Практическая работа №6

Тема: Произведения векторов.

Номер строки в каждой таблице соответствует номеру варианта. Необходимо решить все задачи, используя исходные данные своего варианта.

Координаты заданы в правой ортонормированной системе. Смешанное произведение понимается как $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. В задачах на угол допускается точный ответ через arccos или приближённый в градусах с точностью до $0{,}01^\circ$. В задачах №7 и №15 координаты точек заданы в метрах, а компоненты силы — в ньютонах.

Содержание

1 Скалярное произведение **2**

1.1 Вычисление скалярного произведения и угла между векторами . . 2

1.2 Ортогональность векторов 4

1.3 Проекция вектора и высота треугольника 6

1.4 Приложения скалярного произведения 8

2 Векторное произведение **10**

2.1 Вычисление векторного произведения и коллинеарность 10

2.2 Нормаль и ориентация тройки векторов 12

2.3 Площади фигур 14

2.4 Момент силы и свойства векторного произведения 16

3 Смешанное произведение **18**

3.1 Вычисление смешанного произведения, объём и ориентация . . . 18

3.2 Компланарность векторов и точек 20

3.3 Объём и высота тетраэдра 22

3.4 Свойства смешанного произведения 24

1 Скалярное произведение

1.1 Вычисление скалярного произведения и угла между векторами

1. Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычислите скалярное произведение и угол между ними.

Таблица 1: Таблица значений

Вариант	a_x	a_y	a_z	b_x	b_y	b_z
1	1	4	−2	−4	4	3
2	−2	1	1	−1	2	4
3	2	3	4	−2	2	−4
4	1	2	2	3	0	3
5	4	−4	−4	−2	−3	4
6	1	−4	−3	3	−4	3
7	0	4	−1	3	3	−2
8	−1	3	2	1	−1	−1
9	−1	2	2	−4	−2	−4
10	0	2	0	4	2	3
11	1	0	−3	1	4	−4
12	0	0	−1	−1	3	−1
13	1	−3	4	−3	3	−4
14	3	−3	2	3	3	2
15	0	4	−1	−3	1	1
16	0	−1	2	1	1	−4
17	1	0	−3	4	3	1
18	−4	−1	2	0	−3	−2
19	1	−3	2	2	1	0
20	1	3	4	−3	0	3
21	2	−3	4	−4	−1	−3
22	1	−1	0	−3	1	3
23	4	0	−1	−3	2	−1
24	2	4	−3	1	4	1
25	4	−2	−1	0	3	2
26	−4	4	1	−3	2	0
27	4	−4	−4	4	−1	3
28	4	3	−4	4	0	3
29	−3	2	4	−4	−1	−1
30	−2	2	4	−3	−3	−2

2. Единичные векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ образуют угол α. Для $\vec{a} = p\vec{m} + q\vec{n}$ и $\vec{b} = r\vec{m} + s\vec{n}$ найдите скалярное произведение и угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Таблица 2: Таблица значений

Вариант	α	p	q	r	s
1	$45°$	-3	2	3	2
2	$30°$	3	3	-1	-1
3	$30°$	3	-1	-1	3
4	$30°$	3	-2	1	3
5	$45°$	-2	1	2	3
6	$45°$	2	3	-1	1
7	$135°$	-3	-1	-2	-3
8	$45°$	-3	-2	2	1
9	$120°$	-1	-3	-1	2
10	$90°$	-3	-2	-2	-2
11	$45°$	-1	-2	-3	-1
12	$120°$	-1	1	-1	-3
13	$135°$	-2	1	2	2
14	$120°$	3	-2	-2	-2
15	$30°$	1	-2	-1	-1
16	$135°$	1	-2	1	3
17	$30°$	2	2	2	1
18	$90°$	-1	1	-2	-3
19	$45°$	2	-1	3	3
20	$30°$	3	2	1	1
21	$90°$	1	-2	-1	2
22	$90°$	-2	2	-1	2
23	$60°$	-1	2	-3	1
24	$135°$	1	-3	-3	-3
25	$60°$	2	-2	-2	-2
26	$120°$	1	-2	-3	1
27	$30°$	-2	-3	3	-1
28	$45°$	-1	3	3	2
29	$30°$	2	-2	-2	-2
30	$135°$	3	3	-3	2

1.2 Ортогональность векторов

3. При каком значении λ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны?

Таблица 3: Таблица значений

Вариант	a_x	a_y	a_z	b_x	b_y	b_z
1	λ	1	1	1	-1	3
2	λ	2	4	-4	-4	-3
3	λ	1	4	-4	-4	2
4	λ	-3	-3	-1	-2	1
5	λ	1	2	1	4	-4
6	λ	-4	-2	1	2	-2
7	λ	3	3	1	-2	2
8	λ	1	-2	-1	-2	1
9	λ	4	-2	4	-2	2
10	λ	-3	4	-4	4	2
11	λ	4	3	1	1	-3
12	λ	-2	-1	3	2	-4
13	λ	-2	2	-2	-4	3
14	λ	2	4	4	4	1
15	λ	4	3	4	-4	-4
16	λ	1	-2	-4	4	-2
17	λ	4	2	2	1	4
18	λ	3	3	2	-3	3
19	λ	-4	-4	-2	-1	1
20	λ	-4	-2	4	-1	-2
21	λ	2	3	3	3	-2
22	λ	-2	2	1	-4	-2
23	λ	-4	3	3	3	2
24	λ	2	1	2	4	2
25	λ	4	-4	1	-4	-2
26	λ	2	3	-1	-2	-1
27	λ	-1	3	4	4	-4
28	λ	-4	4	-1	-2	-1
29	λ	-1	1	-3	4	-2
30	λ	4	1	-2	-3	2

4. Найдите все векторы $\vec{p}$, лежащие в плоскости Oxy, перпендикулярные вектору $\vec{a}$ и имеющие длину L.

