Novosibirsk State Technical University

Algebra and Model Theory 2025

Collection of papers

edited by M. Shahryari and S. V. Sudoplatov

Novosibirsk
2025

Algebra and model theory

UDC 512(06)
А 35

ISSN 2619-0486
2025

Учредитель
ФГБОУ "Новосибирский государственный технический университет"

Редакционная коллегия
M. Amaglobeli (Tbilisi, Georgia)
B. Baizhanov (Almaty, Kazakhstan)
I. Chajda (Olomouc, Czech Republic)
R. Halas (Olomouc, Czech Republic)
A. Iwanow (Gliwice, Poland)
B. Kulpeshov (Almaty, Kazakhstan)
A. Myasnikov (New York, USA)
N. Peryazev (Irkutsk, Russia)
B. Poizat (Lyon, France)
M. Shahryari (Muscat, Oman)
P. Stefaneas (Athens, Greece)
S. Sudoplatov (Novosibirsk, Russia)
E. Timoshenko (Novosibirsk, Russia)
J. Truss (Leeds, United Kingdom)
D. Tussupov (Astana, Kazakhstan)
E. Vasilyev (Corner Brook, Canada)

Адрес редакции, издателя: 630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, НГТУ
Тел. (383)346-11-66
E-mail: algebra@nstu.ru

UDC 512(06)

© Composite authors, 2025
© Novosibirsk State Technical University, 2025

INTRODUCTION

Algebra and Model Theory 2025

The 17th International Summer School-Conference "Problems Allied to Model Theory and Universal Algebra" was held on 19–26 of June 2025 at Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University NETI and at the Camping Center "Erlagol" in Altai mauntains. The School was organized by Algebra and Mathematical Logic Department of Novosibirsk State Technical University (NSTU NETI) and Sobolev Institute of Mathematics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (IM SB RAS). The School was supported by Grant of International Mathematical Center in Akademgorodok and by Faculty of Applied Mathematics and Computer Science of NSTU NETI. The school-conference included both online and in-person talks. At the school-conference, there were participants from Russia, Kazakhstan, Uzbekistan, China, Iran, Oman, France, Greece, Hungary, Poland. They made 50 talks. Within the school-conference, the discussions on actual problems on Model Theory, Algebra and related subjects were held. Information about the conference is posted on the conference website https://erlagol.ru.

The Organizing Committee
of the School-Conference

Programme of 16th International Summer School-Conference "Problems Allied to Model Theory and Universal Algebra"

June 19, Thursday

Chairperson S.V. Sudoplatov

9:00 – 9:10, Opening Ceremony

9:10 – 9:50, A.A. Stepanova, E.L. Efremov, S.G. Chekanov (Vladivostok, Russia), On the stability of the class of pseudo-finite polygons (online)

9:55 – 10:35, B.S. Baizhanov (Almaty, Kazakhstan), Countable models of small ordered theories (online)

10:40 – 11:20, R. Sklinos (Beijing, China), First-order sentences in random groups (online)

11:20 – 11:50, Coffee Break

11:50 – 12:30, M. Shahryari, O. Al-Raisi (Muscat, Oman), Finite CSA groups and generalizations (online)

12:35 – 13:15, B.P. Poizat (Lyon, France), Logicians and Geometers on Algebraic Groups (online)

13:20 – 14:00, A.I. Stukachev (Novosibirsk, Russia), Union, Intersection and Comparison of Linguistic Structures

Chairperson V.V. Verbovskiy

15:00 – 15:40, A.A. Iwanow (Opole, Poland), Homogeneous structures associated with complete theories of two variables (online)

15:45 – 16:25, G. Czédli (Szeged, Hungary), Counting congruences: the largest and beyond for lattices, and the maximum for congruence-distributive algebras (online)

16:25 – 16:50, Coffee Break

16:50 – 17:10, O.V. Kravtsova (Krasnoyarsk, Russia), Quasi-fields with Hall's condition

17:15 – 17:45, G.S. Suleymanova (Abakan, Russia), On graph automorphisms of exact enveloping algebras of the Chevalley algebra (online)

17:50 – 18:20, D.V. Solomatin (Omsk, Russia), On minimally complete Martynov's semigroups with zero (online)

18:25 – 18:45, I.A. Sakharov (Vladivostok, Russia), On the semantic and syntactic rigidity of projective unars (online)

18:50 – 19:10, A.S. Savin (Novosibirsk, Russia), Spectra of spherical orderability of finite groups

June 20, Friday
Chairperson B.Sh. Kulpeshov

9:00 – 9:40, V.N. Zhelyabin, A.S. Mamontov (Novosibirsk, Russia), Just-infinite Jordan Banach algebras (online)

9:45 – 10:25, P.S. Kolesnikov (Novosibirsk, Russia), Simple finite Novikov conformal algebras

10:30 – 11:10, S.P. Odintsov (Novosibirsk, Russia), Weakly implicative logics: approaches to defining definitional equivalence and definability

11:10 – 11:40, Coffee Break

11:40 – 12:20 I.B. Kozhukhov (Moscow, Russia), Artinian and Noetherian properties in polygons over semigroups and their generalizations (online)

12:25 – 13:05, N.L. Polyakov, D.I. Savelyev (Moscow, Russia), On preorders between Rudin-Keisler and Comfort preorders and a model-theoretic characterization of the Comfort preorder

13:10 – 13:50, V.L. Usol'tsev (Volgograd, Russia), Rees congruence algebras in some subclasses of class of algebras with one operator and main ternary and nullary operations

Chairperson N.L. Polyakov

15:00 – 15:30, A. Gkantzounis, F. Skarpelos (Athens, Greece), Logical topologies and seperation axioms in the institution-independent model theory framework (online)

15:35 – 15:55, A.A. Davlatbekov (Denau, Uzbekistan), On homomorphisms of parastrophes of linear and alinear quasigroups (online)

16:00 – 16:20, A.E. Chubiy (Novosibirsk, Russia), On structural unions of models (online)

16:20 – 16:40, Coffee Break

16:40 – 17:00, A.M. Popova (Ivleva) (Novosibirsk, Russia), On automorphisms of the integral group rings of finite groups (online)

17:05 – 17:25, O.V. Bryukhanov (Novosibirsk, Russia), Bijections of a group which commute with its automorphisms (online)

17:30 – 17:50, D.S. Khramchenok (Moscow, Russia), Axiomatizability of classes of polygons and semimodules (online)

17:55 – 18:15, S.B. Malyshev (Novosibirsk, Russia), Geometrical properties of elementary theories

18:20 – 18:40, I.A. Emelyanenkov (Novosibirsk, Russia), Continuation of automorphisms of countable models under elementary embeddings

June 22, Sunday
Chairperson S.V. Sudoplatov

9:00 – 9:40, A.E. Mironov (Novosibirsk, Russia), Algebraic non-integrability of magnetic billiards

9:50 – 10:30, V.V. Przyjalkowski (Moscow, Russia), Hodge level of weighted complete intersections

10:40 – 11:20, A.I. Bondal (Moscow, Russia), A categorical approach to computational complexity theory

11:30 – 12:10, F.Yu. Popelensky (Moscow, Russia), Spaces with quaternion conjugation

12:20 – 13:00, N.A. Shchuchkin (Volgograd, Russia), Ternary L-quasigroups and their applications for word transformation

Chairperson N.A. Shchuchkin

15:00 – 15:40, D.L. Tkachev, E.A. Biberdorf (Novosibirsk, Russia), On the spectrum of a linear model describing the flow of a polymer liquid in an infinite cylindrical channel

15:45 – 16:05, E.V. Mishchenko (Novosibirsk, Russia), Frames and some properties of frames in finite-dimensional spaces

16:10 – 16:30, S. Yin Siyao (Novosibirsk, Russia), Billiard Trajectories inside Cones

16:35 – 16:55, N.A. Daurtseva (Novosibirsk, Russia), On the realization of various classes of almost Hermitian structures on manifolds of dimension 6

June 23, Monday

Free day

June 24, Tuesday
Chairperson A.P. Pozhidaev

9:00 – 9:40, B.Sh. Kulpeshov (Almaty, Kazakhstan), The number of countable models and algebras of binary isolating formulas

9:50 – 10:30, V.V. Verbovskiy (Almaty, Kazakhstan), On the properties of functions in ordered o-stable groups of finite convexity rank

10:40 – 11:20, S.V. Sudoplatov (Novosibirsk, Russia), Preservation of properties by types and expansions of structures

11:30 – 12:10, I.I. Pavlyuk (Novosibirsk, Russia), Structural properties of families of group theories

12:20 – 13:00, D.Yu. Emelyanov (Novosibirsk, Russia), Algebras of binary formulas for operations on graphs

Chairperson V.Yu. Gubarev

15:00 – 15:30, A.V. Chekhonadskikh (Novosibirsk, Russia), M.N. Rudometkina (Tomsk, Russia), Construction of polynomial design for a low order control system as a flexible process

15:35 – 16:05, N.Yu. Galanova (Tomsk, Russia), On cuts of ordered algebraic structures

16:10 – 16:40, A.I. Zabarina, E.A. Fomina (Tomsk, Russia), On the sets K_p in some finite groups

June 25, Wednesday

Chairperson V.L. Usol'tsev

9:00 – 9:40, A.P. Pozhidaev (Novosibirsk, Russia), Isomorphisms and automorphisms of simple Prelian algebras and Novikov algebras

9:50 – 10:30, F.A. Dudkin (Novosibirsk, Russia), The problem of isomorphism of groups acting on trees

10:40 – 11:20, V.Yu. Gubarev (Novosibirsk, Russia), Rota-Baxter operators of zero weight on the algebra of matrices of the 3rd order

11:30 – 12:00, E.A. Shaporina (Novosibirsk, Russia), On the construction of cyclic extensions of free groups

12:05 – 12:35, I.M. Buchinsky (Omsk, Russia), Centralizer dimension and Noetherian property by equations of partially commutative two-step nilpotent groups

12:40 – 13:00, A.V. Vaseneva (Novosibirsk, Russia), Ranks of equationality of families of formulas and elementary theories

13:00, Closing Ceremony

FINITE CSA GROUPS AND GENERALIZATIONS

O. Al-Raisi and M. Shahryari

Sultan Qaboos University,
Department of Mathematics, College of Science, Sultan Qaboos University,
Muscat, Oman

e-mail: omartalibmiran@gmail.com, m.ghalehlar@squ.edu.om

A group G is called CSA (conjugately separated abelian) if every maximal abelian subgroup of G is *malnormal*. This means that if H is a maximal abelian subgroup of G and $x \in G \setminus H$ then $H \cap H^x = 1$. The class of CSA groups is quite wide and has very serious roles in the study of residually free groups, universal theory of non-abelian free groups, limit groups, exponential groups and equational domains in algebraic geometry over groups (see [2], [3], [10] , and [11]). Another class of groups which has been studied extensively is the class of CT (commutative transitive) groups. A group is CT if commutativity is a transitive relation on the set of its non-identity elements. Despite this simple definition, the class of CT groups has also a crucial role in the study of residually free groups and so it has a close connection with CSA groups. Every CSA group is CT but the converse is not true. In the presence of residual freeness, both properties are equivalent, a theorem which is proved by B. Baumslag (see [1]).

During the past few decades, there have been many attempts to study these classes and their generalizations. A generalization of CT groups is introduced in [4] to extend the above mentioned theorem of B. Baumslag. Many interesting relations between CSA and CT groups are presented in [7] as well as an excellent account of the previous works.

The idea of CT and CSA groups is a small part of a very general concept. Suppose $\mathfrak{X}$ is a variety of groups. A group G can be called $\mathfrak{X}T$ then, if and only if for any two $\mathfrak{X}$-subgroups $K_1, K_2 \leq G$ the assumption $K_1 \cap K_2 \neq 1$ implies that $\langle K_1, K_2 \rangle$ is also an $\mathfrak{X}$-group. Similarly, we call a group G a $CS\mathfrak{X}$ group if all of its maximal $\mathfrak{X}$-subgroups are malnormal.

It is well-known that every finite CSA group is abelian. All the known proofs usually employ representation theory of finite groups or classification of finite simple groups. In this report, we present an elementary proof for this fact, and then the main idea of this elementary proof will be applied for a wide class of CS$\mathfrak{X}$ groups. A more detailed report of the new results will be published in our forthcoming paper.

1 Basic facts

A subgroup H in group G is called malnormal iff for all $x \in G \setminus H$, we have $H \cap H^x = 1$. A group G is called CSA (conjugate separable abelian), if every maximal abelian subgroup of G is malnormal. The class of CSA groups is quite wide, for example, it includes the following:

1. All fully residually free group.
2. All ultra-power of a CSA.
3. The free products of two CSA groups without involutions.

The class of CSA groups is important in the study of residually free groups, universal theory of non-abelian free groups, limit groups, exponential groups and equational domains in algebraic geometry over groups.

Furthermore, a group is CT if commutativity is a transitive relation on the set of its non-identity elements. Despite this simple definition, the class of CT groups is also important in the study of residually free groups, and so, it naturally has a close connection with CSA groups.

Every CSA group is CT but the converse is not true. In the presence of residual freeness, both properties are equivalent, a theorem which has been proved by B. Baumslag (See [1]). The basic relations between the two aforementioned classes can be listed as follows:

1. Every CSA is CT.
2. If G is CT, then Fine et al proved that G is not CSA iff G contains a non-abelian subgroup G_0 which contains a nontrivial abelian subgroup H that is normal in G_0.
3. For a field K, the group $PSL_2(K)$ is not CSA but it is CT if $char(K) = 2$ or $char(K) = 0$ and -1 is not the sum of two squares.

For the proofs of the claims above, the reader can refer to [7]. Also, we have the following series of more advanced known properties:

1. CSA and CT are universal first order properties, and hence these classes are inductive and subgroup-closed.

2. If a non-abelian group G is residually free, then the following are equivalent:

    - G is fully residually free.
    - G is CT.
    - G is CSA.
    - G is universally free.

In fact, the idea of CT and CSA groups is a small part of a very general concept. The general theory is described in [14]: Suppose $\mathfrak{X}$ is a variety of groups. A group G can be called $\mathfrak{X}$T then, iff for any two $\mathfrak{X}$-subgroups $K_1, K_2 \leq G$ the assumption $K_1 \cap K_2 \neq 1$ implies that $\langle K_1, K_2\rangle$ is also an $\mathfrak{X}$-group. Similarly, we call a group G a CS$\mathfrak{X}$ group if all of its maximal $\mathfrak{X}$-subgroups are malnormal.

As a special case, we consider the variety $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_k$ of nilpotent groups of class at most k: We call a group NT_k (nilpotent transitive of class at most k) if for any two $\mathfrak{N}_k$-subgroups K_1 and K_2, the assumption $K_1 \cap K_2 \neq 1$ implies that $\langle K_1, K_2\rangle$ is nilpotent of class at most k. Also, a group G is CSN_k (conjugately separated nilpotent of class k) if and only if every maximal $\mathfrak{N}_k$-subgroup of G is malnormal. The case $k = 1$ obviously coincides with the ordinary CT and CSA groups. It is also easy to see that the property CSA implies CSN_k. The basic properties of these two classes are given below:

1. Every CSN_k group is NT_k.

2. Both classes are closed under taking subgroups.

3. Both classes can be axiomatize by universal first order sentences.

4. Both classes are closed under taking ultra-products.

5. Suppose A and B are NT_k. Then the free product $G = A * B$ is also CSN_k.

6. Suppose A and B are CSN_k groups without elements of order 2. Then the free product $G = A * B$ is also CSN_k.

7. Every finite CSN_k group is nilpotent of class at most k.

2 Finite CSA groups

Finite CT groups are already classified (by Suzuki 1957 and Yu-Fen Wu 1998; see [7]). It is well-known that every finite CSA group is abelian. The known proofs usually employ representation theory of finite groups or the classification of finite simple groups. We present an elementary proof of this fact, and then the main idea of this elementary proof will be applied to a wide class of CS$\mathfrak{X}$ groups. Before presenting our elementary proof, we need to emphasize the following fact (note that the proof is not elementary):

Theorem 1. Let $\mathfrak{X}$ be a class of groups which contains all cyclic groups. Then every finite CS$\mathfrak{X}$ group belongs to $\mathfrak{X}$.

Proof. The proof of this general fact is not elementary as we use a known result on finite Frobenius groups which says that the Frobenius kernel is unique and every two Frobenius complements are conjugate. Let G be a finite CS$\mathfrak{X}$ group but not an element of $\mathfrak{X}$. Let A be a maximal $\mathfrak{X}$ subgroup of G. Then A is a Frobenius complement and hence every other Frobenius complement is a conjugate of A. Now let $g \in G$ be an arbitrary element. Then $\langle g \rangle \subseteq B$ for some maximal $\mathfrak{X}$-subgroup B. But $B = A^x$ for some x, so

$$G = \bigcup_x A^x.$$

This shows that $A = G$, a contradiction. $\square$

But for some varieties $\mathfrak{X}$, there is an elementary proof for the previous theorem. In what follows we consider as an example variety of abelian groups, i.e. the case of CSA groups.

Theorem 2. Every finite CSA group is abelian.

Proof. In order to give an elementary proof of this statement, we need the following basic facts about CSA groups:

1. Every CSA group is CT.

2. G is CSA iff for all non-identity $x \in G$, the centralizer $C_G(x)$ is a maximal abelian malnormal subgroup.

3. If G is CSA, then every maximal abelian subgroup of G has the form $C_G(x)$ for some non-identity x.

4. If G is CSA then $A\cap B=1$ for all distinct maximal abelian subgroups A and B.

5. If A is a malnormal subgroup, then $N_G(A)=A$.

Now, suppose G is a finite CSA group that is not abelian. Let A_1 be a maximal abelian subgroup, with distinct conjugates

$$A_1^{x_{1,1}}, A_1^{x_{1,2}}, A_1^{x_{1,3}}, \ldots$$

Then all of these subgroups are maximal abelian, and so, each of their pairwise intersection is the trivial subgroup. Suppose

$$G \neq \bigcup_j A_1^{x_{1,j}}.$$

Then there is another maximal abelian subgroup A_2, such that $A_2\cap A_1^{x_{1,j}}=1$, for all j. Let

$$A_2^{x_{2,1}}, A_2^{x_{2,2}}, A_2^{x_{2,3}}, \ldots$$

be the set of all distinct conjugates of A_2. It is easy to see that all subgroups $A_1^{x_{1,j}}$ and $A_2^{x_{2,r}}$ have pairwise trivial intersection. Hence, the union

$$\left(\bigcup_j A_1^{x_{1,j}} \setminus 1\right) \cup \left(\bigcup_r A_2^{x_{2,r}} \setminus 1\right)$$

is disjoint. We proceed in this manner until we find a natural number n, maximal abelian subgroups

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$

and elements $x_{i,j}$ $(1\leq i\leq n, 1\leq j\leq k_i)$, such that the union

$$G\setminus 1 = \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{k_i}(A_i^{x_{ij}}\setminus 1)$$

is disjoint (this must eventually happen as we are assuming that G is finite). Hence, we have

$$\begin{aligned}|G| &= \sum_{i=1}^{n}[G : N_G(A_i)](|A_i| - 1) + 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n}[G : A_i](|A_i| - 1) + 1 \\ &= n|G| - \sum_{i=1}^{n}[G : A_i] + 1.\end{aligned}$$

Therefore, we have

$$\sum_{i=1}^{n}[G : A_i] = (n-1)|G| + 1.$$

Now, we know that each $A_i = C_G(a_i)$, for some $a_i \in A_i$. Hence,

$$[G : A_i] = |\mathrm{Cl}_G(a_i)|,$$

and consequently,

$$\sum_{i=1}^{n}|\mathrm{Cl}_G(a_i)| = (n-1)|G| + 1.$$

Note that, if $i \neq j$, then a_i is not conjugate to a_j (otherwise $A_i \cap A_j \neq 1$). Now, using the class equation, we have

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{n}|\mathrm{Cl}_G(a_i)| + \cdots = 1 + \sum_{i=1}^{n}|\mathrm{Cl}_G(a_i)| + \cdots .$$

Therefore,

$$\sum_{i=1}^{n}|\mathrm{Cl}_G(a_i)| \leq |G| - 1,$$

and hence,

$$(n-1)|G| + 1 \leq |G| - 1,$$

which implies that $n = 1$. So $G = \bigcup_j A_1^{x_{1,j}}$, and hence $G = A_1$. This completes the proof. □

With some modifications, we can use the same proof for more general cases. For example, we can show by the same argument:

Theorem 3. Every finite CSN_k group is nilpotent of class at most k.

The same idea can be used in the proof of the following:

Theorem 4. Let $\mathfrak{X}$ be a variety which contains all abelian groups and suppose $\mathrm{CS}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathrm{T}$. Then every finite $\mathrm{CS}\mathfrak{X}$ group belongs to $\mathfrak{X}$.

References

[1] B. Baumslag, Residually free groups // Proc. London Math. Soc. **17**(3), 1967, pp. 402-418.

[2] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over groups: I. Algebraic sets and ideal theory // J. Algebra, **219**, 1999, pp. 16-79.

[3] C. Champetier, V. Guirardel, Limit groups as limits of free groups // Israel Journal of Mathematics, **146**, 2005, pp. 1-75.

[4] L. Ciobanu, B. Fine, G. Rosenberger, Classes of groups generalizing a theorem of Benjamin Baumslag // Communications in Algebra, **44**(2), 2016, pp. 656-667.

[5] D. Costantino, M. Primož, N. Chiara, Groups in which the bounded nilpotency of two generator subgroups is a transitive relation // Beiträge zur Algebra und Geometrie, **48**(1), 2007, pp. 69-82.

[6] E. Daniyarova, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over algebraic structures, II: Fundations // J. Math. Sci., 2012, **185 (3)**, pp. 389-416.

[7] B. Fine, A. Gaglione, G. Rosenberger, D. Spellman, On CT and CSA groups and related ideas // J. Group Theory, 2016, **19**, pp. 923-940.

[8] S.A. Jennings, The group ring of a class of infinite nilpotent groups // Canadian J. Math., 1955, **7**, pp. 169-187.

[9] M. Isaacs, Character theory of finite groups. AMS Chelsea Publishing, 1976.

[10] A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Groups with exponents I: Fundamentals of the theory and tensor completions // Siberian Mathematical Journal, **35**(5), 1994, pp. 986-996.

[11] A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Exponential groups II: Extensions of centralizers and tensor completions of CSA groups // International Journal of Algebra and Computations, **6**(6), 1996, pp. 678-711.

[12] O. Al-Raisi, M. Shahryari, New Classes of Groups Which are Equational Domains // Bull. Iran. Math. Soc. **51**(43), 2025. https://doi.org/10.1007/s41980-024-00950-4

[13] V. Remeslennikov, ∃-free groups // Siberian Mathematical Journal, **30**(6), 1989, pp. 193-197.

[14] M. Shahryari, On conjugate separability of nilpotent subgroups // Journal of Group Theory, 2024. https://doi.org/10.1515/jgth-2024-0023.

КОДИРОВАНИЕ И ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ КОРНЕВЫХ РАСПОЛОЖЕНИЙ КОРНЕЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

А.В. Чехонадских

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: chekhonadskikh@corp.nstu.ru

1 Введение

Переходные процессы в системах автоматического управления (САУ) можно условно считать двухфазными: фаза действия возмущения и фаза стабилизации — восстановления заданных показателей происходящих в управляемом объекте процессов. В первой из них динамическая система подвергается внешнему возмущающему воздействию, из-за которого текущие показатели отклоняются от установившихся (заданных) значений. Во второй возмущающий импульс снимается (т.е. внешнее воздействие прекращается), и благодаря действию регулятора система возвращается к установившемуся режиму.

Такое разделение условно, поскольку вектор отклонений контролируемых величин уже в первой фазе не совпадает с собственно возмущением из-за вмешательства регулятора, призванного снизить отклонения еще до снятия возмущения. Помимо этого, и в фазе стабилизации возможны новые внешние импульсы до того, как восстановлены заданные показатели.

Сто́ит отметить, что на протяжении длительного развития теории линейных стационарных САУ основное внимание уделялось именно фазе стабилизации: как быстро, точно и с каким качеством система возвращается к нужным показателям. В требования к качеству стабилизации входят недопущение значительного перерегулирования (в том числе исключение ситуаций, когда действие регулятора на некоторых временны́х интервалах существенно увеличивает возмущение), монотонное гашение отклонения и др. [1, 2]. Некоторые требования — в частности, быстродействие и бесколебательность — для линейных систем находят удовлетворительное выражение в корневых терминах, т.е. условиях на расположение корней характеристического многочлена (полюсов системы) на комплексной плоскости, причем наибольшую роль в этом играет расположение "самых правых" из них, задающих скорость убывания сравнительно медленно гаснущих слагаемых (мод) отклонения [1, 3, 4].

В последние годы значительное внимание специалистов привлекает и первая фаза: поведение системы в том временно́м интервале, когда действует возмущающий импульс [5–7]. В частности, возникающий при подаче возмущения или его снятии эффект всплеска (т.е. превышение, иногда многократное, откликом системы самого возмущающего воздействия [1, 8]) с практической точки зрения может оказаться важнее, чем качество компенсации после снятия возмущения [1]. Короткие временные интервалы переднего или заднего фронта возмущающего импульса могут задавать большие коэффициенты при быстро гаснущих модах решения, которые соответствуют левым полюсам с большой мнимой частью и высоким частотам колебаний. Тем самым, существенное влияние на переходные процессы оказывают все полюса системы и все слагаемые, входящие в решение описывающих САУ уравнений.

Одновременное выполнение нескольких требований, нередко противоречащих одно другому, затруднительно [1], особенно если применяется регулятор пониженного порядка, не позволяющий добиваться произвольно заданного расположения полюсов. В таком случае приходится использовать оптимизационный подход, когда возможно лучшее корневое расположение достигается за счёт выбора структуры регулятора и значений его параметров, что предполагает минимизацию некоторой целевой функции.

Развитый А.А. Воеводой, А.Н. Корюкиным и автором метод критических корневых диаграмм [3, 4, 9–11] опирается на понятия R-градуировки (см. далее п.1), координатизации корней, конструкции корневого симплекса и его сегментарно-граничного описания в виде симплектического графа [4, 12–15]. Сами диаграммы отражают критические по выбранной R-градуировке расположения "самых правых" полюсов САУ, наименее удобных с точки зрения предъявляемых инженерных требований. Это позволило указать оптимальные по степени устойчивости

[1] Фигурально выражаясь, какая разница, когда успокоятся волны, если лодка уже опрокинулась?

(т.е. условной скорости гашения возмущения — одной из распространенных характеристик устойчивости системы) настройки регуляторов пониженного порядка в нескольких характерных примерах [4, 16–18]. Как ясно из сказанного, такая оптимизация относится только ко второй фазе процесса возмущения — стабилизации. Однако оптимальность САУ по быстродействию при тестировании прямоугольными импульсами не обеспечивает поведения системы во время действия импульса, которое можно было бы признать оптимальным [1, 5, 16]. Таким образом, на итоговый выбор структуры и настроек регулятора могут существенно повлиять и “неправые” полюса.

В работе предпринимается попытка более полного описания взаимных расположений всех (а не только самых правых) корней действительных многочленов при заданной R-градуировке.

2 R-градуированные расположения корней многочленов

Пусть на комплексной плоскости задан предпорядок $\leq_\alpha$, позволяющий различать полюса САУ, расположенные ’левее’ или ’правее’, что соответствовало бы инженерным представлениям о более или менее устойчивых модах. Заметим, что рассматриваемые здесь и ниже понятия введены при развитии методов синтеза устойчивых в том или ином смысле САУ; через P ниже обозначены параметры управления, т.е. изменяемые настройки регулятора системы, входящие в коэффициенты её характеристического многочлена $f(s)$ и, таким образом, задающие расположение её полюсов $z_1, ..., z_n$.

Обычным способом можно ввести α-равенство и строгое α-неравенство. Точные формулировки можно найти в [3, 14, 15]; здесь достаточно трех примеров таких предпорядков, отражающих большинство рассматриваемых в синтезе САУ ситуаций:

1) сравнение по степени устойчивости $z_1 \leq_\alpha z_2 \Leftrightarrow Rez_1 \leq Rez_2$; оно используется, если от системы требуется возможно быстрое гашение отклонений (быстродействие); для его достижения минимизируется *гурвицева функция* $H(P) = max(Rez_1, ..., Rez_n)$;

2) сравнение колебательности при учете устойчивости $z_1 \leq_\alpha z_2 \Leftrightarrow Rez_1 + Im|z_1| \leq Rez_2 + Im|z_2|$; используется, когда нужно минимизировать колебательную характеристику, не допуская при этом выхода системы на границу устойчивости; для нахождения оптимальных значений параметров P минимизируется *коническая функция*

$K(P) = \max_{k=1,...,n}(Rez_k + |Imz_k|)$;

3) сравнение устойчивости с учетом колебательности

$z_1 \leq_\alpha z_2 \Leftrightarrow Rez_1 + \sqrt{L^2 + Im^2 z_1} \leq Rez_2 + \sqrt{L^2 + Im^2 z_2}$;

оно используется, если необходимо добиться максимального быстродействия, ограничивая также колебательную составляющую; здесь минимизируется *гиперболическая функция*:

$G(P) = \max_{k=1,...,n}(Rez_k + \sqrt{L^2 + Im^2 z_k} - L)$;

Очевидно, расположение корней при первом выборе ограничивается левой полуплоскостью вида $Re(z) \leq \alpha$ для соответствующего значения α. При втором — разомкнутым влево конусом (сектором) вида $Rez + Im|z| \leq \alpha$. В третьем случае — внутренностью левой ветви равнобочной гиперболы $Rez + \sqrt{L^2 + Im^2 z} - L \leq \alpha$, что достаточно близко к трапециевидной области — конусу, усеченному на расстоянии L от вершины — нередко применяемому в синтезе САУ ограничению на расположение корней. Таким образом, каждому корню z_k сопоставляется его градуировочное значение $\alpha_k = F(z_k)$, например, $\alpha_k = Re(z_k)$ или $\alpha_k = Re(z_k) + |Im(z_k)|$. Нахождение значений параметров, оптимизирующих устойчивость системы, сводится к минимизации в пространстве параметров P R-градуировки $F(P) = max(F(z_1), ..., F(z_n))$, задающей 'правую' границу всего корневого набора и определяемой формулами типа $H(P), K(P)$ и $G(P)$.

Поскольку R-градуировка расположения полюсов определяется самыми правыми, наименее устойчивыми из них, они оказываются на границе соответствующей градуировочной области. Для метода критических корневых диаграмм существенно, чтобы предпорядок основывался на алгебраических связях между действительной и мнимой частями — так же, как в примерах из [3, 4, 15]. Границу градуировочной области на комплексной плоскости, где располагаются самые правые полюса, будем называть *правой вертикалью.* Для гурвицевой функции это действительно будут вертикальные прямые $Re(z) = \alpha$ на комплексной плоскости, для конической — пары лучей $z_1 + Im|z_1| = \alpha$, для гиперболической — левые ветви гипербол $Rez_1 + \sqrt{L^2 + Im^2 z_1} = \alpha$.

Но каждый полюс или комплексно-сопряжённая пара, расположенные левее, также задают некоторую градуировочную вертикаль, на которой располагаются α-равные им корни.

Оптимизация степени устойчивости в [3, 4, 10, 11, 16] сводилась к смещению влево правой вертикали. В настоящей работе рассматриваются всевозможные расположения характеристических корней, распределенных на несколько α-вертикалей, число которых не превышает степени характеристического многочлена.

3 Постановка задачи

Нашей целью будет описание всевозможных вариантов взаимного расположения всех корней многочлена в соответствии с предпорядком $\leq_\alpha$ — т.е. R-градуировками корней.

Во-первых, корневые расположения следует формализовать матричными кодами. Главным показателем системы в этом случае является степень характеристического многочлена, т.е. общее число корней. Во-вторых, матричные коды нужно перечислить индукционной процедурой.

Если в [15] критические корневые диаграммы перечислялись исходя из числа свободных (настраиваемых) параметров регулятора, то целью настоящей работы является перечисление взаимных расположений всех корней, а не только самых правых. Передаточная дробь регулятора вносит вклад в их число в соответствии с формулой характеристического многочлена.

Таким образом, здесь будет дано более полное описание корневых расположений, чем достигалось в [14, 15], за счет того, что

— координатизации и кодирования полюсов в корневых симплексах производились там без учета кратных комплексных пар;

— критические корневые диаграммы не учитывают полюсов, расположенных левее правой вертикали. Предлагаемое кодовое описание задает аналоги корневых сегментов [14], различающихся (и, тем самым, кодируемым) кортежами кратностей и сепарабельными составляющими характеристического многочлена, которые могут изменяться при смене корневого сегмента, но не в его пределах. Заметим, что нет нужды учитывать соотношение мнимых частей корней на разных α-вертикалях (только на каждой в отдельности), т.к. с точки зрения дифференциальных и оптимизационных свойств их совпадение при различных действительных частях существенного значения не имеет.

