

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

Квадратная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n \times n}$$

называется матрицей n -го порядка. При этом говорят, что элемент a_{ij} матрицы A стоит на пересечении i -й строки и j -го столбца, где $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq n$.

Каждой квадратной матрице A ставится в соответствие число, которое называется определителем матрицы и обозначается

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для матриц первого, второго и третьего порядка определители вычисляются по формулам:

$$1) \quad |a_{11}| = a_{11},$$

$$2) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$3) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Определители 3-го порядка обычно вычисляются с использованием правила Саррюса: сумма произведений элементов по трём диагоналям, параллельным главной диагонали, минус сумма произведений по трём диагоналям, параллельным побочной диагонали.

Свойства определителя 3-го порядка: а) транспонирование матрицы не изменяет определитель; б) умножение всех элементов некоторой строки (столбца) на число λ умножает определитель на λ ; в) перестановка двух строк (столбцов) меняет знак определителя; в частности, если две строки (столбца) равны, то определитель равен нулю; г) если каждый элемент некоторой строки (столбца) представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все остальные строки (столбцы) прежние, а в данной строке (столбце) в первом определителе стоят первые, а во втором — вторые слагаемые; д) если одна строка (столбец) A_i является линейной комбинацией остальных A_j и A_k : $A_i = \lambda_1 A_j + \lambda_2 A_k$, то определитель равен нулю.

Вычисление определителей n -ного порядка

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется определитель матрицы, получаемой из A вычеркиванием i -й строки и j -го столбца, например, для

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

минор элемента a_{23} равен

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Сумма произведений элементов какой-нибудь строки или столбца на их алгебраические дополнения $(a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in})$ не зависит от выбора строки или столбца. Это число и называется определителем матрицы A :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \\ = (-3) \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \\ + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 - 5 = -17.$$

Отметим, что все свойства справедливы для определителей n -ного порядка. Таким образом, вычислять определитель можно не только разложением по любой строке, но и по любому столбцу:

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Предпочтительно выбирать строку или столбец, содержащий наибольшее количество нулей, так как для нулевого элемента не нужно вычислять его алгебраическое дополнение.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1

1. Вычислить определители:

$$\begin{array}{lll} 1. \begin{vmatrix} -13 & 7 & 18 \\ 16 & -4 & 13 \\ 13 & -4 & -6 \end{vmatrix} & 4. \begin{vmatrix} -14 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & 3 \\ -18 & -20 & 20 \end{vmatrix} & 7. \begin{vmatrix} -1 & -19 & 10 \\ -15 & 20 & 15 \\ -10 & -16 & 2 \end{vmatrix} \\ 2. \begin{vmatrix} -6 & 17 & 6 \\ 4 & 1 & -6 \\ 20 & 10 & -19 \end{vmatrix} & 5. \begin{vmatrix} -18 & 10 & 1 \\ 15 & 18 & 1 \\ -7 & -12 & 16 \end{vmatrix} & 8. \begin{vmatrix} -12 & -18 & -6 \\ 14 & 5 & -1 \\ -18 & -19 & 17 \end{vmatrix} \\ 3. \begin{vmatrix} -10 & -13 & -20 \\ 16 & -6 & 4 \\ -15 & 1 & -14 \end{vmatrix} & 6. \begin{vmatrix} 9 & 17 & -18 \\ 17 & -1 & -15 \\ 13 & 2 & 4 \end{vmatrix} & 9. \begin{vmatrix} -3 & 4 & 13 \\ -19 & 8 & -10 \\ -13 & -12 & -13 \end{vmatrix} \end{array}$$