Таблица 4: Таблица значений

Вариант	a_x	a_y	a_z	L
1	8	15	−1	68
2	4	3	2	10
3	5	12	−2	52
4	−7	24	1	25
5	−4	3	−3	20
6	15	−8	3	34
7	12	−5	−4	13
8	−7	24	−5	75
9	5	−12	−1	26
10	−5	12	−4	52
11	15	−8	2	17
12	−12	5	0	26
13	7	−24	0	100
14	5	12	−1	13
15	−12	5	−1	13
16	−5	12	5	26
17	5	12	0	52
18	5	12	−5	13
19	−24	7	−3	100
20	−8	−15	−3	34
21	7	24	1	25
22	15	8	2	51
23	−12	5	5	26
24	3	−4	4	10
25	7	24	2	50
26	8	15	3	34
27	5	12	−4	39
28	−5	−12	−5	13
29	24	−7	−5	50
30	−3	−4	4	10

1.3 Проекция вектора и высота треугольника

5. Найдите скалярную проекцию вектора $\vec{a}$ на направление $\vec{b}$ (с учётом знака) и его векторную проекцию на $\vec{b}$.

Таблица 5: Таблица значений

Вариант	a_x	a_y	a_z	b_x	b_y	b_z
1	-1	0	2	3	-1	-1
2	4	2	4	2	-3	2
3	-1	0	0	-1	2	-3
4	0	-4	-3	2	0	-3
5	0	2	-2	-1	-4	1
6	1	1	0	-1	3	-3
7	-3	4	1	-2	3	-4
8	1	-4	1	0	-2	0
9	4	1	0	-4	-3	-4
10	1	1	3	-3	2	0
11	-3	-2	1	-2	-3	-1
12	-1	-4	1	-2	0	-4
13	3	-4	3	-4	1	0
14	-4	2	-4	-2	-2	-3
15	-2	-4	2	-4	0	3
16	4	-4	-2	1	-4	0
17	-2	-1	1	-2	0	4
18	0	3	-1	3	2	-4
19	4	-4	-4	1	2	4
20	-1	-1	0	1	-3	1
21	3	0	-3	-1	0	3
22	1	2	2	-3	-1	2
23	-1	0	-1	3	2	1
24	4	-2	-2	-1	3	-1
25	4	-1	-2	3	3	3
26	-1	2	4	3	-4	-4
27	4	2	4	1	-4	4
28	-3	2	-4	-4	0	1
29	-2	-4	3	1	4	-1
30	4	-1	4	-2	1	3

6. Даны точки $A(0,0,0)$, B и C. Найдите длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины B на прямую AC (сторону или её продолжение), используя скалярное произведение.

Таблица 6: Таблица значений

Вариант	B_x	B_y	B_z	C_x	C_y	C_z
1	-4	-4	2	-2	-4	-4
2	0	3	-4	2	1	-4
3	-2	4	-2	1	-2	2
4	2	3	0	2	-1	0
5	2	-4	-1	4	-3	4
6	3	-2	2	-2	-4	1
7	4	1	-4	2	-2	1
8	-1	4	4	-2	0	-4
9	4	1	1	-2	-2	-2
10	0	0	3	2	0	3
11	4	0	3	-1	0	2
12	3	-3	0	-3	-3	4
13	-4	2	0	2	-4	-2
14	1	4	-2	2	4	4
15	2	4	3	3	1	-2
16	2	2	2	1	2	0
17	4	3	0	-1	2	1
18	-3	0	-3	1	0	4
19	-4	0	2	3	-4	1
20	-3	1	-2	-2	3	-1
21	1	-1	0	-4	3	2
22	1	2	0	1	-2	-3
23	3	1	-1	-3	2	-4
24	-4	-4	2	2	1	-3
25	-3	3	1	0	-3	1
26	-3	-3	-2	-1	-3	-4
27	1	4	4	-3	-2	3
28	-1	-4	4	3	3	-1
29	1	-4	1	0	3	-4
30	0	-1	0	0	-3	-3

1.4 Приложения скалярного произведения

7. Постоянная сила $\vec{F}$ действует на материальную точку при перемещении из A в B. Вычислите работу силы.