4 R-градуировочное кодирование корней многочленов

Следуя разбиению корневого множества на группы α-равных корней, введём кодировку корневых расположений.

Кодом каждого из них будет матрица формата не более $([n/2]+1)\times n$, где n — число полюсов (степень характеристического многочлена САУ). Столбцы соответствуют корневым вертикалям слева направо, так что если $z_k \leq_\alpha z_l$, то столбец, кодирующий полюса, α-равные z_k, оказывается левее столбца, кодирующего полюс z_l и его α-вертикальных соседей. Верхний элемент столбца равен кратности действительного корня, расположенного на соответствующей α-вертикали, ниже в этом столбце находятся кратности α-равных ему комплексных пар в порядке возрастания модуля мнимой части. Очевидно, столбцов не более n, и в каждом из столбцов не более $[n/2]+1$ элементов. Условимся исключать столбцы и строки, не содержащие ненулевых элементов, но заполнять нулями столбцы до максимальной в кодовой матрице высоты, если число различных комплексных пар, кодируемых в этих столбцах, меньше максимального.

Например, для гурвицевой градуировки расположение 24 корней[2]
$-1; -1; -1 \pm i; -1 \pm 2i; -1 \pm 2i; \pm i; \pm i; \pm i; 1; 1; 1 \pm 2i; 1 \pm 2i; 1 \pm 3i; 2 \pm 2i$

распределяется на четыре α-вертикали и описывается кодовой матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Это же корневое мультимножество в соответствии с конической градуировкой будет распределяться на пять α-вертикалей и пять подмножеств α-равных элементов (подмножества перечисляем в порядке возрастания градуировки, а элементы — по возрастанию модуля мнимой части): $\{-1; -1\} \cup \{-1 \pm i\} \cup \{1; 1; \pm i; \pm i; \pm i; -1 \pm 2i; -1 \pm 2i\}; \cup \{1 \pm 2i; 1 \pm 2i\} \cup \{2 \pm 2i; 1 \pm 3i\}$;

оно кодируется матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Особенностью такого кодирования является учет всех корней, действительных и комплексно-сопряженных, вместе с их кратностями. Это обеспечивает следующую существенную для оптимизации возможность. Рассмотрим многообразие в пространстве параметров регулятора, задаваемое кортежем $< r_1, \ldots, r_m >$, (где $r_1 + \ldots + r_m = n$) кратностей корней $z_1 <_\alpha \ldots <_\alpha z_m$ характеристического многочлена $f_P(s)$ при различных векторах параметров $P \in M$. Поскольку на многообразии M эти

[2]Мультимножество перечисляется с повторениями в соответствии с кратностями.

кратности не меняются и других кратных корней не возникает, различные корни исходного многочлена $f_P(s)$ совпадают с корнями его сепарабельной составляющей $p(s) = f(s)/\text{н.о.д.}(f(s), f'(s))$. Следовательно, на множестве M коэффициенты многочлена оказываются алгебраическими выражениями от коэффициентов многочлена и дифференцируемыми функциями параметров регулятора. За счет этого на многообразиях постоянных кратностей самых правых корней R-градуировка дифференцируема как функция параметров регулятора, и, таким образом, при поддержании неизменного корневого кода возможна оптимизация целевой R-градуировки обычными средствами [9].

5 Перечисление корневой вертикали

Примем следующие обозначения:

$RI(k)$ — множество столбцовых кодов для k корней на правой вертикали;

$RI(k)_l$ — множество столбцовых кодов для k корней на правой вертикали, включающих в себя l комплексных пар;

Ri — общее обозначение кодового столбца, входящего в множество $RI(k)$;

$ri(k)$ — мощность (число элементов) кодового множества $RI(k)$;

$ri(k)_l$ — число столбцовых кодов для k корней на правой вертикали, включающих в себя l комплексных пар.

Многочлен степени n имеет на правой вертикали не более $[n/2]$ комплексных пар. Перечислить все такие расположения можно двойной индукцией: по общему числу m самых правых корней (т.е. корней на правой вертикали), и для каждого $m = 1, \ldots, n$ — индукцией по кратности $r = 0, \ldots, [m/2]$ *внешней комплексной пары* (т.е. пары с наибольшей по модулю мнимой частью). Везде ниже корни считаются с их кратностью.

Базис индукции устанавливается непосредственно. Будем считать, что при $m = 0$ кодовое множество указывает на пустое множество корней: $RI(0) = \{(0)\}$; как будет видно далее, при этом удобно предположить, что $ri(0) = 1$.

Если $m = 1$, то возможности расположения сводятся к простому действительному корню при отсутствии комплексных пар. Множество столбцовых кодов одноэлементно: $RI(1) = \{(1)\}$, так что $ri(1) = 1$.

Если $m = 2$, то оба корня либо действительны, либо комплексно-сопряженны. В итоге $RI(2) = \{(2); \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$, $ri(2) = 2$.

Предположим, что для для $k = 1, \dots, m-1$ все возможные вертикальные расположения k корней перечислены, т.е. кодовые множества $RI(k)$ и их мощности $ri(k)$ найдены.

Перечислим коды вертикальных расположений $RI(m)$ для числа m, $2 < m \leq n$. Если на правой вертикали нет комплексных пар, то $r = 0$ и подмножество $RI(m)_0$ правых корней включает в себя единственный действительный корень кратности m: $RI(m)_0 = \{(m)\}$, $ri(m)_0 = 1$.

Если среди корней на правой вертикали имеются комплексные, то среди них есть и внешняя пара. Если она простая, т.е. $r = 1$, то на правой вертикали располагается еще $m-2$ корня, для которых кодовое множество $RI(m-2)$ по индукционному предположению известно. Тогда подмножество $RI(m)_1$ состоит из столбцов вида $\begin{pmatrix} Ri \\ 1 \end{pmatrix}$ для всевозможных $Ri \in RI(m-2)$, так что $ri(m)_1 = ri(m-2)$. Например, для $m = 3$ получается $RI(3)_1 = \{\begin{pmatrix} Ri \\ 1 \end{pmatrix} | Ri \in RI(1)\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $ri(3)_1 = ri(1) = 1$; для $m = 4$ получается $RI(4)_1 = \{\begin{pmatrix} Ri \\ 1 \end{pmatrix} | Ri \in RI(2)\} = \{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$; $ri(4)_1 = ri(2) = 2$.

Если $m \geq 4$, появляется возможность двухкратной пары ($r = 2$), так что $RI(m)_2 = \{\begin{pmatrix} Ri \\ 2 \end{pmatrix} | Ri \in RI(m-4)\}$. В частности, $RI(4)_2 = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.

И так далее.

В общем случае максимальная кратность комплексных пар $r = [m/2]$, что при четном числе m дает одноэлементное кодовое подмножество, т.к. $RI(m)_{m/2} = \{\begin{pmatrix} RI(0) \\ m/2 \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ m/2 \end{pmatrix}\}$, при нечетном m — также одноэлементное кодовое подмножество $RI(m)_{[m/2]} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ [m/2] \end{pmatrix}\}$.

Подытожим результаты рассмотрения.

Предложение 1. Всевозможные расположения m полюсов на одной вертикали кодируются объединением

$$RI(m) = \bigcup_{r=0,\dots,[m/2]} RI(m)_r = \bigcup_{r=0,\dots,[m/2]} \{\begin{pmatrix} Ri \\ r \end{pmatrix} | Ri \in \ RI(m-2r)\}.$$

Предложение 2. Число вертикальных расположений m полюсов задается формулой

$$ri(m) = ri(m)_0 + ri(m)_1 + \ldots + ri(m)_{[m/2]} = 1 + ri(m-2) + ri(m-4) +$$

$$+ri(res(m/2))_{[m/2]} = 1 + \sum_{k=1}^{[m/2]} ri(m-2k)$$

.

Заметим, что запись объединения в Предложении 1 при $r = 0$ предполагает равенство $RI(m) = \begin{pmatrix} RI(m) \\ 0 \end{pmatrix}$, вполне естественное для кодов корневых расположений, а в Предложении 2 при записи функции $ri(m)$ в виде суммы для четного m используется соглашение $ri(0) = 1$.

Примеры. 1) Как указано выше, при $m = 1$ множество кодов $RI(1) = RI(1)_0 = (1)$ одноэлементно: $ri(1) = ri(1)_0 = 1$. Это соответствует общим формулам:

$RI(1) = \bigcup_{r=0,\dots,[1/2]} RI(1)_r = RI(1)_0 = \{(1)\}$

и $\sum_{k=0}^{0} ri(1-2k) = ri(1) = 1$.

2) При $m = 2, 3$ общие формулы кодового множества и его мощности также совпадают с непосредственно найденными выше значениями:

$RI(2) = \bigcup_{r=0,\dots,[2/2]} RI(2)_r = RI(2)_0 \cup RI(2-2)_1 = \{(2); \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$;

$ri(2) = 1 + \sum_{k=1}^{[2/2]} ri(2-2k) = 1 + ri(0) = 2$.

$RI(3) = \bigcup_{r=0,\dots,[3/2]} RI(3)_r = RI(3)_0 \cup RI(1)_1 = \{(3), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$;

$ri(3) = 1 + \sum_{k=1}^{[3/2]} ri(m-2k) = 1 + ri(1) = 1 + 1 = 2$.

3) $RI(4) = \bigcup_{r=0,\dots,[4/2]} \begin{pmatrix} RI(4-2r) \\ r \end{pmatrix} = \{(4)\} \cup \begin{pmatrix} RI(2) \\ 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} RI(0) \\ 2 \end{pmatrix}\} =$

$= \{(4); \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\}$;

$ri(4) = 1 + \sum_{k=1}^{[4/2]} ri(4-2k) = 1 + ri(2) + ri(0) = 1 + 2 + 1 = 4$.

4) $RI(5) = \bigcup_{r=0,\dots,[5/2]} \begin{pmatrix} RI(5-2r) \\ r \end{pmatrix} = \{(5)\} \cup \begin{pmatrix} RI(3) \\ 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} RI(1) \\ 2 \end{pmatrix} =$

$= \{(5); \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$;

$ri(5) = 1 + \sum_{k=1}^{[5/2]} ri(5-2k) = 1 + ri(3) + ri(1) = 1 + 2 + 1 = 4$.

5) $RI(6) = \bigcup_{r=0,\dots,[6/2]} \begin{pmatrix} RI(6-2r) \\ r \end{pmatrix} = \{(6)\} \cup \begin{pmatrix} RI(4) \\ 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} RI(2) \\ 2 \end{pmatrix} \cup$

$\cup \begin{pmatrix} RI(0) \\ 3 \end{pmatrix} = \{(6); \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\}$;

$ri(6) = 1 + \sum_{k=1}^{[6/2]} ri(6-2k) = 1 + ri(4) + ri(2) + ri(0) = 1 + 4 + 2 + 1 = 8.$

На основании этих примеров (равно как и из непосредственного усмотрения) можно сформулировать два утверждения:

Предложение 3. Кодовые множества α-вертикальных корневых расположений $RI(2k)$ и $RI(2k+1)$ связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_l \end{pmatrix} \in RI(2k) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} r_0 + 1 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_l \end{pmatrix} \in RI(2k+1)$$

для всех положительных натуральных $r_0 + 2r_1 + \cdots + 2r_l = 2k$.

Предложение 4. Кодовые множества вертикальных корневых расположений $RI(m)$ и $RI(m+2)$ связаны соотношениями

$$(r_0) \in RI(m) \Leftrightarrow (r_0 + 2), \begin{pmatrix} r_0 \\ 1 \end{pmatrix} \in RI(m+2);$$

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ \vdots \\ r_l \end{pmatrix} \in RI(m) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} r_0 \\ \vdots \\ r_l + 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_0 \\ \vdots \\ r_l \\ 1 \end{pmatrix} \in RI(m+2)$$

для всех положительных натуральных $r_0 + 2r_1 + \cdots + 2r_l = m$, причем при различных столбцах в левых частях столбцы в правых частях не имеют общих элементов.

Доказательство. Сами вышеприведенные соотношения очевидны. Для обоснования отсутствия общих элементов в правых частях обоих соотношений достаточно заметить, что столбцы, стоящие в их левой части (в том числе одноэлементные), однозначно восстанавливаются по любому из двух столбцов в правой. Действительно, если нижний элемент кодового столбца в правой части равен единице, т.е. столбец имеет вид $\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_l \\ 1 \end{pmatrix}$, то в левой части ему соответствует столбец $\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_l \end{pmatrix}$, если же нижний элемент r_l кодового столбца $\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_l \end{pmatrix}$ в правой части больше единицы, то в левой части ему соответствует столбец $\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_l - 1 \end{pmatrix}$.

Следствие. Мощности вертикальных корневых расположений связаны соотношениями $ri(2k) = ri(2k+1); 2ri(m) = ri(m+2)$.

6 Перечисление полного списка корневых расположений

Примем следующие обозначения:

$FU(n)$ — множество матричных кодов для градуированных расположений n корней;

Fu — общее обозначение кодовой матрицы, входящей в множество $FU(n)$;

$fu(n)$ — число элементов во множестве $FU(n)$, т.е. мощность множества градуированных расположений n корней.

Опишем множества $FU(n)$ для натуральных n полной индукцией по степени n.

Для $n = 1$ множества корней и, следовательно, корневых расположений одноэлементны: $FU(1) = RI(1) = \{(1)\}, fu(1) = 1$.

Пусть все кодовые множества $FU(k)$ для $k < n$ перечислены, и значения $fu(k)$ известны. Составим множество $FU(n)$.

На правой вертикали возможно расположение любого числа корней m от 1 до n; множества их кодовых столбцов $RI(m)$ описаны в п.5. Если $m = n$, то подмножество $RI(n)$ входит в $FU(n)$ без изменений.

Если $m < n$, то на правую вертикаль попадают не все корни, и $k = n - m$ из них расположены левее в соответствии с одной из кодовых матриц $Fu \in FU(k)$. Правые корни расположены в соответствии с одной из кодовых матриц $Ri \in RI(m)$. Совместное расположение тех и других соответствует матричному коду $(Fu|Ri)$; обозначим все такие матрицы $FU_m(n)$. Число таких матриц для каждого $1 \leq m < n$ равно произведению $fu(n-m) \cdot ri(m)$. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 5. Всевозможные градуированные расположения n полюсов кодируются объединением подмножеств

$$FU(n) = \bigcup_{m=1,\ldots,n-1} FU_m(n) \cup RI(n),$$

где $FU_m(n) = \{(Fu|Ri)|Fu \in FU(n-m), Ri \in RI(m)\}$.

Следствие. Мощности градуированных расположений n полюсов удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$fu(n) = ri(n) + \sum_{m=1}^{n-1} fu(n-m)ri(m)$$

.

Примеры.

1) Для $n = 1$, как указано выше, $FU(1) = RI(1) = \{(1)\}, fu(1) = 1$.

2) Для $n = 2$, как указано в п.3, $RI(2) = \{(2); \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$;

тогда $FU(2) = FU_1(2) \cup RI(2) = \{(Fu|Ri)|Fu \in FU(1), Ri \in RI(1)\} \cup$ $\cup \{(2); \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} = \{(1\ \ 1); (2); \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$;

далее, $fu(2) = ri(2) + fu(1)ri(1) = 2 + 1 \cdot 1 = 3$; все это видно непосредственно.

3) Для $n = 3$ кодовые множества $RI(3) = \{(3), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$;

$FU(3) = FU_1(3) \cup FU_2(3) \cup RI(3) = \{(Fu|Ri)|Fu \in FU(2), Ri \in RI(1)\} \cup \{(Fu|Ri)|Fu \in FU(1), Ri \in RI(2)\} \cup RI(3) = \{(Fu|Ri)|Fu \in \{(11); (2); \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})\}, Ri = (1)\} \cup \{(Fu|Ri)|Fu = (1), Ri \in \{(2); \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}\} \cup$ $\cup RI(3) = \{(111); (21); \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; (12); \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; (3), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$;

$fu(3) = ri(3) + fu(2)ri(1) + fu(1)ri(2) = 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 7$.

4) Для $n = 4$ кодовые множества $RI(4) = \{(4); \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\}$;

$FU(4) = FU_1(4) \cup FU_2(4) \cup FU_3(4) \cup RI(4) = \{(Fu|Ri)|Fu \in FU(3), Ri \in RI(1)\} \cup \{(Fu|Ri)|Fu \in FU(2), Ri \in RI(2)\} \cup \{(Fu|Ri)|Fu \in FU(1), Ri \in RI(3)\} \cup RI(4) = \{(1111); (211); \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; (121); \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; (31); \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$

$$(112); (22); \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(13); \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; (4); \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\};$$

$fu(4) = ri(4) + fu(3)ri(1) + fu(2)ri(2) + fu(1)ri(3) = 4 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 19$.

5) Списки кодов становятся громоздкими, но таблицу значений функции $fu(n)$ для различных степеней характеристического многочлена можно продолжить.

Таблица 1. Численности столбцовых кодов правых корней характеристического многочлена и полных матричных кодов корневых расположений для различных степеней n

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$ri(n)$	1	2	2	4	4	8	8	16	16	32	32
$fu(n)$	1	3	7	19	47	123	311	803	2047	5259	13447

.

Начальный отрезок значений функции $fu(n)$ совпадает с начальным отрезком целочисленной последовательности A026581 с производящей функцией $(1+2x)/(1-x-4x^2)$ [19]. Совпадение последовательности $\{fu(n)|n \in \mathbf{N}\}$ с последовательностью A026581 оставим в качестве *гипотезы.*

7 Заключение

Как мы видели, в Предложении 4 представлено рекуррентное перечисление кодов различных градуированных расположений корней многочленов, упорядоченных лексикографически по выбранной R-градуировке и далее по модулю мнимой части, с учетом их кратностей.

Для нахождения оптимального регулятора линейной стационарной САУ существенно, что при неизменном коде градуированного расположения корней коэффициенты сепарабельной составляющей $p(s) = f(s)/(\text{н.о.д.}(f(s), f'(s))$ характеристического многочлена $f(s)$ оказываются дифференцируемыми функциями параметров P регулятора. Это допускает гладкую минимизацию целевой R-градуировки [3, 9] на многообразии с фиксированным кодом.

Как и в [14, 15], каждому коду корневого расположения соответствует некоторая размерность в пространстве корней, так что множество всех расположений корней данного характеристического многочлена можно разбить на подмножества с одинаковыми размерностям корневых сегментов. Между сегментами с размерностями, отличающимися на единицу, устанавливается сегментарно-граничное соответствие, позволяющее по аналогии с [14] образовать полный симплектический орграф, вершины которого задаются кодами расположений $Fu \in FU(n)$. Если допустить гипотезу п.6, то мощность полного симплектического орграфа в зависимости от n будет расти несколько быстрее, чем мощность неполного: $\sim 2,56155^n$ вместо $\sim 2,48119^n$ [15]. Построение и выяснение структуры полных симплектических орграфов и кодово-матричная характеризация сегментарно-граничной смежности составляют предмет дальнейшего изучения.

Список литературы

[1] B.T. Polyak, M.V. Khlebnikov, L.B. Rapoport. Matematicheskaja teorija avtomaticheskogo upravlenija [Mathematical theory of automatic control], Moscow: URSS, 2019. 500 pp.

[2] V. Zhmud, D. Dimitrov. Designing of the Precision Automatic Control Systems. Novosibirsk: KANT. 2017. 126 pp.

[3] A.V. Chekhonadskikh. Root coordinates in the design of siso control systems // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2015. V. 51. No 5. Pp. 485–495.

[4] A.V. Chekhonadskikh, A.A. Voevoda. Algebraic design method of low order control systems // 2015 International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2015, Proceedings. 2015. P. 7147022.

[5] B.T. Polyak, A.A. Tremba, M.V. Khlebnikov, P.S. Shcherbakov, G.V. Smirnov. Large deviations in linear control systems with nonzero initial conditions // Automation and Remote Control. 2015. V. 76, Iss. 6. Pp. 957–976.

[6] B.T. Polyak, M.V. Khlebnikov. Static controller synthesis for peak-to-peak gain minimization as an optimization problem // Automation and Remote Control. 2021. V. 82. No 9. Pp. 1530–1553.

[7] B.T. Polyak, M.V. Khlebnikov. New criteria for tuning PID controllers // Automation and Remote Control. 2022. V. 83. No 11. Pp. 1724–1741.

[8] M.V. Khlebnikov, E.A. Stefanyuk. Peak-minimizing design for linear control systems with exog-enous disturbances and structured matrix uncertainties // Control Sciences. 2023. No 3. Pp. 9–14.

[9] A.A. Voevoda, A.V. Chekhonadskikh. Overcoming nondifferentiability in optimization synthesis of automatic control systems // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2010. V. 46. No 5. Pp. 408–413.

[10] A.N. Korjukin. Generalized PID controller for a two-mass system with the largest stability margin [Obobshhennyj PID-reguljator dvuhmassovoj sistemy s naibol'shim zapasom ustojchivosti] // Scientific Bulletin of NSTU [Nauchnyj vestnik NGTU]. 2013. No. 3(52). P. 10—17. (Russian)

[11] A.N. Koryukin, A.A. Voevoda. PID-controllers of some two-mass system and the double complex pairs // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2015. T. 9. No 2. Pp. 215–226.

[12] A.A. Voevoda, A.V. Chekhonadskikh. Coordinatization of a root system of real polynomials of small degrees [Koordinatizacija sistemy kornej veshhestvennyh mnogochlenov malyh stepenej] // Scientific Bulletin of NSTU [Nauchnyj vestnik NGTU]. 2005. No. 3 (21). P. 177—180. (Russian)

[13] A.A. Voevoda, A.V. Chekhonadskikh. Coordinatization of a root system of real polynomials of degree 5 [Koordinatizacija sistemy kornej veshhestvennyh mnogochlenov stepeni 5] // Scientific Bulletin of NSTU [Nauchnyj vestnik NGTU]. 2006. No. 1 (22). P. 173–176. (Russian)

[14] A.V. Chekhonadskikh. Root simplices and symplectic graphs of real polynomials [Kornevye simpleksy i simplekticheskie grafy dejstvitel'nyh mnogochlenov] // Scientific Bulletin of NSTU [Nauchnyj vestnik NGTU]. 2009. No. 1 (34). P. 143–164. (Russian)

[15] A.V. Chekhonadskikh. Some classical number sequences in control system design // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2017. V. 14. P. 620–628.

[16] A.V. Chekhonadskikh. Polynomial Design of Low-Order Controllers for SISO DAE Systems // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2023. V. 59. No 3. Pp. 372–381.

[17] A.V. Chekhonadskikh. Optimal gyroscopic stabilization of vibrational system: algebraic approach // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2024. V. 21, Iss. 1. P. 70–80.

[18] S. A. Gayvoronskiy, T. A. Ezangna, A. V. Sobol. Control systems synthesis of maximum robust stability degree based on vertex critical root diagrams [Sintez sistem upravlenija maksimal'noj robastnoj stepeni ustojchivosti na osnove vershinnyh kriticheskih kornevyh diagramm] // Mechatronics, automation, control [Mehatronika, avtomatizacija, upravlenie], V. 24, No. 10 (2023), 519–525. (Russian)

[19] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. A026581. https://oeis.org/A026581 (accessed 15.10.2025).

NOTES ON THE CONGRUENCE DENSITIES AND QUASIORDER DENSITIES OF SUBLATTICES

Gábor Czédli*

University of Szeged, Bolyai Institute. Szeged, Aradi vértanúk tere 1, HUNGARY 6720

e-mail: czedli@math.u-szeged.hu, url: https://www.math.u-szeged.hu/~czedli/

Dedicated to Ferencné Piroska Varga, our esteemed librarian at the Mathematical Library of Bolyai Institute, on her sixty-fifth birthday, in honor of her excellent work and her academic background, holding M.Sc. degrees in library science and in mathematics and physics education.

Abstract. For a positive integer n, let $\mathrm{mnc}(n)$ denote the maximum number of congruences among all n-element lattices; that is, $\mathrm{mnc}(n) = \max\{|\mathrm{Con}(L)| : L \text{ is an } n\text{-element lattice}\}$, where $\mathrm{Con}(L)$ stands for the congruence lattice of L. We know from a 1997 paper of R. Freese that $\mathrm{mnc}(n) = 2^{n-1}$. The *congruence density* $\mathrm{cd}(L)$ of a finite lattice L is defined to be the quotient $|\mathrm{Con}(L)|/\mathrm{mnc}(|L|)$. That is, if an n-element lattice L has exactly k congruences, then $\mathrm{cd}(L) = k/2^{n-1}$. The maximum number of (compatible) quasiorders of an n-element lattice L is 2^{2n-2}, and we define the *quasiorder density* $\mathrm{qd}(L)$ of L—analogously to $\mathrm{cd}(L)$—as $\mathrm{qd}(L) := |\mathrm{Quo}(L)|/2^{2n-2}$, where $\mathrm{Quo}(L)$ is the quasiorder lattice of L. We prove that if S is a sublattice of a finite lattice L and at least one of the following three conditions holds: (i) L is modular; (ii) S is a cover-preserving sublattice of L; or (iii) L is a dismantlable extension of S, then $\mathrm{cd}(L) \le \mathrm{cd}(S)$ and $\mathrm{qd}(L) \le \mathrm{qd}(S)$.

1 Introduction

Every lattice occurring in this paper will be assumed to be finite, even when this assumption is not mentioned again. The paper assumes no more

*This research was supported by the National Research, Development and Innovation Fund of Hungary, under funding scheme K 138892.

than a minimal familiarity with lattices or universal algebra. For a lattice $L = (L; \vee, \wedge)$, $\mathrm{Con}(L)$ will denote the congruence lattice of L. Accordingly, $|\mathrm{Con}(L)|$ stands for the number of congruence relations of L. By Freese [8], the largest possible value of $|\mathrm{Con}(L)|$ for n-element lattices L is $\mathrm{mnc}(n) = 2^{n-1}$. In other words, $\mathrm{mnc}(n) := \max\{|\mathrm{Con}(L)| : L \text{ is an } n\text{-element lattice}\}$ is equal to 2^{n-1}. The second, third, fourth, etc. largest values were determined by Czédli [2], [4], and Mureşan and Kulin [13]. Following Czédli [4], we define the *congruence density* $\mathrm{cd}(L)$ of a finite lattice L as the quotient $\mathrm{cd}(L) := |\mathrm{Con}(L)|/\mathrm{mnc}(|L|)$. Clearly, $0 < \mathrm{cd}(L) \le 1$ and, by Freese [8], $\mathrm{cd}(L) = 1$ if and only if L is a chain. Therefore, in some vague sense, the congruence density measures how close a lattice is to being a chain. If a sublattice S of L is far from being a chain, then so is L itself. Some evidence supporting this idea is implicit in Czédli [4]; namely, whenever S is a sublattice of a finite lattice L, $8 \le |S|$, and $1/8 + 3/2^{|S|-1} \le \mathrm{cd}(S)$, then $\mathrm{cd}(L) \le \mathrm{cd}(S)$. This fact and our experience with Czédli [3] and [4] lead to the problem: Does the inequality $\mathrm{cd}(L) \le \mathrm{cd}(S)$ hold for every finite lattice L and every sublattice S of L? In Theorem 2.1, we provide a positive answer in three particular cases.

A *quasiorder* on a lattice L is a compatible preorder, that is, a compatible, reflexive, transitive relation on L. The *quasiorder lattice* $\mathrm{Quo}(L) = (\mathrm{Quo}(L); \subseteq)$ of L is the lattice of all quasiorders on L; note that $\mathrm{Con}(L)$ is a sublattice of $\mathrm{Quo}(L)$. Analogously to the case of congruences, we denote the *maximum number of quasiorders* on an n-element lattice by $\mathrm{mnq}(n) := \max\{|\mathrm{Quo}(L)| : L \text{ is an } n\text{-element lattice}\}$, and we define the *quasiorder density* of a finite lattice L as

$$\mathrm{qd}(L) := |\mathrm{Quo}(L)|/\mathrm{mnq}(|L|). \tag{1.1}$$

2 Stating the results

We say that a sublattice S of a finite lattice L is a *cover-preserving sublattice* of L if for every $x, y \in S$, whenever y covers x in S (denoted by $x \prec_S y$), then y covers x in L as well (denoted by $x \prec_L y$ or simply $x \prec y$). A *proper sublattice* of L is a sublattice that is distinct from L. For a sublattice K of a finite lattice L, we say that L is a *dismantlable extension* of K if there exists a sequence $T_{|K|}, T_{|K|+1}, \dots, T_{|L|}$ of sublattices of L such that $T_{|K|} = K$, $T_{|L|} = L$, and for every $i \in \{|K|+1, \dots, |L|\}$, T_{i-1} is a proper sublattice of T_i and $|T_i| = i$. Note that L is a *dismantlable lattice* in the well-known classical sense of Baker, Fishburn, and Roberts [1] if and only if L is a dismantlable extension of one of its one-element sublattices. The diagram on the left of Figure 1 exemplifies that a dismantlable lattice L need not be a dismantlable extension of each of its sublattices K. Our main goal is to prove the following theorem.

Theorem 2.1. *Let S be a sublattice of a finite lattice L, and assume that at least one of the following three conditions is satisfied:*

1. *S is a cover-preserving sublattice of L,*
2. *L is modular, or*
3. *L is a dismantlable extension of S.*

Then $\mathrm{cd}(L) \le \mathrm{cd}(S)$.

For a lattice L, Czédli and Szabó [5] proved[1] that $\mathrm{Quo}(L)$ is isomorphic to the direct square $\mathrm{Con}(L)^2$. Consequently, $\mathrm{mnq}(n) = \mathrm{mnc}(n)^2 = 2^{2n-2}$, and (1.1) defining the quasiorder density of a finite lattice L simplifies to $\mathrm{qd}(L) := |\mathrm{Quo}(L)|/2^{2|L|-2}$. Utilizing the isomorphism $\mathrm{Quo}(L) \cong \mathrm{Con}(L)^2$, one can immediately see that the results of Czédli [3], [4], and the present paper, along with those proved in Mureşan and Kulin [13], directly imply their "quasiorder-counterparts". For example, the following statement follows trivially from Theorem 2.1 and the isomorphism $\mathrm{Quo}(L) \cong \mathrm{Con}(L)^2$.

Corollary 2.2. *If S is a sublattice of a finite lattice L and at least one of the conditions (1), (2), or (3) in Theorem 2.1 holds, then* $\mathrm{qd}(L) \le \mathrm{qd}(S)$.

We devote the rest of the paper to the proof of Theorem 2.1.

3 Preparatory concepts, notations, and lemmas

For a relation $\rho \subseteq X^2$ and a subset Y of X, the *restriction* of ρ to Y will be denoted by $\rho\rceil_Y$. That is, $\rho\rceil_Y = \rho \cap Y^2$. However, we do not always explicitly indicate when a relation is restricted. For example, we usually write "$\le$" or opt for an alternative notation rather than "$\le\rceil_Y$". A pair $(a, b) \in L^2$ is a *covering pair* (of elements of a lattice L) if the interval $[a, b] = \{x \in L : a \le x \le b\}$ is 2-element. Let $\mathrm{Cp}(L)$ denote the covering pairs of L. To recall some other notation and terminology for elements $a, b \in L$, note that the following seven statements are equivalent: $a \prec b$, b *covers* a, b is a *cover* of a, a is a *lower cover* of b, $[a, b]$ is a *prime interval*,

[1] For some historical comments on [5], see Davey [6].

(a, b) is an *edge*, and $(a, b) \in \mathrm{Cp}(L)$. For $(a, b) \in L^2$, the least congruence collapsing a and b will be denoted by $\mathrm{con}(a, b)$. The *poset of join-irreducible elements* of L is denoted by $\mathrm{Ji}(L)$; an $x \in L$ is said to be join-irreducible if it has exactly one lower cover. For $x \in \mathrm{Ji}(L)$, the unique lower cover of x will be denoted by x^- or, if L needs to be specified, by $x^{L,-}$. If an $x \in L$ has at least two lower covers, then x is *join-reducible*; the *set of join-reducible elements* will be denoted by $\mathrm{Jr}(L)$. Since $0 = 0_L$ has no lower cover at all, L is the disjoint union of $\{0\}$, $\mathrm{Ji}(L)$, and $\mathrm{Jr}(L)$. The *poset* $\mathrm{Mi}(L)$ of *meet-irreducible elements*, the set $\mathrm{Mr}(L)$ of *meet-reducible* elements, and the unique cover $x^+ = x^{L,+}$ of an $x \in \mathrm{Mi}(L)$ are defined dually.