10.	$\begin{vmatrix} -12 & -19 & -10 \\ -7 & -2 & -3 \\ 18 & -8 & -13 \end{vmatrix}$	17.	$\begin{vmatrix} -20 & -5 & -8 \\ -9 & 14 & 15 \\ 6 & 8 & -4 \end{vmatrix}$	24.	$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 0 \\ -18 & 7 & -6 \\ -7 & 1 & -15 \end{vmatrix}$
11.	$\begin{vmatrix} 10 & -7 & -1 \\ -3 & -12 & -15 \\ -15 & 18 & -19 \end{vmatrix}$	18.	$\begin{vmatrix} -5 & 7 & 8 \\ -7 & 12 & 12 \\ 6 & -11 & 3 \end{vmatrix}$	25.	$\begin{vmatrix} 11 & -15 & -13 \\ 8 & -9 & 16 \\ 4 & 1 & 19 \end{vmatrix}$
12.	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -18 & 1 & -11 \\ -14 & -10 & -13 \end{vmatrix}$	19.	$\begin{vmatrix} -1 & -15 & 17 \\ -16 & -1 & -5 \\ 16 & 12 & 17 \end{vmatrix}$	26.	$\begin{vmatrix} 19 & 12 & -5 \\ -20 & -3 & -6 \\ 5 & -8 & 9 \end{vmatrix}$
13.	$\begin{vmatrix} -17 & 8 & -15 \\ 0 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$	20.	$\begin{vmatrix} -12 & -8 & 17 \\ -15 & 13 & -16 \\ -6 & 4 & -20 \end{vmatrix}$	27.	$\begin{vmatrix} 5 & 16 & -10 \\ 0 & 6 & 10 \\ -1 & 5 & -10 \end{vmatrix}$
14.	$\begin{vmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 7 & -14 & 9 \\ -15 & -1 & 19 \end{vmatrix}$	21.	$\begin{vmatrix} -10 & 9 & 19 \\ -2 & 3 & 17 \\ 7 & -17 & 17 \end{vmatrix}$	28.	$\begin{vmatrix} -18 & 13 & 4 \\ -11 & -18 & -14 \\ -13 & -8 & 4 \end{vmatrix}$
15.	$\begin{vmatrix} 19 & -11 & -2 \\ 4 & 16 & -19 \\ -4 & -20 & -9 \end{vmatrix}$	22.	$\begin{vmatrix} 18 & 5 & -20 \\ -4 & 9 & 5 \\ -15 & -9 & 2 \end{vmatrix}$	29.	$\begin{vmatrix} -13 & 10 & 20 \\ -1 & -16 & 5 \\ -1 & 2 & -12 \end{vmatrix}$
16.	$\begin{vmatrix} 4 & 20 & -12 \\ 11 & 11 & -3 \\ -3 & 15 & -15 \end{vmatrix}$	23.	$\begin{vmatrix} 1 & 18 & 11 \\ 16 & 0 & -12 \\ -2 & -19 & -15 \end{vmatrix}$	30.	$\begin{vmatrix} -6 & -11 & -3 \\ 8 & 2 & 15 \\ -16 & 7 & -11 \end{vmatrix}$

2. Решить уравнения:

1.	$\begin{vmatrix} x-1 & x+1 & x+6 \\ x-4 & x-7 & x-2 \\ x+1 & x-3 & x-8 \end{vmatrix} = 0.$	4.	$\begin{vmatrix} x+6 & x-3 & x+6 \\ x+7 & x-3 & x-7 \\ x-8 & x-5 & x+5 \end{vmatrix} = 0.$
2.	$\begin{vmatrix} x+8 & x+7 & x+2 \\ x-8 & x-5 & x-4 \\ x+9 & x-5 & x+4 \end{vmatrix} = 0.$	5.	$\begin{vmatrix} x & x-7 & x-7 \\ x+2 & x+1 & x-7 \\ x-9 & x-7 & x-9 \end{vmatrix} = 0.$
3.	$\begin{vmatrix} x+9 & x+6 & x-4 \\ x-1 & x-2 & x+9 \\ x-8 & x & x+2 \end{vmatrix} = 0.$	6.	$\begin{vmatrix} x+6 & x-3 & x-2 \\ x+6 & x-5 & x+4 \\ x+3 & x & x-9 \end{vmatrix} = 0.$

