8	24
15	−4	4	−4
16	−8	−4	0
17	10	−8	33
18	6	−12	−51
19	2	−16	1
20	−2	−20	101
21	−6	20	29
22	−10	16	−39
23	8	12	40
24	4	8	−20
25	0	4	12
26	−4	−4	12
27	−8	−8	−16
28	10	−12	37
29	6	−16	−71
30	2	−20	1

1.3 Поворот и перенос системы координат

3. Для кривой

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

найдите центр, выполните поворот осей, устраняющий член xy, и приведите уравнение к каноническому виду. Определите угол поворота и тип кривой.

Значения параметров выберите по номеру своего варианта.

Таблица 4: Таблица значений

Вариант	A	B	C	D	E	F
1	13	−10	13	90	54	261
2	20	24	20	144	112	144
3	25	−14	25	78	−114	−135
4	29	42	29	−268	−332	764
5	34	−32	34	−300	300	450
6	41	18	41	−410	−90	225
7	45	−54	45	522	−486	1125
8	52	40	52	408	600	756
9	74	−48	74	−96	296	−2154
10	100	56	100	−456	−312	−3996
11	13	−10	13	−64	−64	184
12	20	24	20	296	280	1172
13	25	−14	25	136	8	−80
14	29	42	29	−26	−74	−139
15	34	−32	34	92	−308	274
16	41	18	41	−192	192	−224
17	45	−54	45	−450	270	477
18	52	40	52	296	−152	−332
19	74	−48	74	56	644	−784
20	100	56	100	112	400	−4208
21	13	−10	13	−42	−6	−27
22	20	24	20	−256	−256	896
23	25	−14	25	194	130	457
24	29	42	29	216	184	216
25	34	−32	34	132	−168	−216
26	41	18	41	−172	−428	356
27	45	−54	45	−432	432	648
28	52	40	52	−520	−200	148
29	74	−48	74	736	−636	−24
30	100	56	100	680	1112	−1148

2 Окружность

2.1 Центр, радиус и касательная

4. Окружность задана уравнением

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Найдите её центр и радиус. Проверьте, что указанная точка M принадлежит окружности, и составьте уравнение касательной в этой точке.

Значения параметров выберите по номеру своего варианта.

Таблица 5: Таблица значений

Вариант	D	E	F	M_x	M_y
1	6	8	16	0	−4
2	2	0	−15	−1	4
3	−2	−8	−8	−4	4
4	−6	6	−18	3	−9
5	−10	−2	−23	12	1
6	8	−10	−23	−4	13
7	4	4	−1	−5	−2
8	0	−4	−12	0	−2
9	−4	10	4	7	−5
10	−8	2	−19	4	5
11	10	−6	−15	−12	3
12	6	8	−39	−3	−12
13	2	0	−8	2	0
14	−2	−8	1	1	8
15	−6	6	−7	−2	−3
16	−10	−2	−10	5	−5
17	8	−10	−8	3	5
18	4	4	−56	−2	6
19	0	−4	−5	−3	2
20	−4	10	13	2	−9
21	−8	2	−8	9	−1
22	10	−6	−2	−5	9
23	6	8	−24	−10	−4
24	2	0	−63	−1	−8
25	−2	−8	8	4	4
26	−6	6	2	3	1
27	−10	−2	1	0	1
28	8	−10	5	−4	−1
29	4	4	−41	5	−2
30	0	−4	−60	0	10

3 Эллипс

3.1 Геометрические элементы эллипса

5. Эллипс задан уравнением

$$A(x-h)^2 + C(y-k)^2 = N.$$

Найдите центр, вершины, длины полуосей, фокусы, эксцентриситет и уравнения директрис. Постройте эллипс.

Значения параметров выберите по номеру своего варианта.

Таблица 6: Таблица значений

Вариант	h	k	A	C	N
1	-4	-3	16	25	400
2	-1	2	100	64	6400
3	2	-4	144	169	24336
4	5	1	225	144	32400
5	-3	-5	225	289	65025
6	0	0	400	256	102400
7	3	5	576	625	360000
8	-5	-1	676	576	389376
9	-2	4	400	625	250000
10	1	-2	900	576	518400
11	4	3	16	25	400
12	-4	-3	100	64	6400
13	-1	2	144	169	24336
14	2	-4	225	144	32400
15	5	1	225	289	65025
16	-3	-5	400	256	102400
17	0	0	576	625	360000
18	3	5	676	576	389376
19	-5	-1	400	625	250000
20	-2	4	900	576	518400
21	1	-2	16	25	400
22	4	3	100	64	6400
23	-4	-3	144	169	24336
24	-1	2	225	144	32400
25	2	-4	225	289	65025
26	5	1	400	256	102400
27	-3	-5	576	625	360000
28	0	0	676	576	389376
29	3	5	400	625	250000
30	-5	-1	900	576	518400

3.2 Эллипс по фокальному свойству

6. Фокусы эллипса находятся в точках F_1 и F_2, а сумма расстояний от любой его точки до фокусов равна S. Составьте каноническое уравнение эллипса в исходной системе координат. Найдите вершины, эксцентриситет и директрисы.