For pairs $(a, b), (c, d) \in L^2$, we say that (a, b) is *prime-perspective up* to (c, d), in notation $(a, b) \overset{\text{p-up}}{\longrightarrow} (c, d)$, if $a = b \wedge c$ and $c \le d \le b \vee c$. Similarly, (a, b) is *prime-perspective down* to (c, d), in notation if $(a, b) \overset{\text{p-dn}}{\longrightarrow} (c, d)$, if $b = a \vee d$ and $a \wedge d \le c \le d$. If $(a, b), (c, d) \in L^2$, $a \le b$, $c \le d$, $b \wedge c = a$, and $b \vee c = d$, then[2] (a, b) is *up-perspective* to (c, d) and (c, d) is *down-perspective* to (a, b); the respective notations are $(a, b) \overset{\text{up}}{\sim} (c, d)$ and $(c, d) \overset{\text{dn}}{\sim} (a, b)$. If $(a, b) \overset{\text{up}}{\sim} (c, d)$, then $(a, b) \overset{\text{p-up}}{\longrightarrow} (c, d)$, and similarly for the "downward variant". Let N_5 denote the 5-element nonmodular lattice. For distinct covering pairs $(a, b), (c, d) \in \mathrm{Cp}(L)$, (the dual of) Note 1.2 of Grätzer [11] asserts that

$$\text{if } (a, b) \overset{\text{p-up}}{\longrightarrow} (c, d) \text{ but } (a, b) \overset{\text{up}}{\not\sim} (c, d), \text{ then } \{a, b, c, d, b \vee c\} \cong \mathsf{N}_5; \tag{3.1}$$

in particular, $\{a, b, c, d, b \vee c\}$ is a sublattice of L. We recall the Prime Projectivity Lemma from Grätzer [11] in the following form.

Lemma 3.1 (Prime Projectivity Lemma, Grätzer [11]). *Let $(a, b), (c, d) \in \mathrm{Cp}(L)$ be distinct covering pairs of a finite lattice L. Then $\mathrm{con}(a, b) \ge \mathrm{con}(c, d)$ if and only if there is a finite sequence $(a, b) = (x_0, y_0)$, (x_1, y_1), $\dots$, $(x_n, y_n) = (c, d)$ of covering pairs of L such that for each $i \in \{1, \dots, n\}$, either $(x_{i-1}, y_{i-1}) \overset{\text{p-up}}{\longrightarrow} (x_i, y_i)$ or $(x_{i-1}, y_{i-1}) \overset{\text{p-dn}}{\longrightarrow} (x_i, y_i)$.*

Based on Grätzer [11] or the folklore, or trivially, note the following.

Lemma 3.2 (Grätzer [11]). *If $(a, b) = (x_0, y_0)$, (x_1, y_1), $\dots$, $(x_n, y_n) = (c, d)$ are pairs of elements of L such that, for each $i \in \{1, \dots, n\}$, either $(x_{i-1}, y_{i-1}) \overset{\text{p-up}}{\longrightarrow} (x_i, y_i)$ or $(x_{i-1}, y_{i-1}) \overset{\text{p-dn}}{\longrightarrow} (x_i, y_i)$, then $\mathrm{con}(c, d) \le \mathrm{con}(a, b)$.*

This paragraph, in the same way as Czédli [4], strengthens Theorem 3.10 from Grätzer [10]. A subset X of a poset P is a *down-set* if for every

[2] This definition of up-perspectivity is redundant; e.g., $b \wedge c = a$ implies that $a \le b$.

$u \in X$, the *order ideal* $\mathrm{idl}(u) := \{y \in P : y \leq u\}$ is a subset of X. The collection $\mathrm{Dn}(P) = (\mathrm{Dn}(P); \subseteq)$ of all down-sets of P is a distributive lattice. Let L be a finite lattice. Since $\mathrm{Con}(L)$ is distributive, the structure theorem of finite distributive lattices gives that $\mathrm{Con}(L) \cong \mathrm{Dn}(\mathrm{Ji}(\mathrm{Con}(L)))$; see Theorems 107 and 149 of Grätzer [9]. Letting $\chi_L = \{\big((a, b), (c, d)\big) \in \mathrm{Cp}(L)^2 : \mathrm{con}(a, b) \leq \mathrm{con}(c, d)\}$, $\big(\mathrm{Cp}(L); \chi_L\big)$ is a quasiordered set. We will write $(a, b) \leq_{\chi_L} (c, d)$ instead of $\big((a, b), (c, d)\big) \in \chi_L$. It is well known, see Grätzer [11, 1st sentence], that $\{\mathrm{con}(a, b) : (a, b) \in \mathrm{Cp}(L)\}$ coincides with $\mathrm{Ji}(\mathrm{Con}(L))$. A subset W of $\mathrm{Cp}(L)$ is a *congruence-determining* subset of $\mathrm{Cp}(L)$ if $\{\mathrm{con}(a, b) : (a, b) \in W\}$ coincides with $\mathrm{Ji}(\mathrm{Con}(L))$. In this case, for brevity, we write $(W; \chi_L)$ instead of the more precise but lengthy $(W; \chi_L\rceil_W)$; it is a quasiordered set. A subset X of W is a χ_L*-down-set* of $(W; \chi_L)$ if for every $(a, b) \in X$ and $(c, d) \in W$, $(c, d) \leq_{\chi_L} (a, b)$ implies that $(c, d) \in W$. The *collection of* χ_L*-down-sets* of $(W; \chi_L)$ will be denoted by $\mathrm{Dn}(W; \chi_L)$. Since $\mathrm{Cp}(L)$ is a congruence-determining subset of itself by Grätzer [11, 1st sentence], the $W = \mathrm{Cp}(L)$ particular case of the following lemma is the same as Grätzer [10, Theorem 3.10].

Lemma 3.3 (Czédli [3])**.** *If L is a finite lattice, then for every congruence-determining subset W of* $\mathrm{Cp}(L)$*, we have that* $\mathrm{Con}(L) \cong \mathrm{Dn}(W; \chi_L)$.

Since [3] provides only an outline rather than a proof and has not been published at the time of writing, we present an easy proof here.

Proof of Lemma 3.3. Let $J := \mathrm{Ji}(\mathrm{Con}(L))$. With reference to Theorems 107 and 149 of Grätzer [9], we have already mentioned that $\mathrm{Con}(L) \cong \mathrm{Dn}(J)$. Thus, it suffices to prove that $\mathrm{Dn}(W; \chi_L)$ and $\mathrm{Dn}(J)$ are isomorphic.

For $X \in \mathrm{Dn}(W; \chi_L)$, we define $f(X) := \{\mathrm{con}(a, b) : (a, b) \in X\}$. Since $J = \{\mathrm{con}(a, b) : (a, b) \in \mathrm{Cp}(L)\}$ (or since W is a congruence-determining subset of $\mathrm{Cp}(L)$), we have that $f(X) \subseteq J$. To show that $f(X) \in \mathrm{Dn}(J)$, assume that $\alpha \in f(X)$, $\beta \in J$, and $\beta \leq \alpha$. As $\alpha \in f(X)$, $\alpha = f(a, b)$ for some $(a, b) \in X$. As W is a congruence-determining subset, $\beta = (c, d)$ for some $(c, d) \in W$. Since $X \in \mathrm{Dn}(W; \chi_L)$ and since $\mathrm{con}(c, d) = \beta \leq \alpha = \mathrm{con}(a, b)$ means that $(c, d) \leq_{\chi_L} (a, b)$, we obtain that $(c, d) \in X$. That is, $\beta = \mathrm{con}(c, d) \in f(X)$, showing that $f(X) \in \mathrm{Dn}(J)$. Consequently, $f\colon \mathrm{Dn}(W; \leq_{\chi_L}) \to \mathrm{Dn}(J)$ is a map. Clearly, this map is order-preserving.

Conversely, we define a map $g\colon \mathrm{Dn}(J) \to \mathrm{Dn}(W; \leq_{\chi_L})$ by letting, for $Y \in \mathrm{Dn}(J)$, $g(Y) := \{(a, b) \in W : \mathrm{con}(a, b) \in Y\}$. To show that $g(Y) \in \mathrm{Dn}(W; \leq_{\chi_L})$, assume that $(a, b) \in g(Y)$, that is $\mathrm{con}(a, b) \in Y$, and $(c, d) \in W$ such that $(c, d) \leq_{\chi_L} (a, b)$. Then $\mathrm{con}(c, d) \leq \mathrm{con}(a, b)$ and $\mathrm{con}(a, b) \in Y \in \mathrm{Dn}(J)$ imply that $\mathrm{con}(c, d) \in Y$, whereby $(c, d) \in g(Y)$. Therefore,

$g(Y) \in \mathrm{Dn}(W; \leq_{\chi_L})$, g is indeed a map $g \colon \mathrm{Dn}(J) \to \mathrm{Dn}(W; \leq_{\chi_L})$, and this map is clearly order-preserving.

For $X \in \mathrm{Dn}(W; \chi_L)$, the inclusion $X \subseteq g(f(X))$ is obvious. Assume that $(a, b) \in g(f(X))$. Then $\mathrm{con}(a, b) \in f(X)$, that is, $\mathrm{con}(a, b) = \mathrm{con}(u, v)$ for some $(u, v) \in X$. Since $\mathrm{con}(a, b) = \mathrm{con}(u, v)$ yields that $(a, b) \leq_{\chi_L} (u, v)$, and since $X \in \mathrm{Dn}(W; \chi_L)$, we obtain that $(a, b) \in X$. Hence, $g(f(X)) \subseteq X$, and we have shown that $g \circ f$ is the identity map of $\mathrm{Dn}(W; \chi_L)$. Finally, let $Y \in \mathrm{Dn}(J)$. Using at $\overset{*}{=}$ that W is a congruence-determining subset, we obtain that

$$\begin{aligned} f(g(Y)) &= \{\mathrm{con}(a, b) : (a, b) \in g(Y)\} \\ &= \{\mathrm{con}(a, b) : (a, b) \in \{(u, v) \in W : \mathrm{con}(u, v) \in Y\}\} \\ &= \{\mathrm{con}(a, b) : (a, b) \in W \text{ and } \mathrm{con}(a, b) \in Y\} \overset{*}{=} Y. \end{aligned}$$

Thus, $f \circ g$ is the identity map of $\mathrm{Dn}(J)$, whereby f and g are reciprocal order isomorphisms, completing the proof of Lemma 3.3. □

Since the proof of the following well-known lemma is short and (the dual of) its idea will emerge later (see Case 2 in the proof of Lemma 4.4), we present the proof after stating the lemma.

Lemma 3.4 (Day [7, Page 71]). *For a finite lattice L and a subset W of* $\mathrm{Cp}(L)$, *if* $\{(a^-, a) : a \in \mathrm{Ji}(L)\} \subseteq W$, *then W is a congruence-determining subset of* $\mathrm{Cp}(L)$.

Proof. It suffices to show that $\{(a^-, a) : a \in \mathrm{Ji}(L)\}$ is a congruence-determining subset of $\mathrm{Cp}(L)$. Take a member of $\mathrm{Ji}(\mathrm{Con}(L))$; it is of the form $\mathrm{con}(u, v)$ with $(u, v) \in \mathrm{Cp}(L)$ by Grätzer [11, 1st sentence]. We can assume that $v \notin \mathrm{Ji}(L)$, since otherwise $u = v^-$ and there is nothing to show. Pick a minimal element $b \in \mathrm{idl}(v) \setminus \mathrm{idl}(u)$. Clearly, $b \in \mathrm{Ji}(L)$. Using that $b \parallel u$, $u \prec v$, $b^- \prec b$, $b^- \leq u \wedge b < b$, and $u < u \vee b \leq v$, we obtain that $(u, v) \overset{\mathrm{dn}}{\sim} (b^-, b)$ and $(b^-, b) \overset{\mathrm{up}}{\sim} (u, v)$. Thus, Lemma 3.2 yields that $\mathrm{con}(u, v) = \mathrm{con}(b^-, b) \in \{(a^-, a) : a \in \mathrm{Ji}(L)\}$. □

4 Further lemmas and completing the proof of Theorem 2.1

To enhance the paper's readability, we will present the proofs of the three parts of Theorem 2.1 in separate lemmas, with some parts needing multiple lemmas.

Lemma 4.1. *Let S be a cover-preserving sublattice of a finite lattice L. If there are subsets H and R of* $\mathrm{Cp}(L)$ *such that* $\{(a^{S,-}, a) : a \in \mathrm{Ji}(S)\} \subseteq H \subseteq \mathrm{Cp}(S)$, $|R| \le |L| - |S|$, $\{(a^{L,-}, a) : a \in \mathrm{Ji}(L)\} \subseteq H \cup R$, *and* $H \cap R = \emptyset$, *then* $\mathrm{cd}(L) \le \mathrm{cd}(S)$.

Proof. Since S is a cover-preserving sublattice, $\mathrm{Cp}(S) \subseteq \mathrm{Cp}(L)$. When dealing with the quasiordered sets $(H; \chi_L)$ and $(H; \chi_S)$, χ_L and χ_S will stand for the restrictions $\chi_L\rceil_H$ and $\chi_S\rceil_H$, respectively. Analogous conventions apply consistently throughout the paper. Let $W := H \cup R$. For $X \in \mathrm{Dn}(W; \chi_L)$, define $f(X) := X \cap H$. It follows from Lemma 3.1 that $\chi_L\rceil_H \supseteq \chi_S\rceil_H$, that is, $\chi_L\rceil_H$ is a *coarser relation* than $\chi_S\rceil_H$. Hence, $f(X) \in \mathrm{Dn}(H; \chi_S)$. So, $f\colon \mathrm{Dn}(W; \chi_L) \to \mathrm{Dn}(H; \chi_S)$ is a function. Let $Y \in \mathrm{Dn}(H; \chi_S)$ be a down-set within the range of f. Since W is the disjoint union of H and R, every f-preimage of Y has the unique form $X = Y \cup Z$, where $Z \subseteq R$. Thus, Y has at most $2^{|R|}$ preimages, and we obtain that

$$|\mathrm{Dn}(W; \chi_L)| \le |\mathrm{Dn}(H; \chi_S)| \cdot 2^{|R|}. \tag{4.1}$$

By Lemma 3.4, W and H are congruence-preserving subsets of $\mathrm{Cp}(L)$ and $\mathrm{Cp}(S)$, respectively. Combining this fact with (4.1) and Lemma 3.3,

$$\begin{aligned} \mathrm{cd}(L) &= |\mathrm{Dn}(W; \chi_L)|/2^{|L|-1} \le |\mathrm{Dn}(H; \chi_S)| \cdot 2^{|R|}/2^{|L|-1} \\ &\le |\mathrm{Dn}(H; \chi_S)| \cdot 2^{|L|-|S|}/2^{|L|-1} = |\mathrm{Dn}(H; \chi_S)|/2^{|S|-1} = \mathrm{cd}(S). \qquad \square \end{aligned}$$

Lemma 4.2. *If S is a cover-preserving sublattice of a finite lattice L, then the inequality* $\mathrm{cd}(L) \le \mathrm{cd}(S)$ *holds.*

Proof. First, we show that

$$\text{if } 0_S \ne a \in \mathrm{Ji}(L) \cap S, \text{ then } a \in \mathrm{Ji}(S) \text{ and } a^{L,-} = a^{S,-} \in S. \tag{4.2}$$

The membership $a \in \mathrm{Ji}(S)$ is trivial. Since $a^{S,-} \prec_S a$ and S is a cover-preserving sublattice, $a^{S,-} \prec_L a$, whereby $a^{L,-} = a^{S,-} \in S$, showing (4.2). There are two cases to consider, and each of them will be handled by applying Lemma 4.1.

First, we assume that $0_S = 0_L$. Let $R := \{(a^{L,-}, a) : a \in \mathrm{Ji}(L) \setminus S\}$ and $H := \mathrm{Cp}(S)$. Observing that $0_S = 0_L \notin \mathrm{Ji}(L)$, (4.2) implies that $\{(a^{L,-}, a) : a \in \mathrm{Ji}(L)\} \subseteq H \cup R$. Since $H \cap R = \emptyset$ and $|R| = |\mathrm{Ji}(L) \setminus S| \le |L \setminus S| = |L| - |S|$ are clear, Lemma 4.1 yields the required $\mathrm{cd}(L) \le \mathrm{cd}(S)$.

Second, we assume that $0_L < 0_S$. Pick a lover cover $z \in L$ of 0_S. Let $R := \{(a^{L,-}, a) : a \in \mathrm{Ji}(L) \setminus S\} \cup \{(z, 0_S)\}$ and $H := \mathrm{Cp}(S)$. Regardless of whether $0_S \in \mathrm{Ji}(L)$, (4.2) implies that $\{(a^{L,-}, a) : a \in \mathrm{Ji}(L)\} \subseteq H \cup R$. Since 0_L is neither in S nor in $\mathrm{Ji}(L)$, we have that $\mathrm{Ji}(L) \setminus S \subseteq L \setminus (\{0_L\} \cup S)$. Thus, $|\mathrm{Ji}(L) \setminus S| \le |L| - 1 - |S|$, whereby $|R| \le |L| - |S|$. These facts, the obvious $H \cap R = \emptyset$, and Lemma 4.1 imply the required $\mathrm{cd}(L) \le \mathrm{cd}(S)$. $\square$

Lemma 4.3. *In a finite lattice K, let $a \prec b$ such that $a \in \mathrm{Mi}(K)$ and $b \in \mathrm{Ji}(K)$. Then for every $(x, y) \in \mathrm{Cp}(K)$, $(x, y) \leq_{\chi_K} (a, b) \iff (x, y) = (a, b)$.*

Proof. For $(u, v) \in \mathrm{Cp}(K) \setminus \{(a, b)\}$, $a \in \mathrm{Mi}(L)$ excludes that $(a, b) \xrightarrow{\text{p-up}} (u, v)$, while $(a, b) \xrightarrow{\text{p-dn}} (u, v)$ would contradict that $b \in \mathrm{Ji}(L)$. Thus, Lemma 3.1 applies, completing the proof. □

Lemma 4.4 (Edge Division Lemma). *Let $a \prec b$ in a finite lattice K, and add a new element c to K such that $a \prec c \prec b$ in the new lattice $M := K \cup \{c\}$, c is doubly irreducible in M, and K is a sublattice of M. Then $\mathrm{cd}(M) \leq \mathrm{cd}(K)$.*

Proof. With $n := |K|$, we have that $|M| = n + 1$. We can assume that $n \geq 2$. Even though $\mathrm{Cp}(K)$ is not a subset of $\mathrm{Cp}(M)$, Lemmas 3.1 and 3.2 imply that for any $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathrm{Cp}(K) \cap \mathrm{Cp}(M)$,

$$\text{if } (x_1, y_1) \leq_{\chi_K} (x_2, y_2), \text{ then } (x_1, y_1) \leq_{\chi_M} (x_2, y_2). \tag{4.3}$$

Similarly, these two lemmas imply that for any $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathrm{Cp}(K)$

$$\text{if } (x_1, y_1) \leq_{\chi_K} (x_2, y_2), \text{ then } \mathrm{con}_M(x_1, y_1) \leq \mathrm{con}_M(x_2, y_2). \tag{4.4}$$

Depending on a and b, we consider two cases.

Case 1. In this case, we assume that $a \in \mathrm{Mi}(K)$ and $b \in \mathrm{Ji}(K)$. For $Y \in \mathrm{Dn}(\mathrm{Cp}(M); \chi_M)$, we define

$$f_1(Y) := \begin{cases} Y \setminus \{(c, b)\}, & \text{if } (a, c) \notin Y, \\ \{a, b\} \cup (Y \setminus \{(a, c), (c, b)\}), & \text{if } (a, c) \in Y. \end{cases} \tag{4.5}$$

We claim that $f_1(Y) \in \mathrm{Dn}(\mathrm{Cp}(K); \chi_K)$.

First, assume that $Y \in \mathrm{Dn}(\mathrm{Cp}(M); \chi_M)$ such that $(a, c) \notin Y$; then $f_1(Y)$ is computed by the first line of (4.5). Assume also that $(u, v) \in f_1(Y)$, $(x, y) \in \mathrm{Cp}(K)$, and $(x, y) \leq_{\chi_K} (u, v)$, that is, $\mathrm{con}_K(x, y) \leq \mathrm{con}_K(u, v)$. If $(u, v) = (a, b)$, then $(x, y) = (u, v) \in f_1(Y)$ by Lemma 4.3. Hence, we can assume that $(u, v) \neq (a, b)$. Then $(u, v) \in \mathrm{Cp}(K) \cap \mathrm{Cp}(M)$, and $(u, v) \in f_1(Y)$ together with (4.5) implies that $(u, v) \in Y$. If (x, y) is also in $\mathrm{Cp}(M)$, then $(x, y) \leq_{\chi_M} (u, v)$ by (4.3), whereby (x, y) is in the χ_M-down-set Y. Thus (x, y), which is distinct from $(c, b) \notin \mathrm{Cp}(K)$, belongs to $f_1(Y)$, as required. So we can assume that $(x, y) \in \mathrm{Cp}(K) \setminus \mathrm{Cp}(M)$, that is, $(x, y) = (a, b)$. By (4.4), $\mathrm{con}_M(a, b) = \mathrm{con}_M(x, y) \leq \mathrm{con}_M(u, v)$. Since the blocks of every lattice congruence are convex sublattices, $(a, c) \in \mathrm{con}_M(a, b)$, and so $\mathrm{con}_M(a, c) \le \mathrm{con}_M(a, b)$. Thus, by transitivity, $\mathrm{con}_M(a, c) \le \mathrm{con}_M(u, v)$, whereby $(a, c) \le_{\chi_M} (u, v) \in Y$, although Y is a χ_M-down-set and $(a, c) \notin Y$ has been assumed. This is a contradiction, which rules out the possibility that $(x, y) = (a, b)$ and implies that $f_1(Y) \in \mathrm{Dn}(\mathrm{Cp}(K); \chi_K)$.

Second, assume that $(a, c) \in Y \in \mathrm{Dn}(\mathrm{Cp}(M); \chi_M)$. Assume also that $(u, v) \in f_1(Y)$, $(x, y) \in \mathrm{Cp}(K) \setminus \{(u, v)\}$, and $(x, y) \le_{\chi_K} (u, v)$, that is, $\mathrm{con}_K(x, y) \le \mathrm{con}_K(u, v)$. Since $(a, b) \in f_1(Y)$ by (4.5), we can assume that $(x, y) \neq (a, b)$. By Lemma 4.3, $(u, v) \neq (a, b)$. Hence, both (x, y) and (u, v) are in $\mathrm{Cp}(M)$. Thus we obtain from (4.3) that $(x, y) \le_{\chi_M} (u, v)$. Since $(a, b) \neq (u, v) \in \mathrm{Cp}(K) \cap \mathrm{Cp}(M)$, (4.5) shows that $(u, v) \in Y$. From $(x, y) \le_{\chi_M} (u, v) \in Y$ and $Y \in \mathrm{Dn}(\mathrm{Cp}(M); \chi_M)$, we obtain that $(x, y) \in Y$. Combining $(x, y) \in Y$ with $(x, y) \in \mathrm{Cp}(K)$, $(a, c) \notin \mathrm{Cp}(K)$, and $(c, b) \notin \mathrm{Cp}(K)$, it follows that $(x, y) \in f_1(Y)$, as required.

We have shown that, regardless of whether (a, c) is in Y or not, $f_1(Y)$ belongs to $\mathrm{Dn}(\mathrm{Cp}(K); \chi_K)$. Thus, $f_1 \colon \mathrm{Dn}(\mathrm{Cp}(M); \chi_M) \to \mathrm{Dn}(\mathrm{Cp}(K); \chi_K)$ is a map. We claim that

$$\text{each } X \in \mathrm{Dn}(K; \mathrm{Cp}(K)) \text{ has at most two} f_1\text{-preimages.} \tag{4.6}$$

To show this, first we note that $\mathrm{Cp}(M) \setminus \mathrm{Cp}(K) = \{(a, c), (c, b)\}$. Assume that $Y \in \mathrm{Dn}(\mathrm{Cp}(M); \chi_M)$ such that $f_1(Y) = X$. If $(a, b) \notin X$, then $X = f_1(Y)$ is computed by the first line of (4.5), whereby $Y \in \{X, X \cup (c, b)\}$, and X has at most two f_1-preimages. Similarly, if $(a, b) \in X$, then $f_1(Y)$ is determined by the second line of (4.5), and $Y \in \{(X \setminus \{(a, b)\}) \cup \{(a, c)\}, (X \setminus \{(a, b)\}) \cup \{(a, c), (c, b)\}\}$. Thus, X has at most two preimages again, proving (4.6).

It follows from (4.6) that $|\mathrm{Dn}(\mathrm{Cp}(M); \chi_M)| \le 2 \cdot |\mathrm{Dn}(\mathrm{Cp}(K); \chi_K)|$. Combining this inequality with Lemmas 3.3 and 3.4, we complete Case 1 by

$$\mathrm{cd}(M) = \frac{|\mathrm{Con}(M)|}{2^{(n+1)-1}} \le \frac{2 \cdot |\mathrm{Con}(K)|}{2^{(n+1)-1}} = \frac{|\mathrm{Con}(K)|}{2^{n-1}} = \mathrm{cd}(K). \tag{4.7}$$

Case 2. This case is devoted to the situation where $a \notin \mathrm{Mi}(K)$ or $b \notin \mathrm{Ji}(K)$. By duality, we can assume that $a \notin \mathrm{Mi}(K)$; see Figure 1, where the bold lines indicate coverings in M, while the thin solid line and the dotted line stand for "$<$" and "$\le$", respectively. The sole element of $M \setminus K$, namely c, is grey-filled. Since $a \neq \mathrm{Mi}(K)$ and $a \neq 1_K$ (as $a \prec_K b$), there is an element $d \in K$ such that $d \neq b$ and $a \prec_K d$. Let $u \in K$ be maximal element of $\mathrm{fil}(d) \setminus \mathrm{fil}(b)$, and define $v := b \vee u$. By the maximality of u, it is straightforward to obtain that $u \prec v$. Since $b \le u$ would contradict the choice of u and $u \le b$ would give that $d \le b$, contradicting that b and d are distinct covers of a, it follows that b and u are incomparable. So, using that

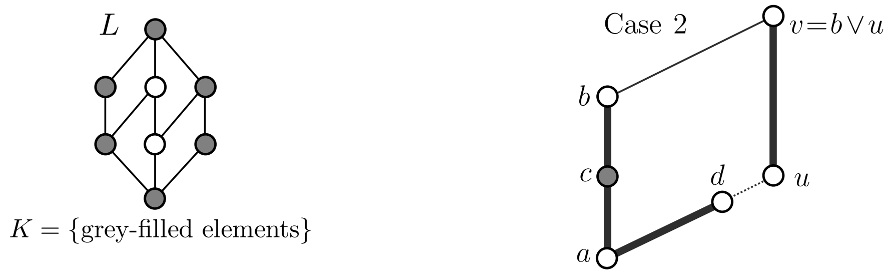


Figure 1: An example on the left and illustrating Case 2 in the proof of Lemma 4.4 on the right

$a \prec_K b$ and $a \leq b \wedge u < b$, we have that $a = b \wedge u$. Hence, $(a,b) \overset{\mathrm{up}}{\sim} (u,v)$ and $(u,v) \overset{\mathrm{dn}}{\sim} (a,b)$. So, Lemma 3.1 yields that $\mathrm{con}_K(a,b) = \mathrm{con}_K(u,v)$. Combining this equality with Lemma 3.4, we obtain that

$$H := \mathrm{Cp}(K) \setminus \{(a,b)\} \text{ is a congruence-determining subset of } \mathrm{Cp}(K). \quad (4.8)$$

Turning our attention to M, observe that $c \nleq u$, since otherwise either $c = u \in K$ or $b = c^{M,+} \leq u$ would be a contradiction. As $u \leq c$ would also lead to a contradiction, namely $d \leq u \leq c \leq b$, c and u are incomparable. Hence, $c < c \vee u$, and so $v = b \vee u = c^{M,+} \vee u \leq (c \vee u) \vee u = c \vee u \leq v$ gives that $c \vee u = v$, while $a \leq c \wedge u \leq b \wedge u = a$ implies that $c \wedge u = a$. Hence, $(a,c) \overset{\mathrm{up}}{\sim} (u,v)$ and $(u,v) \overset{\mathrm{dn}}{\sim} (a,c)$. Thus, $\mathrm{con}_M(a,c) = \mathrm{con}_M(u,v)$ by Lemma 3.1. This equality and Lemma 3.4 imply that

$$W := \mathrm{Cp}(M) \setminus \{(a,c)\} \text{ is a congruence-determining subset of } \mathrm{Cp}(M). \quad (4.9)$$

Note that $H = \mathrm{Cp}(K) \cap \mathrm{Cp}(M) \subseteq W$. For $Y \in \mathrm{Dn}(W;\chi_M)$, let $f_2(Y) := Y \cap H$; we claim that $f_2(Y) \in \mathrm{Dn}(H;\chi_K)$. Assume that $(p,q) \in f_2(Y)$, $(x,y) \in H$, and $(x,y) \leq_{\chi_K} (p,q)$. As $H = \mathrm{Cp}(K) \cap \mathrm{Cp}(M)$, (4.3) yields that $(x,y) \leq_{\chi_M} (p,q)$. Thus, using that $(p,q) \in f_2(Y) \subseteq Y \in \mathrm{Dn}(W;\chi_M)$, we have that $(x,y) \in Y$, and so $(x,y) \in Y \cap H = f_2(Y)$. Therefore, the rule $f_2(Y) := Y \cap H$ defines a function $f_2\colon \mathrm{Dn}(W;\chi_M) \to \mathrm{Dn}(H;\chi_K)$. Since $W \setminus H = \{(c,b)\}$ is a singleton, every $X \in \mathrm{Dn}(H;\chi_K)$ has at most two f_2-preimages. Hence, $|\mathrm{Dn}(W;\chi_M)| \leq 2 \cdot |\mathrm{Dn}(H;\chi_K)|$. Based on this inequality, (4.8), (4.9), and Lemma 3.3 imply the required $\mathrm{cd}(M) \leq \mathrm{cd}(K)$ in the same way as in (4.7). This completes Case 2 and the proof of Lemma 4.4. $\square$

Lemma 4.5. *If S is a sublattice of a finite modular lattice L, then* $\mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(S)$.

Proof. Throughout the proof, let S be a sublattice of a finite modular lattice L.

For $(a,b),(c,d) \in \mathrm{Cp}(L)$, we have that $(a,b) \overset{\mathrm{up}}{\sim} (c,d) \iff (c,d) \overset{\mathrm{dn}}{\sim} (a,b)$. We will refer to this fact as the *symmetry of perspectivity*. We know from Dedekind's criterion for modularity that a modular lattice cannot contain a sublattice isomorphic to N_5. Combining this fact with (3.1) and its dual, the symmetry of perspectivity, and Lemma 3.1, we obtain that for every $(x,y),(u,v) \in \mathrm{Cp}(L)$,

$$(x,y) \leq_{\chi_L} (u,v) \iff \mathrm{con}_L(x,y) = \mathrm{con}_L(u,v), \text{ so } \chi_L \text{ is an equivalence.} \tag{4.10}$$

Since S is also modular, χ_S is an equivalence relation on $\mathrm{Cp}(S)$, too.

We proceed by recalling a well-known isomorphism theorem for modular lattices (see, e.g., Grätzer [9, Theorem 348]), which asserts that perspective intervals in L are isomorphic (sub)lattices. That is, if $(a,b),(c,d) \in \mathrm{SO}(L)$ such that $(a,b) \overset{\mathrm{up}}{\sim} (c,d)$, then $g\colon [a,b] \to [c,d]$, defined by $x \mapsto c \vee x$, and $h\colon [c,d] \mapsto [a,b]$, defined by $y \mapsto b \wedge y$ are reciprocal lattice isomorphisms. Note that g and h are algebraic functions (univariate polynomials), whence they preserve congruence relations. Assume that $a \leq x \prec_L y \leq b$, and let $x' := g(x)$ and $y' := g(y)$. As g is a lattice isomorphisms, $c \leq x' \prec_L y' \leq d$. We claim that under the assumptions just established,

$$(x,y) \leq_{\chi_L} (x',y'),\ \ (x',y') \leq_{\chi_L} (x,y), \text{ and } \mathrm{con}_L(x,y) = \mathrm{con}_L(x',y'). \tag{4.11}$$

To see this, it suffices to deal with the congruences that the covering pairs in question generate. Since $(x,y) \in \mathrm{con}_L(x,y)$ and g preserves $\mathrm{con}_L(x,y)$, $(x',y') = (g(x),g(y)) \in \mathrm{con}_L(x,y)$, whereby $\mathrm{con}_L(x',y') \leq \mathrm{con}_L(x,y)$. Similarly, using that $h(x') = h(g(x)) = x$, $h(y') = y$, and h preserves $\mathrm{con}_L(x',y')$, we obtain that $\mathrm{con}_L(x,y) \leq \mathrm{con}_L(x',y')$, and we conclude (4.11). Note that (4.10) would allow a shorter formulation of (4.11).

