АЛГЕБРЫ БИНАРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ КО-НОРМАЛЬНОГО / ДИЗЪЮНКТИВНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРАФОВ

Д.Ю. Емельянов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: dima-pavlyk@mail.ru

В работе продолжается изучение алгебр бинарных формул для теорий произведений графов. Рассматривается ко-нормальное, или дизъюнктивное, произведение графов. Получены таблицы Кэли и сформулированы теоремы для циклов, рассматриваемых как графы правильных многоугольников.

Показано, что ко-нормальное произведение графов без изолированных вершин имеет диаметр не больше двух. Если исходные графы содержат ребра, то в произведении появляется симплекс. Поэтому для произведений циклов соответствующие алгебры поглощаются алгебрами симплексов.

1 Предварительные сведения

Определение 1. Пусть $G = (V(G), E(G))$ и $H = (V(H), E(H))$ — простые неориентированные графы. *Ко-нормальным произведением*, или *дизъюнктивным произведением*, графов G и H называется граф $G \vee H$, множество вершин которого равно

$$V(G \vee H) = V(G) \times V(H),$$

а различные вершины (g, h) и (g', h') смежны тогда и только тогда, когда

$$gg' \in E(G) \quad \text{или} \quad hh' \in E(H).$$

В отличие от тензорного произведения, в ко-нормальном произведении достаточно смежности хотя бы в одной координате.

Напомним используемую далее терминологию. Пусть X — конечный связный граф. Через $\mathfrak{B}(X)$ будем обозначать алгебру бинарных формул для полной теории графа X в смысле [1]. Метки $\rho_{\nu(p)}$ в рассматриваемых графовых примерах отождествляются с возможными расстояниями между вершинами, поэтому

$$\rho_{\nu(p)} \subseteq \{0, 1, \ldots, \operatorname{diam} X\}.$$

Операция в таблице Кэли задает множество возможных меток композиции бинарных формул: если первая формула имеет метку i, а вторая — метку j, то в клетке $i \cdot j$ записываются все метки, которые могут получиться для их композиции.

Под симплексом ниже понимается полный подграф. Для настоящей работы достаточно случая K_3, то есть треугольника. Далее используется известный результат о симплексном поглощении: если конечный связный граф X диаметра d содержит симплекс, то алгебра $\mathfrak{B}(X)$ совпадает с алгеброй симплексов диаметра d [2]. Эту алгебру в дальнейшем будем обозначать через $\mathfrak{T}_d$.

Лемма 2. *Пусть G и H — графы без изолированных вершин. Тогда диаметр графа $G \vee H$ не превосходит 2.*

Доказательство. Рассмотрим две различные вершины (g, h) и (g', h'). Если g смежна с g' или h смежна с h', то эти вершины смежны в $G \vee H$. В противном случае выберем вершину x, смежную с g, и вершину y, смежную с h'. Тогда (g, h) смежна с (x, y), поскольку g смежна с x, а (x, y) смежна с (g', h'), поскольку y смежна с h'. Следовательно, расстояние между исходными вершинами не больше двух. □

Следствие 3. *Если G и H не имеют изолированных вершин, то алгебра $\mathfrak{B}(G \vee H)$ имеет не более трех основных меток:*

$$\rho_{\nu(p)} \subseteq \{0, 1, 2\}.$$

Предложение 4. *Для любых простых графов G и H произведение $G \vee H$ является полным графом тогда и только тогда, когда оба графа G и H являются полными.*

Доказательство. Если G и H являются полными, то для любых двух различных вершин (g, h) и (g', h') либо $g \neq g'$, либо $h \neq h'$. В первом случае g смежна с g', во втором случае h смежна с h'. Следовательно, любые две различные вершины произведения смежны.

Обратно, пусть G не является полным. Тогда существуют две различные несмежные вершины $g_0, g_1 \in V(G)$. Зафиксируем любую вершину $h \in V(H)$. Вершины (g_0, h) и (g_1, h) различны, но не смежны в $G \vee H$: первая координата не обеспечивает смежности, а вторая координата совпадает. Значит, $G \vee H$ не является полным. Аналогично рассматривается случай, когда H не является полным. □

2 Ко-нормальные произведения и алгебры симплексов

Лемма 5. *Если графы G и H содержат хотя бы по одному ребру, то ко-нормальное произведение $G \vee H$ содержит треугольник.*

Доказательство. Пусть $g_0g_1 \in E(G)$ и $h_0h_1 \in E(H)$. Рассмотрим три вершины графа $G \vee H$:

$$a = (g_0, h_0), \quad b = (g_1, h_0), \quad c = (g_0, h_1).$$

Вершины a и b смежны, поскольку g_0 смежна с g_1. Вершины a и c смежны, поскольку h_0 смежна с h_1. Наконец, вершины b и c также смежны: первая координата обеспечивает смежность $g_1 \sim g_0$, а вторая координата — смежность $h_0 \sim h_1$. Следовательно, a, b, c образуют симплекс K_3. □

Следствие 6. *Для любых $m, n \geq 3$ ко-нормальное произведение правильных многоугольников $C_m \vee C_n$ содержит треугольник.*

Доказательство. Каждый цикл $C_m, m \geq 3$, содержит ребро. Поэтому утверждение следует из предыдущей леммы. □

Таким образом, для ко-нормального произведения циклов, то есть графов правильных многоугольников, всегда возникает симплекс. Поэтому в этих примерах по результату [2] получаются алгебры симплексов.