Значения параметров выберите по номеру своего варианта.

Таблица 7: Таблица значений

Вариант	F_{1x}	F_{1y}	F_{2x}	F_{2y}	S
1	-7	-4	3	-4	26
2	0	-9	0	9	30
3	-6	4	10	4	34
4	4	-15	4	9	40
5	-12	1	2	1	50
6	-3	-5	-3	15	52
7	-16	-2	14	-2	50
8	1	-16	1	20	60
9	0	-5	6	-5	10
10	5	-7	5	5	20
11	-9	3	1	3	26
12	-2	-13	-2	5	30
13	-8	0	8	0	34
14	2	-8	2	16	40
15	-3	-3	11	-3	50
16	-5	-9	-5	11	52
17	-18	5	12	5	50
18	-1	-20	-1	16	60
19	-2	2	4	2	10
20	3	-11	3	1	20
21	0	-1	10	-1	26
22	-4	-6	-4	12	30
23	-10	-4	6	-4	34
24	0	-12	0	12	40
25	-5	4	9	4	50
26	4	-13	4	7	52
27	-20	1	10	1	50
28	-3	-13	-3	23	60
29	-4	-2	2	-2	10
30	1	-4	1	8	20

3.3 Директриальное свойство эллипса

7. Для эллипса

$$\frac{(x-h)^2}{\alpha}+\frac{(y-k)^2}{\beta}=1$$

найдите фокусы, директрисы и эксцентриситет. Для указанной точки M проверьте равенство

$$\frac{|MF_2|}{\rho(M,D_2)}=e,$$

Здесь F_2 — фокус со стороны положительного направления большой оси относительно центра эллипса, а D_2 — соответствующая ему директриса.

Значения параметров выберите по номеру своего варианта.

Таблица 8: Таблица значений

Вариант	h	k	α	β	M_x	M_y
1	-4	-1	289	225	-4	14
2	1	1	256	400	17	1
3	-5	3	625	576	-5	27
4	0	5	576	676	24	5
5	5	-4	625	400	5	16
6	-1	-2	576	900	23	-2
7	4	0	25	16	4	4
8	-2	2	64	100	6	2
9	3	4	169	144	3	16
10	-3	-5	144	225	9	-5
11	2	-3	289	225	2	12
12	-4	-1	256	400	12	-1
13	1	1	625	576	1	25
14	-5	3	576	676	19	3
15	0	5	625	400	0	25
16	5	-4	576	900	29	-4
17	-1	-2	25	16	-1	2
18	4	0	64	100	12	0
19	-2	2	169	144	-2	14
20	3	4	144	225	15	4
21	-3	-5	289	225	-3	10
22	2	-3	256	400	18	-3
23	-4	-1	625	576	-4	23
24	1	1	576	676	25	1
25	-5	3	625	400	-5	23
26	0	5	576	900	24	5
27	5	-4	25	16	5	0
28	-1	-2	64	100	7	-2
29	4	0	169	144	4	12
30	-2	2	144	225	10	2

4 Гипербола

4.1 Геометрические элементы и асимптоты

8. Гипербола задана уравнением

$$A(x-h)^2 - C(y-k)^2 = N.$$

Найдите центр, вершины, фокусы, эксцентриситет, директрисы и асимптоты. Постройте основной прямоугольник и ветви гиперболы.

Значения параметров выберите по номеру своего варианта.