Next, assume that $(a,b) = (x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots,(x_t,y_t) = (c,d)$ is a sequence of distinct members of $\mathrm{SO}(L)$ such that for each $i \in \{1,\dots,t\}$, either $(x_{i-1},y_{i-1}) \overset{\mathrm{up}}{\sim} (x_i,y_i)$ or $(x_{i-1},y_{i-1}) \overset{\mathrm{dn}}{\sim} (x_i,y_i)$. (Since $(x_{i-1},y_{i-1}) \neq (x_i,y_i)$, $\overset{\mathrm{up}}{\sim}$ and $\overset{\mathrm{dn}}{\sim}$ cannot simultaneously hold.) For $i \in \{1,\dots,t\}$ such that $(x_{i-1},y_{i-1}) \overset{\mathrm{up}}{\sim} (x_i,y_i)$, let $g_i\colon [x_{i-1},y_{i-1}] \to [x_i,y_i]$ be the isomorphism defined by $g_i(\xi) := x_i \vee \xi$. Dually, for $i \in \{1,\dots,t\}$ such that $(x_{i-1},y_{i-1}) \overset{\mathrm{dn}}{\sim} (x_i,y_i)$, let $g_i\colon [x_{i-1},y_{i-1}] \to [x_i,y_i]$ be the isomorphism defined by $g_i(\xi) := y_i \wedge \xi$. Let $g\colon [a,b] \to [c,d]$ be the composite $g_t \dots g_2 g_1$ of the "stepwise" isomorphisms $g_t, \dots, g_1$. Applying (4.11) or its dual to each of these stepwise isomorphisms, we conclude that for all x and y satisfying $a \leq x \prec_L y \leq b$,

$$(x,y) \leq_{\chi_L} \big(g(x),g(y)\big) \text{ and } \mathrm{con}_L(x,y) = \mathrm{con}_L(g(x),g(y)). \tag{4.12}$$

We know from Lemma 4.2 that for the interval $[0_S,1_S]$ of L, we have that $\mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}([0_S,1_S])$. So, it suffices to prove that $\mathrm{cd}([0_S,1_S]) \leq \mathrm{cd}(S)$. In other words and to simplify the notation, we can assume that $L = [0_S, 1_S]$, that is, $0 := 0_S = 0_L$ and $1 := 1_L = 1_S$. Take a maximal chain $C = \{0 = c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n = 1\}$ in S such that $c_{i-1} \prec_S c_i$ for $i \in \{1, \dots, n\}$, and define $H_0 := \{(c_{i-1}, c_i) : i \in \{1, \dots, n\}\}$. Note that $H_0 = \mathrm{Cp}(C) \subseteq \mathrm{Cp}(S)$. We define

$$I := \{i : 1 \le i \le n \text{ and } (c_{k-1}, c_k) \le_{\chi_S} (c_{i-1}, c_i) \text{ holds for no } k < i\}, \tag{4.13}$$
$$H := \{(c_{i-1}, c_i) \in H_0 : i \in I\}. \tag{4.14}$$

In other words, H consists of the first members of the blocks of the equivalence $\chi_S\rceil_{H_0}$. We know from Grätzer and Nation [12] that H_0 is a congruence-determining subset of $\mathrm{Cp}(S)$. Hence, so is H by (4.10), (4.13), and (4.14). Furthermore, $\chi_S\rceil_H$ is the equality relation, whereby $\mathrm{Dn}(H; \chi_S)$ is the set of all subsets of H. Thus, denoting the powerset lattice $(\{X : X \subseteq H\}; \subseteq)$ of H by $\mathrm{Pow}(H)$, Lemma 3.3 yields that

$$\mathrm{Con}(S) \cong \mathrm{Dn}(H; \chi_S) = \mathrm{Pow}(H) \text{ and } |\mathrm{Con}(S)| = 2^{|H|} = 2^{|I|}. \tag{4.15}$$

Next, for $i \in I$, select $d_{i,0}, \dots, d_{i,m_i} \in L$ such that $d_{i,j-1} \prec_L d_{i,j}$ for $j \in \{1, \dots, m_i\}$, $d_{i,0} = c_{i-1}$, and $d_{i,m_i} = c_i$. For $k \in \{1, \dots, n\} \setminus I$, take the unique subscript $i(k)$ such that $k < i(k)$ and $(c_{k-1}, c_k) \le_{\chi_S} (c_{i(k)-1}, c_{i(k)})$. Combining Lemmas 3.1 and 3.2 with (4.12), we can fix an isomorphism $h_k \colon [c_{i(k)-1}, c_{i(k)}] \to [c_{k-1}, c_k]$ such that (4.12) remains valid when g is replaced by h_k. Let $m_k := m_{i(k)}$. We define $d_{k,0} := c_{k-1} = h_k(d_{i(k),0}) = h_k(c_{i(k)-1})$, $d_{k,1} := h_k(d_{i(k),1})$, $d_{k,2} := h_k(d_{i(k),2})$, $\dots$, $d_{k,m_k} =: h_k(d_{i(k),m_k}) = h_k(c_{i(k)})$. Since h_k is an isomorphism, $d_{k,j-1} \prec_L d_{k,j}$ for $j \in \{1, \dots, m_k\}$.

Let $W_0 := \{(d_{k,j-1}, d_{k,j}) : 1 \le k \le n \text{ and } 1 \le j \le m_k\}$. Since W_0 is the set of covering pairs of a maximal chain, W_0 is a congruence-determining subset of $\mathrm{Cp}(L)$ by Grätzer and Nation [12]. Let $W := \{(d_{i,j-1}, d_{i,j}) : i \in I$ and $1 \le j \le m_i\}$. If $k \in \{1 \dots, n\} \setminus I$, then (4.12) with h_k replacing g yields that, for $j \in \{1, \dots, m_k\}$, $\mathrm{con}_L(d_{k,j-1}, d_{k,j}) = \mathrm{con}_L(d_{i(k),j-1}, d_{i(k),j})$. This fact, together with the fact that W_0 is a congruence-determining subset of $\mathrm{Cp}(L)$, implies that W is also a congruence-determining subset of $\mathrm{Cp}(L)$. Since $|\mathrm{Dn}(W; \chi_L)| \le 2^{|W|}$, Lemma 3.3 implies that $|\mathrm{Con}(L)| \le 2^{|W|}$.

Observe that $|W| = \sum_{i \in I} m_i$. For $i \in I$, the elements $d_{i,1}$, $d_{i,2}$, $\dots$, d_{i,m_i-1} are outside S. (If $m_i = 1$, then no such elements exist.) Furthermore, if $i, i' \in I$ such that $i < i'$, then $d_{i,1}$, $\dots$, d_{i,m_i-1} are smaller than—and therefore distinct from—each of $d_{i',1}$, $\dots$, $d_{i',m_{i'}-1}$. Hence, we obtain the second equality in the computation below from the fact that we take the union of pairwise disjoint subsets of $L \setminus S$:

$$|W| - |I| = \sum_{i \in I} (m_i - 1) = \Big|\bigcup_{i \in I} \{d_{i,1}, \dots, d_{i,m_i-1}\}\Big| \le |L| - |S|. \tag{4.16}$$

Finally, combining (4.15), (4.16), and the inequality $|\mathrm{Con}(L)| \le 2^{|W|}$ (proved above), we obtain that

$$\mathrm{cd}(L) = \frac{|\mathrm{Con}(L)|}{2^{|L|-1}} \le \frac{2^{|W|}}{2^{|L|-1}} = \frac{2^{|W|-|I|}}{2^{|L|-|S|}} \cdot \frac{2^{|I|}}{2^{|S|-1}} \le \frac{2^{|I|}}{2^{|S|-1}} = \frac{|\mathrm{Con}(S)|}{2^{|S|-1}} = \mathrm{cd}(S).$$
$\square$

Proceeding to the final proof in the paper, we show that the lemmas established so far imply the theorem.

Proof of Theorem 2.1. Let S be a sublattice of a finite lattice L. If S is a cover-preserving sublattice of L or L is modular, then $\mathrm{cd}(L) \le \mathrm{cd}(S)$ by Lemma 4.2 or Lemma 4.5, respectively. Hence, we can assume that L is a dismantlable extension of S. Clearly, it suffices to deal with the particular case $|L| - |S| = 1$, which implies the general case by a trivial induction on $|L| - |S|$. So $S = L \setminus \{c\}$, where c is a doubly irreducible element of L. Let $a := \bigvee\{x \in S : x < c\}$ and $b := \bigwedge\{x \in S : x > c\}$. Since S is a sublattice, $\{a, b\} \subseteq S$ and $a <_L c <_L b$. If $a \prec_S b$, then, letting (S, c, L) play the role of (K, c, M), the (Edge Division) Lemma 4.4 yields the required inequality, $\mathrm{cd}(L) \le \mathrm{cd}(S)$.

Therefore, we can assume that b does not cover a in S. This assumption implies that $\mathrm{Cp}(L)$ is the disjoint union of $\mathrm{Cp}(S)$ and $\{(a, c), (c, b)\}$. Furthermore, $b \notin \mathrm{Ji}(L)$. Let $H := \mathrm{Cp}(S)$ and $R := \{(a, c)\} = \{(c^{L,-}, c)\}$. Observe that $|R| = 1 \le 1 = |L| - |S|$ and $H \cap R = \emptyset$. Since $b \notin \mathrm{Ji}(L)$, we have that $\{(x^{L,-}, x) : x \in \mathrm{Ji}(L))\} \subseteq H \cup R$. Therefore, the required $\mathrm{cd}(L) \le \mathrm{cd}(S)$ follows from Lemma 4.1, completing the proof of Theorem 2.1. $\square$

References

[1] Kirby A. Baker, Peter C. Fishburn, and Fred S. Roberts: Partial Orders of Dimension 2 // Networks 2 (1971), 11–28. https://apps.dtic.mil/sti/pdfs/AD0707530.pdf

[2] G. Czédli[3]: A note on finite lattices with many congruences // Acta Universitatis Matthiae Belii, Series Mathematics Online (2018), 22–28. https://actamath.savbb.sk/pdf/aumb2602.pdf

[3] G. Czédli: Lattices with many congruences are planar // Algebra Universalis (2019) 80:16. https://doi.org/10.1007/s00012-019-0589-1

[3]See https://www.math.u-szeged.hu/~czedli/ for the author's preprints

[4] G. Czédli: The largest and all subsequent numbers of congruences of n-element lattices. https://tinyurl.com/czg-bsconl

[5] G. Czédli, L. Szabó: Quasiorders of lattices versus pairs of congruences // Acta Sci. Math. (Szeged) 60 (1995), 207–211. https://www.acta.hu/

[6] B. Davey: The product representation theorem for interlaced pre-bilattices: some historical remarks // Algebra Universalis 70 (2013) 403–409. https://doi.org/10.1007/s00012-013-0258-8

[7] A. Day: Characterizations of finite lattices that are bounded-homomorphic images or sublattices of free lattices // Canad. J. Math. 31, 69–78 (1979) https://doi.org/10.4153/CJM-1979-008-x

[8] R. Freese: Computing congruence lattices of finite lattices // Proc. Amer. Math. Soc. 125, 3457–3463 (1997) https://doi.org/10.1090/S0002-9939-97-04332-3

[9] G. Grätzer: Lattice Theory: Foundation. Birkhäuser Verlag, Basel (2011) https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0018-1

[10] G. Grätzer: The Congruences of a Finite Lattice, A Proof-by-Picture Approach. Second edition. Basel: Birkhäuser, 2016. xxxii+347 p. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29063-3.

[11] G. Grätzer: Congruences and prime-perspectivities in finite lattices // Algebra Universalis 74, 351–359 (2015) https://doi.org/10.1007/s00012-015-0355-y

[12] G. Grätzer, J. B. Nation: A new look at the Jordan-H́older theorem for semimodular lattices // Algebra Universalis 64, 309–311 (2010). https://doi.org/10.1007/s00012-011-0104-9

[13] C. Mureşan and J. Kulin: On the largest numbers of congruences of finite lattices // Order 37 (2020), 445–460 https://doi.org/10.1007/s11083-019-09514-2

О ГОМОМОРФИЗМАХ ПАРАСТРОФОВ ЛИНЕЙНЫХ И АЛИНЕЙНЫХ КВАЗИГРУПП

А.А. Давлатбеков

Денауский институт предпринимательства и педагогики,
ул. Ш.Рашидова, 360, Сурхандарьинская область,
Денау, 190506, Узбекистан
e-mail: akimbekd@mail.ru

Одной из задач теории квазигрупп, как и теорий других алгебраических систем, является изучение и описанные морфизмы квазигрупп. В данной работе получены результаты о гомоморфизмах парастрофов обобщенных линейных квазигрупп. Заметим, что термин "обобщенные линейные квазигруппы" означает класс линейных слева (справа) квазигрупп, алинейных слева (справа) квазигрупп, смешанных типов первого (второго) рода и т.д.

Квазигруппа (Q, A) называется *линейной* (*алинейной*) над группой $(Q, +)$, если (Q, A) имеет вид

$$A(x, y) = \varphi x + c + \psi y(A(x, y) = \bar{\varphi}x + c + \bar{\psi}y),$$

где $\varphi, \psi \in Aut(Q, +)$, $\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in Aaut(Q, +)$, c — фиксированный элемент из Q [1].

Квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется *квазигруппой смешанного типа* I рода или II рода, над группой $(Q, +)$, если $(Q, \cdot)$ имеет вид

$$A(x, y) = \varphi x + c + \bar{\psi}y \quad (A(x, y) = \bar{\varphi}x + c + \psi y),$$

где $\bar{\psi}, (\bar{\varphi})$ — антиавтоморфизм группы $(Q, +)$, $\varphi, (\psi) \in Aut(Q, +)$. c — фиксированный элемент из Q [2].

Как известно [3], с каждой квазигуппой A связны еще следующие пять квазигрупп, называемых *обратными квазигруппами* или *парастрофами*:

Обозначим через $\sum_A$ систему парастрофов квазигруппы A:

$$\sum\nolimits_A = \{A^{-1},\ A, {}^{-1}A,\ {}^{-1}(A^{-1}), ({}^{-1}A)^{-1}\ A^*\}.$$

В [3] система $\sum_A$ названа *системой обратных квазигрупп* для квазигруппы A.

В работах [2–4] показаны условия гомоморфизма линейных квазигруппы, алинейных квазигруппы и квазигруппы смешанного типа первого (второго) рода. Аналогично в данной работе доказывается условие гомоморфизма парастрофов линейных и алинейных квазигруппы.

Теорема 1. *Пусть $(Q,^{-1}A)$ парострофы линейной квазигруппы квазигруппы (Q,A): $A(x,y)=\varphi x+c+\psi y$ и (Q,A^{-1}) парострофы алинейной квазигруппы (Q,A): $A(x,y)=\bar{\varphi}x+c+\bar{\psi}y$, $\gamma\in End(Q,+)$, где $^{-1}A(x,y)=\varphi^{-1}x+I\varphi^{-1}c+I\varphi^{-1}\psi y$ и $A^{-1}(x,y)=I\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}+I\bar{\psi}^{-1}c+\bar{\psi}^{-1}y$ над группой $(Q,+)$. Тогда эндоморфизм γ группы $(Q,+)$ является гомоморфизмом квазигрупп $(Q,^{-1}A)$ и (Q,A^{-1}) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия $\gamma\varphi^{-1}=I\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi},\gamma I\varphi^{-1}c=I\bar{\psi}^{-1}c\gamma,\gamma I\varphi^{-1}\psi=\bar{\psi}^{-1}\gamma$.*

Следствие 1. *Пусть $(Q,^{-1}A)$ парострофы линейной квазигруппы (Q,A): $A(x,y)=\varphi x+c+\psi y$ и (Q,B^{-1}) $((Q,^{-1}B))$ парострофы квазигруппы смешанного типа первого рода (Q,B): $B(x,y)=\varphi x+c+\bar{\psi}y$, $\gamma\in End(Q,+)$, где $^{-1}A(x,y)=\varphi^{-1}x+I\varphi^{-1}c+I\varphi^{-1}\psi y$ и $B^{-1}(x,y)=I\bar{\psi}_1^{-1}\varphi_1+I\bar{\psi}_1^{-1}c_1+\bar{\psi}_1^{-1}y$ $(^{-1}B(x,y)=\bar{\varphi}_2^{-1}x+I\bar{\varphi}_2^{-1}c_2+I\bar{\varphi}_2^{-1}\psi_2y)$ над группой $(Q,+)$. Тогда эндоморфизм γ группы $(Q,+)$ является гомоморфизмом квазигрупп $(Q,^{-1}A)$ в (Q,B^{-1}) и $((Q,^{-1}A)$ в $(Q,^{-1}B))$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия $\gamma\varphi^{-1}=\bar{\psi}_1^{-1}\varphi_1,\gamma I\varphi^{-1}c=I\bar{\psi}_1^{-1}c_1\gamma,\gamma I\varphi^{-1}\psi=\bar{\psi}_1^{-1}\gamma$* и *$(\gamma\varphi^{-1}=\bar{\varphi}_2^{-1},\gamma I\varphi^{-1}c=I\bar{\varphi}_2^{-1}c_2\gamma,\gamma I\varphi^{-1}\psi=I\bar{\varphi}_2^{-1}\psi_2\gamma)$.*

Доказательство теоремы 1 и следствие 1, аналогично, как доказательство теоремы 1.5.3. [5]

Следствие 2. *Пусть $(Q,^{-1}A)$ парострофы линейной квазигруппы (Q,A): $A(x,y)=\varphi x+c+\psi y$ и (Q,B^{-1}) парострофы квазигруппы смешанного типа первого рода (Q,B): $B(x,y)=\varphi x+c+\bar{\psi}y$, где $^{-1}A(x,y)=\varphi^{-1}x+I\varphi^{-1}c+I\varphi^{-1}\psi y$ и $B^{-1}(x,y)=I\bar{\psi}_1^{-1}\varphi_1+I\bar{\psi}_1^{-1}c_1+\bar{\psi}_1^{-1}y$, $\gamma-$ гомоморфизмом квазигруппы $(Q,^{-1}A)$ в (Q,B^{-1}), $\gamma(x\cdot y)=\gamma x\circ\gamma y)$.* Тогда гомоморфизм γ можно представить в виде:

$$\gamma=\tilde{R}_{I\bar{\psi}_1^{-1}c_1}I\bar{\psi}_1^{-1}\varphi_1\tilde{L}_a\theta\varphi\tilde{R}_{\varphi^{-1}c}=\bar{\psi}_1^{-1}\tilde{R}_b\theta\psi^{-1}\varphi=\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta.$$

Доказательство. Действительно, пусть $\gamma(xy)=\gamma x\circ\gamma y$. Тогда

$$\gamma\left(\varphi^{-1}x+I\varphi^{-1}c+I\varphi^{-1}\psi y\right)=I\bar{\psi}_1^{-1}\varphi_1\gamma x+I\bar{\psi}_1^{-1}c_1+\bar{\psi}_1^{-1}\gamma y,$$

$$\gamma\left(\tilde{R}_{I\varphi^{-1}c}\varphi^{-1}x+I\varphi^{-1}\psi y\right)=\tilde{R}_{I\bar{\psi}_1^{-1}c_1}I\bar{\psi}_1^{-1}\varphi_1+\bar{\psi}_1^{-1}\gamma y,$$

$$\gamma\left(x+y\right)=\tilde{R}_{I\bar{\psi}_1^{-1}c_1}I\bar{\psi}_1^{-1}\varphi_1\gamma\varphi\tilde{R}_{\varphi^{-1}c}x+\bar{\psi}_1^{-1}\gamma\psi^{-1}\varphi y,$$

то есть $\left(\tilde{R}_{I\bar{\psi}_1^{-1}c_1}I\bar{\psi}_1^{-1}\varphi_1\gamma\varphi\tilde{R}_{\varphi^{-1}c},\bar{\psi}_1^{-1}\gamma\psi^{-1}\varphi,\gamma\right)\in Ent\left(Q,+\right)$. Но любая эндотопия группы $(Q,+)$ имеет вид: $T=\left(\tilde{L}_a\theta,\tilde{R}_b\theta,\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta\right)$. Следовательно, $\tilde{L}_a\theta=\tilde{R}_{I\bar{\psi}_1^{-1}c_1}I\bar{\psi}_1^{-1}\varphi_1\gamma\varphi\tilde{R}_{\varphi^{-1}c}$, $\tilde{R}_b\theta=\bar{\psi}_1^{-1}\gamma\psi^{-1}\varphi,\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta=\gamma$. Откуда

$$\gamma=\tilde{R}_{I\bar{\psi}_1^{-1}c_1}I\bar{\psi}_1^{-1}\varphi_1\tilde{L}_a\theta\varphi\tilde{R}_{\varphi^{-1}c}=\bar{\psi}_1^{-1}\tilde{R}_b\theta\psi^{-1}\varphi=\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta.$$

Аналогично, если (Q,A^{-1}) парострофы линейной квазигруппы (Q,A): $A(x,y)=\varphi x+c+\psi y$ и (Q,B^{-1}) парострофы квазигруппы смешанного типа второго рода (Q,B): $B(x,y)=\bar{\varphi}x+c+\psi y$, где $A^{-1}(x,y)=I\psi_1^{-1}\varphi_1+I\psi_1^{-1}c_1+\psi_1^{-1}y$ и $B^{-1}(x,y)=I\psi_2^{-1}\bar{\varphi}_2+I\psi_2^{-1}c_2+\psi_2^{-1}y$, $\gamma-$ гомоморфизмом квазигруппы (Q,A^{-1}) в (Q,B^{-1}), $\gamma(x\cdot y)=\gamma x\circ\gamma y)$. Тогда гомоморфизм γ можно представить в виде:

$$\gamma=I\psi_2^{-1}\bar{\varphi}_2\tilde{L}_a\theta I\varphi_1^{-1}\psi_1=\tilde{L}_{I\psi_2^{-1}c_2}\psi_2^{-1}\tilde{R}_b\theta\psi_1\tilde{L}_{I\psi_1^{-1}c_1}=\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta.$$

Следствие 3. *Пусть* $(Q,^{-1}A)$ *парострофы алинейной квазигруппы* (Q,A)*:* $A(x,y)=\bar{\varphi}x+c+\bar{\psi}y$ *и* (Q,B^{-1}) *парострофы квазигруппы смешанного типа второго рода* (Q,B)*:* $B(x,y)=\bar{\varphi}x+c+\psi y$*, где* $^{-1}A(x,y)=\bar{\varphi}_1^{-1}x+I\bar{\varphi}_1^{-1}c_1+I\bar{\varphi}_1^{-1}\bar{\psi}_1y$ *и* $B^{-1}(x,y)=I\bar{\psi}_2^{-1}\varphi_2x+I\bar{\psi}_2^{-1}c_2+\bar{\psi}_2^{-1}y$*,* $\gamma-$ *гомоморфизмом квазигруппы* $(Q,^{-1}A)$ *в* (Q,B^{-1}), $\gamma(x\cdot y)=\gamma x\circ\gamma y$. Тогда гомоморфизм γ можно представить в виде:

$$\gamma=\tilde{R}_{I\bar{\psi}_2^{-1}c_2}I\bar{\psi}_2^{-1}\varphi_2\tilde{L}_a\theta\bar{\varphi}_1=\bar{\psi}_2^{-1}\tilde{R}_b\theta I\psi_1^{-1}\bar{\varphi}_1\tilde{L}_{\bar{\varphi}_1c_1}=\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta.$$

Аналогичное утверждение верно для других парастрофы линейных алинейных квазигрупп и паростофы квазигруппы смешанного типа первого (второго) рода.

Список литературы

[1] Белоусов В.Д. Уравновешенные тождества в квазигруппах // Мат. сборник, 1966, 70 (112): 1, с. 55–97.

[2] Табаров А.Х. Гомоморфизмы и эндоморфизмы линейных и алинейных квазигрупп // Дискретная математика, РАН., 2007, том 19, вып.2, с. 67–73.

[3] Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967. 225 с.

[4] Давлатбеков А.А. О гомоморфизмах линейных слева (справа) квазигрупп // Современные проблемы алгебры и теории чисел. Материалы республиканской научно-теоретической конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения профессора Г.Б.Бабаева. Душанбе. 14-15 декабря 2018 г. С. 7–9.

[5] Давлатбеков А.А. Автоморфизмы, эндоморфизмы и конгруэнции обобщенных линейных квазигрупп. Душанбе 2019. 81 с.

ON THE STABILITY OF THE CLASS OF T-PSEUDOFINITE S-ACTS

E.L. Efremov, A.A. Stepanova, S.G. Chekanov[*]

Far Eastern Federal University, FEFU Campus,
10 Ajax Bay, Russky Island, Vladivostok, 690922, Russia
e-mail: efremov-el@mail.ru, stepltd@mail.ru, chekanov.sg@dvfu.ru

Introduction

In [1], the stability of the theory of acts over a monoid were considered. It was proved that the theory of every act over monoid S is stable iff the set of all principal left ideals of S is linearly ordered with respect to the order $\subseteq$.

The structure $\mathfrak{M}$ in language L is called pseudofinite if every sentence true in $\mathfrak{M}$ has a finite model. In [2], the concept of T-pseudofiniteness was introduced for the model of theory T. A model $\mathfrak{M}$ of a theory T is called T-pseudofinite if every sentence true in $\mathfrak{M}$ is also true in some finite model of T. It is clear that T-pseudofiniteness implies pseudofiniteness for every theory T. It is known (see [3]) that a structure $\mathfrak{M}$ in a language L is pseudofinite if and only if $\mathfrak{M}$ is elementarily equivalent to an ultraproduct of finite structures of L. In [4], a similar result is proved for T-pseudofinite structures, namely, a model $\mathfrak{M}$ of the theory T is T-pseudofinite if and only if $\mathfrak{M}$ is elementarily equivalent to an ultraproduct of finite models of the theory T.

In this paper, we construct a monoid S such that the theory of all T-pseudofinite acts over S is stable, but there exists an act over S with unstable theory, where T is the theory of all acts over S.

[*]Supported by RF Ministry of Education and Science (Suppl. Agreement No. 075-02-2025-1638/1 of 27.02.2025)

1 Preliminaries

Let us recall some definitions and facts from model theory and model theory of S-acts.

Fact 1. (Loss theorem) [5] Let $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ be a set of L-structures, D be an ultrafilter on I, $\mathfrak{M} = \prod_{i\in I} \mathfrak{M}_i/D$ be the ultraproduct, $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ be the formula of the language L, and $m_1, \dots, m_n \in \prod_{i\in I} \mathfrak{M}_i$. Then

$$\mathfrak{M} \models \Phi(m_1/D, \dots, m_n/D) \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathfrak{M}_\mathrm{i} \models \Phi(m_1(i), \dots, m_n(i))\} \in D.$$

Let T be a complete theory. For a given infinite cardinal κ, a theory T is called *κ-stable* if for any set A of cardinality κ in T, the set $S(A)$ of complete types over A also has cardinality κ. A theory T is called *stable* if it is κ-stable for some infinite cardinal κ. A theory T is called *unstable* if T is not stable.

A model $\mathfrak{M}$ of a theory T is called T-pseudofinite if every sentence true in $\mathfrak{M}$ is also true in some finite model of T.

Fact 2. [4] Let T be a theory of language L, and $\mathfrak{M}$ be a model of T. Then $\mathfrak{M}$ is a T-pseudofinite structure if and only if $\mathfrak{M}$ is elementary equivalent to the ultraproduct of finite models of the theory T.

Let S be a monoid and 1 the identity of S. The structure $\langle A; s\rangle_{s\in S}$ in the language $L_S = \{s \mid s \in S\}$ is called a *(left) S-act* or an act over S if $s_1(s_2a) = (s_1s_2)a$ and $1a = a$ for all $s_1, s_2 \in S$ and $a \in A$. The S-act $\langle A; s\rangle_{s\in S}$ is denoted by ${}_SA$.

Let T be the theory of all pseudofinite S-acts. A monoid S is called a stabilizer (a T-$\mathcal{PF}$-stabilizer) if the theory of every S-act (T-pseudofinite S-act, respectively) is stable. An S-act ${}_SA$ is called *linearly ordered* if the set of all subacts of ${}_SA$ is linearly ordered by inclusion. A monoid S is called *linearly ordered* if the S-act ${}_SS$ is linearly ordered.

Fact 3. [1] A monoid S is a stabilizer if and only if S is a linearly ordered monoid.

For a complete theory T of a language L, by $\mathfrak{M}$ we denote a rather large and rich model of the theory T, which we call a monster model, since we assume that all considered models of the theory T are its elementary submodels. A complete theory T of S-acts is called *stationary* if for any ${}_SA \models T$ and $a, b \in \mathfrak{M} \setminus A$

$$a \in Sb \Longrightarrow A \cap Sa = A \cap Sb.$$

Fact 4. [1] Each stationary theory is stable.

2 Example a T-$\mathcal{PF}$-stabilizer, but not a stabilizer

Clearly, any stabilizer is a T-$\mathcal{PF}$-stabilizer. The following example is an example of a $T-\mathcal{PF}$-stabilizer, but not a stabilizer.

Example Let G be a group with respect to the operation $\cdot$, with unit 1 and without nontrivial subgroups of finite index, G_1, G_2 be disjoint copies of G, $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$ be copies of $g \in G$, $S = G_1 \cup G_2$. Equip S with a binary operation defined as follows: $a_1 b_1 = (a \cdot b)_1$, $a_2 b_1 = (a \cdot b)_2$ for all $a, b \in G$, G_2 is the set of right zeros. Then the monoid S is a T-$\mathcal{PF}$-stabilizer, but not a stabilizer.

Proof. It is easy to check that S is a monoid with unit 1_1. Since S is not a linearly ordered monoid, then, by Fact 2, S is not a stabilizer. Let us prove that any finite principal S-act has at most two elements. Let θ be any congruence on ${}_SS$ such that the S-act ${}_SS/\theta$ is finite. Then $1_1/\theta \cap G_1$ is a subgroup of G_1. Since G is a group without nontrivial subgroups of finite index then $1_1/\theta \cap G_1 = G_1$. If $a, b \in G$ then $a_2 = (1_2 \cdot a_1)\ \theta\ (1_2 \cdot b_1) = b_2$, that is, $a_2/\theta = b_2/\theta$. Therefore, $S/\theta = \{1_1/\theta, 1_2/\theta\}$. Hence any principle finite S-act has at most two elements and for any finite S-act ${}_SA$ and $s, t \in S$ we have ${}_SA \models \forall x(\Phi(x))$, where $\Phi(x) \leftrightharpoons sx = 1_1 tx \vee tx = 1_2 sx$.

Let ${}_SA$ be a T-pseudofinite S-act. By Fact 4, it suffices to prove that $\mathrm{Th}({}_SA)$ is stationary. If ${}_SA$ is a finite S-act, then this is obviously true. Let $|A| \geq \omega$. Suppose ${}_SB \equiv {}_SA$, $a, b \in \mathfrak{M} \setminus B$, $a = sb$. It is clear that $B \cap Sa \subseteq B \cap Sb$. Let $c = tb \in B$. Note that ${}_SB$ is T-pseudofinite S-act. By Fact 3, ${}_SB \equiv \prod_{i \in I} C_i/D$, where ${}_SC_i$ are the finite S-acts and D in nonprincipal ultrafilter on I. Since ${}_SC_i \models \forall x \Phi(x)$ then by Loss theorem, ${}_SB \models \forall x \Phi(x)$. Hence $\mathfrak{M} \models \forall x \Phi(x)$. In particular, $sb = 1_1 tb$ or $tb = 1_2 sb$. Since $c = tb \in B$ and $a = sb \notin B$, we have $c = 1_2 a$. Thus, $\mathrm{Th}({}_SA)$ is stationary, i.e. S is a T-$\mathcal{PF}$-stabilizer.

References

[1] Mustafin T.G. On Stable Theory of polygons // Model Theory and its Application. — Novosibirsk: Nauka. Sib. otd., 1988. P. 92–107.

[2] Efremov E.L., Stepanova A.A., Chekanov S.G. T-pseudofinite acts over abelian group // Model Theory and Algebra 2024: Collection of papers, Novosibirsk State Technical University, 2024. 172–176.

[3] Väänänen J., Pseudo-finite model theory // Matemática Contemporânea, 2003, 24, 169–183.