7.	$\begin{vmatrix} x-3 & x & x \\ x-5 & x-5 & x-7 \\ x-2 & x-8 & x-4 \end{vmatrix} = 0.$	18.	$\begin{vmatrix} x+1 & x+5 & x-4 \\ x+8 & x & x-9 \\ x-3 & x+2 & x+9 \end{vmatrix} = 0.$
8.	$\begin{vmatrix} x+8 & x+1 & x+7 \\ x-6 & x+5 & x+7 \\ x & x-4 & x+9 \end{vmatrix} = 0.$	19.	$\begin{vmatrix} x-7 & x+5 & x-5 \\ x+1 & x-2 & x-2 \\ x-7 & x+1 & x-5 \end{vmatrix} = 0.$
9.	$\begin{vmatrix} x-2 & x-8 & x-2 \\ x+5 & x+7 & x+2 \\ x & x-6 & x-2 \end{vmatrix} = 0.$	20.	$\begin{vmatrix} x-1 & x+1 & x-4 \\ x-4 & x-5 & x+3 \\ x-3 & x-1 & x+2 \end{vmatrix} = 0.$
10.	$\begin{vmatrix} x-8 & x+5 & x+4 \\ x+7 & x-8 & x+7 \\ x+6 & x+6 & x+8 \end{vmatrix} = 0.$	21.	$\begin{vmatrix} x+2 & x+4 & x+3 \\ x+1 & x-4 & x+6 \\ x+6 & x+3 & x-6 \end{vmatrix} = 0.$
11.	$\begin{vmatrix} x-3 & x+8 & x+5 \\ x-7 & x+9 & x-9 \\ x-7 & x & x+6 \end{vmatrix} = 0.$	22.	$\begin{vmatrix} x+4 & x-1 & x+3 \\ x-3 & x+8 & x-5 \\ x-2 & x+2 & x-1 \end{vmatrix} = 0.$
12.	$\begin{vmatrix} x+8 & x+6 & x+2 \\ x+1 & x+2 & x+8 \\ x-2 & x+6 & x+1 \end{vmatrix} = 0.$	23.	$\begin{vmatrix} x+8 & x-9 & x+9 \\ x+3 & x-3 & x+3 \\ x+7 & x+5 & x-4 \end{vmatrix} = 0.$
13.	$\begin{vmatrix} x-3 & x & x+1 \\ x+8 & x+5 & x-4 \\ x-5 & x-7 & x+8 \end{vmatrix} = 0.$	24.	$\begin{vmatrix} x+4 & x+4 & x-2 \\ x+1 & x+9 & x+7 \\ x+6 & x+7 & x-8 \end{vmatrix} = 0.$
14.	$\begin{vmatrix} x-1 & x-9 & x+4 \\ x-9 & x+4 & x-2 \\ x+4 & x+7 & x+3 \end{vmatrix} = 0.$	25.	$\begin{vmatrix} x+5 & x-9 & x+1 \\ x+7 & x-6 & x-7 \\ x-9 & x-2 & x-7 \end{vmatrix} = 0.$
15.	$\begin{vmatrix} x-9 & x+6 & x+5 \\ x+2 & x+3 & x+5 \\ x-7 & x-5 & x-8 \end{vmatrix} = 0.$	26.	$\begin{vmatrix} x-4 & x-2 & x+8 \\ x-5 & x+4 & x \\ x-4 & x+9 & x-5 \end{vmatrix} = 0.$
16.	$\begin{vmatrix} x-1 & x+4 & x-6 \\ x-6 & x-6 & x+6 \\ x+9 & x+6 & x+8 \end{vmatrix} = 0.$	27.	$\begin{vmatrix} x+3 & x+4 & x-8 \\ x-6 & x-2 & x-1 \\ x+9 & x+7 & x+9 \end{vmatrix} = 0.$
17.	$\begin{vmatrix} x+3 & x+6 & x-9 \\ x-3 & x+9 & x+8 \\ x-4 & x+8 & x+6 \end{vmatrix} = 0.$	28.	$\begin{vmatrix} x+2 & x+9 & x-9 \\ x-1 & x+4 & x+9 \\ x+9 & x-2 & x-1 \end{vmatrix} = 0.$

$$29. \begin{vmatrix} x+9 & x-8 & x-6 \\ x+4 & x+8 & x+2 \\ x-9 & x & x-1 \end{vmatrix} = 0. \quad 30. \begin{vmatrix} x+2 & x+8 & x+2 \\ x+8 & x-7 & x+4 \\ x-9 & x+3 & x+6 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Не раскрывая определителей, доказать тождество

