18-я Международная летняя школа-конференция
“Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры”

О замыканиях, задаваемых алгебрами изолирующих формул

С. Б. Малышев
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
sergei2-mal1@yandex.ru

Алгебры распределений бинарных изолирующих формул являются естественными производными структурами полной теории: они кодируют композицию главных 2-типов и позволяют изучать достижимость между реализациями фиксированного полного 1-типа. В то же время сама композиционная таблица такой алгебры не отвечает напрямую на геометрический вопрос: возникает ли из этих переходов нетривиальная предгеометрия, или вся зависимость сводится к объединению одноточечных замыканий?

Пусть T — полная теория, $\mathfrak{M} \models T$ — достаточно насыщенная модель, $p(x) \in S_1(\varnothing)$ — полный 1-тип и $S = p(\mathfrak{M})$. Обозначим через $\mathfrak{B}(T,p)$ алгебру распределений бинарных изолирующих формул, связанных с p; её множество меток обозначается через L. Метке $u \in L$ соответствует бинарное отношение $R_u(a) = \{b \in S \mid \mathfrak{M} \models \varphi_u(a,b)\}$, где $\varphi_u(x,y)$ — представитель соответствующего класса изолирующих формул. Предполагаем, что p самосопряжён относительно $\mathfrak{B}(T,p)$: для каждой метки u существует сопряжённая метка u^*, задающая обратный переход.

Для $A \subseteq S$ положим

$$\delta_{\mathfrak{B}}(A) = A \cup \{b \in S \mid \exists a \in A\, \exists u \in L\, \mathfrak{M} \models \varphi_u(a,b)\}.$$

Итерированное замыкание задаётся формулой

$$\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A) = \bigcup_{n \geq 0} \delta^n_{\mathfrak{B}}(A), \qquad \delta^0_{\mathfrak{B}}(A) = A, \quad \delta^{n+1}_{\mathfrak{B}}(A) = \delta_{\mathfrak{B}}(\delta^n_{\mathfrak{B}}(A)).$$

Иначе говоря, $b \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)$ тогда и только тогда, когда из некоторого элемента $a \in A$ в b ведёт конечная цепочка изолирующих переходов

$$a = c_0 \xrightarrow{u_1} c_1 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_k} c_k = b.$$

Теорема 1. *Если p самосопряжён, то $\langle S, \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}} \rangle$ является предгеометрией.*

Экстенсивность и конечный характер следуют непосредственно из цепочечного определения. Идемпотентность получается склейкой двух конечных цепочек. Аксиома обмена является единственным нетривиальным местом: если $a \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(X \cup \{b\}) \setminus \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(X)$, то всякая свидетельствующая цепочка начинается именно в b; самосопряжённость позволяет развернуть её и получить $b \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(X \cup \{a\})$.

Главный результат состоит в том, что построенная таким образом предгеометрия всегда тривиальна в геометрическом смысле.

Теорема 2 (о вырожденности)**.** *Для всякой полной теории T и всякого самосопряжённого полного 1-типа p индуцированная предгеометрия $\langle S, \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}} \rangle$ вырождена:*

$$\overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A) = \bigcup_{a \in A} \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\}) \qquad (A \subseteq S).$$

Действительно, любая цепочка, свидетельствующая принадлежность $b \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(A)$, стартует из одного конкретного элемента $a \in A$. Следовательно, тот же самый путь уже показывает $b \in \overline{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{B}}(\{a\})$. Таким образом, бинарная конструкция не создаёт зависимости элемента от множества как целого: вся зависимость распадается на одноточечные компоненты. Это показывает принципиальную границу бинарного подхода: даже богатая таблица Кэли алгебры $\mathfrak{B}(T,p)$ порождает только цепочечную достижимость.

Полученная вырожденность указывает, что нетривиальная геометрическая зависимость должна иметь существенно большую арность. В тернарном случае можно рассматривать формулы $\psi_u(x,y,z)$, где элемент z порождается уже парой (x,y), и оператор

$$\delta^{(3)}(A) = A \cup \{c \in S \mid \exists a, b \in A\ \exists u \in L_3\ \mathfrak{M} \models \psi_u(a,b,c)\}.$$

Если семейство тернарных меток координатно самосопряжено, то каждая допустимая тройка позволяет восстановить любой свой элемент по двум другим; это является естественным аналогом обратимости бинарных переходов.

Уже простые примеры показывают отличие от бинарного случая. Для дизъюнктного объединения полных графов $G = \bigsqcup_{i\in I} K_{m_i}$ тернарная формула треугольника задаёт замыкание

$$\mathrm{cl}^{(3)}(A) \cap K_{m_i} = \begin{cases} A \cap K_{m_i}, & |A \cap K_{m_i}| \le 1, \\ K_{m_i}, & |A \cap K_{m_i}| \ge 2, \end{cases}$$

то есть прямую сумму равномерных предгеометрий U_{2,m_i}. В частности, для $\bigsqcup K_4$ получается невырожденная локально конечная предгеометрия. Другой пример даёт векторное пространство над $\mathbb{F}_2$: формула

$$\psi(x,y,z) \equiv x + y + z = 0$$

на $S = V \setminus \{0\}$ порождает

$$\mathrm{cl}^{(3)}(A) = \langle A \rangle_{\mathbb{F}_2} \setminus \{0\}.$$

Тем самым тернарные изолирующие формулы являются естественным источником невырожденных предгеометрий, тогда как бинарные формулы дают точное описание их вырожденной границы.

Благодарность

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект № FWNF-2026-0032.

Список литературы

[1] Shulepov I.V., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2014. Vol. 11. P. 380–407.

[2] Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры бинарных формул: монография. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2023. 330 с.

[3] Pillay A. Geometric Stability Theory. Oxford: Clarendon Press, 1996. 361 p.

[4] Hodges W. Model Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 772 p.

[5] Малышев С.Б. Виды предгеометрий ациклических теорий // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 46. С. 110–120.

[6] Малышев С.Б. Наследуемость типов предгеометрий относительно композиций структур // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 52. С. 162–174.