[4] Efremov E.L., Stepanova A.A., Chekanov S.G. T-pseudofinite acts over abelian groups // Siberian Electronic Mathematical Reports, in press.

[5] Chang C.C., Keisler H. Jerome, Model theory. Amsterdam, North-Holland Pub. Co.; New York, American Elsevier, 1973.

АЛГЕБРЫ БИНАРНЫХ ИЗОЛИРУЮЩИХ ФОРМУЛ ДЛЯ ДЕКАРТОВЫХ И ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРАФОВ ЗВЕЗД

Д.Ю. Емельянов*

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
проспект ак. Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Россия
e-mail: dima-pavlyk@mail.ru

В работе описаны алгебры для декартовых и тензорных произведений графов звезд. Остальные произведения рассмотрены в монографии [1].

Определение 1. *Декартово произведение* или *прямое произведение* $G \times H$ графов G и H — это граф, такой, что множество вершин графа $G \times H$ — это прямое произведение $V(G) \times V(H)$, а любые две вершины (u, u') и (v, v') смежны в $G \times H$ тогда и только тогда, когда либо $u = v$ и u' смежна с v' в H, либо $u' = v'$ и u смежна с v в G.

В монографии [1] рассмотрены операции умножения графов n-угольников на ребро. В этой работе мы будем исследовать декартово произведение и тензорное произведение графов звезд между собой.

Так как лучи графа-звезды начинаются из отдной вершины то диаметр графа будет равен 2 для любого количества лучей. Соотвественно все они будут описаны алгеброй представленной ниже.

Алгебру для графа-звезды назовем $\mathfrak{S}$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2\}$, она будет задаваться следующей таблицей:

$*$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 2\}$	$\{1\}$
2	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{0, 2\}$

*The work was carried out in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No. FWNF-2022-0012.

Декартово произведение графа S_1 на S_n будет иметь диаметр 3. Алгебра для декартового произведения S_1 на S_n будет иметь множество меток $\rho_{\nu(p)} = \{0,1,2,3\}$ и задаваться следующей таблицей:

$*$	0	1	2	3
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
1	$\{1\}$	$\{0,2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2\}$
2	$\{2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2\}$	$\{1,3\}$
3	$\{3\}$	$\{0,2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2\}$

Декартово произведение графа S_2 на S_n будет иметь диаметр 4. Алгебра для декартового произведения графа S_2 на S_n будет иметь метки $\rho_{\nu(p)} = \{0,1,2,3,4\}$ задаваться следующей таблицей:

$*$	0	1	2	3	4
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$
1	$\{1\}$	$\{0,2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3\}$
2	$\{2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$
3	$\{3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3\}$
4	$\{4\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$

Алгебры для декартовых произведений графов S_m на S_n, где $m, n > 2$ будут зависеть от диаметра получаемого графа и описываться таблицей в общем виде:

Алгебру для декартового произведения графов-звезд между собой с диаметром получаемого графа n обозначим через $\mathfrak{S}_\mathfrak{n}$. Она будет иметь метки $\rho_{\nu(p)} = \{0,1,2,3,4,5,6,\dots, n\}$ и задаваться следующей таблицей Кэли:

$\cdot$	0	1	2	3	4	$\dots$	n
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{\dots\}$	$\{n\}$
1	$\{1\}$	$\{0,2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{\dots\}$	$\{F(n)\}$
2	$\{2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{\dots\}$	$\{F(n)\}$
3	$\{3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{F(4+3)\}$	$\{\dots\}$	$\{F(n)\}$
4	$\{4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{F(4+3)\}$	$\{F(4+4)\}$	$\{\dots\}$	$\{F(n)\}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	$\{m\}$	$\{F(\mathrm{n})\}$	$\{F(\mathrm{n})\}$	$\{F(\mathrm{n})\}$	$\{F(\mathrm{n})\}$	$\dots$	$\{F(n)\}$

где $F(x)$ — функция, которая возвращает метки в зависимости от четности x: если x четная, то получаем все четные метки, начиная с нуля до x, а если нечетная, то получаем все нечетные метки до x, где $x \leq n$.

Определение 2. *Тензорное произведение* $G \times H$ графов G и H это граф, множество вершин которого есть декартово произведение $V(G) \times V(H)$, причем различные вершины (u, u') и (v, v') смежных в $G \times H$ тогда, когда u смежна с v и u' смежна с v'.

Тензорное произведение графа S_1 на S_n будет иметь диаметр 2. Алгебра для тензорного произведения S_1 на S_n будет иметь множество меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2\}$ и задаваться следующей таблицей:

$*$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 2\}$	$\{1\}$
2	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{0, 2\}$

Тензорное произведение графа S_2 на S_n будет иметь диаметр 2. Из определения тензовного произведения и особенностей звезд-графов получаем, что получаемые графы будет иметь диаметр графа 2, тогда тензорные произведения графов опишутся следующей алгеброй.

Алгебры для тензорного произведения S_m на S_n получим две одинаковые, они будут иметь множество меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2\}$ и задаваться следующей таблицей:

$*$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 2\}$	$\{1\}$
2	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{0, 2\}$

Теорема 3. *Если T — теория декартового произведения графов звезд друг на друга, $\mathfrak{B}$ — алгебра бинарных изолирующих формул теории T, то алгебра $\mathfrak{B}$ задается алгеброй $\mathfrak{S}_\mathfrak{n}$.*

Теорема 4. *Если T — теория тензорного произведения графов звезд друг на друга, $\mathfrak{B}$ — алгебра бинарных изолирующих формул теории T, то алгебра $\mathfrak{B}$ задается алгеброй $\mathfrak{S}_\mathfrak{n}$.*

Видим, что алгебры для произведений будут изоморфны.

Земечание 1. Заметим, что симплекс в графе полученном в результате произведения декартово или тензорного приводит к алгебраическому поглощению, характерному для симплексов [2].

Список литературы

[1] D.Yu. Emelyanov, B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, Algebras of binary formulas. — Novosibirsk : Edition of NSTU, 2023. 330 p. doi: 10.17212/978-5-7782-5028-4

[2] Д.Ю. Емельянов, Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для теорий симплексов // Algebra and Model Theory 11: Collection of papers. Novosibirsk : NSTU Publisher, 2017. — P. 66–74.

ON CUTS OF SOME FIELDS OF GENERALISED POWER SERIES

N.Yu. Galanova

Tomsk State University, 36 Lenin Ave., Tomsk, 634050, Russia
e-mail: galanova@math.tsu.ru

1 Introduction

The monograph [1] and the survey [2] present established approaches to the study of totally ordered fields, which appeared in the work of Artin and Schreier [3] and were developed together with non-standard analysis, analysis of non-Archimedean valued fields, and model theory. One of the directions for investigation of ordered fields is connected with the cut (gap) theory. The theory of cuts dates back to Dedekind's work and has now received significant development [4]. There are various classifications of cuts that make it possible to geometrically visualize the algebraic properties of the ordered fields. The type of a cut is invariant under ordered isomorphism of ordered structures making cuts a useful tool in classifying fields [5]. For a field k and an ordered commutative group G, a Hahn field is any subfield of the field of generalised power series $k[[G]]$. I. Kaplansky proved that every real closed field F can be embedded in a field of generalised power series $\mathbb{R}[[G_F]]$, where G_F is a group of Archimedean classes of F. The present paper considers examples of an application of a cut theory for some classes of Hahn fields.

2 Fields of generalised (formal) power series

Throughout this paper $\mathbb{N}$ denotes the set of natural numbers; $\mathbb{Q}$ the field of rational numbers; $\mathbb{R}$ the field of real numbers. Let k be a totally ordered Archimedean field, $\mathbb{Q} \subseteq k \subseteq \mathbb{R}$; let $(G, \cdot, <)$ be a totally ordered multiplicative group, let $\langle F, \cdot, +, < \rangle$ be a totally ordered field (by ordered, we will always mean "totally ordered"); $F^+ = \{x \in F \mid x > 0\}$; the fraction field of an integral domain R is denoted by $qf(R)$.

As in [6, 7, 5], let $k[[G]]$ be a totally ordered field of generalised (formal) power series $x = \sum_{g\in G} r_g g$, where $r_g = x(g) \in k, supp(x) = \{g \in G | r_g \neq 0\}$, $supp(x)$ is an inversely well-ordered subset of a G (each subset of G has a largest element); with $\sum_{g\in G} r_g g + \sum_{g\in G} r'_g g := \sum_{g\in G}(r_g + r'_g)g$ and $\sum_{g\in G} r_g g \cdot \sum_{g\in G} r'_g g := \sum_{g\in G}\left(\sum_{g_1\cdot g_2=g} r_{g_1}\cdot r'_{g_2}\right) g$; $x > 0$ iff $x(g_0) = r_{g_0} > 0$, where $g_0 = \max supp(x)$.

Let β be a regular cardinal, $\aleph_0 < \beta \leq |G|$, by $k[[G, \beta]]$ we denote a subfield of $k[[G]]$ consisting of such series x that $card(supp(x)) < \beta$; $k[[G, \beta]]$ is called *the field of bounded generalised (formal) power series* [1, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16].

If $\beta = \aleph_0$ then $k[[G, \aleph_0]]$ is a totally ordered ring consisting of finite series, so $qf\,(k[[G, \aleph_0]])$ is a totally ordered fraction field.

An ordered field F is *real closed* if it does not have a proper algebraic extension to an ordered field, or equivalently, if every positive element in F is a square and every polynomial over F of odd degree has a root in F. The Artin-Schreier theorem asserts that every ordered field F has an algebraic extension to a real closed field $\overline{F}$ (*real closure of* F) whose order is an extension of the order on F, and that $\overline{F}$ is unique up to an isomorphism that leaves all elements of F fixed [1].

Let F be a field, for $x, y \in F^+$, let's denote $x \sim y$ if there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $x \leq ny$ and $y \leq nx$. Let G_F be the set of equivalence classes of F mod $\sim$. We denote the $\sim$-class of an element x by $\widehat{x}$, which is an element of G_F. Note that $\widehat{x} = \{y \in F^+ \mid (\exists\, m, n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{n}x \leq y \leq mx\}$. We put $\widehat{x} < \widehat{y}$ if $nx < y$ for any $n \in \mathbb{N}$ and put $\widehat{x}\cdot\widehat{y} = \widehat{x\cdot y}$. So, $(G_F, \cdot, <)$ is a totally ordered group. If an ordered group is isomorphic to G_F, then this group is called *a group of Archimedean classes of* F (*an Archimedean group of* F). There exists an ordered embedding of the group $(G_F, \cdot, <)$ in the field F, so we may assume that $G_F \subset F$ [1, 2, 6, 8, 5, 9].

A group $\langle G, \cdot, \leq\rangle$ is called *divisible*, if $\forall\, g \in G\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \exists x \in G\ \ x^n = g$.

Theorem 2.1. *[1, 17]*
(1)(S. MacLane, 1939) If G *is a divisible group, then* $\mathbb{R}[[G]], \mathbb{R}[[G, \beta]]$ *are real-closed fields.*
(2) (I. Kaplansky, 1945) Let F *be a real-closed field,* G_F *be a group of Archimedean classes of* F*. Then, there exists order-isomorphic embedding* F *into* $\mathbb{R}[[G_F]]$.

Thus, we further assume that $G_F \subset F \subset \mathbb{R}[[G_F]]$.

3 Classification of cuts of a totally ordered field

Let F be a totally ordered field, a pair of non-empty subsets $A, B \subset F$ is called a *cut*, if $A < B$ and $A \cup B = F$. To define the cut (A, B), it suffices for us to know A, then $B = F \setminus A$. In 1981 G. Pestov introduced the notion of a symmetric cut. The set A is called a *short shore*, if there exists $a_0 \in A$ such that for all $a \in A$ we have $a + (a - a_0) \in A$. The element a_0 is said to be *close* to the shore B. If a shore is not short, then it is called a *long shore*. If both A and B are long shores, then the cut (A, B) is called *symmetric*. If one of the shores is long and the other one is short, then such a cut (A, B) is called *non-symmetric or asymmetric* [8] (or *ball* cut [4]). Let F_1 be an ordered extension of a field F and $x \in F_1$. We say that x *realizes* a cut (A, B) [4, 18], if $\forall a \in A\ \forall b \in B\ (a \leqslant x \leqslant b)$.

We say that a cut (A, B) is *algebraic* [8, 18], if in some F_1 extending F, some $x \in F_1 \backslash F$ realizes (A, B) and x is algebraic over F.

A cut (A, B) is called *principal*, if A has a largest element or B has a smallest element; otherwise (A, B) is called *non-principal* (or a *gap* [4], or an *irrational* cut [19]). A cut (A, B) is called *fundamental* [8], if for all positive $\varepsilon \in F$ there exist $x \in A$ and $y \in B$ such that $y - x < \varepsilon$. A fundamental non-principal cut is also called a Scott cut [18].

Let L be a totally ordered set. A subset $H \subset L$ is said to be cofinal to L, if $\forall l \in L\ \exists h \in H\ (l \leq h)$. A subset $H \subset L$ is said to be coinitial to L, if $\forall l \in L\ \exists h \in H\ (l \geq h)$. The least cardinality of a set among all sets that are cofinal (coinitial) to L is called cofinality (coinitiality) of the set L and is denoted $cf(L)$ $(coi(L))$. A gap (A, B) of K is said to have (α, β)-*cofinality* (or (A, B) *has type* (α, β)*)*, if $cf(A) = \alpha, coi(B) = \beta$. If (A, B) is a symmetric gap then $cf(A) = coi(B)$, the cardinal $cf(A)$ is called *the cofinality of* (A, B) and is denoted by $cf(A, B)$ [5].

Remark 3.1. (see [5], [10],[11],[12], [13], [16]):
(1) Every non-principal fundamental cut of a field F is symmetric of type $(cf(F), cf(F))$;
(2) Every principal fundamental cut is non-symmetric and non-algebraic;
(3) There is no fundamental cut that is both non-symmetric and algebraic;
(4) Let F be a ordered field with a group of Archimedean classes G_F. If (C, D) is a cut of G_F and $B = \{x \in F^+ \,|\widehat{x} \in D\}, A = F \backslash B$, then (A, B) is non-symmetric; if at the same time, (C, D) is principal, then (A, B) has type $(\aleph_0, coi(D))$ or $(cf(C), \aleph_0)$;
(5) The type of a cut (fundamental, symmetric, algebraic, cofinality type) is

invariant under ordered isomorphism of ordered fields (Lemma 1.4.7., p.31 [5])

Theorem 3.1. *(Symmetric cut). Let F be a totally ordered field, $\overline{F}$ is a real closure of F. Let G_F and $G_{\overline{F}}$ are isomorphic. Then $\overline{F}$ can be embedded in $\mathbb{R}[[G_{\overline{F}}]]$, so that $F \subset \overline{F} \subset \mathbb{R}[[G_{\overline{F}}]]$, and a cut (A, B) of the field F is symmetric iff there exists a series $x_0 \in \mathbb{R}[[G_{\overline{F}}]] \setminus F$ such that $A < x_0 < B$, so x_0 realizes (A, B).*

Proof. As Kaplansky proved (see Theorem 2.1), there exists order-isomorphic embedding $\overline{F}$ into $\mathbb{R}[[G_{\overline{F}}]]$. Hence, $\overline{F}$ can be embedded in $\mathbb{R}[[G_{\overline{F}}]]$, so that $F \subset \overline{F} \subset \mathbb{R}[[G_{\overline{F}}]]$.

Let (A, B) be a cut of the field F is symmetric. Let's assume that there are no elements from $\mathbb{R}[[G_{\overline{F}}]] \setminus F$ between A and B. Then it is not difficult to see that (A, B) generates a symmetric cut in the field $\mathbb{R}[[G_{\overline{F}}]]$; but $\mathbb{R}[[G_{\overline{F}}]]$ has no symmetric cuts (see [5]).

Let (A, B) be a cut of the field F and x_0 realizes (A, B), $x_0 \in \mathbb{R}[[G_{\overline{F}}]] \setminus F$. Then (A, B) is symmetric by Corollary1.4.5. p.30. from [5]. □

Let us consider a ring of polynomials $k[t]$ over an Archimedean field k, let $k(t) = qf\,(k[t])$. We define the order relation on $k(t)$ so that t will be an infinitesimal: $r_i t^{n-i} + r_{i-1} t^{n-i+1} + ... + r_0 t^n > 0$, if the coefficient r_i at the lowest degree t is greater than zero; the fraction is assumed to be greater than zero if the numerator and the denominator of the fraction are of the same sign. Note that the field $k(t)$ is non-Archimedean and its group of Archimedean classes is identified with $G_{k(t)} = \{t^i \mid i \in \mathbb{Z}\} = t^{\mathbb{Z}}$. By this order, for all $n \in \mathbb{N}$ the following holds $0 < \cdots < t^2 < n \cdot t < \frac{1}{n} = \frac{1}{n} t^0 < t^{-1}$. It is well known, that the following chain of extensions takes place (see [2]): $k \subsetneq k(t) \subsetneq k((t)) \subsetneq k((\mathbb{Q})) = k[[t^{\mathbb{Q}}]]$, the last field is a Hahn field. Also we have the following: $\mathbb{Q}(t) \subseteq k(t) \subseteq \overline{k}(t) \subseteq \mathbb{R}(t) \subsetneq \mathbb{R}((t)) = \mathbb{R}[[t^{\mathbb{Z}}]]$, where the last field is the field of formal Laurent series over $\mathbb{R}$.

Remark 3.2. It is known from the classic Kronecker's results, that $\sqrt{1+t} = \sum_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} C^i_{1/2} t^i \in k((t)) \setminus k(t)$, $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots \in k((t)) \setminus k(t)$ and this is true for any field k, that is not even ordered (see the survey [2]; and see the article [21] generalizing Kronecker's result to arbitrary totally ordered groups and more general linear recurrence relations; one can see also the analysis of some Kronecker's results in the [22].

Example 3.1. For $\mathbb{Q} \subseteq k \subseteq \overline{k} \subseteq \mathbb{R}$ we obtain the following examples of different types of cuts (A, B), $B = k(t) \setminus A$.
(1) fund. sym. alg. $A = \{x \in k(t) \mid x < \sqrt{1+t}\}$;

(2) fund. sym. non-alg. $A = \{x \in k(t) \mid x < e^t\}$;
(3) fund. non-sym. alg. it is not possible for any field, Remark 3.1;
(4) fund. non-sym. non-alg. $A = \{x \in k(t) \mid x \leqslant t\}$;
(5) non-fund. sym. alg. $A = \{x \in k(t) \mid x < x_0, x_0 \in \overline{k} \setminus k\}$, $if\ \overline{k} \setminus k \neq \emptyset$;
(6) non-fund. sym. non-alg. $A = \{x \in k(t) \mid x < x_0, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \overline{k}\}, if \mathbb{R} \setminus \overline{k} \neq \emptyset$;
(7) non-fund. non-sym. alg. $A = \{x \in k(t) \mid \exists n \in \mathbb{N}\ x < n \cdot t\}$;
(8) non-fund. non-sym. non-alg. this case is not possible(see proof in [23]).

4 Cuts of some subfields of a field of generalised power series $k[[G(L, \mathbb{Q})]]$

In [11, 12, 16] the author introduced and studied the following construction of a Hahn field: for a given totally ordered set L and a totally ordered field P and an Archimedean field k: $G(L, P) = \{g = \prod_{j=1}^{n} \xi_{i_j}^{q_{i_j}} \mid \xi_{i_1} > \xi_{i_2} > ... > \xi_{i_n};\ \xi_{i_j} \in L \setminus \{\xi_0\},\ q_{i_j} \in P,\ j = \overline{1, n},\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\xi_0\}$ and $\xi^q = \xi_0^q = \xi_0, \forall q \in P, \forall \xi \in L$.

$G(L, P)$ is a totally ordered, divisible multiplicative group with a lexicographic order, extending the order from L, with a unit ξ_0; so $k[[G(L, P)]]$ is a totally ordered Hahn field.

We have the following chain of fields of generalised power series:
$G(L, P) \subset qf\,(k[[G(L, \mathbb{Q}), \aleph_0]]) \subset \overline{qf\,(k[[G(L, \mathbb{Q}), \aleph_0]])} \subset k[[G(L, P); \aleph_1]] \subset k[[G(L, P)]]$.

For $g = \prod_{j=1}^{n} \xi_{i_j}^{q_{i_j}}$, denote by $l(g)$ the set $\{\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_n}\}$, which is the set of letters that appear in the word g.

Lemma 4.1. *Let $L = \{\xi_i\}_{i \in \omega_1}$ be a well ordered set which is order isomorphic to the ordinal ω_1, let F be an ordered field and $G(L, \mathbb{Q})$ is its group of Archimedean classes, $G(L, \mathbb{Q}) \subset F \subsetneq \mathbb{R}[[G(L, \mathbb{Q})]]$. Then, if (C, D) is a cut of $G(L, \mathbb{Q})$ and $B = \{x \in F^+ \mid \widehat{x} \in D\}, A = F \setminus B$, then (A, B) is non-fundamental non-symmetric and non-algebraic cut of F.*

Proof. Let (C, D) be a cut of $G(L, \mathbb{Q})$ and $B = \{x \in F^+ \mid \widehat{x} \in D\}, A = F \setminus B$, then, by Remark 3.1, (A, B) is non-symmetric. For $G(L, \mathbb{Q})$ (see [11]) $card[a, b] \leq \aleph_0$, where $a, b \in G$. So, by Remark 3.1, (A, B) has a type $(\aleph_0, \aleph_0)$. Since $cf(G(L, \mathbb{Q})) = cf(F) = \aleph_1$ and each fundamental cut has a type $(cf(F), cf(F)) = (\aleph_1, \aleph_1)$, then (A, B) is non-fundamental. Since the group $G(L, \mathbb{Q})$ is divisible and the field F is real-closed then (A, B) is not algebraic (see [16], Remark 3.4).

□

Example 4.1. For $F = \mathbb{R}[[G(\omega_1, \mathbb{Q}); \aleph_1]]$ we obtain the following types of cuts (A, B), $B = F \setminus A$:
(1) fund. sym. alg. It is not possible for any real closed field (see [5]);
(2) fund. sym. non-alg. There exists, by Proposition 14. from [12];
(3) fund. non-sym. alg. It is not possible for any real closed field (see [5]);
(4) fund. non-sym. non-alg. $A = \{x \in F \mid x \leqslant x_0\}, x_0 \in F$;
(5) non-fund. sym. alg. It is not possible for any real closed field (see [5]);
(6) non-fund. sym. non-alg. It is not possible for this field, (see Proposition 14. from [12]);
(7) non-fund. non-sym. alg. It is not possible for any real closed field (see [5]);
(8) non-fund. non-sym. non-alg. There exists by Lemma 4.1 .

The following theorem was announced at the MAL'TSEV MEETING 2023 (see [24]) and appeared during a discussion of a Hankel matrix [22] with M. Podkorytov.

Theorem 4.1. *Let α be an ordinal, $L = \{\xi_i\}_{i\in\alpha}$ be a totally ordered set, let k be a totally ordered Archimedean field, $\mathbb{Q} \subseteq k \subseteq \mathbb{R}$. A series $u \in k[[G(L, \mathbb{Q})]]$ belongs to the fraction field $K = qf\,(k[[G(L, \mathbb{Q}), \aleph_0]])$ iff $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists\, \xi = t^{-1} \in L, \exists\, \widetilde{L} = \{\xi_0, \xi_{i_1}, ..., \xi_{i_s}\} \subset L \setminus \{\xi\}, s \in \mathbb{N}$ such that $u \in \widetilde{k}(t^{\frac{1}{n_0}})$, where $\widetilde{k} = qf\left(k[[G(\widetilde{L}, \mathbb{Q}), \aleph_0]]\right)$.*

Proof. If the series $u = \xi_0 = 1$, then the statement is trivial. Let $u \neq \xi_0$ and $u \in qf\,(k[[G(L, \mathbb{Q}), \aleph_0]])$, so $u = \frac{a_1 g_1 + \cdot + a_n g_n}{b_1 h_1 + \cdot + b_m h_m}$, $n, m \in \mathbb{N}, a_i, b_j \in k, g_i, h_j \in G(L, \mathbb{Q})$. Let $\xi \in L_1 = \bigcup l(g_i) \cup \bigcup l(h_i) \setminus \{\xi_0\}$. Let's consider the greatest positive power of ξ in the numerator of the fraction u and take it out of the brackets. And do the same for the denominators of u (if there are negative powers of ξ). Thus, all powers of ξ can be made negative. Let's introduce the notation $t = \xi^{-1}$. So, all powers of t are positive rational fractions. The least common multiple of denominators of all such rational fractions will give us the desired number n_0. Put $\widetilde{L} = (L_1 \cup \{\xi_0\}) \setminus \{\xi\} \subset L \setminus \{\xi\}$ then the coefficients at $t^{\frac{1}{n_0}}$ will belong to the field $\widetilde{k} = qf\left(k[[G(\widetilde{L}, \mathbb{Q}), \aleph_0]]\right)$.

For example,

$$u = \frac{5\xi_1^{-2}\xi^{1/3} + 2\xi_1 \cdot \xi_2^3 + \xi_0 + \xi_3 \cdot \xi^{-1/2}}{\xi^5 + 3\xi_1\xi_2 - \xi^{-4}\xi_3\xi_4^{1/2} + \xi^{1/2}} = \frac{\xi^{1/3}(5\xi_1^{-2} + 2\xi_1 \cdot \xi_2^3 \xi^{-1/3} + \xi^{-1/3} + \xi_3 \cdot \xi^{-5/6})}{\xi^5(\xi_0 + 3\xi_1\xi_2\xi^{-5} - \xi^{-9}\xi_3\xi_4^{1/2} + \xi^{-9/2}} =$$

$$n_0 = 6, (\xi^{-1})^{1/6} = t^{1/6}, \widetilde{L} = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, , \xi_3, \xi_4\}$$

$$= \frac{(t^{1/6})^{28}(\widetilde{a_1} + \widetilde{a_2}(t^{1/6})^2 + \widetilde{a_3}(t^{1/6})^2 + \widetilde{a_4}(t^{1/6})^5)}{\widetilde{b_1} + \widetilde{b_2}(t^{1/6})^5 + \widetilde{b_3}(t^{1/6})^9 + \widetilde{b_4}(t^{1/6})^{27}},$$

$\widetilde{a}_i, \widetilde{b}_j \in qf(k[[G(\widetilde{L}; \mathbb{Q}), \aleph_0]]$ and $u \in \widetilde{k}(t^{\frac{1}{6}})$. $\square$

Corollary 4.1. *Let* $t^{-1} = \xi \in L$. *Let* $u = \sum\limits_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} r_n t^n \in k[[G(L, \mathbb{Q})]]$. *Then* $u \in K = qf\,(k[[G(L, \mathbb{Q}), \aleph_0]])$ *iff* $\exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \ \exists\ \widetilde{L} = \{\xi_0, \xi_{i_1}, ..., \xi_{i_s}\} \subset L \setminus \{\xi\}, s \in \mathbb{N}$ *such that* $u \in \widetilde{k}(t^{\frac{1}{n_0}})$, *where* $\widetilde{k} = qf\left(k[[G(\widetilde{L}, \mathbb{Q}), \aleph_0]]\right)$.

Proof. Let $u = \sum\limits_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} r_n t^n = \frac{a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n}{b_1 h_1 + \cdots + b_m h_m}$, $n, m \in \mathbb{N}, a_i, b_j \in k, g_i, h_j \in G(L, \mathbb{Q})$. Let's $h_1 = \max\limits_{i \in \{1, \dots n\}} \{h_i\}$. Let's put the term containing h_1, then $u = (b_1 h_1)^{-1}(a_1 g_1 + \cdot + a_n g_n) \cdot [1 \cdot \xi_0 + \sum\limits_{j \in \mathbb{N}} (-1)^j ({b_1}^{-1} b_2 {h_1}^{-1} h_2 + \cdots + {b_1}^{-1} b_m {h_1}^{-1} h_m)^j]$ $= \sum\limits_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} r_n t^n$. So, we have $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} l(t^n) = \{t\} \subset \bigcup l(g_i) \cup \bigcup l(h_i) \setminus \{\xi_0\}$. Further, we apply the Theorem 4.1, for $\xi^{-1} = t$. $\square$

Remark 4.1. Note, that if $g \in G(L, \mathbb{Q})$ and $u = \sum\limits_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} r_n g^n = \frac{a_1 g_1 + \cdot + a_n g_n}{b_1 h_1 + \cdot + b_m h_m}$, then it is possible that $g \neq g_i$, $g \neq h_j$.

For example, $g = g_1 \cdot g_2, \quad u = \sum\limits_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} g^n = \frac{g_1^{-1}}{(g_1)^{-1} - g_2}$.

Corollary 4.2. *Let* $t^{-1} = \xi \in L$. *Then* $\sqrt{1+t} \in \overline{K} \backslash K$, $e^t \notin K$. *So,* K *is not real closed.*

Proof. It is known, that series $\sqrt{1+t}$, $\sqrt{1+t^{n_0}}, e^t, e^{t^{n_0}} \notin \widetilde{k}(t)$ for any field $\widetilde{k}$, $\mathbb{Q} \subset \widetilde{k}$ (see [2], see also [22] using the properties of Hankel determinants). Suppose that $e^t \in K = qf\,(k[[G(L, \mathbb{Q}), \aleph_0]])$ then, according to the Corollary 4.1, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \ \exists\ \widetilde{L} = \{\xi_0, \xi_{i_1}, ..., \xi_{i_s}\} \subset L \setminus \{\xi\}, s \in \mathbb{N}$ such that $e^t \in \widetilde{k}(t^{\frac{1}{n_0}})$, where $\widetilde{k} = qf\left(k[[G(\widetilde{L}, \mathbb{Q}), \aleph_0]]\right)$. Hence, $e^t \in \widetilde{k}(t^{\frac{1}{n_0}})$. Thereby, $e^t \in \widetilde{k}(t^{\frac{1}{n_0}}) \Leftrightarrow e^{t^{n_0}} \in \widetilde{k}(t)$, this contradiction shows that $e^t \notin qf\,(k[[G(L, \mathbb{Q}), \aleph_0]])$.

$\square$

Corollary 4.3. *Let* α *be an ordinal, let* $L = \{\xi_i\}_{i \in \alpha}$ *be a totally ordered set, let* k *be a totally ordered Archimedean field,* $\mathbb{Q} \subseteq k \subseteq \mathbb{R}$,

$$K = qf\,(k[[G(L, \mathbb{Q}), \aleph_0]]) \,.$$

Then $\sqrt{1+t}$ *realizes a symmetric algebraic cut in* K *and* e^t *realizes a symmetric cut in* K.

Example 4.2. For $K = qf\,(\mathbb{R}[[G(\omega_1, \mathbb{Q}); \aleph_0]])$ we obtain some types of cuts $(A, B),\ B = K \setminus A$. This list is not complete yet.

(3) fund. non-sym. alg. It is not possible for any real closed field (see [5]);
(4) fund. non-sym. non-alg. $A = \{x \in F \mid x \leqslant x_0\}, x_0 \in F$;
(5) sym. alg. $A = \{x \in K \mid x < x_0\}, x_0 = \sqrt{1+t} \in \overline{K} \backslash K$ with $t^{-1} \in L$ by Theorem 4.1;
(6)' sym. $A = \{x \in K \mid x < e^{\alpha}\}$ by Theorem 4.1;
(6) non-fund. sym. non-alg. There exists by Corollary 3.1 [16], Theorem 3.1, Theorem 3.2 [16]; we can take series x_0 with infinite number of letters in its support.
(7) non-fund. non-sym. alg. It is not possible by Theorem 3.1;
(8) non-fund. non-sym. non-alg. There exists by Lemma 4.1.

References

[1] H.J. Dales, H. Woodin. Super-real fields. Oxford: Clarendon Press,(1996).

[2] A.B. Comicheo, K. Shamseddine. Summary on non-Archimedean valued fields // Contemporary Mathematics. 704. (2018), 1–36. http://dx.doi.org/10.1090/conm/704/14158

[3] E. Artin, O.Schreier. Algebraische Konstruktion Reeller Körper // Abh. Math. Sem. Hamb. Univ. 5. (1925), 85–99.

[4] F.-V. Kuhlmann. Selected methods for the classification of cuts and their applications // Proceedings of the 5th Joint Conferences on Algebra, Logic and Number Theory, June 24-29, 2018, Bedlewo. Banach Center Publications. 121 (2020), 85–106. DOI: 10.4064/bc121-9

[5] G.G. Pestov. K teorii uporyadochennych poley i grupp [To the theory of ordered fields and groups]. Dis. Doct. Fiz.-mat. Nauk; 01.01.06. (2003) Tomsk, 273 p.

[6] L. Fuchs. Partially ordered algebraic systems. Pergamen Press, 1963.