2.1 Таблицы алгебр симплексов

Приведем только те таблицы алгебр симплексов, которые нужны для ко-нормальных произведений графов без изолированных вершин. Эти таблицы являются частными случаями таблиц для алгебр $\mathfrak{S}_d$, описанных в [2]; здесь они обозначаются через $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$.

Если оба сомножителя равны треугольникам, то $C_3 \vee C_3 = K_3 \vee K_3$ является полным графом. В этом случае диаметр равен 1, и возникает алгебра симплексов $\mathfrak{T}_1$ с метками $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1\}$:

$\cdot$	0	1
0	$\{0\}$	$\{1\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 1\}$

Во всех остальных произведениях $C_m \vee C_n$, где $m, n \geq 3$ и $(m, n) \neq (3, 3)$, граф не является полным, но его диаметр равен 2. Поскольку он содержит симплекс, алгебра совпадает с алгеброй симплексов диаметра 2, то есть с $\mathfrak{T}_2$, где $\rho_{\nu(p)} = \{0,1,2\}$:

$\cdot$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2\}$

Пример 7. Для графов $C_3 \vee C_4$, $C_4 \vee C_4$, $C_4 \vee C_5$, $C_5 \vee C_5$ и вообще для всех $C_m \vee C_n$, кроме $C_3 \vee C_3$, получается одна и та же таблица Кэли $\mathfrak{T}_2$. Отличаться могут число вершин и число ребер, но алгебра бинарных формул остается алгеброй симплексов.

Теорема 8. *Пусть $m, n \geq 3$, и пусть $\mathfrak{B}_{m,n}$ — алгебра бинарных формул для теории ко-нормального произведения $C_m \vee C_n$. Тогда:*

1) $\mathfrak{B}_{3,3} \cong \mathfrak{T}_1$;

2) $\mathfrak{B}_{m,n} \cong \mathfrak{T}_2$ *для всех остальных* $m, n \geq 3$.

Доказательство. Если $m = n = 3$, то $C_3 = K_3$, поэтому $C_3 \vee C_3 \cong K_9$, и алгебра имеет вид $\mathfrak{T}_1$.

Пусть теперь $(m,n) \neq (3,3)$. По лемме о диаметре граф $C_m \vee C_n$ имеет диаметр не больше 2. Он не является полным, поскольку хотя бы один из циклов не является полным, и в соответствующей координате можно выбрать две несмежные вершины. Следовательно, диаметр равен 2. По предыдущему следствию граф содержит треугольник, то есть симплекс. Поэтому по результату о симплексном поглощении [2] алгебра бинарных формул совпадает с алгеброй симплексов диаметра 2, то есть с $\mathfrak{T}_2$. □

2.2 Основной результат

Сформулируем общий результат для графов без изолированных вершин.

Теорема 9. *Пусть G и H — конечные простые графы без изолированных вершин, и пусть каждый из них содержит хотя бы одно ребро. Тогда:*

1) если G и H являются полными, то $\mathfrak{B}(G \vee H) \cong \mathfrak{T}_1$;

2) если хотя бы один из графов G, H не является полным, то $\mathfrak{B}(G \vee H) \cong \mathfrak{T}_2$.

Доказательство. Если G и H являются полными, то по критерию полноты граф $G \vee H$ тоже является полным. Поэтому все различные вершины находятся на расстоянии 1, и алгебра бинарных формул имеет вид алгебры симплексов $\mathfrak{T}_1$.

Пусть хотя бы один из графов не является полным. Тогда $G \vee H$ не является полным, но по лемме о диаметре его диаметр не превосходит 2. Следовательно, диаметр равен 2. Кроме того, оба графа содержат ребра, поэтому $G \vee H$ содержит треугольник. По результату о симплексном поглощении [2] алгебра бинарных формул совпадает с $\mathfrak{T}_2$. □

Замечание 10. В ко-нормальном произведении множество меток стабилизируется: при отсутствии изолированных вершин диаметр не больше двух, а наличие симплекса приводит к алгебре симплексов [2].

2.3 Примеры

Приведем несколько примеров ко-нормальных произведений.

Произведение	Условие	Диаметр	Алгебра
$K_m \vee K_n$	$m, n \geq 2$	1	$\mathfrak{T}_1$
$C_m \vee C_n$	$(m, n) \neq (3, 3)$	2	$\mathfrak{T}_2$
$P_m \vee P_n$	$m, n \geq 3$	2	$\mathfrak{T}_2$
$K_{1,m} \vee K_{1,n}$	$m, n \geq 2$	2	$\mathfrak{T}_2$
$K_m \vee C_n$	$m \geq 2,\ n \geq 4$	2	$\mathfrak{T}_2$
$K_{r,s} \vee C_n$	$r, s \geq 1,\ n \geq 3$	2	$\mathfrak{T}_2$

Здесь C_n — цикл, или граф правильного n-угольника; K_n — полный граф на n вершинах; P_n — путь на n вершинах; $K_{1,n}$ — звезда; $K_{r,s}$ — полный двудольный граф с долями мощности r и s.