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель с помощью свойств

$$\begin{vmatrix} (a+1)^2 & a^2+1 & a \\ (b+1)^2 & b^2+1 & b \\ (c+1)^2 & c^2+1 & c \end{vmatrix}.$$

5. Вычислить определитель разложением по подходящей строке или столбцу:

$$\begin{array}{ll} 1. \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} & 5. \begin{vmatrix} -19 & -16 & 6 & -17 \\ -3 & -8 & -16 & -16 \\ 8 & 11 & 12 & -4 \\ -14 & 11 & 2 & 17 \end{vmatrix} \\ 2. \begin{vmatrix} 10 & -19 & -3 & 14 \\ -2 & 16 & -1 & 14 \\ -3 & -9 & 15 & -15 \\ 19 & 15 & 19 & 0 \end{vmatrix} & 6. \begin{vmatrix} 15 & 14 & 11 & -12 \\ -5 & -4 & 11 & -8 \\ -13 & -3 & -16 & 13 \\ -3 & 8 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ 3. \begin{vmatrix} 19 & 13 & 0 & 8 \\ -13 & 7 & 10 & -15 \\ 17 & -13 & -13 & 5 \\ -6 & -8 & -15 & 5 \end{vmatrix} & 7. \begin{vmatrix} 7 & -8 & -2 & 9 \\ -17 & 13 & 6 & -10 \\ 8 & 17 & -7 & 9 \\ 4 & 6 & 1 & 17 \end{vmatrix} \\ 4. \begin{vmatrix} -7 & -3 & -5 & -8 \\ -12 & 10 & -3 & -15 \\ 20 & -15 & 3 & 11 \\ 7 & 8 & -2 & -6 \end{vmatrix} & 8. \begin{vmatrix} 20 & 8 & 18 & 15 \\ -10 & -10 & -20 & 18 \\ -17 & -8 & 19 & -3 \\ -10 & 7 & -12 & -1 \end{vmatrix} \end{array}$$