[7] A.I. Kokorin, V.M. Kopytov. Linearly ordered groups. Halstead Press. New York. (1972).

[8] G. Pestov. To the gap theory of ordered fields (Rus.) // Sib. Math. J. 42:6 (2001), 1350–1360.

[9] J.F. Knight, K. Lange. Lengths of developments in $K((G))$ // Selecta Mathematica (2019) 25:14. https:// doi.org/10.1007/s00029-019-0448-0

[10] N.Y. Galanova. Symmetry of sections in fields of formal power series and a non-standard real line // Algebra and Logic. 42. (2003), 14–19. DOI: 10.1023/A:1022672606591

[11] N.Yu. Galanova. Symmetric and asymmetric gaps in some fields of formal power series // Serdica Math. 30.(2004), 495—504.

[12] N.Yu. Galanova. An investigation of the fields of bounded formal power series by means of theory of cuts // Acta Appl. Math. 85. (2005), 121–126.

[13] N.Y. Galanova , G.G. Pestov. Symmetry of cuts in fields of formal power series // Algebra and Logic. 47(2). (2008), 100–106. DOI: 10.1007/s10469-008-9001-5

[14] N.Yu. Galanova. Totally ordered fields with symmetric cuts // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 46. (2017), 14–20. DOI:10.17223/19988621/46/2

[15] N.Yu. Galanova. On symmetric cuts of a real-closed field // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 53 (2018), 5–15. DOI: 10.17223/19988621/53/1

[16] N. Galanova. On cuts of the quotient field of a ring of formal power series // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 83. (2023), 5–16. doi:10.17223/19988621/83/1

[17] F.-V. Kuhlmann, S. Kuhlmann, M. Marshall, M. Zekavat. Embedding ordered fields in formal power series fields // Journal of Pure and Applied Algebra. 169(1). (2002), 71–90.

[18] S. Shelah. Quite Complete Real Closed fields // Israel Journal of Mathematics. 142 (2004), 261–272. https://arxiv.org/pdf/math/0112212v1.pdf

[19] B.S. Baizhanov, V.V. Verbovsky. Orderly stable theories // Algebra and Logic. 50:3 (2011), 303–325.

[20] N. Bourbaki. Elemente de Mathematique algebre, chapitre III Hermann Paris, 1948, chapitre VI Hermann Paris, 1952.

[21] L.S. Krapp, S. Kuhlmann, M. Serra. Generalised power series determined by linear recurrence relations // Journal of Algebra. 681 (2025), 152–189. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2025.05.012

[22] M.V. Podkorytov *O nekotoryh metodah issledovaniya linejno uporyadochennyh polej formal'nyh stepennyh ryadov* [On some research methods for totally ordered fields of formal power series]: vypusknaya bakalavrskaya rabota po napravleniyu podgotovki: 01.03.01 — Matematika / Podkorytov, Maksim Vadimovich — Tomsk:[b.i.] (2024). https://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vital:21192.

[23] N.Yu. Galanova. Cuts of a totally ordered field of rational functions over an Archimedean field // Kazakh Mathematical Journal, 25(3), (2025), 6—12. https://doi.org/10.70474/trtm5125

[24] N.Yu. Galanova, M. Podkorytov. O pole chastnyh odnogo kol'ca formal'nyh stepennyh ryadov // Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University. International Conference MAL'TSEV MEETING. November 13–17, 2023. Collection of Abstracts. 2023, p. 184. http://old.math.nsc.ru/conference/malmeet/23/maltsev2023.pdf

LOGICAL TOPOLOGIES AND SEPARATION AXIOMS IN THE INSTITUTION-INDEPENDENT MODEL THEORY FRAMEWORK

Asterios Gkantzounis, Foivos Skarpelos

School of Applied Mathematical and Physical Sciences
National Technical University of Athens
9, Iroon Polytechniou street, Zografou, 15780, Greece
e-mail: minasteris@gmail.com, f-skarp@hotmail.com

1 Institution Theory Prerequisites and Logical Topologies

The abstract model theory framework in use is Institution Theory, a heavily category-theoretic paradigm introduced in [6]. In this section, we will cover basic prerequisite notions that are essential to the paper. The notion of a logical system is pertained to by the categorical construction called *institution.*

Definition 1. An Institution $\mathcal{I} = (\mathbf{Sig}^{\mathcal{I}}, \mathbf{Sen}^{\mathcal{I}}, \mathbf{Mod}^{\mathcal{I}}, \models^{\mathcal{I}})$ consists of: A category $\mathbf{Sig}^{\mathcal{I}}$, whose objects are called signatures; A functor $\mathbf{Sen}^{\mathcal{I}} : \mathbf{Sig}^{\mathcal{I}} \to \mathbf{Set}$, mapping each signature a set whose elements are called sentences over that signature; A functor $\mathbf{Mod}^{\mathcal{I}} : (\mathbf{Sig}^{\mathcal{I}}) \to \mathbb{C}at^{\mathrm{op}}$ mapping each signature Σ to a category whose objects are called Σ-models, and whose arrows are called Σ-(model) homomorphisms, and a relation $\models_{\Sigma} \subseteq |\mathbf{Mod}^{\mathcal{I}}| \times \mathbf{Sen}^{\mathcal{I}}(\Sigma)$ for each $\Sigma \in |\mathbf{Sig}^{\mathcal{I}}|$, called Σ-satisfaction, such that for each morphism $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ in $\mathbf{Sig}^{\mathcal{I}}$, the satisfaction condition

$$M' \models_{\Sigma'} \mathbf{Sen}^{\mathcal{I}}(\phi)(e) \ \text{ iff } \ \mathbf{Mod}^{\mathcal{I}}(\phi)(M') \models_{\Sigma} e$$

holds for each $M' \in |\mathbf{Mod}^{\mathcal{I}}(\Sigma')|$ and $e \in \mathbf{Sen}^{\mathcal{I}}(\Sigma)$.

The satisfaction condition of institutions corresponds to the meta-axiom that “truth is invariant under change of notation” and under extension of the context.

In order to present some fundamental notions, let $\mathcal{I}$ be a fixed but arbitrary Institution. A Σ-*presentation* is a pair $\langle \Sigma, E \rangle$ where Σ is a signature and E is a collection of Σ-sentences. A Σ-model M *satisfies* a presentation $\langle \Sigma, E \rangle$ if it satisfies each sentence in E; written as $M \vDash E$. Two models that satisfy exactly the same sentences are called semantically/elementary equivalent. Given a collection E of Σ-sentences, let E^* be the collection of all Σ-models that satisfy each sentence in E. Given a collection M of Σ-models, let M^* be the collection of all Σ-sentences that are satisfied by each model in M; also let M^* denote $\langle \Sigma, M^* \rangle$ called the *theory* of M. The *closure* of a collection E of Σ-sentences is E^{**}, denoted $E^\bullet$.

Fact 1. The $*$ operations on sets Σ-sentences and collections of Σ-models as defined above form a *Galois Connection*.[1]

Definition 2. Given a signature Σ in an institution, a Σ-sentence ρ' is a semantic *negation* of ρ when $\rho'^* = \overline{\rho^*}$, and a semantic *conjunction* of the Σ-sentences ρ_1 and ρ_2 when $\rho'^* = \rho_1^* \cap \rho_2^*$.

The subject of this paper are the so-called *logical topologies*. We consider which model topologies are natural in some sense in the framework of institutions. Given a signature Σ, a topology on its model class $|\mathbf{Mod}(\Sigma)|$, in order to represent model-theoretic properties has to encompass the syntax-semantic relation central to model theory, and represented by the satisfaction relation in institutions. Semantic topology, defined by Lewitzka [8, 9], and developed in the institution framework by Kiouvrekis and Stefaneas [7], is an obvious choice.

Definition 3. Let $\mathcal{I} = (\mathbf{Sig}^{\mathcal{I}}, \mathbf{Sen}^{\mathcal{I}}, \mathbf{Mod}^{\mathcal{I}}, \models^{\mathcal{I}})$ an institution, and Σ an arbitrary signature. For every set of Σ-sentences E, the class of all the models that satisfy it is defined as:

$$E^* := \{M \in \mathbf{Mod}(\Sigma) \mid \quad M \models_\Sigma e, \quad \forall e \in E\}.$$

The class of all Σ-Models, $|\mathbf{Mod}(\Sigma)|$ admits a natural topology, named **Semantic Topology** (**SM**), in which the open sets are exactly:

$$\tau_\Sigma := \left\{ \bigcup_{i \in I} E_i^* \mid \{E_i\}_{i \in I} \ \text{ family of finite sets of } \Sigma\text{-Sentences} \right\}$$

Given the definition of the semantic topology, if any two models cannot be distinguished by the sentences that are satisfied by them, it would

[1] For the Galois connection properties see [3]. For the relations of closure operators over set-theoretic operators see [7].

make sense to identify them, which is the reasoning behind the definition of the **Identification Semantic Topology** (**ISM**). To do this, Kiouvrekis and Stefaneas [7] defined an equivalence relation $\cong$, which is defined as follows: if $M_1^* = M_2^*$, then $M_1 \cong M_2$. For a signature Σ, the class invariant of the model class $|\mathbf{Mod}(\Sigma)|$, is written as $|\mathbf{Mod}(\Sigma)|/\cong$. The function mapping each Σ-model to its equivalence class defines ISM and is continuous.

2 Separation Axioms for Logical Topologies

Equipped with the definitions of the logical topologies **SM**, **ISM**, we will explore their relation with the separation axioms in the institutional setting, expanding on the work Kiouvrekis and Stefaneas [7]. In other approaches to model theory, there have been similar results on separation axioms [1], independently of Lewitzka [8, 9] and the Institutional Theorists. Other than "rediscovering" similar results in the institutional setting, the novelty of this work is that the institutional setting allows for a rigorous but nearly-automatic mapping through model classes of different signatures.

2.1 Elementary Equivalent Models and T_0, T_1, T_2 axioms

We will begin by studying how SM and ISM topologies interact with the separation axioms T_0 (*Kolmogorov*), T_1 (*Frechet*), T_2 (*Haussdorff*), regarding the separation of points by open sets. We will show that the satisfaction of these axioms depends on the existence, in a model set $|\mathbf{Mod}(\Sigma)|$, of elementary equivalent models, which are models that satisfy exactly the same sentences. We consider the formulations of the separation axioms in which neighbourhoods are replaced with finite open covers (whose union is an open set). R_0, R_1 axioms are the equivalents to T_1, T_2 if we exclude topologically indistinguishable points of a space.
We remind that given a topological space X, its quotient space with the equivalence relation defined by topological indistinguishability is called its *Kolmogorov Quotient*, $KQ(X)$.

Proposition 1. *ISM is the Kolomogorov Quotient of SM.*

Proof. We show that topologically indistinguishable points in SM are elementary equivalent models. Let $|\mathbf{Mod}(\Sigma)|$, with the SM topology. Let M_1, M_2 be Σ-Models. M_1 and M_2 are topologically indistinguishable iff $M_1 \in A \Leftrightarrow M_2 \in A$ for any open set A. This is equivalent to $M_1 \models_\Sigma \bigcup_{i\in I} E_i^* \Leftrightarrow M_2 \models_\Sigma \bigcup_{i\in I} E_i^*$ for any open set, which is equivalent to $M_1 \models_\Sigma$

$e \Leftrightarrow M_2 \models_\Sigma e$ for any Σ-sentence e. Therefore, the equivalence relation that determines ISM is the equivalence relation identifying the topologically indistinguishable models in SM. $\square$

This result, while easy to prove, involves a more important fact, that $ISM = KQ(SM)$. In addition to leading us immediately to some results, this fact is greatly important, as it gives a model-theoretic characterization of the topologically indistiguishable points and provides an argument as to why SM, ISM topologies can be considered "natural" for logic.

Kiouvrekis and Stefaneas [7] proved that in an Institution with Semantic Negation and Conjunction, ISM topology is T_2. We will generalize this result.

Proposition 2. *In an Institution with Semantic Negation, ISM topology is* T_2*.*

Proof. Let $|\mathbf{Mod}(\Sigma)|$, with the ISM topology and Σ-Models $M_1 \neq M_2$. This implies (by definition of ISM) that $M_1 \ncong M_2$. Therefore, there exists a Σ-sentence e such that $M_1 \models_\Sigma e$ and $M_2 \not\models_\Sigma e$. However, the institution has semantic negation, therefore $M_2 \models_\Sigma \neg e$. Thus, $M_1 \in \{e^*\}$ and $M_2 \in \{(\neg e)^*\}$, which, by definition of ISM, are (disjoint) open sets. $\square$

We have shown that ISM is T_2 (Hausdorff). Because $ISM = KQ(SM)$, and every T_2 topology is T_1, T_0, we have the following corollary:

Corollary 1. *In an Institution with Semantic Negation, ISM topology is* T_1 *and* T_0*, and SM topology is* R_1 *(preregular) and* R_0*.*

It can easily be shown that SM is, generally, not T_0, T_1 or T_2. Let two Σ-models $M_1 \neq M_2$ that are elementary equivalent $M_1 \cong M_2$. Thus, $M_1 \models_\Sigma e$ iff $M_2 \models_\Sigma e$ for all $e \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$. This is equivalent to: $M_1 \in E_i^*$ iff $M_2 \in E_i^*$, for any E_i^*.

Thus, considering the base of SM topology, for any open set A such that $M_1 \in A$ (WLOG), then $M_2 \in A$. So SM is not T_0, and therefore neither T_1 nor T_2.

2.2 Regularity

Regularity is the condition that any closed set F and any point x, where $x \notin F$ are separated by disjoint open neighborhoods.

A zero-dimensional space is a topological space with a base of clopen sets (i.e. sets that are open and closed). Zero-dimensionality is closely related to regularity.

Kiouvrekis and Stefaneas [7] proved that in an Institution with Semantic Negation and Conjunction, ISM topology is Regular. We will once again generalize this result.

Proposition 3. *In an Institution with Semantic Negation, SM topology is Regular.*

Proof. Let $|\mathbf{Mod}(\Sigma)|$, with the SM topology and M a Σ-Model. Also, let F a closed set such that $M \notin F$. Then, $M \in F^c$, which is open. By definition of SM, F^c being open implies $F^c = \bigcup_{i\in I} E_i^*$ for some $(E_i)_{i\in I}$. Therefore, $M \in \bigcup_{i\in I} E_i^*$, and for some $i \in I$, $M \in E_i^*$, where E_i is finite (by definition of SM).

$M \in E_i^*$ which is equal to $\bigcap_{k=1}^n e_k^*$, where $E_i = \{e_k\}_{k=1,\ldots,n}$. Therefore, we have

$$(E_i^*)^c = (\bigcap_{k=1}^{n} e_k^*)^c = \bigcup_{k=1}^{n}((e_k^*)^c) = \bigcap_{k=1}^{n}(\neg e_k)^*$$

the last equality by semantic negation. So, to separate M and F we need two open sets that cover them and are disjoint. For M, we have $M \in E_i^*$ which is open by the definition of SM. For F, $F = |\mathbf{Mod}(\Sigma)|/\bigcup_{i\in I} E_i^* \subseteq |\mathbf{Mod}(\Sigma)|/E_i^* = (E_i^*)^c = \bigcup_{k=1}^n(\neg e_k)^*$ which is also open by definition of SM, and we have shown the two sets are disjoint. □

In this proof, we consider E_i^* an element of the base of the SM Topology, therefore an open set. However, $(E_i^*)^c = \bigcap_{k=1}^n(\neg e_k)^*$, and $(\neg e_k)^*$ is open by definition of SM. Therefore, $\bigcap_{k=1}^n(\neg e_k)^*$ is open as a union of elements of the base, implying E_i^* is closed. Thus, the following are implied:

Corollary 2. *The elements of the topological base of SM are all clopen. Equivalently, in an Institution with Semantic Negation, SM topology is Zero-Dimensional.*

Corollary 3. *In an Institution with Semantic Negation, ISM topology is T_3, as a Kolmogorov Quotient of a Regular space. And therefore it is itself Regular.*

2.3 Normality and Countable Syntax

We now investigate conditions that have to do with *Normality*, the property of a topological space where every pair of disjoint closed sets are separated by open neighborhoods that are themselves disjoint.

We need to distinguish between two notions of compactness, logical and topological, both fundamental properties in their respective areas. Logical compactness in the institutional setting is defined as follows [3]: *an institution is compact whenever* $E \models e$ *implies* $E_f \models e$*, for some finite* $E_f \subseteq E$. A second institutional property is m-compactness, which is the model-theoretic version of compactness. A set of Σ-sentences is called *consistent* if $E^* \neq \emptyset$. An institution is called m-compact if each set of sentences is consistent when all its finite subsets are consistent.

Topological compactness is defined as *every open cover of a topological space* X *has a finite (open) subcover.*

Proposition 4. *In an Institution with semantic negation and semantic conjunction the following are equivalent [3]:*

i) all SM topologies in an institution $\mathcal{I}$ *(that is, all topological spaces* $|\mathbf{Mod}(\Sigma)|$ *with the SM topology, which is for every* $\Sigma \in |\mathbf{Sig}^{\mathcal{I}}|$*) are (topologically) compact*

ii) the institution $\mathcal{I}$ *is (logically) compact*

In institutions with negation it holds that m-compactness implies logical compactness. Furthermore, it holds that institutions with semantic negation and conjunction have $false$.[2] When an institution has false, it holds that if it is compact it is also m-compact [3]. So Proposition 4 holds for both notions of logical compactness.

We will explore further the implications of compactness to show a result about the Normality of SM.

Proposition 5. *In an institution with (semantic) negation, if an SM is a (topologically) compact topology, then it is also a Normal Topology.*

Proof. In an institution with semantic negation every E_i^* is clopen. Now, let two closed sets F_1, F_2 that are $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. F_1, F_2 being closed means that there exist open sets $\bigcup_{i\in I} E_i^*, \bigcup_{j\in J} E_j^*$, that are their complements, respectively, i.e. $F_1 = |\mathbf{Mod}(\Sigma)|/\bigcup_{i\in I} E_i^*$ and $F_2 = |\mathbf{Mod}(\Sigma)|/\bigcup_{j\in J} E_j^*$. Furthermore, F_1, F_2 being disjoint implies that $F_1 \subseteq \bigcup_{j\in J} E_j^*$ and $F_2 \subseteq \bigcup_{i\in I} E_i^*$.

$F_1 \subseteq \bigcup_{j\in J} E_j^*$ by (topological) compactness implies $F_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} E_j^*$, $k \in \mathbb{N}$. The same argument also gives that $F_2 = |\mathbf{Mod}(\Sigma)|/\bigcup_{j\in J} E_j^*$ implies $F_2 \subseteq |\mathbf{Mod}(\Sigma)|/\bigcup_{j=1}^{k} E_j^*$. But:

$$|\mathbf{Mod}(\Sigma)|/\bigcup_{j=1}^{k} E_j^* = \bigcap_{j=1}^{k} (\{E_j\}^*)^c,$$

[2] An institution has $false$ when, for every Σ, there is a Σ-sentence that no Σ-model satisfies it. Whenever a Σ has such a sentence it is called $false_\Sigma$ [3].

which is an open set, because $\{E_j\}^*$ is closed as clopen, so its complements are open sets. So, it is a finite intersection of open sets, and therefore open.

Thus, the open covers are $\bigcup_{j=1}^{k} E_j^*$ for F_1 and $|\mathbf{Mod}(\Sigma)|/\bigcup_{j=1}^{k} E_j^*$ which are trivially disjoint. $\square$

Proposition 6. *In an institution with (semantic) negation, let Σ a signature. If* $\mathbf{Sen}(\Sigma)$ *is countable, then SM over* $\mathbf{Mod}(\Sigma)$ *is a Normal Topology.*

It is known that every regular space with a countable base is normal (see [10], theorem 32.1).

Proof. By Proposition 3, in Institutions with semantic negation, SM is Regular.

If $\mathbf{Sen}(\Sigma)$ is countable, then the set of finite subsets of $\mathbf{Sen}(\Sigma)$ is also countable. Furthermore, the $*$ map, which maps $E_i \mapsto E_i^*$, creates the base, and there is no element of the base not produced by this map. Thus, it is surjective to the base of $|\mathbf{Mod}(\Sigma)|$ with the SM. Thus, the base is also countable.

By Theorem 32.1 in [10], SM over $|\mathbf{Mod}(\Sigma)|$ is Normal. $\square$

This is another link between a model-theoretic property and a topological one. Finally, we present another condition that guarantees normality for SM topologies, using the previous results.

Corollary 4. *If an institution is logically compact and has semantic negation and conjunction, then all its SM topologies (i.e. the SM topology over* $|\mathbf{Mod}(\Sigma)|$ *for any signature Σ) are Normal.*

Proof. By Proposition 4, in an institution that has semantic negation and conjunction, and it is logically compact (or m-compact), all SM topologies in its models are compact topologies. By Proposition 5, topological compactness yields Normality. $\square$

2.4 Separation by Continuous Function

Eagle, Hamel and Tall [4] prove the complete regularity of another version of the logic topology, where the e_i^* define the basic closed sets of the topology, in $[0,1]$-valued logics. We demonstrate this proof modified for the non-fuzzy institution-independent setting,[3] and the SM topology on models.

[3]The proof can also be presented for $[0,1]$-institutions easily, but in this work we limit ourselves to the non-fuzzy truth concepts. For more in L-institutions, the analog to many-valued logics [2].

Proposition 7. *In an Institution with semantic negation, SM is Completely Regular.*

Proof. Let F a closed set of Σ-models. So, $F = \mathbf{Mod}(\Sigma)/\bigcup_{i\in I}(E_i)^* = (\bigcup_{i\in I}(E_i)^*)^c$ for some I. Also, let a Σ-model $x \in \mathbf{Mod}(\Sigma)/F \Rightarrow x \in F^c \Rightarrow x \in \bigcup_{i\in I}(E_i)^*$ for the same I. So, $x \in (E_i)^*$ for some $i \in I$. Now, consider sentence $e \in E_i$ as a continuous function $\mathbf{Mod}(\Sigma) \to \mathbf{Mod}(\Sigma) \times e$, that is defined as $M \mapsto (M \models_\Sigma e)$, since the e-preimages of open sets are themselves open sets. The finite product of those functions is also a continuous real-valued function such that $M \mapsto \prod_{e\in E_i}(M \models_\Sigma e)$. Thus, $x \in (E_i)^*$ implies $\prod_{e\in E_i}(x \models_\Sigma e) = 1$. Also, $F \subseteq (E_i^*)^c$, therefore for each $y \in F$ there is an $e \in E_i$, such that $(y \models_\Sigma e) = 0$, and thus, $\prod_{e\in E_i}(y \models_\Sigma e) = 0$. □

Corollary 5. *In an Institution with semantic negation, ISM is $T_{3\frac{1}{2}}$.*

3 Preservation under Signature Change

One of the most important features of the institution-theoretic framework is the uniform treatment of translation from one underlying signature to another, and the resulting mappings in syntax and semantics. In this section, we examine how the logical topologies behave under model reduct functors induced by signature morphisms. Given that in most of the previous results the premisses concern the institution itself and not an individual signature, having a result like "the image of an SM topology in the object set of another model category is an SM topology in the codomain of the mapping" would imply that some of the separation axioms and similar topological results are linked to the model-theoretic properties of that institution (for example, having semantic negation).

It is easy to show that $\mathbf{Mod}(\phi) : (|\mathbf{Mod}(\Sigma')|, SM') \to (|\mathbf{Mod}(\Sigma)|, SM)$ is continuous for each signature morphism $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ (see [3], and for a proof [5]).Moreover, for all $E^* \in SM$, $\mathbf{Mod}^{-1}(\phi)(E^*) \in SM'$. This means that the preimage of SM through $\mathbf{Mod}^{-1}(\phi)$ is a topology, and coarser than SM'. Similarly for ISM.

We go on to investigate whether, when SM and ISM are mapped from $|\mathbf{Mod}(\Sigma')|$ to $|\mathbf{Mod}(\Sigma)|$, their images are also SM and ISM topologies, respectively.

Proposition 8. $|\mathbf{Mod}(\phi)\big((\mathbf{Sen}(\phi)(E))^*\big)| = E^* \cap |\mathbf{Mod}(\phi)(\Sigma')|$.

Proof. ($\subseteq$) Let $M \in |\mathbf{Mod}(\phi)\big((\mathbf{Sen}(\phi)(E))^*\big)|$. Then, there exists $M' \in (\mathbf{Sen}(\phi)(E))^*$, such that $\mathbf{Mod}(\phi)(M') = M$. Therefore, $\forall e' \in \mathbf{Sen}(\phi)(E)$,

$M' \models_{\Sigma'} e'$ and there exists $e \in E$ such that $e' = \mathbf{Sen}(\phi)(e)$. By the satisfaction condition, $\mathbf{Mod}(\phi)(M') \models_{\Sigma} e$, or else $M \in E^*$. Thus, since $M \in \mathbf{Mod}(\phi)(\Sigma')$, we have that $M \in E^* \cap |\mathbf{Mod}(\phi)(\Sigma')|$.

($\supseteq$) Let $M \in E^*$ and $M \in |\mathbf{Mod}(\phi)(\Sigma')|$. Therefore, $M = \mathbf{Mod}(\phi)(M')$ for some $M' \in |\mathbf{Mod}(\Sigma')|$ and $\mathbf{Mod}(\phi)(M') \models_{\Sigma} e$ for every $e \in E$, so by satisfaction condition, $M' \models_{\Sigma} \mathbf{Sen}(\phi)(e)$, which means $M' \in (\mathbf{Sen}(\phi)(E))^*$. Thus, $M \in |\mathbf{Mod}(\phi)((\mathbf{Sen}(\phi)(E))^*)|$. $\square$

Therefore, the restriction of SM to the image of $\mathbf{Mod}(\Sigma)$ through $\mathbf{Mod}(\phi)$ is a topology, and also the image of a coarser topology than SM' through $\mathbf{Mod}(\phi)$. Similarly for ISM.

The results of this section, though still in initial stages of possible research, demonstrate the value of studying those logical topologies in institution theory. Through those relatively immediate observations we saw how signature changes map semantic topologies onto semantic topologies. Thus the preservation of separation axioms for the images and preimages of those topologies, is only subject to the validity of particular premises for each property — most of whom are in a sense “global”, i.e. reffering to the institution itself and not to a particular signature.

References

[1] X. Caicedo, Continuous Operations on Spaces of Structures, Quantifiers: Logics, Models and Computation, Synthese Library, vol 248, Dordrecht: Springer, 1995.

[2] R. Diaconescu, Institutional semantics for many-valued logics // Fuzzy Sets and Systems, **218** (2013), 32–52.

[3] R. Diaconescu, Institution-independent Model Theory (2nd ed.), Cham: Birkhauser, 2025.

[4] C. Eagle, C. Hamel, F. Tall, Two applications of topology to model theory // Annals of Pure and Applied Logic, **172**, 5 (2020).

[5] A. Gkantzounis, P. Stefaneas, Topological Inquiry in Abstract Model Theory, Recent Trends in Algebraic Development Techniques, I. uu (ed.), Cham: Springer Nature Switzerland, 2025, 75–93.

[6] J. Goguen, R. Burstall, Institutions: Abstract model theory for specification and programming // Journal of the ACM, **39**, 1 (1992), 95–146.

[7] Y. Kiouvrekis, P. Stefaneas, Topological semantics in institutions with proofs // Algebra and model theory 10, Collection of papers, Novosibirsk: NSTU, 2015, 92–100.

[8] S. Lewitzka, Abstract logics, logic maps, and logic homomorphisms // J.Y. Beziau, Log. univers., **1** (2007), 243–276.

[9] S. Lewitzka, A topological approach to universal logic: Model-theoretical abstract logics, Logica Universalis, J.Y. Beziau (eds), Basel: Birkhauser, 2007.

[10] J.R. Munkres, Topology, Prentice Hall Incorporated, 2000.

ОБ АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОЛИГОНОВ И ПОЛУМОДУЛЕЙ

Д. С. Храмченок

НИУ МИЭТ, МГУ им. Ломоносова
пл. Шокина, 1, Москва, 124498, Россия; Ленинские горы, 1, Москва, 119991, Россия
e-mail: dmitrii.khramchenok@math.msu.ru

1 Введение

Изучение вопроса о возможности задания некоторого класса математических объектов системой аксиом логики предикатов является важной задачей теории моделей. Это свойство позволяет рассматривать элементы данного класса как модели некоторой теории, что дает возможность использовать методы формальной логики и теории моделей для их изучения. В данной работе рассматривается вопрос аксиоматизируемости классов полигонов над полугруппами и полумодулей над полукольцами. Класс универсальных алгебр называется *(конечно) аксиоматизируемым*, если существует (конечная) система аксиом — замкнутых формул логики первого порядка, моделями которой в точности являются элементы данного класса. Множество X называется *полигоном* над полугруппой S, если определено отображение $\cdot : X \times S \to X$, такое, что для всех $x \in X$ и $v, w \in S$ выполняется равенство $(xv)w = x(vw)$. Коммутативный по сложению моноид M с нейтральным элементом 0_M называется *полумодулем* над ассоциативным полукольцом S с 0_S, если определено отображение $\cdot : M \times S \to M$, такое, что для всех $m, n \in M$ и $s, t \in S$ выполняется:
1) $m(st) = (ms)t$
2) $(m + n)s = ms + ns$
3) $m(s + t) = ms + mt$
4) $0_M s = m0_S = 0_M$

Полигоны (полумодули) над фиксированной полугруппой (полукольцом) S можно рассматривать как универсальные алгебры с унарными операциями, соответствующими элементами полугруппы (полукольца), где каждому элементу $s \in S$ соответствует умножение на s, т.е. отображение $X \to X, x \mapsto xs$ (и одной бинарной операцией $+$ в случае полумодуля). При таком определении элементы полугруппы (полукольца) будут рассматриваться в аксиомах как функциональные символы, а не элементы модели, а значит кванторы можно брать исключительно по элементам полигона (полумодуля). Однако если формула имеет вид $\forall s \in S\ \varphi(s)$, то ее можно заменить на $|S|$ аксиом $\varphi(s)$ для каждого $s \in S$. Отсюда следует, что любое многообразие универсальных алгебр является аксиоматизируемым. В частности, класс всех полигонов (полумодулей) над фиксированной полугруппой (полукольцом) S является аксиоматизируемым.

Основные сведения из универсальной алгебры можно найти в [1], теории полугрупп — в [2], теории групп — в [3], теории полигонов — в [4, 5], полуколец и полумодулей — [6], математической логики — в [7].

2 Рассматриваемые классы

В данной работе рассмотрены следующие классы полигонов и полумодулей: *подпрямо неразложимые*, *конечно подпрямо неразложимые* и *однородные*.

2.1 Подпрямо неразложимые алгебры

Универсальная алгебра называется *подпрямо неразложимой*, если не существует ее разложения в нетривиальное подпрямое произведение других алгебр. В силу теоремы Биркгофа [1, глава II, §7, т. 7.3] каждая нетривиальная алгебра является подпрямым произведением подпрямо неразложимых алгебр, поэтому такие алгебры можно рассматривать как элементарные, их изучение позволяет получить больше информации обо всех универсальных алгебрах в целом. Данное выше определение подпрямой неразложимости не всегда является удобным, поэтому чаще всего будут использоваться следующие эквивалентные определения (см., [5, разд. 4.1]).

1) Универсальная алгебра является *подпрямо неразложимой* тогда и только тогда, когда пересечение всех ее нетривиальных конгруэнций — нетривиальная конгруэнция.

2) Универсальная алгебра является *подпрямо неразложимой* тогда и только тогда, когда пересечение любого множества ее нетривиальных конгруэнций — нетривиальная конгруэнция.

3) Универсальная алгебра является *подпрямо неразложимой* тогда и только тогда, когда у нее существует наименьшая нетривиальная конгруэнция.

Пусть ρ — наименьшая нетривиальная конгруэнция универсальной алгебры X. Тогда ρ порождается любой парой элементов $x, y \in X$ таких, что $(x, y) \in \rho$, то есть $\rho = \rho_{x,y}$. В случае, когда X — полигон над полугруппой S, $\rho_{x,y}$ задается следующим условием:
$(z, w) \in \rho_{x,y}$ тогда и только тогда, когда имеет место цепь равенств

$$z = u_1 s_1,$$

$$v_1 s_1 = u_2 s_2,$$

$$\dots$$

$$v_{t-1} s_{t-1} = u_t s_t,$$

$$v_t s_t = w$$

при некоторых $s_i \in S^1 = S \cup \{1\}$, $u_i, v_i \in X$, таких, что $\{u_i, v_i\} = \{x, y\}$ для всех $i, j = 1, \dots, t$.

Из этого условия нетрудно получить еще одно эквивалентное определение подпрямой неразложимости для полигона, не использующее понятия из теории универсальных алгебр.