Таблица 7: Таблица значений

Вариант	F_x	F_y	F_z	A_x	A_y	A_z	B_x	B_y	B_z
1	1	0	1	1	4	1	5	6	2
2	−3	0	−1	0	4	−1	−2	3	−1
3	−1	−4	−3	−3	−2	4	−6	−1	1
4	2	2	0	0	3	1	−4	3	5
5	−3	4	−1	−4	−1	4	−4	−5	2
6	3	2	0	−5	−4	−5	−7	−5	−3
7	−2	2	−2	2	−5	2	0	−4	6
8	−2	−1	−4	−1	2	−4	−4	5	−3
9	−2	3	1	0	−1	1	−2	0	5
10	−2	0	1	−3	−4	2	−3	−1	4
11	2	0	4	5	2	5	4	3	1
12	−4	1	4	3	5	2	6	1	3
13	0	3	4	−2	1	2	−4	4	4
14	3	2	−4	1	−1	3	1	−3	1
15	−4	−2	3	5	−3	3	6	−1	1
16	−3	−2	4	3	−1	0	7	−4	−3
17	−2	1	2	1	5	−4	−1	9	−2
18	1	3	1	4	−5	5	8	−2	7
19	2	−1	1	−3	5	−5	−6	7	−4
20	3	1	0	−2	−5	4	−1	−6	5
21	0	1	−2	2	0	−2	−1	4	−4
22	−2	−2	−3	2	−2	−4	−1	−5	−2
23	1	−3	4	−4	−4	5	−1	−4	1
24	4	−3	−1	−5	−1	2	−7	−4	5
25	−4	−2	4	−1	5	−3	−5	9	0
26	−2	2	−3	−1	−4	−5	3	−6	−8
27	4	−3	0	1	−3	−3	1	0	−5
28	−3	−3	2	4	−3	−3	6	−7	1
29	3	−1	4	4	3	−1	2	6	−2
30	−2	−1	−3	−5	−3	−3	−8	−6	−6

8. Длины сторон параллелограмма равны $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$, а угол между ними равен α. Найдите меньший угол между прямыми, содержащими диагонали параллелограмма ($0 < \varphi \leq 90°$).

Таблица 8: Таблица значений

Вариант	$\lvert\vec{a}\rvert$	$\lvert\vec{b}\rvert$	α
1	3	5	60°
2	4	7	45°
3	4	3	30°
4	5	8	45°
5	8	5	135°
6	6	6	90°
7	5	4	90°
8	7	4	30°
9	6	3	135°
10	7	8	90°
11	8	8	120°
12	7	6	120°
13	5	3	120°
14	3	6	60°
15	3	5	90°
16	7	7	90°
17	3	4	60°
18	3	4	90°
19	6	7	135°
20	3	8	90°
21	3	3	135°
22	6	5	30°
23	7	4	60°
24	7	2	90°
25	3	2	30°
26	4	5	135°
27	3	3	60°
28	6	6	135°
29	4	6	90°
30	5	6	135°

2 Векторное произведение

2.1 Вычисление векторного произведения и коллинеарность

9. Вычислите $\vec{a} \times \vec{b}$ и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Таблица 9: Таблица значений

Вариант	a_x	a_y	a_z	b_x	b_y	b_z
1	4	−1	0	−2	−2	4
2	2	0	−1	−3	2	−4
3	0	1	−4	1	3	−1
4	4	0	−3	2	1	2
5	−2	1	−2	3	4	0
6	−2	2	4	−2	−2	−4
7	−2	−1	2	3	−2	4
8	0	0	−2	−3	−4	0
9	−1	2	1	−2	2	4
10	−1	0	−3	3	−4	4
11	1	−4	−1	−2	3	−2
12	3	2	−2	−1	−1	1
13	4	−2	−1	−4	1	0
14	1	0	−4	−2	2	−4
15	3	−4	0	0	−4	−3
16	−1	−4	2	1	−3	2
17	3	3	0	0	−2	2
18	4	2	0	−2	4	−3
19	−3	−3	0	4	−2	−1
20	−2	4	−1	3	3	1
21	−3	0	4	−1	−3	3
22	4	1	1	−3	3	0
23	−3	−3	−1	−1	−2	2
24	−2	−1	3	2	0	3
25	0	3	0	−2	−2	4
26	−2	1	3	−4	−2	0
27	−2	−3	−1	2	−2	0
28	2	−3	−2	−3	−4	−2
29	−2	3	−2	−4	−2	−3
30	−3	−3	−2	3	4	−4

10. При каком значении λ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны?

Таблица 10: Таблица значений

Вариант	a_x	a_y	a_z	b_x	b_y	b_z
1	2	-1	-1	λ	3	3
2	-1	-2	3	λ	4	-6
3	-2	-1	4	λ	1	-4
4	3	2	2	λ	-2	-2
5	2	-1	3	λ	2	-6
6	3	-3	-3	λ	3	3
7	-2	3	2	λ	9	6
8	-2	4	-2	λ	12	-6
9	2	1	-4	λ	-3	12
10	3	-2	-3	λ	6	9
11	4	4	-4	λ	-4	4
12	-4	2	3	λ	4	6
13	-3	3	4	λ	6	8
14	-4	1	-4	λ	2	-8
15	-2	-1	-4	λ	-2	-8
16	3	-3	1	λ	6	-2
17	-1	-3	-4	λ	6	8
18	1	-1	1	λ	-2	2
19	4	-3	3	λ	-9	9
20	-4	-4	2	λ	8	-4
21	-2	4	-1	λ	12	-3
22	-4	-1	-3	λ	3	9
23	1	2	-4	λ	-6	12
24	4	-2	3	λ	6	-9
25	2	1	-3	λ	3	-9
26	2	1	-1	λ	3	-3
27	2	1	-3	λ	2	-6
28	-4	3	-3	λ	-6	6
29	-2	-4	2	λ	4	-2
30	1	1	-1	λ	2	-2

2.2 Нормаль и ориентация тройки векторов

11. Найдите единичную нормаль $\vec{c}$ к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, чтобы тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ была правой.