Таблица 9: Таблица значений

Вариант	h	k	A	C	N
1	-3	-1	16	9	144
2	0	4	9	16	144
3	3	-2	144	25	3600
4	-5	3	64	36	2304
5	-2	-3	36	64	2304
6	1	2	576	49	28224
7	4	-4	144	81	11664
8	-4	1	25	144	3600
9	-1	-5	256	144	36864
10	2	0	64	225	14400
11	5	5	16	9	144
12	-3	-1	9	16	144
13	0	4	144	25	3600
14	3	-2	64	36	2304
15	-5	3	36	64	2304
16	-2	-3	576	49	28224
17	1	2	144	81	11664
18	4	-4	25	144	3600
19	-4	1	256	144	36864
20	-1	-5	64	225	14400
21	2	0	16	9	144
22	5	5	9	16	144
23	-3	-1	144	25	3600
24	0	4	64	36	2304
25	3	-2	36	64	2304
26	-5	3	576	49	28224
27	-2	-3	144	81	11664
28	1	2	25	144	3600
29	4	-4	256	144	36864
30	-4	1	64	225	14400

4.2 Гипербола по фокальному свойству

9. Фокусы гиперболы находятся в точках F_1 и F_2, а модуль разности расстояний от любой её точки до фокусов равен Δ. Составьте каноническое уравнение гиперболы в исходной системе координат. Найдите вершины и асимптоты.

Значения параметров выберите по номеру своего варианта.

Таблица 10: Таблица значений

Вариант	F_{1x}	F_{1y}	F_{2x}	F_{2y}	Δ
1	-14	-1	6	-1	12
2	-2	-8	-2	12	16
3	-25	5	25	5	14
4	2	-18	2	12	18
5	-9	0	17	0	24
6	-5	-17	-5	23	24
7	-20	-5	14	-5	30
8	-1	-7	-1	3	6
9	-4	1	6	1	8
10	3	-9	3	17	10
11	-5	-4	15	-4	12
12	-4	-11	-4	9	16
13	-27	2	23	2	14
14	0	-10	0	20	18
15	-11	-3	15	-3	24
16	4	-20	4	20	24
17	-22	3	12	3	30
18	-3	-10	-3	0	6
19	-6	-2	4	-2	8
20	1	-12	1	14	10
21	-7	4	13	4	12
22	5	-14	5	6	16
23	-29	-1	21	-1	14
24	-2	-13	-2	17	18
25	-13	5	13	5	24
26	2	-23	2	17	24
27	-13	0	21	0	30
28	-5	-2	-5	8	6
29	-8	-5	2	-5	8
30	-1	-15	-1	11	10

4.3 Директриальное свойство гиперболы

10. Для гиперболы

$$\frac{(x-h)^2}{\alpha} - \frac{(y-k)^2}{\beta} = 1$$

найдите фокусы, директрисы и эксцентриситет. Для правой вершины M проверьте равенство

$$\frac{|MF_2|}{\rho(M, D_2)} = e.$$

Здесь F_2 — правый фокус, а D_2 — соответствующая ему директриса справа от центра гиперболы. Запишите также уравнения асимптот.

Значения параметров выберите по номеру своего варианта.

Таблица 11: Таблица значений

Вариант	h	k	α	β
1	-4	-2	49	576
2	0	3	81	144
3	4	-3	144	25
4	-3	2	144	256
5	1	-4	225	64
6	5	1	9	16
7	-2	-5	16	9
8	2	0	25	144
9	-5	5	36	64
10	-1	-1	64	36
11	3	4	49	576
12	-4	-2	81	144
13	0	3	144	25
14	4	-3	144	256
15	-3	2	225	64
16	1	-4	9	16
17	5	1	16	9
18	-2	-5	25	144
19	2	0	36	64
20	-5	5	64	36
21	-1	-1	49	576
22	3	4	81	144
23	-4	-2	144	25
24	0	3	144	256
25	4	-3	225	64
26	-3	2	9	16
27	1	-4	16	9
28	5	1	25	144
29	-2	-5	36	64
30	2	0	64	36

5 Парабола

5.1 Парабола, заданная уравнением

11. Парабола задана уравнением

$$(y-k)^2 = q(x-h), \qquad q \neq 0.$$

Найдите вершину, параметр $p > 0$, фокус, директрису и ось симметрии. Укажите направление ветвей. Найдите концы фокальной хорды, перпендикулярной оси параболы, и её длину.

Значения параметров выберите по номеру своего варианта.

Таблица 12: Таблица значений

Вариант	h	k	q
1	-3	-4	-24
2	0	0	-20
3	3	4	-16
4	-5	-3	-12
5	-2	1	-8
6	1	5	-4
7	4	-2	4
8	-4	2	8
9	-1	-5	12
10	2	-1	16
11	5	3	20
12	-3	-4	24
13	0	0	-24
14	3	4	-20
15	-5	-3	-16
16	-2	1	-12
17	1	5	-8
18	4	-2	-4
19	-4	2	4
20	-1	-5	8
21	2	-1	12
22	5	3	16
23	-3	-4	20
24	0	0	24
25	3	4	-24
26	-5	-3	-20
27	-2	1	-16
28	1	5	-12
29	4	-2	-8
30	-4	2	-4

5.2 Парабола по фокусу и директрисе

12. Фокус параболы находится в точке F, а директриса D указана в таблице. Используя равенство расстояний до фокуса и директрисы, выведите уравнение параболы, найдите её вершину и постройте кривую.

