УДК 512.55

Критерий простоты алгебраически возрастающих дифференцирований на алгебре усечённых многочленов

А. И. Вокуев
Новосибирский государственный университет

Пусть F — поле характеристики $p > 0$. Рассмотрим алгебру усечённых многочленов

$$B_{n,p}(F) = F[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^p, \ldots, x_n^p).$$

Она является конечномерной алгеброй размерности p^n. Дифференцирование d алгебры $B_{n,p}(F)$ называется *простым*, если в алгебре $B_{n,p}(F)$ нет нетривиальных идеалов, инвариантных относительно дифференцирования d. Известно, что (при $p \neq 2$ и $n \neq 1$) алгебра Новикова $B_{n,p}(F)(d)$ является простой тогда и только тогда, когда d просто . *Алгебраически возрастающим* называется дифференцирование вида

$$d = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где каждый многочлен f_i зависит лишь от переменных с меньшими индексами.

Основным результатом работы является следующий критерий.

Теорема 1. *Дифференцирование d указанного вида является простым тогда и только тогда, когда для каждого $i = 1, \ldots, n$ многочлен f_i содержит моном $x_1^{p-1} \cdots x_{i-1}^{p-1}$ с ненулевым коэффициентом.*

Ключевую роль в доказательстве играют следующие утверждения.

Предложение 1. *Локально нильпотентное дифференцирование d просто $\iff \ker d = F$.*

Предложение 2. *Алгебраически возрастающие дифференцирование d локально нильпотентно.*

Частным случаем простого алгебраически возрастающего дифференцирования является дифференцирование Алберта. Также верна следующая теорема, доказанная в [1], в случае дифференцирования Алберта.

Теорема 2. *Пусть $A = B_{n,p}(F)$, F — алгебраически замкнутое поле, d — простое алгебраически возрастающее дифференцирование. Тогда для любого $\alpha \in F^*$ существует единственный автоморфизм $\psi := \psi_{\alpha,d} \in \operatorname{Aut} A$, α-коммутирующий с d ($\psi d = \alpha d \psi$). Кроме того, имеют место следующие изоморфизмы:*

$$\operatorname{Aut}_d A \simeq F^* \simeq \operatorname{Aut} A(d),$$

где $\operatorname{Aut}_d A$ — группа α-коммутирующих с d автоморфизмов, $\operatorname{Aut} A(d)$ — группа автоморфизмов алгебры Новикова $A(d)$, полученной из алгебры A и дифференцирования d.

---

[1] A.Pozhidaev, V.Zhelyabin, Simple and semisimple finite-dimensional Novikov algebras and their automorphisms, J. Algebra 689, (2026) 1-26.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, доцент А. П. Пожидаев