Пример 11. Для произведения путей $P_m \vee P_n$, где $m, n \geq 3$, каждый сомножитель имеет ребро и не имеет изолированных вершин. При этом пути не являются полными графами. Поэтому

$$\mathfrak{B}(P_m \vee P_n) \cong \mathfrak{T}_2.$$

Пример 12. Для произведения звезд $K_{1,m} \vee K_{1,n}$, где $m, n \geq 2$, оба сомножителя имеют центр и листья, следовательно не являются полными. В произведении всегда возникает треугольник, например из двух ребер исходных звезд, и снова получается алгебра симплексов $\mathfrak{T}_2$.

Пример 13. Если один сомножитель является полным, например $K_m \vee C_n$, то результат не всегда является полным. При $n = 3$ оба сомножителя являются полными, и получается $\mathfrak{T}_1$. При $n \geq 4$ цикл C_n не является полным, поэтому произведение имеет диаметр 2 и алгебру $\mathfrak{T}_2$.

2.4 Изолированные вершины

Условие отсутствия изолированных вершин существенно. Если один из сомножителей имеет изолированную вершину, то доказательство диаметра 2 уже не работает. Более того, в ко-нормальном произведении могут появляться слои, где смежность определяется только другой координатой.

Пример 14. Пусть E_m — пустой граф на m вершинах, то есть граф без ребер. Тогда в произведении

$$E_m \vee H$$

смежность определяется только второй координатой. Если H не связан, то и произведение может быть несвязным. Следовательно, алгебры таких произведений не обязаны быть алгебрами симплексов.

Замечание 15. Классификация ко-нормальных произведений с изолированными вершинами должна рассматриваться отдельно. В этом случае важно не только наличие симплекса, но и число компонент связности, расположение изолированных вершин и то, какие типы реализуются в каждой компоненте. Поэтому в настоящей статье основной классификационный результат формулируется для графов без изолированных вершин.

2.5 Связь с сильным произведением

Сравним ко-нормальное произведение с сильным произведением. Для сильного произведения $G \boxtimes H$ вершины (g, h) и (g', h') смежны, если выполняется одно из условий:

$$g = g' \text{ и } h \sim h', \quad h = h' \text{ и } g \sim g', \quad g \sim g' \text{ и } h \sim h'.$$

Для ко-нормального произведения условие короче:

$$g \sim g' \quad \text{или} \quad h \sim h'.$$

В ко-нормальном произведении не требуется совпадения одной координаты. Поэтому в нем появляется больше ребер и чаще возникают треугольники.

Предложение 16. *Если G и H — простые графы, то каждое ребро сильного произведения $G \boxtimes H$ является ребром ко-нормального произведения $G \vee H$. Следовательно,*

$$E(G \boxtimes H) \subseteq E(G \vee H)$$

при одинаковом множестве вершин.

Доказательство. Если две вершины смежны в сильном произведении, то либо смежность возникает в первой координате, либо во второй, либо сразу в обеих. В каждом из этих случаев выполняется дизъюнктивное условие смежности для $G \vee H$. $\square$

Поэтому для циклов C_n, рассматриваемых как графы правильных многоугольников, ко-нормальное произведение сразу приводит к алгебрам симплексов, тогда как для других произведений могут сохраняться таблицы, зависящие от четности и диаметра.

3 Заключение

В работе описаны алгебры бинарных формул для ко-нормальных произведений графов. Показано, что для графов без изолированных вершин диаметр произведения не превосходит двух. Если оба сомножителя являются полными, то получается алгебра $\mathfrak{T}_1$. Если хотя бы один из сомножителей не является полным, но оба графа содержат ребра, то возникает симплекс и получается алгебра $\mathfrak{T}_2$.

Для циклов, рассматриваемых как графы правильных многоугольников, получена следующая классификация: для $C_3 \vee C_3$ возникает $\mathfrak{T}_1$, а для всех остальных $C_m \vee C_n, m, n \geq 3$, возникает $\mathfrak{T}_2$. Дальнейшее исследование можно продолжить для ко-нормальных произведений графов с изолированными вершинами, циркулянтных графов и графов Мычельского.

Список литературы

[1] Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры бинарных формул. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2023.

[2] Емельянов Д.Ю. Алгебры бинарных изолирующих формул для теорий симплексов // Algebra and Model Theory. Novosibirsk: Edition of NSTU, 2017. P. 66–74.

[3] Harary F. Graph Theory. Addison-Wesley, 1969.

[4] Hammack R., Imrich W., Klavzar S. Handbook of Product Graphs. Second edition. CRC Press, 2011.

[5] Sudoplatov S.V. Classification of Countable Models of Complete Theories. Novosibirsk: NSTU Publisher, 2018.