Таблица 11: Таблица значений

Вариант	a_x	a_y	a_z	b_x	b_y	b_z
1	0	-1	2	2	1	-2
2	-4	2	-1	4	-2	4
3	-3	3	-4	0	-4	-2
4	2	0	-1	-1	4	1
5	-1	1	-3	3	-2	1
6	-3	-4	1	-2	1	3
7	3	0	-3	-1	2	4
8	-1	-1	-1	1	3	3
9	3	-3	2	-1	-1	0
10	-1	4	-2	1	-2	2
11	-2	0	3	1	0	1
12	0	3	2	0	0	-1
13	0	0	-2	4	-2	4
14	4	0	3	4	-1	2
15	2	0	1	2	-3	-3
16	-3	-4	4	-2	-3	-4
17	2	-3	-4	-2	-1	-3
18	2	3	2	-1	2	2
19	1	-4	0	-2	-3	4
20	2	0	-4	-1	0	0
21	3	3	-3	-3	-1	4
22	0	-1	0	3	-2	4
23	-1	0	-4	3	1	0
24	-3	-4	-1	-2	-1	4
25	1	0	-4	0	2	-4
26	-3	-4	1	4	3	-1
27	-3	2	-3	2	4	1
28	2	1	-3	-2	-4	3
29	-4	2	2	1	-3	3
30	1	-2	-2	2	3	-3

12. Определите, правой или левой является тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Таблица 12: Таблица значений

Вариант	a_x	a_y	a_z	b_x	b_y	b_z	c_x	c_y	c_z
1	4	−1	−4	3	4	−1	3	−4	0
2	−4	0	3	−3	2	2	−4	−3	−1
3	−1	−1	0	4	4	1	−2	−1	3
4	4	1	4	1	−3	2	−1	−2	−2
5	3	1	−2	−1	4	3	1	−3	1
6	−1	4	2	3	−3	1	0	−1	−1
7	4	3	2	0	2	−3	4	3	3
8	−4	1	−1	0	−3	−4	−2	−4	1
9	−2	3	−2	−1	−4	−3	−4	2	1
10	−3	−3	−1	4	1	2	3	−3	−4
11	2	4	−3	−4	−1	−4	1	2	−3
12	1	−2	3	−2	−2	−2	4	−2	−1
13	3	2	−3	−1	0	0	3	4	2
14	1	1	−3	−1	−3	1	−4	−1	1
15	0	−1	−4	−1	−4	−2	−4	1	−2
16	0	3	1	3	0	−1	−1	−3	−4
17	−4	−2	4	−4	−1	3	2	−1	1
18	2	−3	3	−3	−1	3	3	4	0
19	−1	2	−3	−2	4	2	−4	3	−1
20	−4	2	−4	1	−3	−2	4	−1	−2
21	−1	2	−4	0	1	−3	2	−4	2
22	1	−1	4	2	−2	4	3	−2	2
23	4	2	−3	3	4	−3	−2	3	0
24	−3	−4	−3	2	0	2	2	0	4
25	1	0	0	−3	0	−3	0	3	−2
26	−2	2	1	−3	−3	1	1	−1	−4
27	−1	3	−2	4	−1	0	3	−4	1
28	−1	4	3	1	−1	−1	2	−2	4
29	1	−2	2	4	3	−4	1	−4	−3
30	0	1	−1	4	−4	2	−3	1	4

2.3 Площади фигур

13. Даны точки $A(0,0,0)$, B и C. Найдите площадь треугольника ABC.

Таблица 13: Таблица значений

Вариант	B_x	B_y	B_z	C_x	C_y	C_z
1	-2	4	1	2	0	3
2	0	3	0	-4	1	-1
3	-3	-4	-3	1	-3	-2
4	-2	-1	-2	3	-2	-2
5	4	-1	-2	4	1	3
6	2	-3	1	1	-4	0
7	-1	0	4	-2	-3	3
8	4	4	-2	0	-2	4
9	-2	-2	-3	-2	-1	4
10	-4	3	-3	2	3	4
11	-2	3	3	-2	2	4
12	-4	2	4	-4	-1	2
13	3	3	1	0	2	-1
14	-1	-2	3	-2	2	0
15	-2	1	4	1	-4	2
16	2	-1	3	1	-1	2
17	0	-4	-1	0	0	3
18	-1	4	-1	4	1	0
19	-2	-1	-4	4	3	1
20	-4	3	-4	-3	4	-1
21	4	2	2	3	0	-1
22	4	1	3	-3	-4	0
23	4	3	3	-1	0	4
24	2	-4	-1	-3	2	4
25	-1	-1	0	0	-4	4
26	-3	4	2	-4	-1	-4
27	2	-2	-1	-2	4	3
28	-3	-2	3	1	1	3
29	4	-3	-4	-4	0	-3
30	-2	4	0	0	3	4

14. Диагонали параллелограмма заданы векторами $\vec{d_1}$ и $\vec{d_2}$. Найдите его площадь.