Значения параметров выберите по номеру своего варианта.

Таблица 13: Таблица значений

Вариант	F_x	F_y	D
1	0	−3	$x = -4$
2	2	5	$y = -1$
3	−6	−4	$x = 2$
4	1	−5	$y = 5$
5	9	−5	$x = -3$
6	0	4	$y = 0$
7	−3	5	$x = 3$
8	−1	−13	$y = -5$
9	8	4	$x = -2$
10	−2	13	$y = 1$
11	0	3	$x = 4$
12	−3	−10	$y = -4$
13	7	2	$x = -1$
14	−4	12	$y = 2$
15	−7	1	$x = 5$
16	−5	−7	$y = -3$
17	6	0	$x = 0$
18	5	11	$y = 3$
19	−15	−1	$x = -5$
20	4	−14	$y = -2$
21	5	−2	$x = 1$
22	3	10	$y = 4$
23	−12	−3	$x = -4$
24	2	−11	$y = -1$
25	14	−4	$x = 2$
26	1	9	$y = 5$
27	−9	−5	$x = -3$
28	0	−8	$y = 0$
29	13	5	$x = 3$
30	−1	7	$y = -5$

5.3 Парабола по вершине и точке

13. Ось параболы параллельна оси Oy, её вершина находится в точке A, а точка M принадлежит параболе. Составьте уравнение параболы и найдите её параметр, фокус и директрису.

Значения параметров выберите по номеру своего варианта.

Таблица 14: Таблица значений

Вариант	A_x	A_y	M_x	M_y
1	-4	-2	-16	-14
2	-2	3	8	-7
3	0	-3	-8	-11
4	2	2	8	-4
5	4	-4	0	-8
6	-5	1	-3	-1
7	-3	-5	-1	-3
8	-1	0	-5	4
9	1	5	7	11
10	3	-1	-5	7
11	5	4	15	14
12	-4	-2	-16	10
13	-2	3	-14	-9
14	0	-3	10	-13
15	2	2	-6	-6
16	4	-4	10	-10
17	-5	1	-9	-3
18	-3	-5	-1	-7
19	-1	0	1	2
20	1	5	-3	9
21	3	-1	9	5
22	5	4	-3	12
23	-4	-2	6	8
24	-2	3	-14	15
25	0	-3	-12	-15
26	2	2	12	-8
27	4	-4	-4	-12
28	-5	1	1	-5
29	-3	-5	-7	-9
30	-1	0	1	-2

6 Единое фокусно-директриальное определение

6.1 Классификация по эксцентриситету

14. Точка $M(x, y)$ движется так, что отношение расстояния от неё до фокуса F к расстоянию до прямой $D\colon x = d$ постоянно и равно e. Для каждого из двух значений e_1 и e_2:

    a) составьте уравнение геометрического места точек;

    b) определите тип кривой;

    c) приведите уравнение к каноническому виду;

    d) найдите центр, вершины, второй фокус и вторую директрису.

Значения параметров выберите по номеру своего варианта.

Таблица 15: Таблица значений

Вариант	F_x	F_y	d	e_1	e_2
1	0	-2	-4	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$
2	-8	3	-2	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$
3	8	-3	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$
4	-8	2	2	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{2}$
5	16	-4	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$
6	-9	1	-5	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$
7	3	-5	-3	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$
8	-9	0	-1	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{2}$
9	11	5	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$
10	-9	-1	3	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$
11	9	4	5	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$
12	-10	-2	-4	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{2}$
13	6	3	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$
14	-10	-3	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$
15	14	2	2	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$
16	0	-4	4	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{2}$
17	1	1	-5	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$
18	-11	-5	-3	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$
19	9	0	-1	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$
20	-11	5	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{2}$
21	7	-1	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$
22	-1	4	5	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$
23	4	-2	-4	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$
24	-12	3	-2	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{2}$
25	12	-3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$
26	-2	2	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$
27	10	-4	4	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$
28	-13	1	-5	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{2}$
29	7	-5	-3	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$
30	-13	0	-1	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$