9.	$\begin{vmatrix} -16 & 10 & -16 & 3 \\ -2 & 7 & -4 & 16 \\ 2 & -4 & -17 & 3 \\ -8 & -15 & 7 & -16 \end{vmatrix}$	17.	$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 9 & -14 \\ -19 & 13 & 19 & 0 \\ 11 & -15 & -12 & 4 \\ 9 & 10 & 8 & 17 \end{vmatrix}$
10.	$\begin{vmatrix} -20 & 19 & 11 & -5 \\ 16 & 8 & -17 & 18 \\ 11 & -11 & 8 & 5 \\ -15 & 13 & -11 & -2 \end{vmatrix}$	18.	$\begin{vmatrix} 12 & -8 & 1 & -17 \\ -3 & -15 & 13 & -7 \\ -1 & 13 & 3 & -10 \\ -14 & -7 & -18 & -20 \end{vmatrix}$
11.	$\begin{vmatrix} 14 & -5 & 2 & -19 \\ 1 & -3 & -11 & 17 \\ 2 & -10 & 3 & 1 \\ -14 & 6 & -19 & -13 \end{vmatrix}$	19.	$\begin{vmatrix} 17 & -12 & -12 & -20 \\ 2 & -11 & -14 & -13 \\ -8 & 12 & 15 & 2 \\ -5 & -6 & -12 & 16 \end{vmatrix}$
12.	$\begin{vmatrix} 3 & -4 & -4 & 11 \\ 11 & 5 & -5 & -2 \\ 15 & 7 & -5 & 9 \\ -19 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$	20.	$\begin{vmatrix} -15 & -2 & -13 & -1 \\ -4 & -10 & -10 & -20 \\ -16 & -10 & -20 & -13 \\ -7 & 1 & -14 & 15 \end{vmatrix}$
13.	$\begin{vmatrix} 9 & 12 & 11 & 10 \\ -6 & 19 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & -12 & 17 \\ -8 & 13 & -20 & 8 \end{vmatrix}$	21.	$\begin{vmatrix} 20 & 0 & 19 & -19 \\ 20 & -4 & -13 & 5 \\ 15 & -15 & 1 & 3 \\ 5 & -16 & 5 & 10 \end{vmatrix}$
14.	$\begin{vmatrix} -20 & -18 & 19 & 10 \\ -14 & -16 & 9 & 18 \\ -9 & -16 & -18 & -9 \\ -16 & 5 & -1 & -20 \end{vmatrix}$	22.	$\begin{vmatrix} -17 & -6 & -3 & 8 \\ -8 & 19 & -3 & -19 \\ 9 & 17 & -18 & 4 \\ 12 & -10 & 4 & 17 \end{vmatrix}$
15.	$\begin{vmatrix} 10 & -4 & -3 & -1 \\ 12 & -18 & -20 & -10 \\ 6 & -9 & -7 & 3 \\ 7 & -1 & 13 & -10 \end{vmatrix}$	23.	$\begin{vmatrix} -20 & 15 & -10 & 1 \\ -4 & 3 & -3 & -13 \\ 16 & 11 & 19 & 6 \\ -11 & 1 & -14 & 10 \end{vmatrix}$
16.	$\begin{vmatrix} 12 & 9 & -13 & -10 \\ -8 & -10 & -11 & 9 \\ -4 & 14 & 5 & -19 \\ 7 & -6 & 0 & 6 \end{vmatrix}$	24.	$\begin{vmatrix} -5 & -15 & 8 & -17 \\ 6 & -1 & -9 & 0 \\ -16 & 11 & 2 & -15 \\ -5 & 1 & -17 & 10 \end{vmatrix}$

$$25. \begin{vmatrix} -4 & -4 & -16 & 19 \\ 2 & -15 & -1 & -17 \\ -2 & -6 & 13 & -9 \\ -4 & 7 & 4 & -4 \end{vmatrix}.$$

$$26. \begin{vmatrix} -6 & 9 & 8 & 20 \\ -17 & 14 & 7 & -9 \\ 6 & -16 & 20 & -20 \\ 2 & 11 & 6 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$27. \begin{vmatrix} -10 & -16 & 4 & 12 \\ -14 & 8 & -5 & -5 \\ 1 & -14 & 5 & -15 \\ -8 & 13 & 9 & -12 \end{vmatrix}.$$

$$28. \begin{vmatrix} 6 & -11 & 6 & 13 \\ -13 & 19 & -11 & 17 \\ 7 & 11 & -14 & -1 \\ -10 & 15 & -5 & -12 \end{vmatrix}.$$

$$29. \begin{vmatrix} 10 & 4 & 13 & 5 \\ -10 & 10 & 2 & -4 \\ 8 & -14 & 8 & -1 \\ -14 & 9 & -15 & 20 \end{vmatrix}.$$

$$30. \begin{vmatrix} -7 & -11 & -17 & -12 \\ -20 & -3 & -17 & 2 \\ -5 & 6 & 20 & 8 \\ -1 & -6 & 3 & -18 \end{vmatrix}.$$

$$31. \begin{vmatrix} -19 & 1 & 6 & -4 \\ 7 & -18 & -17 & -11 \\ -1 & -6 & 11 & 14 \\ -8 & -18 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Ответы.

1. а) $4ab$ (к ответам раздела «Дополнительно»); б) 0. 2. $(-\infty, +\infty)$. 4. 0. 5. 48.