Таблица 14: Таблица значений

Вариант	d_{1x}	d_{1y}	d_{1z}	d_{2x}	d_{2y}	d_{2z}
1	4	−4	4	0	−2	3
2	3	3	−1	0	3	3
3	4	0	−2	−3	4	−3
4	0	2	2	0	1	3
5	2	1	−4	4	0	4
6	−3	−2	3	1	0	4
7	−1	−1	3	0	2	1
8	−1	−2	−4	−4	−4	−4
9	−4	−2	3	3	0	−1
10	−1	4	3	−1	0	−2
11	4	4	4	−3	−4	4
12	−2	−4	−2	2	1	−1
13	−4	3	1	−3	−1	−4
14	3	4	2	−2	−4	−3
15	4	3	1	−2	−4	4
16	2	3	−1	−2	3	−1
17	0	1	−4	4	−4	2
18	3	−1	1	−1	−4	1
19	−1	−3	2	−3	−2	0
20	3	4	0	2	−1	2
21	−2	4	2	2	3	−3
22	2	3	−3	2	−2	−1
23	−2	−4	3	3	−2	4
24	4	4	−3	0	−2	−2
25	−3	−1	−1	2	−2	−4
26	0	−4	−4	−1	−3	1
27	4	2	3	−3	1	−3
28	2	−2	4	−4	−4	4
29	2	−4	−1	−1	4	−2
30	1	2	3	0	1	−1

2.4 Момент силы и свойства векторного произведения

15. Сила $\vec{F}$ приложена в точке P. Найдите вектор момента этой силы относительно точки A и величину момента.

Таблица 15: Таблица значений

Вариант	F_x	F_y	F_z	P_x	P_y	P_z	A_x	A_y	A_z
1	4	−2	−1	−6	3	5	−3	4	4
2	1	0	4	3	1	3	1	4	1
3	2	2	−2	0	4	2	1	2	−2
4	−2	0	−1	−2	−4	−4	2	−2	−2
5	−4	1	−4	−3	6	1	−1	4	−3
6	1	−2	−3	−1	0	−7	1	1	−3
7	−4	−4	4	−5	−3	7	−4	−2	3
8	−1	1	−2	1	−8	1	0	−4	−2
9	−4	−4	4	−1	0	−2	0	−1	0
10	1	3	−3	−3	−1	3	−2	2	1
11	−4	−4	4	−5	−2	1	−2	−3	3
12	−4	3	2	4	0	1	2	2	−3
13	−2	4	0	−6	−5	1	−3	−1	2
14	−3	2	−4	0	−1	0	−1	−3	3
15	1	1	3	2	−2	0	2	−3	−4
16	2	−4	−3	1	1	−7	0	−3	−4
17	−1	−2	−4	3	5	−1	3	1	−4
18	−1	2	4	4	1	−1	2	0	−2
19	−3	1	4	−3	6	1	0	2	3
20	1	−4	3	2	0	5	2	0	1
21	4	0	4	−4	2	−3	−2	−1	−3
22	−3	0	3	1	0	−1	−2	−3	−4
23	−4	3	1	−3	−8	1	1	−4	4
24	1	−3	3	1	0	−4	3	−2	−2
25	−1	−1	1	0	−6	1	−1	−3	−1
26	4	1	1	6	2	0	2	−1	−4
27	−2	−2	2	−5	−1	7	−3	0	3
28	3	−3	−4	6	5	2	3	4	2
29	4	2	−1	2	−2	3	0	−2	3
30	2	−1	3	0	−5	0	1	−1	4

16. Упростите выражение $(p\vec{a} + q\vec{b}) \times (r\vec{a} + s\vec{b}) + t(\vec{a} \times \vec{b})$.

Таблица 16: Таблица значений

Вариант	p	q	r	s	t
1	-2	-1	1	1	-3
2	-3	2	-3	-2	2
3	4	1	-4	-3	2
4	-3	4	2	-1	4
5	3	-3	1	-1	-3
6	1	-2	-3	-2	-4
7	1	-4	2	-2	1
8	2	2	4	3	-2
9	4	4	-2	4	4
10	-3	1	-3	-4	4
11	-2	3	4	3	-1
12	2	3	1	-4	-1
13	-1	4	1	-1	-4
14	1	3	-2	-2	4
15	1	-3	-1	4	-2
16	-4	4	-1	3	4
17	-4	-1	4	-2	-2
18	1	4	4	-1	3
19	-4	-4	-4	4	1
20	3	1	-1	2	4
21	4	1	2	2	-1
22	4	-1	3	1	4
23	1	-1	-3	-2	1
24	1	-3	4	-1	3
25	-2	-2	4	2	4
26	2	4	-2	-4	1
27	-1	-1	2	2	4
28	-1	-3	-1	1	-1
29	2	4	-3	-1	-1
30	-4	-2	1	4	-3