4) Полигон X ($|X| > 1$) над полугруппой S является *подпрямо неразложимым* тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: Существуют такие $z, w \in X$, что для любых $x \neq y$ имеет место цепь равенств

$$z = u_1 s_1,$$

$$v_1 s_1 = u_2 s_2,$$

$$\dots$$

$$v_{t-1} s_{t-1} = u_t s_t,$$

$$v_t s_t = w$$

при некоторых $s_i \in S^1 = S \cup \{1\}$, $u_i, v_i \in X$, таких, что $\{u_i, v_i\} = \{x, y\}$ для всех $i, j = 1, \dots, t$.

Класс подпрямо неразложимых полигонов (полумодулей) над полугруппой (полукольцом) S обозначим как SI_S.

2.2 Конечно подпрямо неразложимые алгебры

Определение *конечно подпрямо неразложимой* алгебры задается по аналогии с эквивалентным определением 2 для подпрямо неразложимости: Универсальная алгебра называется *конечно подпрямо неразложимой*, если пересечение любых двух (а значит и любого конечного числа) ее нетривиальных конгруэнций — нетривиальная конгруэнция. Очевидно, что подпрямо неразложимая алгебра A является конечно подпрямо неразложимой. В случае, когда A конечна, обратное утверждение тоже будет верно, так как множество конгруэнций A конечно. Однако для бесконечных универсальных алгебр это не так.

Пример 1. Рассмотрим группу $(\mathbb{Z}, +)$ как полигон над собой (обозначение $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$). Так как $\mathbb{Z}$ — абелева группа, то ее конгруэнции как абелевой группы будут совпадать с ее конгруэнциями полигона $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$. А значит произвольная конгруэнция полигона $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ имеет вид $a\rho_n b \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}\ a - b = mn$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Пересечение всех конгруэнций $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ тривиально, однако $\rho_n \cap \rho_m = \rho_{(n,m)}$, то есть пересечение произвольных двух нетривиальных конгруэнций — нетривиальная конгруэнция. Значит полигон $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ конечно подпрямо неразложим, но не является подпрямо неразложимым.

Класс конечно подпрямо неразложимых полигонов (полумодулей) над полугруппой (полукольцом) S обозначим как FSI_S.

2.3 Однородные полигоны

Свойство *однородности* в данной работе рассматривается только для класса полигонов, для которого оно является обобщением свойства подпрямо неразложимости. Подалгебра B универсальной алгебры A называется *большой* в A (A называется *существенным расширением* B), если любой гомоморфизм $g : A \longrightarrow C$ такой, что $g|_B$ — мономорфизм, сам является мономорфизмом (обозначается $B \subseteq' A$). Полигон X называется *однородным*, если все его ненулевые подполигоны являются большими в X.

Основные сведения об однородных полигонах можно найти в [8]. Подполигон B является большим в полигоне A тогда и только тогда, когда для любой конгруэнции ρ полигона A $\rho \cap \rho_B = \Delta$ означает, что $\rho = \Delta$. Отсюда следует, что конечно подпрямо неразложимый (а значит и подпрямо неразложимый) полигон является однородным. Однако обратное утверждение не верно.

Пример 2. Рассмотрим полугруппу правых нулей S и конечно подпрямо неразложимый полигон X над S. Так как X конечно подпрямо неразложим, то у него не более двух компонент связности. Если компоненты две, то одна из них состоит из одного нуля. Рассмотрим Y — нетривиальную компоненту X (если у X одна компонента, то $Y = X$). Y — подполигон в X, а значит Y конечно подпрямо неразложим и связен. Предположим что $|Y| \geqslant 3$. $xst = xt$, а значит для любых $x, y \in Y$ и $s \in S$ $xs = ys$. Тогда $\rho_{x,y} = \{x, y\} \cup \{y, x\} \cup \Delta$, $\rho_{x,z} = \{x, z\} \cup \{z, x\} \cup \Delta$, $\rho_{z,y} = \{z, y\} \cup \{y, z\} \cup \Delta$ являются нетривиальными конгруэнциями, но их пересечение равно Δ, что противоречит конечной подпрямой неразложимости Y. Значит $|Y| \leqslant 2$, то есть мощность конечно подпрямо неразложимого полигона над S не превосходит 3. Теперь рассмотрим полугруппу правых нулей S, $|S| \geqslant 4$, как полигон над собой. Так как $|S_S| \geqslant 4$, он не является конечно подпрямо неразложимым. Однако S_S не имеет подполигонов, а значит однороден.

Класс однородных полигонов над полугруппой S обозначим как U_S.

3 Ограниченность классов полигонов

При рассмотрении вопроса аксиоматизируемости важную роль будет играть свойство ограниченности рассматриваемых классов по мощности.

Лемма 3. *Мощность однородного полигона над полугруппой S не превосходит $|(S^1)^{S^1}|$.*

Доказательство. Рассмотрим однородный полигон X над S. Так как он нетривиален, то он либо состоит из двух нулей (в этом случае $|X| = 2$) либо содержит нетривиальный однопорожденный подполигон Y. Так как X однородный, $E(X) = E(Y)$ ($E(X)$ — инъективная оболочка X), а значит $|X| \leqslant |E(Y)|$. Так как Y однопорожден, его мощность непревосходит $|S^1|$. А значит он содержится в $Cof(S^1)$ (см. [4]). $Cof(S^1)$ является инъективным, а значит $E(Y) \subseteq Cof(S^1)$, то есть $|E(Y)| \leqslant |Cof(S^1)| = |(S^1)^{S^1}|$. Отсюда следует, что $|X| \leqslant |(S^1)^{S^1}|$. $\square$

Для подпрямо неразложимых полигонов данную оценку можно улучшить.

Лемма 4. *Мощность подпрямо неразложимого полигона X над полугруппой S не превосходит $2^{|S^1|}$.*

Доказательство. Пусть X подпрямо неразложим, тогда существует $\rho_{a,b}$ — наименьшая нетривиальная конгруэнция на X. Для произвольного $x \in X$ рассмотрим множество $A_x = \{s \in S^1 \mid xs = a\}$. Определим бинарное отношение $\sim$ следующим образом: $x \sim y \iff A_x = A_y$. Очевидно, что $\sim$ — отношение эквивалетности. Пусть $x \sim y \in X$ и $t \in S^1$. Тогда $A_{xt} = \{s \in S^1 \mid xts = a\} = \{s \in S^1 \mid ts \in A_x\} = \ = \{s \in S^1 \mid ts \in A_y\} = \{s \in S^1 \mid yts = a\} = A_{yt}$, а значит $xt \sim yt$, то есть $\sim$ — конгруэнция. Заметим, что $1 \in A_a$, но $1 \notin A_b$, то есть $a \nsim b$. Однако в любой нетривиальной конгруэнции a и b должны быть эквивалентны, то есть $\sim = \Delta$.
Рассмотрим отображение $f : X \mapsto 2^{S^1}$, ставящее каждому $x \in X$ в соответствие A_x. Из доказанного выше следует, что f — инъекция, а значит $|X| \leqslant |2^{S^1}|$. $\square$

В случае, когда рассматриваемые классы аксиоматизируемы, условия предыдущих лемм можно усилить.

Лемма 5. *Если класс SI_S подпрямо неразложимых полигонов над полугруппой S является аксиоматизируемым, то мощности всех полигонов в нем не превосходят некоторого $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть SI_S является аксиоматизируемым и содержит бесконечный полигон X. Тогда по теореме Лёвенгейма-Скулема-Тарского (см. [9, следствие 2.1.6]) существует модель любой большей чем $|X|$ мощности. Однако по лемме 4 мощности подпрямо неразложимых полигонов над S ограничены кардинальным числом $2^{|S^1|}$. Значит, все полигоны в SI_S конечны. Однако, если бы в SI_S содержались сколь угодно большие конечные полигоны, то по теореме Гёделя-Мальцева о компактности SI_S содержал бы и бесконечную модель. Значит, существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что мощность любого полигона из SI_S не превосходит k. $\square$

Аналогично доказываются утверждения для классов однородных и конечно подпрямо неразложимых полигонов.

Лемма 6. *Если класс U_S однородных полигонов над полугруппой S является аксиоматизируемым, то мощности всех полигонов в нем не превосходят некоторого $k \in \mathbb{N}$.*

Лемма 7. *Если класс FSI_S однородных полигонов над полугруппой S является аксиоматизируемым, то мощности всех полигонов в нем не превосходят некоторого $k \in \mathbb{N}$.*

Так как для конечных полгонов свойства подпрямой неразложимости и конечной подпрямой неразложимости эквивалентны, для класса FSI_S можно получить дополнительные следствия.

Следствие 8. *Если класс FSI_S конечно подпрямо неразложимых полигонов над полугруппой S является аксиоматизируемым, то все конечно подпрямо неразложимые полигоны над S являются подпрямо неразложимыми, то есть $FSI_S = SI_S$.*

Следствие 9. *Пусть S — полугруппа и класс SI_S не является аксиоматизируемым. Тогда класс FSI_S не является аксиоматизируемым.*

4 Аксиоматизируемость классов полигонов

4.1 Полигоны над конечными полугруппами

Оказывается, что для конечных полугрупп вопросы аксиоматизируемости решаются положительно.

Теорема 10. *Пусть S — конечная полугруппа. Тогда класс SI_S является конечно аксиоматизируемым.*

Доказательство. Пусть X — полигон над полугруппой S и $|S| = n$. Выпишем определение полигона: $\forall x \in X \quad \forall v, w \in S\ (xv)w = x(vw)$. Так как полугруппа конечна, то квантор по элементам группы можно заменить на n аксиом (вместо $\forall s \in S$ написать соответствующую аксиому для каждого $s_i \in S$). Значит, определение полигона записывается n^2 аксиомами: $x(s_i s_j) = (xs_i)s_j,\ i, j = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим эквивалентное определение 4 подпрямой неразложимости. Для каждой пары x, y элементов X будем рассматривать наиболее короткую цепь таких равенств. Предположим, что $u_k s_k = u_m s_m$ при каких-либо $k \neq m$. Тогда часть цепи между k и m можно удалить, что противоречит ее минимальности. Аналогично этому невозможно равенство $u_k s_k = v_m s_m$ при $k \neq m + 1$. Значит, в цепи все элементы $u_i s_i$ различны. Так как u_i, v_i могут принимать только два значения, а s_i могут принимать только n значений, длина цепи $t \leqslant n$. Цепей длины t существует не более $(2n)^t$. Тогда условие подпрямой неразложимости

запишется как дизъюнкция сформулированного выше условия по всем цепям длин $t \leq n$:
$\exists z, w \ : \ \forall x \neq y \ : \ \bigvee\limits_{t=1}^{n} \ \bigvee\limits_{\{u_i,v_i\}=\{x,y\}} \ \bigvee\limits_{s_1,\ldots,s_t\in S^1} (z = u_1 s_1 \bigwedge v_1 s_1 = u_2 s_2 \bigwedge \ldots \bigwedge v_{t-1} s_{t-1} = u_t s_t \bigwedge v_t s_t = w)$. □

Теорема 11. *Пусть S — конечная полугруппа. Тогда класс U_S является конечно аксиоматизируемым.*

Доказательство. У однородного полигона X $|Z(X)| \leqslant 2$. Значит класс однородных полигонов делится на 2 непересекающихся класса: Полигоны с $|Z(X)| = 2$ и полигоны с $|Z(X)| \leqslant 1$.
1) Рассмотрим класс однородных полигонов с $|Z(X)| = 2$ (Нули обозначим θ_1 и θ_2). Они являются подпрямо неразложимыми (см. [8]), а значит класс задается условием $\exists \theta_1, \theta_2 \in X \ (\forall s \in S \ \ \theta_1 s = \theta_1) \wedge (\forall s \in S \ \ \theta_2 s = \theta_2) \wedge (\forall a, b \in X \ \exists s \in S \ ((as = \theta_1)) \wedge (bs = \theta_2)) \vee ((as = \theta_2)) \wedge (bs = \theta_1))$. Так как S конечна, $\exists s \in S$ можно заменить на дизъюнкцию формул по всем элементам S, а $\forall s \in S$ можно заменить на конъюнкцию формул по всем элементам S. Значит этот случай задается конечным набором аксиом, а следовательно одной формулой.
2) Рассмотрим класс однородных полигонов с $|Z(X)| \leqslant 1$ (Это условие эквивалентно следующему: $(\exists \theta \in X \ (\forall s \in S \ \ \theta s = \theta) \wedge (\forall x \in X \ (\forall s \in S \ \ xs = x) \Rightarrow (\theta = x))) \vee (\forall x \in X \ \exists s \in S)(xs \neq x))$. Тогда условие однородности записывается следующей формулой (см. [8]):
$\forall a \in X \ \ (as = a) \wedge (\forall x, y \in X \ \ \exists s, t \in S \ \ (as \neq at) \wedge ((as, at) \in \rho_{x,y}))$. $(as, at) \in \rho_{x,y}$ записывается аналогичнно тому, как это было сделано для случая подпрямо неразложимых полигонов (дизъюнкцией по цепям длины $\leqslant n$). Кванторы по S заменяются аналогично первому случаю.

Таким образом класс U_S задается дизъюнкцией вышеуказанных формул. □

Теорема 12. *Класс FSI_S конечно подпрямо неразложимых полигонов над конечной полугруппой S является конечно аксиоматизируемым.*

Доказательство. Так как S конечна, все однородные полигоны над S конечны (так как не превосходят $|(S^1)^{S^1}|$ по мощности). В частности все конечно подпрямо неразложимые полигоны над S конечны, а значит подпрямо неразложимы. Значит класс FSI_S совпадает с классом SI_S, который по теореме 10 конечно аксиоматизируем. □

4.2 Полигоны над группами

Оказывается, что для групп конечность является не только достаточным, но и необходимым условием аксиоматизируемости рассматриваемых классов полигонов:

Теорема 13. *Класс U_G однородных полигонов над группой G является аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда G конечна.*

Доказательство. В случае, когда G конечна, аксиоматизируемость следует из теоремы 11. В случае, когда G бесконечна, G_G будет бесконечным простым, а значит однородным полигоном, что противоречит лемме 6. □

Теорема 14. *Класс SI_G подпрямо неразложимых полигонов над группой G является аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда G конечна.*

Доказательство. см. [10].

Теорема 15. *Класс FSI_G конечно подпрямо неразложимых полигонов над группой G является аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда G конечна.*

Данное утверждение является тривиальным следствием теоремы 14 и следствия 9.

4.3 Полигоны над бесконечными полугруппами

Для полугрупп условие конечности не является необходимым для аксиоматизируемости рассматриваемых классов. Полугруппа, в которой выполняются тождества $x^2 = x$ и $xy = yx$, называется *полурешеткой.* Для полурешеток условие подпрямой неразложимости полигона X эквивалентно условию $|X| \leqslant 2$ (см. [11]), которое задается аксиомой $\exists x\ \exists y\ \forall z\ (x = z) \vee (y = z)$. Таким образом получаем следующее утверждение:

Теорема 16. *Если S — полурешетка, то класс подпрямо неразложимых полигонов над S является аксиоматизируемым.*

Далее рассмотрим полигоны над полугруппами левых и правых нулей. *Полугруппой левых (правых) нулей* называется полугруппа S, удовлетворяющая тождеству $st = s$ (соотв. $st = t$) для всех $s, t \in S$.

Теорема 17. *Пусть S — бесконечная полугруппа левых нулей. Тогда классы подпрямо неразложимых, конечно подпрямо неразложимых и однородных полигонов над S не являются аксиоматизируемыми.*

Доказательство. Пусть S — произвольная полугруппа. Множество 2^S отображений $f : S \to \{0, 1\}$ можно сделать полигоном над S, положив $(fs)(t) = f(st)$ для всех $f \in 2^S,\ s, t \in S$. Отображения θ_1 и θ_2, такие, что $\theta_1(s) = 0, \theta_2(s) = 1$ для всех $s \in S$, очевидно, являются нулями полигона 2^S. Полигон X с двумя нулями z_1 и z_2 является подпрямо неразложимым тогда и только тогда, когда для любых $x \neq y$ из X найдется элемент $s \in S$, такой, что $\{xs, ys\} = \{z_1, z_2\}$.

Предположим теперь, что S — бесконечная полугруппа левых нулей. Пусть $X = 2^S$. Возьмем любые $f \neq g \in X$. Тогда при некотором элементе $s \in S$ будем иметь место $f(s) \neq g(s)$. Можно считать, что $f(s) = 0,\ g(s) = 1$. Тогда для любого $t \in S$ получим $(fs)t = f(st) = f(s) = 0,\ (gs)t = g(st) = g(s) = 1$, следовательно, $fs = \theta_1, gs = \theta_2$, а значит, $\{fs, gs\} = \{\theta_1, \theta_2\}$, а значит бесконечный полигон $x = 2^S$ подпрямо неразложим (а значит конечно подпрямо неразложим и однороден). Но если бы один из классов был аксиоматизируемым, то по леммам об ограниченности все его полигоны должны были быть конечными. Значит все три класса полигонов над S не аксиоматизируемы. □

Пусть K_S — некоторый подкласс класса всех полигонов над полугруппой S. K_S называется *конечно аксиоматизируемым над классом всех полигонов*, если существует конечная система аксиом, которая вместе с тождествами полигонов задает теорию, моделями которой в точности являются элементы данного класса.

Теорема 18. *Пусть S — бесконечная полугруппа правых нулей. Тогда классы SI_S подпрямо неразложимых и FSI_S конечно подпрямо неразложимых полигонов над S не являются конечно аксиоматизируемыми в классе всех полигонов над S.*

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно, т.е. класс SI_S (FSI_S) определяется аксиомами полигона $(xs)t = x(st)$ и еще конечным числом аксиом $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ (являющихся формулами логики первого порядка). Обозначим через A множество тех элементов из S, которые встречаются хотя бы в одной из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Тогда $A = \{s_1, \ldots, s_n\}$ — конечное множество.

Рассмотрим множество $X = \{x_1, x_2, z\}$, состоящее из трех различных элементов, и превратим X в полигон над полугруппой S двумя способами. Полученные полигоны обозначим $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$. В полигоне $X^{(1)}$

умножение на элементы из S определим следующим образом:

$$zs = z,\ x_1 s = x_2 s = \begin{cases} x_1, \text{если } s \in A; \\ x_2, \text{если } s \notin A. \end{cases}$$

А в полигоне $X^{(2)}$ имеем $zs = z,\ x_1 s = x_1,\ x_2 s = x_2$ при всех $s \in S$. Нетрудно видеть, что полигон $X^{(1)}$ подпрямо неразложим, а $X^{(2)}$ не является конечно подпрямо неразложимым, так как имеет три компоненты связности. При этом элементы $s \in A$ действуют на x_1, x_2, z в $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ одинаково, поэтому формулы $\varphi_1 \ldots \varphi_m$ на моделях $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ имеют одно и то же значение истинности. Но это невозможно, так как полигон $X^{(1)}$ подпрямо неразложим, а $X^{(2)}$ — нет. □

Теорема 19. *Пусть S — бесконечная полугруппа правых нулей. Тогда класс U_S однородных полигонов над S не является аксиоматизируемым.*

Доказательство. Рассмотрим полигон S_S. В силу того, что $st = t$ для всех $s, t \in S$, данный полигон не имеет нетривиальных подполигонов, а значит однороден. Так как S_S бесконечен, предположение об аксиоматизируемости класса U_S оказывается противоречивым. □

5 Ограниченность и аксиоматизируемость классов полумодулей

5.1 Модули над кольцами

Перейдем к рассмотрению классов полумодулей. Для подпрямо неразложимых модулей над конечным ассоциативным кольцом оказываются верными аналогичные утверждения.

Лемма 20. *Пусть R — ассоциативное кольцо, X — подпрямо неразложимый правый R-модуль, $m = max\{|R|, \aleph_0\}$. Тогда $|X| \leqslant 2^m$*

Доказательство. см. [10].

Повторяя доказательства для полигонов можно получить следующее утверждение.

Лемма 21. *Если класс FI_R подпрямо неразложимых модулей над кольцом R является аксиоматизируемым, то мощности всех модулей в нем не превосходят некоторого $k \in \mathbb{N}$.*

Теорема 22. *Класс подпрямо неразложимых правых R-модулей над конечным ассоциативным кольцом R является конечно аксиоматизируемым.*

Доказательство. В случае модулей подпрямая неразложимость эквивалента существованию наименьшего нетривиального подмодуля. В случае, когда R — кольцо с единицей, данное условие эквивалентно формуле $\exists a \neq 0\ \forall x \bigvee\limits_{r \in R} xr = a$ (дизъюнкция берется по конечному множеству). Если же в кольце нет единицы, то рассмотрим такое $n \in \mathbb{N}$, что $nR = 0$ (оно существует, так как R конечно). Тогда формула, задающая подпрямую неразложимость, примет вид $\exists a \neq 0\ \forall x \bigvee\limits_{r \in R} \bigvee\limits_{t=1}^{n} xr + xt = a$. $\square$

5.2 Полумодули над полукольцами

Несмотря на схожесть определений, подпрямо неразложимые полумодули над произвольными полукольцами устроены гораздо сложнее. В частности, в отличие от полигонов и модулей, подпрямо неразложимые полумодули могут быть не ограничены по мощности. Более того, у полумодуля может не существовать ядра (то есть наименьшего нетривиального подполумодуля). Рассмотрим множество X, содержащее 3 фиксированных элемета η, ζ и θ и определим на нем следующую бинарную операцию "$+$":
Для любого $x \in X$

$$\zeta + \zeta = \eta + x = x + \eta = \theta + x = x + \theta = \eta$$

Для любого $x \in X \setminus \{\eta, \theta, \zeta\}$

$$\zeta + x = x + \zeta = \theta$$

А в случае, когда $x, y \neq \eta, \theta, \zeta$:

$$x + y = \begin{cases} \theta, & \text{если } x = y,\ \ x, y \neq \eta, \theta, \\ \eta, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Данная операция коммутативна и ассоциативна, так как сумма любых 3 элементов в любом порядке будет равна η. Присоединим к данной полугруппе единицу (0 в аддитивных обозначениях) и обозначим полученный моноид X_0.

Докажем, что $\rho_{\eta,\theta} = \Delta \cup (\eta,\theta),(\theta,\eta)$ — наименьшая нетривиальная конгруэнция. Рассмотрим произвольную нертивиальную конгруэнцию ρ на X_0.

Пусть $x \neq y,\ \ x \sim y$ (то есть $(x,y) \in \rho$). Рассмотрим несколько случаев:
1) $(x,y) = (\theta,\eta)$. Тогда $\rho \supseteq \rho_{\eta,\theta}$
2) $x = \eta,\ \ y \in X_0 \setminus \{\eta,\theta,\zeta,0\}$. Тогда $\eta = \eta + y \sim y + y = \theta$, то есть $\rho \supseteq \rho_{\eta,\theta}$
3) $x = \theta,\ \ y \in X_0 \setminus \{\eta,\theta,\zeta,0\}$. Тогда $\eta = \theta + y \sim y + y = \theta$, то есть $\rho \supseteq \rho_{\eta,\theta}$
4) $x, y \in X_0 \setminus \{\eta,\theta,\zeta,0\}$. Тогда $\eta = x + y \sim y + y = \theta$, то есть $\rho \supseteq \rho_{\eta,\theta}$
5) $x = 0,\ \ y \in X_0 \setminus \{0\}$. Тогда $\theta = 0 + \theta \sim y + \theta = \eta$, то есть $\rho \supseteq \rho_{\eta,\theta}$
6) $(x,y) = (\zeta,\eta)$. Тогда $\theta = \zeta + z \sim \eta + z = \eta$ ($z \in X_0 \setminus \{\eta,\theta,\zeta,0\}$ — произвольный), то есть $\rho \supseteq \rho_{\eta,\theta}$
6) $(x,y) = (\zeta,\theta)$. Тогда $\theta = \zeta + z \sim \theta + z = \eta$ ($z \in X_0 \setminus \{\eta,\theta,\zeta,0\}$ — произвольный), то есть $\rho \supseteq \rho_{\eta,\theta}$
7) $x = \zeta,\ \ y \in X_0 \setminus \{\eta,\theta,\zeta,0\}$. Тогда $\eta = \zeta + \zeta \sim y + \zeta = \theta$, то есть $\rho \supseteq \rho_{\eta,\theta}$
Тогда $\rho_{\eta,\theta} = \Delta \cup \{(\eta,\theta),(\theta,\eta)\}$ — наименьшая нетривиальная конгруэнция, то есть X_0 подпрямо неразложим. При этом X может быть сколь угодно большой мощности. Заметим, что $\{\eta,\theta\}$ и $\{\eta,\zeta\}$ — непересекающиеся подполугруппы, а значит у X нет ядра. На данной коммутативной полугруппе можно задать структуру полумодуля над конечным полукольцом, не изменяя конгруэнции. Заметим, что любая коммутативная полугруппа является полумодулем над $\mathbb{N}_0$. В данной полугруппе выполняется тождество $3x = 4x$, а значит она является полумодулем над полукольцом $\mathbb{N}_0/\rho_{3,4}$ (классы эквивалентности имеют вид $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ и $\mathbb{N} \setminus \{1,2\}$). При этом конгруэнции и подполумодули сохраняются, а значит X подпрямо неразложим и не имеет ядра как полумодуль.

Список литературы

[1] P.M. Cohn. Universal algebra. Harper & Row, 1965, xv + 333 pp. [П.Кон. Универсальная алгебра. М., Мир, 1968, 353 с.]

[2] A.H. Clifford, G.B. Preston. The algebraic theory of semigroups. Vol. 1 and vol. 2. — Providence, American mathematical Society, 1961 and 1967 (Mathematical Surveys, 7). [А.Клиффорд, Г.Престон. Алгебраическая теория полугрупп: М., Мир, 1972, т. 1, 2, 286 + 432 pp.]

[3] A.G. Kurosh. The theory of groups v. 1,2, Chelsea, N.-Y., 1955. 272 pp.; 308 pp. [А.Г.Курош. Теория групп. Мир, М., 1967, 648 с.]

[4] M. Kilp, U. Knauer, A.V. Mikhalev. Monoids, acts and categories. N.Y. — Berlin, W. de Gruyter, 2000, xvii + 529 pp.

[5] I.B. Kozhukhov, A.V. Mikhalev. Acts over semigroups // J. Math. Sci., 2023, v. 269, pp. 362–401. [И.Б.Кожухов, А.В.Михалёв, Полигоны над полугруппами // Фундамент. и прикл. матем., 23:3 (2020), 141—199.]

[6] J.S. Golan, Semirings and Their Applications / J.S. Golan. Dordrecht BostonLondon: Kluwer Academic Publishers, 1999. 381 p.

[7] Yu.L. Ershov, E.A. Palyutin. Mathematical logic. Revised English translation by Shokurov Vladimir of the preceding. Mir Publishers, Moscow, 1984, 303 pp. — Volume 51 Issue 3 — Elliott Mendelson. [Ю.Л.Ершов, Е.А.Палютин. Математическая логика. М., Наука, 1987, 336 с.]

[8] M. Roueentan, M. Sedaghatjoo, On uniform acts over semigroups // Semigroup Forum (2018) 97: 229–243.

[9] C. C. Chang, H. J. Keisler. Model theory. Studies in Logic and Foundations of Mathematics, 1973. [Г.Кейслер, Ч.Ч.Чен. Теория моделей. Мир, М., 1977, 614 с.]

[10] I.B. Kozhukhov, D S. Khramchenok, Об аксиоматизируемости класса подпрямо неразложимых полигонов над полугруппами // Model Theory and Algebra 2024: Collection of papers / Edited by M. Shahryari, S. V. Sudoplatov. – Novosibirsk: NSTU Publisher, 2024. — P. 32–41.

[11] I.B. Kozhukhov. One characteristical property of semilattices // Commun. Algebra, 1997, v. 25, N 8, pp. 2569–2577.

SIMPLE FINITE NOVIKOV CONFORMAL ALGEBRAS

P.S. Kolesnikov

Sobolev Institute of Mathematics,
Akad. Koptyug prosp., 4, 630090 Novosibirsk, Russia
e-mail: pavelsk77@gmail.com

Novikov algebras emerged in the works by I. M. Gelfand, I. Ya. Dorfman [1] devoted to formal variational calculus and by A. A. Balinskii, S. P. Novikov [2] who developed an analogue of the Hamiltonian formalism for partial differential equations of hydrodynamic type. By definition, a Novikov algebra is a linear space equipped with bilinear multiplication $\circ$ satisfying the following identities:

$$(a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c) = (b \circ a) \circ c - b \circ (a \circ c),$$

$$(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ b.$$

The structure theory of this class of algebras started developing from a paper by E. Zelmanov [3] even prior to the appearance of the name "Novikov algebras" (which was proposed by M. Osborn in 1990). Later, the structure and combinatorial theory of Novikov algebras was developed in a number of works, including (but not limited to) the papers by V. T. Filippov, X. Xu, M. Osborn, A. S. Dzhumadil'daev, L. A. Bokut, Y. Chen, I. P. Shestakov, Z. Zhang, V. N. Zhelyabin, A. P. Pozhidaev, etc.

The theory of conformal algebras appeared in quantum physics as a formalization of the properties of the operator product expansion in the 2-dimensional conformal field theory. From the algebraic point of view, a conformal algebra is a collection of formal distributions (two-sides infinite formal power series) satisfying certain conditions (see the book by V. G. Kac [4]).

If a conformal algebra is represented by formal distributions over a Lie algebra then it is said to be a Lie conformal algebra. A conformal algebra is said to be finite if it is spanned by all formal derivatives of a finite number of distributions.

For example, let $W = \operatorname{Der} \Bbbk[t, t^{-1}]$ be the Lie algebra of all derivations of the (commutative) algebra of Laurent polynomials. Then the only formal

distribution
$$v(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} t^n\partial_t z^{-n-1} \in W[[z,z^{-1}]]$$
along with its formal derivatives with respect to z span a Lie conformal algebra known as the Virasoro conformal algebra Vir.

The structure theory of finite Lie conformal algebras was developed by A. D'Andrea and V. G. Kac [5]. It turns out that Vir is the only exceptional simple finite Lie conformal algebra (over an algebraically closed field of zero characteristic) apart from the family of current conformal algebras $\operatorname{Cur}\mathfrak{g}$ generated by the series
$$a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} at^n z^{-n-1} \in \mathfrak{g}[t,t^{-1}][[z,z^{-1}]], \quad a\in\mathfrak{g},$$
where $\mathfrak{g}$ is a finite-dimensional simple Lie algebra.

In this work, we describe simple finite Novikov conformal algebras. For example, let $V = \Bbbk[t,t^{-1}]$ be the algebra of Laurent polynomials with the ordinary derivation ∂_t. Then for every $\alpha\in\Bbbk$ the new operation
$$f\circ g = f\partial_t(g) + \alpha fg, \quad f,g\in V,$$
turns V into a Novikov algebra V_α. Consider the formal distribution
$$v(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} t^n z^{-n-1} \in V_\alpha[[z,z^{-1}]].$$
It is easy to check by a straightforward computation that
$$(w-z)^2 v(w)\circ v(z) = 0$$
in the space of formal distributions $V_\alpha[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]$. The latter relation means that $v(z)$ is *local* to itself. The classical Dong Lemma (see [4]) which holds for formal distributions over a Lie algebra is also true for Novikov algebras [6]. Hence, the single distribution $v(z)$ generates a Novikov conformal algebra $\mathfrak{V}_\alpha$ immersed into $V_\alpha[[z,z^{-1}]]$.

Note that $\mathfrak{V}_\alpha$ is a finite conformal algebra of rank one over $\Bbbk[\partial]$, where $\partial = d/dz$. Indeed, the OPE formula for the distribution $v(w)\circ v(z)$ turns into
$$\begin{aligned} v(w)\circ v(z) &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} (mt^{n+m-1} + \alpha t^{n+m}) w^{-n-1}z^{-m-1} \\ &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} t^{n+m-1}w^{-n-1}z^{-m}\right) + \alpha\sum_{n,k\in\mathbb{Z}} t^k z^{-k-1}\cdot w^{-n-1}z^n \\ &= -\frac{\partial}{\partial z}(v(z)\cdot\delta(w-z)) + \alpha v(z)\cdot\delta(w-z). \end{aligned}$$

Here $\delta(w-z)$ is the formal delta-function, i.e.,

$$\delta(w-z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} w^{-n-1}z^n.$$

Let us expand the right-hand side of the last expression to get

$$v(w)\circ v(z) = -v(z)\cdot\delta'(w-z) + (-\partial+\alpha)v(z)\cdot\delta(w-z).$$

In terms of λ-products, the latter means

$$v\circ_{(\lambda)} v = (-\lambda-\partial-\alpha)v,$$

this is the multiplication table of the conformal algebra $\mathfrak{V}_\alpha$.