3 Смешанное произведение

3.1 Вычисление смешанного произведения, объём и ориентация

17. Вычислите смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Таблица 17: Таблица значений

Вариант	a_x	a_y	a_z	b_x	b_y	b_z	c_x	c_y	c_z
1	3	1	1	4	−1	−3	3	−4	1
2	−1	−1	−2	1	4	4	−2	4	−1
3	−4	3	2	−3	2	3	0	2	0
4	0	4	2	−2	2	−3	2	2	4
5	3	−3	0	1	−4	0	1	4	4
6	0	3	−3	3	2	−3	1	−1	0
7	4	3	−4	4	1	1	1	−4	−4
8	−2	2	2	4	0	−4	2	3	2
9	−3	4	−2	1	−1	−3	−1	−2	1
10	−2	4	0	2	3	−2	4	3	−1
11	0	−4	−3	−2	4	−4	−2	3	0
12	−1	−2	−1	1	3	−3	2	0	0
13	4	2	2	1	1	0	−4	−2	−4
14	4	−3	1	2	−1	0	3	0	−4
15	0	−2	1	−4	2	−2	3	2	2
16	1	−1	3	−2	0	3	4	0	0
17	−4	−3	3	4	1	1	0	−2	−2
18	−2	−1	−3	1	3	3	1	3	4
19	4	3	−2	−2	−4	−3	3	2	1
20	3	−4	−1	2	2	−3	4	−4	0
21	1	−2	0	−3	−1	−4	0	0	3
22	−1	4	−4	−2	2	0	2	−4	1
23	0	1	1	−3	4	0	0	−2	3
24	−1	2	3	4	−4	−4	1	−4	−4
25	−2	−1	−3	1	−1	1	−1	−2	0
26	−1	0	4	0	−2	0	−4	−2	0
27	3	−1	−2	1	−3	−1	4	2	−1
28	2	−1	−3	4	4	0	4	3	3
29	−2	1	4	1	−3	0	−1	−4	−4
30	4	−4	3	4	3	1	−3	−2	4

18. На векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ построен параллелепипед. Найдите его объём и определите ориентацию заданной тройки.

Таблица 18: Таблица значений

Вариант	a_x	a_y	a_z	b_x	b_y	b_z	c_x	c_y	c_z
1	0	2	3	−1	0	1	4	−2	2
2	0	−2	0	−4	−1	−4	−2	−3	3
3	1	−3	4	4	−1	3	−4	1	−2
4	0	−3	−3	0	−1	−3	3	−1	−2
5	4	3	0	2	3	3	−1	−3	−4
6	4	4	−4	3	−4	−4	0	−3	3
7	−3	−2	−3	4	3	2	3	0	−3
8	0	−3	0	1	−4	2	−3	−2	4
9	−1	−1	1	−3	−2	2	−2	1	4
10	3	−3	0	0	4	−2	−2	2	4
11	3	−4	2	−1	3	4	−4	3	−4
12	3	−2	−4	−1	−1	−2	4	−3	3
13	−2	−3	4	3	0	−2	2	2	1
14	2	−1	−1	4	−1	3	−1	3	4
15	−1	−1	−4	3	−4	3	0	−3	4
16	−1	2	−2	1	0	−3	−3	4	3
17	2	−1	3	3	−3	2	−3	2	4
18	3	2	−2	−4	4	−4	0	2	0
19	−3	2	−4	−2	2	0	3	−1	3
20	4	3	0	2	3	3	−1	−1	−3
21	1	4	0	4	2	−3	3	−4	4
22	−3	−4	1	−1	2	1	−4	−2	−3
23	2	4	−1	−2	3	4	−4	−1	−1
24	−2	−3	2	2	2	−2	−3	−4	−4
25	2	0	1	4	0	−1	−4	−1	2
26	−3	−3	3	−1	−2	0	−1	0	4
27	−4	−3	2	4	−3	−4	3	−4	−4
28	3	−1	−4	4	1	3	3	3	0
29	3	2	4	−2	0	1	1	2	−2
30	4	4	−2	4	4	2	3	0	1

3.2 Компланарность векторов и точек

19. При каком значении λ векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны?

Таблица 19: Таблица значений

Вариант	a_x	a_y	a_z	b_x	b_y	b_z	c_x	c_y	c_z
1	-4	4	1	4	4	-3	λ	20	-7
2	4	-1	-4	-1	-1	-3	λ	5	18
3	0	-4	-1	-3	4	-4	λ	-8	-7
4	3	-1	0	-3	4	-4	λ	-9	12
5	-4	-2	0	-4	3	2	λ	-13	-6
6	1	-4	-3	-2	3	4	λ	18	17
7	1	2	-4	2	-3	0	λ	12	-12
8	0	1	-3	-4	3	2	λ	-2	-5
9	2	-3	-1	0	-1	1	λ	5	3
10	-2	-3	0	-2	3	-1	λ	3	-3
11	3	1	-3	1	-4	-1	λ	10	9
12	-2	-4	-3	-2	2	-2	λ	-2	-5
13	3	-1	0	1	4	-2	λ	14	-6
14	-2	-3	4	2	-4	-4	λ	-5	-12
15	-3	-2	-3	-4	4	4	λ	2	-1
16	-2	-4	1	4	-2	-2	λ	-10	-5
17	4	1	3	-2	4	-4	λ	14	-6
18	3	-1	1	-4	-2	4	λ	-1	-1
19	4	2	-2	3	2	4	λ	8	-2
20	0	-2	4	-4	-1	3	λ	-5	11
21	3	0	3	-2	-3	-3	λ	3	6
22	1	3	-4	4	-3	-3	λ	12	5
23	-4	0	-3	-4	4	-2	λ	-8	-5
24	-4	-1	2	-4	-3	3	λ	4	-5
25	0	-3	2	0	2	-4	λ	15	-18
26	3	-4	4	-1	4	4	λ	4	-20
27	1	-3	-1	3	0	1	λ	-9	-1
28	2	1	3	-1	4	-2	λ	2	-8
29	1	4	-2	4	4	4	λ	-16	-4
30	0	1	-3	-1	3	-1	λ	8	-8

20. При каком значении λ точки $A(0,0,0)$, B, C и D лежат в одной плоскости?

Таблица 20: Таблица значений

Вариант	B_x	B_y	B_z	C_x	C_y	C_z	D_x	D_y	D_z
1	-2	-2	4	-2	-4	1	λ	2	10
2	-3	4	0	-3	-2	-4	λ	6	-12
3	3	4	-1	0	3	-2	λ	1	-4
4	0	4	3	1	0	4	λ	8	10
5	0	-3	2	2	1	-1	λ	-12	9
6	-4	-1	-2	3	-3	3	λ	-6	-3
7	-2	4	1	-3	4	-1	λ	0	-6
8	3	4	2	4	0	-4	λ	8	-4
9	3	3	2	2	0	-1	λ	6	5
10	4	-4	2	0	-1	1	λ	-7	5
11	-4	-3	1	0	-4	4	λ	14	-10
12	-3	3	4	0	-1	-3	λ	9	17
13	4	-1	-3	-3	3	3	λ	-6	-12
14	4	0	-2	2	-2	-4	λ	6	16
15	4	3	1	3	1	-2	λ	9	-4
16	1	-3	1	-3	2	4	λ	4	-6
17	0	2	-2	-1	-4	-1	λ	-14	4
18	-1	-4	2	1	-3	1	λ	-13	5
19	3	-1	-4	2	2	-2	λ	-1	-14
20	1	4	3	1	2	-3	λ	-6	0
21	-1	-2	-2	-1	-2	-4	λ	0	6
22	1	-4	-4	-1	-4	-2	λ	-12	-8
23	2	-1	1	-1	1	2	λ	1	8
24	0	-4	-3	-4	2	-3	λ	-16	-3
25	1	-1	-2	4	-3	-1	λ	6	-3
26	-4	-3	-3	1	-4	3	λ	-17	-3
27	-3	2	3	4	0	-3	λ	2	6
28	-4	1	1	-2	2	1	λ	-5	-3
29	4	-4	-1	-3	-2	1	λ	-2	4
30	-2	4	0	4	-1	4	λ	2	8

3.3 Объём и высота тетраэдра

21. Найдите объём тетраэдра с вершинами $A(0,0,0)$, B, C и D.

Таблица 21: Таблица значений

Вариант	B_x	B_y	B_z	C_x	C_y	C_z	D_x	D_y	D_z
1	4	4	0	1	0	−4	0	−4	3
2	3	−1	4	0	−3	−4	0	2	−4
3	3	2	−3	−1	−4	−1	4	1	2
4	−3	−2	1	−3	2	−2	2	4	2
5	−4	−1	3	−1	3	1	4	−3	−1
6	3	1	2	4	0	3	1	0	0
7	−3	−1	1	−4	2	3	−1	−1	−1
8	0	4	−3	1	−3	2	1	3	3
9	4	−3	−3	2	3	−4	−2	4	2
10	3	0	−1	4	2	−2	2	−1	−3
11	3	−1	−4	1	0	2	−2	−2	0
12	3	3	−2	−2	−3	1	−1	3	−4
13	−1	1	−2	2	0	−4	2	2	2
14	3	2	1	0	0	4	−3	0	4
15	3	3	0	4	−3	−1	1	1	−2
16	1	−3	−4	4	−2	4	−1	−3	−1
17	−1	−1	0	4	−3	−2	1	2	4
18	2	2	4	0	−2	−3	−3	2	−2
19	−3	−2	−3	−3	3	2	−4	0	1
20	−2	4	2	−1	0	−3	1	4	1
21	−3	0	−1	−2	0	−3	−3	2	0
22	−4	−2	2	3	2	3	1	−3	−4
23	2	0	0	−3	−2	−3	4	−1	0
24	−3	−1	4	−3	−1	−1	0	3	−4
25	−4	−1	0	−2	−1	−1	0	1	−3
26	−1	3	−4	4	3	4	−3	−3	3
27	1	1	0	−3	−2	2	0	0	−2
28	−2	4	1	3	2	2	−1	3	−4
29	−4	4	3	−4	1	−4	−4	2	4
30	−2	3	4	1	−1	4	0	−1	4

22. Найдите длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенной из вершины D на плоскость грани ABC, если $A(0, 0, 0)$.

Таблица 22: Таблица значений

Вариант	B_x	B_y	B_z	C_x	C_y	C_z	D_x	D_y	D_z
1	4	4	0	1	0	−4	0	−4	3
2	3	−1	4	0	−3	−4	0	2	−4
3	3	2	−3	−1	−4	−1	4	1	2
4	−3	−2	1	−3	2	−2	2	4	2
5	−4	−1	3	−1	3	1	4	−3	−1
6	3	1	2	4	0	3	1	0	0
7	−3	−1	1	−4	2	3	−1	−1	−1
8	0	4	−3	1	−3	2	1	3	3
9	4	−3	−3	2	3	−4	−2	4	2
10	3	0	−1	4	2	−2	2	−1	−3
11	3	−1	−4	1	0	2	−2	−2	0
12	3	3	−2	−2	−3	1	−1	3	−4
13	−1	1	−2	2	0	−4	2	2	2
14	3	2	1	0	0	4	−3	0	4
15	3	3	0	4	−3	−1	1	1	−2
16	1	−3	−4	4	−2	4	−1	−3	−1
17	−1	−1	0	4	−3	−2	1	2	4
18	2	2	4	0	−2	−3	−3	2	−2
19	−3	−2	−3	−3	3	2	−4	0	1
20	−2	4	2	−1	0	−3	1	4	1
21	−3	0	−1	−2	0	−3	−3	2	0
22	−4	−2	2	3	2	3	1	−3	−4
23	2	0	0	−3	−2	−3	4	−1	0
24	−3	−1	4	−3	−1	−1	0	3	−4
25	−4	−1	0	−2	−1	−1	0	1	−3
26	−1	3	−4	4	3	4	−3	−3	3
27	1	1	0	−3	−2	2	0	0	−2
28	−2	4	1	3	2	2	−1	3	−4
29	−4	4	3	−4	1	−4	−4	2	4
30	−2	3	4	1	−1	4	0	−1	4

3.4 Свойства смешанного произведения

23. Известно, что $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = T$. Вычислите $(p\vec{a} + q\vec{b},\ r\vec{b} + s\vec{c},\ t\vec{a} + u\vec{c})$.

Таблица 23: Таблица значений

Вариант	T	p	q	r	s	t	u
1	5	−1	−3	−2	−3	3	2
2	4	−2	−3	−1	3	3	1
3	−2	−2	−3	1	1	1	3
4	−1	2	1	−2	−3	−2	2
5	−1	−2	−1	2	3	−1	−3
6	1	−1	−3	−3	−2	−2	−3
7	−8	2	−1	−3	−2	1	1
8	−2	1	2	−1	−1	2	1
9	−2	−3	1	3	1	1	3
10	4	−1	−2	3	−2	−2	−2
11	8	1	3	1	3	2	−1
12	2	3	−1	−3	−2	1	−2
13	−3	1	−2	2	1	−1	3
14	−6	−3	−1	1	−2	−2	−1
15	1	3	2	−2	−2	3	3
16	−4	1	−2	3	−2	−3	−2
17	2	−2	−3	−3	−2	3	−1
18	−4	2	−3	−3	1	3	−2
19	−4	−1	−1	1	−1	−1	3
20	−4	3	2	−1	2	−2	2
21	−5	2	1	3	1	3	−1
22	−1	2	2	−1	3	−2	−2
23	−1	2	1	2	2	−3	−2
24	8	1	−3	−1	3	3	1
25	−6	−1	−2	2	−3	2	3
26	−1	−2	−3	2	3	−2	−3
27	−1	−3	2	1	3	2	−3
28	−1	−3	−3	−2	−1	−1	2
29	−7	1	−1	−2	−1	1	−3
30	−3	1	1	3	−1	2	2

24. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарны. При каком значении α выполняется равенство $(r\vec{a} + \alpha\vec{b},\ \vec{b} + p\vec{c},\ \vec{c} + q\vec{a}) = 0$?

Таблица 24: Таблица значений

Вариант	r	p	q
1	-3	-4	-4
2	2	-4	-6
3	1	6	-2
4	1	1	3
5	-5	-2	-6
6	2	-2	-5
7	-5	2	-1
8	6	2	-1
9	-1	-4	3
10	3	2	4
11	-2	1	1
12	1	4	1
13	6	4	-5
14	-1	-2	-6
15	-2	5	5
16	2	3	-4
17	1	1	-4
18	-4	-3	-4
19	-2	5	-4
20	2	4	1
21	-1	1	-4
22	2	3	1
23	3	6	-1
24	5	-6	1
25	3	3	5
26	-4	6	2
27	2	5	3
28	1	-3	-6
29	6	-6	3
30	5	5	2