Another generic way to construct examples of Novikov conformal algebras is to consider Novikov–Poisson algebras. Namely, for every Novikov–Poisson algebra A with a commutative operation $*$ and a Novikov product $\circ$ one may define the following λ-bracket on $V(A) = \Bbbk[\partial]\otimes A$:

$$(f(\partial)\otimes a)\circ_{(\lambda)}(g(\partial)\otimes b) = (f(-\lambda)g(\partial+\lambda)\otimes 1)\cdot(1\otimes(a\circ b)+(\lambda+\partial)\otimes(a*b)).$$

This structure is a Novikov conformal algebra [7]. In particular, $\mathfrak{V}_\alpha$ can be obtained (up to an isomorphism) from the 1-dimensional Novikov–Poisson algebra $A=\Bbbk 1$ such that $1\circ 1 = -\alpha 1$, $1*1=1$.

If a Novikov–Poisson algebra A is simple then so is the Novikov conformal algebra $V(A)$. In particular, non-trivial 1-dimensional algebras are simple, so $\mathfrak{V}_\alpha$ are simple Novikov conformal algebras.

It turns out that there are no other examples of simple finite Novikov conformal algebras.

Theorem 1 (joint with J. Liu)**.** *A simple finite Novikov conformal algebra over an algebraically closed field $\Bbbk$ of zero characteristic is isomorphic either to $\operatorname{Cur}\Bbbk$ or to $\mathfrak{V}_\alpha$ for some $\alpha\in\Bbbk$.*

As an obvious corollary, we conclude that simple finite-dimensional Novikov–Poisson algebras in the settings of Theorem 1 are one-dimensional.

The work is supported by Russian Science Foundation (project 25-41-00005).

References

[1] I.M. Gelfand and I.Ya. Dorfman, Hamilton operators and associated algebraic structures // Funct. Anal. Appl. 13(4) (1979), 13–30.

[2] A.A. Balinskii and S.P. Novikov, Poisson brackets of hydrodynamic type, Frobenius algebras and Lie algebras // Sov. Math. Dokl. 32 (1985), 228–231.

[3] E.I. Zelmanov, On a class of local translation invariant Lie algebras // Sov. Math. Dokl. 35 (1987), 216–218.

[4] V.G. Kac, Vertex Algebras for Beginners, University Lecture Series, Vol. 10 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1998).

[5] A. D'Andrea and V.G. Kac, Structure theory of finite conformal algebras // Sel. Math. New Ser. 4 (1998), 377–418.

[6] L.A. Bokut and P.S. Kolesnikov, On the locality of formal distributions over right-symmetric and Novikov algebras [in Russian] // Bull. Irkutsk State Univ. Ser. Math. 50 (2024), 83–100.

[7] P.S. Kolesnikov and A.A. Nesterenko, Conformal envelopes of Novikov–Poisson algebras // Sib. Math. J. 64(3) (2023), 598–610.

АРТИНОВОСТЬ И НЁТЕРОВОСТЬ В ПОЛИГОНАХ НАД ПОЛУГРУППАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

И.Б. Кожухов

НИУ МИЭТ, Площадь Шокина, 1, Москва, Зеленоград, 124498, Россия
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

Полигон над полугруппой S — это множество X вместе с отображением $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющим условию $x(st) = (xs)t$ при $x \in X$, $s, t \in S$ (см. [1, 2]). Полигон X называется *унитарным*, если полугруппа S имеет единицу e и $xe = x$ для всех $x \in X$. Полигон X назовём *квазиунитарным*, если $XS = X$. В случае полугруппы с единицей эти понятия совпадают.

Рисовская матричная полугруппа $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, где G — группа, I и Λ — множества, $P = \|p_{\lambda i}\|$ — $\Lambda \times I$-матрица с элементами $p_{\lambda i} \in G \cup \{0\}$, определяется как множество элементов вида $(g)_{i\lambda}$, а также элемента 0, где $g \in G$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, с умножением $(g)_{i\lambda} \cdot (h)_{j\mu} = (gp_{\lambda j}h)_{i\mu}$ при $p_{\lambda i} \neq 0$ и 0 при $p_{\lambda i} = 0$ (см. [3, глава 3]). Нетрудно проверить, что рисовская матричная полугруппа является регулярной в том и только том случае, если каждая строка и каждый столбец матрицы P имеют ненулевые элементы. Через $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ мы будем обозначать рисовскую матричную полугруппу без нуля.

Условием конечности называется любое условие, которое выполняется во всех алгебрах заданной сигнатуры. Хорошо известны такие условия конечности, как локальная конечность, конечная порождённость, финитная аппроксимируемость. Во многих разделах алгебры рассматривались *артиновость* – условие минимальности и *нётеровость* – условие максимальности. Их можно определять двумя принцципиально различными способами. А именно, алгебра A называется

артиновой в смысле конгруэнций, если любая убывающая последовательность $\rho_1 \supset \rho_2 \supset \ldots$ её конгруэнций обрывается;

артиновой в смысле подалгебр, если любая убывающая последовательность $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ её подалгебр обрывается;

нётеровой в смысле конгруэнций, если любая возрастающая последовательность $\rho_1 \subset \rho_2 \subset \ldots$ её конгруэнций обрывается;

нётеровой в смысле подалгебр, если любая возрастающая последовательность $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ её подалгебр обрывается.

Приведём определения более слабых условий конечности. Алгебра A называется

хопфовой, если любой сюръективный эндоморфизм $A \to A$ является инъективным;

кохопфовой, если любой инъективный эндоморфизм $A \to A$ является сюръективным;

строго хопфовой, если для любого $\alpha \in \mathrm{End}A$ последовательность $\mathrm{ker}\alpha \subset \mathrm{ker}\alpha^2 \subset \mathrm{ker}\alpha^3 \subset \ldots$ обрывается;

строго кохопфовой, если для любого $\alpha \in \mathrm{End}A$ последовательность $\mathrm{im}\alpha \supset \mathrm{im}\alpha^2 \supset \mathrm{im}\alpha^3 \supset \ldots$ обрывается.

Хорошо известная теорема Кантора – Шрёдера – Бернштейна утверждает, что для любых множеств A и B, если существуют инъективные отображения $A \to B$ и $B \to A$, то существует взаимно однозначное отображение $A \to B$. Естественно спросить, будет ли это утверждение верным для универсальных алгебр, если вместо произвольных отображений рассматривать гомоморфизмы, т.е. верно ли, что если алгебры A и B изоморфно вкладываются друг в друга, то они изоморфны? В общем случае ответ отрицательный: скажем, свободные группы рангов 2 и 3 изоморфно вкладываются друг в друга, но не изоморфны. Однако, существуют классы алгебр, для которых ответ на поставленный вопрос положительный: например, конечно порождённые абелевы группы и линейные пространства над телом.

Назовём алгебру A *канторовой*, если для любой алгебры B той же сигнатуры наличие изоморфных вложений $A \to B$ и $B \to A$ влечёт изоморфизм алгебр A и B.

Двойственным образом определяются *коканторовы* алгебры, т.е. такие, что для любой алгебры B той же сигнатуры наличие сюръективных гомоморфизмов $A \to B$ и $B \to A$ влечёт изоморфизм алгебр A и B.

Из определений легко получаются следующие зависимости между рассматриваемыми условиями:

Нётеровость (конгр.) $\Rightarrow$ строг. хопф. $\Rightarrow$ хопфовость $\Rightarrow$ коканторовость

Артиновость (подалг.) $\Rightarrow$ строг. кохопф. $\Rightarrow$ кохопфовость $\Rightarrow$ канторовость

Артиновы и нётеровы полигоны над рисовской матричной полугруппой $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ и полигоны с нулём над регулярной рисовской матричной полугруппой с нулём $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ были охарактеризованы в [4]. В [5] было доказано, что конечно порождённый коммутативгный полигон (в частности, конечно поролждённый полигон над коммутативной полугруппой) является хопфовым. Характеризация хопфовых и кохопфовых унитарных полигонов над группой была получена в [6], строго хопфовых в [7]. В [8] было доказано, что унитарный полигон над группой канторов. Впоследствии этот результат был обобщён, а именно, было доказано [9], что квазиунитарные полигоны над регулярными рисовскими матричными полугруппами являются канторовыми. Канторовы и кокантеровы полигоны над тривиальной полугруппой (т.е. полугруппой из одного элемента) были описаны в [10].

Список литературы

[1] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V. Monoids, acts and categories. Berlin, New York: W. de Gruyter, 2000.

[2] Кожухов И.Б., Михалёв А.В. Полигоны над полугруппами // Фундамент. и прикл. матем., 23:3 (2020), 141–199.

[3] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: М., Мир, 1972, т. 1, 2, 286 + 432 pp.

[4] Колесникова К.А. Артиновы и нётеровы полигоны над вполне 0-простыми полугруппами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2024, № 5, 67-–71.

[5] Карташов В.К. Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр // Дискрет. матем., 20:4 (2008), 79–84.

[6] Кожухов И.Б., Колесникова К.А. О хопфовости и кохопфовости полигонов над группами // Фундамент. и прикл. матем., 23:3 (2020), 131—139.

[7] 201. Kolesnikova K.A., Kozhukhov I.B. On the strongly hopfian acts over semigroups // Applied Mathematics, 2025, 16, pp. 183–189.

[8] Сотов А.С. Теорема Кантора-Бернштейна для полигонов над группами // Материалы VI Межд. конф. Соврем. информ. технологии в образов. и научн. иссл. 2019. ДонНТУ, Донецк, с. 120–123.

[9] Кожухов И.Б., Сотов А.С. Канторовость квазиунитарных полигонов над вполне (0-)простыми полугруппами // Дальневост. матем. журн., 23:1 (2023), 27—33.

[10] Кожухов И.Б., Сотов А.С. Условия канторовости и коканторовости полигонов над тривиальной полугруппой // Известия вузов. Математика, 2025, N 6.

ON PSEUDO-STABLE FORMULAE, STRUCTURES, AND THEORIES

B.Sh. Kulpeshov, In.I. Pavlyuk, S.V. Sudoplatov*

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
28, Shevchenko street, Almaty, 050010, Kazakhstan;
Kazakh British Technical University,
59, Tole Bi street, Almaty, 050000, Kazakhstan;
Novosibirsk State Technical University,
20, K.Marx avenue, Novosibirsk, 630073, Russia;
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Russia
e-mail: kulpesh@mail.ru, pavlyuk@corp.nstu.ru, sudoplat@math.nsc.ru

In a series of papers various approximations of infinite structures by finite ones, i.e. pseudofiniteness are studied [1, 2, 3, 4] including finite approximations of strongly minimal structures [5]. Approximations of theories by ordered, strongly minimal and countably categorical ones are studied in [6, 7, 8, 9].

We continue to study possibilities of approximations of theories with respect to given families of theories [10, 11]. At the present paper we consider and describe some possibilities of approximations by stable structures and theories. Some kinds of approximating formulae in this case are described, too.

1 Pseudo-stable formulae and their properties

In this section, we define the notion of pseudo-stable formula as an approximating formula [11] of special form, and consider some properties of these formulae.

*The work is partially supported by by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan, Grant No. AP19674850, and was carried out in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No. FWNF-2022-0012.

Throughout we consider complete elementary theories of a signature Σ, where that signature for a family $\mathcal{T}$ of theories is denoted by $\Sigma(\mathcal{T})$.

We denote by $\mathcal{T}_\Sigma$ the family of all complete theories in a signature Σ.

As usual $F(\Sigma)$ collects the set of all formulae of the signature Σ, and $\mathrm{Sent}(\Sigma)$ denotes the set of all sentences of the signature Σ.

Recall [12] that a theory T without finite models is called λ-*stable*, for an infinite cardinality λ, if for any model $\mathcal{M} \models T$ and a set $A \subseteq M$ with $|A| = \lambda$ we have $|S(A)| \leq \lambda$, i.e., $|S(A)| = \lambda$. A theory T is called *stable* if it is λ-stable for some λ. Models of a (λ-)stable theory are (λ-)*stable*, too.

It is known [12] that the stability of a theory T means that T does not have formulae with the order property, i.e., there are no formulae $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ with sequences $\overline{a}_i, \overline{b}_i$, $l(\overline{a}_i) = l(\overline{x})$, $l(\overline{b}_i) = l(\overline{y})$, $i \in \omega$, such that $\models \varphi(\overline{a}_i, \overline{b}_j)$ iff $i \leq j$.

We denote by $\mathcal{T}_\Sigma^{\mathrm{st}}$ the family of all stable theories in the signature Σ.

The following definition modifies the definitions of pseudofinite [13], pseudo-countably-categorical [9] and pseudo-strongly-minimal formula [7, 8].

Definition. For the family $\mathcal{T}_\Sigma^{\mathrm{st}}$, a formula $\varphi = \varphi(\overline{x})$ is called *pseudo-stable*, if φ is satisfied in a model of an accumulation point T of the family $\mathcal{T}_\Sigma^{\mathrm{st}}$, which is not stable. Here, following [10], we consider accumulation points for a family $\mathcal{T}$ of theories under neighbourhoods $\mathcal{T}_\psi = \{T_0 \in \mathcal{T} \mid \varphi \in T_0\}$ for sentences ψ.

When considered independently, the formula φ is called *pseudo-stable*, if it is pseudo-stable with respect to a suitable signature $\Sigma \supseteq \Sigma(\varphi)$.

The set of pseudo-stable formulae of the signature Σ is denoted by $\mathrm{PSF}(\Sigma)$, and the set $\mathrm{PSF}(\Sigma) \cap \mathrm{Sent}(\Sigma)$ of all pseudo-stable sentences of the signature Σ is denoted by $\mathrm{PSS}(\Sigma)$.

As the following remarks show the behavior of pseudo-stable formulae is similar to pseudofinite, pseudo-countably-categorical and pseudo-strongly minimal ones.

Remark 1.1. By definition, any pseudo-stable formula refers both to stable theories, and due to approximation there are infinitely many such theories, and to theories that are not stable, but cannot be separated from stable theories by any sentences.

Since restrictions of stable theories are stable, too, it does not matter what a stable expansion of a stable structure, satisfying a given pseudo-stable formula, is considered.

At the same time the considered signature is essential for approximations of accumulation points. For instance, the formula $x \approx x$ is satisfied in any stable structure, in particular, in an infinite structure of the empty signature, which can not produce accumulation points, whereas it is pseudo-stable for the signature Σ_o of binary predicate $\leq$, where $\leq$ is a partial order with an infinite chain such that this chain is approximable by models of theories in $\mathcal{T}^{\rm st}_{\Sigma_o}$. Boolean combinations of formulae $x \leq y$, $x < y$, $\exists x\,(x < y)$, $\exists x\,(x > y)$, $\exists x \exists y\,(x < y)$, $\exists x \exists y\,(x > y)$ are pseudo-stable that is witnessed by the pseudo-finite theory $\mathrm{Th}(\omega + \omega^*)$.

Remark 1.2. A series of pseudo-stable theories is produced by stable lattices [14, 15] with unbounded heights. Here unstable accumulation points by stable lattices are witnessed by infinite chains as limit chains of stable ones.

In particular, pseudofinite Boolean algebras, with chains elementary equivalent to $\omega + \omega^*$, are pseudo-stable.

Remark 1.3. Let φ be a sentence of a signature Σ witnessing that a part of an universe has a dense $<$-chain. Then $\varphi \notin \mathrm{PSS}(\Sigma)$ since φ does not have stable models. Similarly, a sentence $\forall x \exists y\, x < y$ for an order $<$ forces infinite chains implying $\forall x \exists y\, x < y \notin \mathrm{PSS}(\Sigma)$. Thus, the family of formulae with infinite models, which are unstable only, is reach enough.

Remark 1.4. By the definition for any signature Σ, the sets $\mathrm{PSF}(\Sigma)$ and $\mathrm{PSS}(\Sigma)$ are closed under $\vdash$-deducibility and under sentences ψ, preserving or extending nonempty neighbourhoods $(\mathcal{T}^{\rm st}_\Sigma)_\varphi = \{T \in \mathcal{T}^{\rm st}_\Sigma \mid \varphi \in T\}$ after replacement of φ by ψ. Thus pseudo-stable sentences form equivalence classes with respect to the equality of neighbourhoods, which are divided by the equivalence classes of mutual deducibility.

In view of Remark 1.4 the sets $\mathrm{PSF}(\Sigma)$ and $\mathrm{PSS}(\Sigma)$ are supplied by the operations $\vee$ of disjunction and the following proposition holds:

Proposition 1.5. *Structures* $\langle \mathrm{PSF}(\Sigma); \vee\rangle$ *and* $\langle \mathrm{PSS}(\Sigma); \vee\rangle$ *are upper semilattices.*

Remark 1.6. Each semilattice in Proposition 1.5 admits the operation $\wedge$ of conjunction only for restrictions to the set of formulae of a fixed theory which is an accumulation point for the class of stable theories and these restrictions form distributive lattices. thus pseudo-stable formulae are closed under disjunctions and some conjunctions.

Remark 1.7. It is easy to see that consistent quantifier free formulae have stable models, and, as in Remark 1.1, become pseudo-stable. It means that any consistent $\exists$-formula, i.e. a consistent formula of the form $\exists x_1 \ldots \exists x_k \varphi$, where φ is a quantifier free formula, is pseudo-stable with respect to a suitable signature. For $\forall$-formulae, i.e. formulae of the form $\forall x_1 \ldots \forall x_k \varphi$, where φ is quantifier free, that property does not hold, since, for instance, the formula $\forall x \forall y\, x \approx y$ does not have infinite models. This formula shows that some formulae, for example, the formula $\neg\forall x \forall y\, x \approx y$ does not preserve the pseudo-stability when hanging a negation. At the same time, as noticed for quantifier free formulae, handing consistent negations for these formulae preserves the pseudo-stability.

2 Pseudo-stable structures and theories

Definition. An elementary theory T of an infinite structure $\mathcal{M}$ which is not stable is called *pseudo-stable*, if any sentence true in $\mathcal{M}$ has a stable model $\mathcal{N}$. In this case, the models $\mathcal{N}$ are called *approximations* of the model $\mathcal{M}$, and the model $\mathcal{M}$ itself is called *pseudo-stable*.

We notice that by the definition any pseudo-stable theory T of a signature Σ consists of pseudo-stable sentences belonging to theories in the set $\mathcal{T}_\Sigma^{\rm st}$.

Now we argue to show what signatures can produce a pseudo-stable theory:

Theorem 2.1. *For any signature Σ the family $\mathcal{T}_\Sigma^{\rm st}$ has a pseudo-stable accumulation point iff Σ contains either a n-ary predicate symbol P or a n-ary functional symbol f, for $n \geq 2$, or at least two unary functional symbols g_1, g_2.*

Proof. If Σ consists of 0-ary and unary predicate symbols then any theory in $\mathcal{T}_\Sigma$ with infinite models is stable since each Σ-formula is equivalent to a Boolean combination of unary formulae describing satisfactions of 0-ary predicates, colors of elements with respect to unary predicates, and finite estimations of finite intersections $P_{i_1}^{\delta_1} \cap \ldots \cap P_{i_k}^{\delta_k}$ of unary predicates P_{i_j}, $\delta_j \in \{0,1\}$ [16, Section 8.1], and the known fact that Boolean combinations of stable formulae are again stable [17]. We observe the same effect on stability extending Σ by constant symbols: any expansion of a stable theory by constant symbols is again stable. Since any unary function h produces a theory Σ_1 of unars, which is always stable and, moreover, is binary and normal [18], unars can not have pseudo-stable theories, too. Besides, expansions of Σ_1-theories by 0-ary and unary predicates, as well by constants, have stable theories only, since all their formulae describe possibilities of cardinalities of h-preimages with given P_{i_j}-colors and positions of signature constants.

Now having a n-ary predicate $P(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 2$, we can define its binarization $P(x, y, y, \ldots, y)$, and connect a n-ary function $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 2$, with a pair of independent unary functions g_1, g_2 such that $g_1(x) = f(x, x, \ldots, x, a)$ and $g_2(x) = f(x, x, \ldots, x, b)$, where a and b are $\emptyset$-definable elements marked by some different numbers of f-preimages.

Thus, to complete the proof it suffices to show that a binary predicate $P(x, y)$ and a pair unary functions g_1, g_2 produce pseudo-stable theories. Taking for P a pseudofinite linear order $\leq$ [2, 6] extended by infinitely many loops we can approximate the obtained unstable theory T by stable theories with finite parts of the linear order. Thus T is pseudo-stable.

For the signature $\Sigma_2 = \langle g_1, g_2 \rangle$ we consider the formula

$$\varphi(x, y) := \exists z (x \approx g_1(z) \wedge y \approx g_2(z))$$

defining the pseudofinite linear order $\omega + \omega^*$ on a subset of some countable universe M. Here we take in M countably many connecting elements a_m, $m \in \omega$, witnessing distinct z for distinct $b_k < b_l$ in $\omega + \omega^*$ satisfying $\varphi(b_k, b_l)$ such that these elements a_m do not have g_i-preimages, and add g_i-loops for all elements in $\omega + \omega^*$, $i = 1, 2$. Finally we form the universe M by the set $\omega + \omega^*$, the set $\{a_m \mid m \in \omega\}$, and a countable set $\{d_m \mid m \in \omega\}$ with $g_i(d_m) = d_m$, $m \in \omega$, $i = 1, 2$, completing the construction of the structure $\mathcal{M}$. This construction allows to repeat the arguments above obtaining a pseudo-stable theory $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ of the signature Σ_2. Indeed, the constructed structure $\mathcal{M}$ has countable stable substructures $\mathcal{M}_n$ with n-element subset 0f $\omega + \omega^*$ whose order is guaranteed by some elements a_m, $n \in \omega$. Thus the theory T is an accumulation point for the family $\{\mathrm{Th}(\mathcal{M}_n) \mid n \in \omega\}$. Additionally, T is pseudofinite since it is approximated by the family of theories of substructures $\mathcal{M}_n$ with finitely many loops. $\square$

References

[1] Rosen E. Some Aspects of Model Theory and Finite Structures // The Bulletin of Symbolic Logic. — 2002. — Vol. 8, No. 3. — P. 380–403.

[2] Väänänen J. Pseudo-finite model theory // Matematica Contemporanea. — 2003. — Vol. 24. — P. 169–183.

[3] Cherlin G., Hrushovski E. Finite Structures with Few Types // Annals of Mathematics Studies, No. 152. — Princeton, Oxford : Princeton University Press, 2003.

[4] Macpherson H.D., Steinhorn Ch. Definability in the classes of finite structures // Finite and Algorithmic Model Theory. London Matheematical Society Lecture Notes series: 379 / eds.: J. Esparza, C. Michaux, Ch. Steinhorn. — Cambridge : Cambridge University Press, 2011.

[5] Pillay A. Strongly minimal pseudofinite structures // arXiv:1411.5008 [math.LO]. — 2014, 10 p.

[6] Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V. Ranks and approximations for families of ordered theories // Mathematical Notes. — 2024. — Vol. 116, No. 4. — P. 669–684.

[7] Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V. On pseudo-strongly-minimal formulae, structures and theories // Model Theory and Algebra 2024: Collection of papers / Edited by M. Shahryari, S. V. Sudoplatov. — Novosibirsk: NSTU Publisher, 2024/ — P. 42–47.

[8] Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V. Pseudo-strongly-minimal structures and theories // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — Vol. 45, No. 12. — P. 6515–6525.

[9] Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V. Pseudo-countably-categorical formulae and theories // Mathematical Notes. — 2025. — Vol. 117, No. 3. — P. 442–457.

[10] Sudoplatov S.V. Approximations of theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2020. — Vol. 17. — P. 715–725.

[11] Sudoplatov S.V. Approximating formulae // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2024. — Vol. 21, No. 1. — P. 463–480.

[12] Shelah S. Classification theory and the number of non-isomorphic models. — Amsterdam : North-Holland, 1990. — 705 p.

[13] Markhabatov N.D., Sudoplatov S.V. Pseudofinite formulae // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 43, No. 12. — P. 3583–3590.

[14] Meirembekov K. A., Shegirov K. M. Stable geometric lattices // Siberian Math. J. — 1993. — Vol. 34, No. 3. — P. 504–512.

[15] Shegirov K.M. Stable modular lattices of small height // Siberian Math. J. — 1996. — Vol. 37, No. 3. — P. 618–625.

[16] Ershov Yu.L., Palyutin E.A. Mathematical Logic. — Moscow : FIZMATLIT, 2011. — 356 p. [in Russian]

[17] Harnik V., Harrington L. Fundamentals of forking // Ann. Pure and Appl. Logic. — 1984. — Vol. 26. No. 3. — P. 245–286.

[18] Sudoplatov S.V. Basedness of stable theories and properties of countable models with powerful types : Dis... cand. fiz.-mat. sc.: 01.01.06 / S. V. Sudoplatov. — Novosibirsk, 1990. — 142 p. [in Russian]

О НАСЛЕДОВАНИИ ТИПОВ ПРЕДГЕОМЕТРИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО СЕМЕЙСТВА ПРЕДИКАТНЫХ СТРУКТУР

С.Б. Малышев*

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: sergei2-mal1@yandex.ru

1 Введение

Предгеометрия и геометрическая структура моделей остаются одними из центральных объектов изучения в математической логике и теории моделей. С 1970-х годов активно развиваются подходы к описанию и классификации предгеометрий, возникающих в различных теориях, включая o-минимальные, ω-стабильные и сильно минимальные теории. Существенный вклад в эти исследования внесли Б.И. Зильбер [21, 22, 23], А. Пилай [17, 18], Э. Хрушовский [14], а также последующие работы, связанные с ω-категорическими структурами [10] и систематическим изложением теории моделей [13].

К настоящему времени в литературе существует широкий круг результатов, близких к рассматриваемой в данной работе тематике. Так, работы А. Бернштейна и Е. Васильева [7, 8, 9, 16] посвящены исследованию геометрических структур и их расширений, включая случаи, когда в них присутствуют плотные независимые множества и однородные матроиды. Исследования С.В. Судоплатова, Б.Ш. Кулпешова и Д.Ю. Емельянова [5, 19, 6, 11, 12, 15] касаются различных аспектов замыканий, комбинаций структур, а также топологий и рангов в семействе теорий, что тесно связано с вопросами о сохранении свойств предгеометрий при переходах между различными структурами.

Одним из подходов к изучению таких семейств является рассмотрение булевой алгебры предикатных структур. Данная алгебра образу-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00096, https://rscf.ru/en/project/24-21-00096/.

ется на множестве регулярных обогащений и обеднений фиксированной структуры — то есть структур, полученных добавлением или удалением предикатных символов из сигнатуры при сохранении общего носителя. Булева алгебра $\mathcal{B}(M)$ предикатной структуры M естественным образом наделяется операциями пересечения, объединения и дополнения структур, позволяя формально рассматривать переходы между различными сигнатурными представлениями одного и того же множества.

Возникает естественный вопрос: какие свойства предгеометрий сохраняются при таких переходах? В частности, сохраняется ли тип предгеометрии (например, вырожденность, локальная конечность, модулярность) при пересечении или объединении двух структур из булевой алгебры?

В настоящей работе рассматриваются структуры в булевой алгебре $\mathcal{B}(M)$, наделённые алгебраическим оператором замыкания. Изучается вопрос о наследовании типов предгеометрий при пересечении и объединении таких структур.

Основной результат: если хотя бы одна из структур $M_1, M_2 \in \mathcal{B}(M)$ имеет предгеометрию вырожденного или локально конечного типа, то предгеометрия пересечения $M_1 \cap M_2$ наследует тот же тип. При этом свойство модулярности в общем случае при пересечении не сохраняется.

Для объединений ситуация иная: даже если обе структуры обладают локально конечной предгеометрией, их объединение может привести к утрате локальной конечности.

Таким образом, полученные результаты уточняют границы наследования свойств предгеометрий при композиции структур в $\mathcal{B}(M)$. Показано, что свойства вырожденности и локальной конечности устойчивы относительно пересечения, тогда как модулярность и локальная конечность в случае объединений могут нарушаться. Эти наблюдения указывают на асимметрию между операциями пересечения и объединения и задают направления для дальнейшего изучения устойчивости предгеометрий в более общих композициях структур.

Полученные результаты развивают идеи, изложенные в работе [4], где изучались предгеометрии, возникающие при композиции структур, и дополняют существующую теорию описанием поведения предгеометрий в более широком контексте булевых семейств структур.

2 Предгеометрии. Виды предгеометрий

Из работ [10, 13, 15, 17, 5, 19] и [6] приведём необходимые нам определения.

Определение 1. [17] **Предгеометрией** называется множество S вместе с определённой операцией замыкания $\mathrm{cl} : P(S) \to P(S)$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) для любого $X \subseteq S$ выполняется $X \subseteq \mathrm{cl}(X)$;

2) для любого $X \subseteq S$ выполняется $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$;

3) для любого $X \subseteq S$ и любых $a, b \in S$ если $a \in \mathrm{cl}(X \cup \{b\}) - \mathrm{cl}(X)$, то $b \in \mathrm{cl}(X \cup \{a\})$;

4) для любого $X \subseteq S$ если $a \in \mathrm{cl}(X)$, то $a \in \mathrm{cl}(Y)$ для некоторого конечного $Y \subseteq X$.

При наличии предгеометрии $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ каждое подмножество $X \subseteq S$ имеет минимальное множество $X' \subseteq X$ такое, что $\mathrm{cl}(X) = \mathrm{cl}(X')$. Это минимальное множество X' называется *базисом* множества X. При этом все базисы равномощны и эта мощность называется *размерностью* множества X в предгеометрии $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$, обозначается $\dim(X)$.

По определению имеем $\dim(X) = \dim(\mathrm{cl}(X))$, т.е. размерность сохраняется при переходе к замыканию множества X в предгеометрии $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$.

Если $\dim(X) \in \omega$, то множество X называется *конечномерным.*

Определение 2. [17] Множество $X \subseteq S$ называется **замкнутым**, если $X = \mathrm{cl}(X)$.

Определение 3. [17] Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется **тривиальной** или **вырожденной**, если для любого $X \subseteq S$, $\mathrm{cl}(X) = \bigcup\{\mathrm{cl}(\{a\}) \mid a \in X\}$.

Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется **модулярной**, если для любых замкнутых множеств $X_0, Y_0 \subseteq S$, X_0 независимо от Y_0 относительно $X_0 \cap Y_0$, т.е. для любых конечномерных замкнутых множеств $X \subseteq X_0$, $Y \subseteq Y_0$ верно

$$\dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y) = \dim(X \cup Y).$$

Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется **локальной модулярной**, если для любого $a \in S$, предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}_{\{a\}}\rangle$ модулярна, где $\mathrm{cl}_{\{a\}}(X) = \mathrm{cl}(X \cup \{a\})$.

Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется **проективной**, если она модулярная и не тривиальная, и **локально проективной**, если она локально модулярная и не тривиальная.

Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется **локально конечной**, если для любого конечного подмножества $A \subseteq S$, множество $\mathrm{cl}(A)$ конечно.

Определение 4. Пусть S — модель теории T. Тогда оператором **алгебраического замыкания** для модели M называется оператор acl :

$P(M) \to P(M)$ такой, что для любого подмножества $X \subseteq S$, $\mathrm{acl}(X) = \{a \in S \mid$ для некоторой формулы $\phi(x, \bar{y})$ и $\bar{b} \in X$ верно $S \models \exists^{<\omega} x\phi(x, \bar{b}) \wedge \phi(a, \bar{b})\ \}$.

В дальнейшем будут рассматриваться предгеометрии вида $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$.

3 Семейства предикатных структур

Рассматриваются регулярные обогащения и обеднения предикатных структур, образующие естественную булеву алгебру. Приводится описание видов предгеометрий [17] с алгебраическим оператором замыкания для семейства структур в данной булевой алгебре. Данное исследование продолжает и развивает подходы, представленные в статье [3].

Определение 5. Пусть M — реляционная структура с сигнатурой Σ.

Обеднением структуры M называется структура, полученная удалением некоторых предикатов из сигнатуры Σ.

Обогащением структуры M называется структура, полученная добавлением новых предикатов к сигнатуре Σ и заданием их значений на том же носителе.

Определение 6. [20] Структура называется *регулярной*, если она является реляционной структурой без повторений интерпретаций символов сигнатуры.

Процедура, преобразующая произвольную структуру M в регулярную структуру N, называется *регуляризацией*, и структура N называется *регуляризованной* относительно M. Обратная процедура, преобразующая N в исходную структуру M, называется *дерегуляризацией*, и M называется *дерегуляризованной* относительно N.

Определение 7. [20] Пусть M — фиксированная реляционная структура с сигнатурой Σ. *Булева алгебра* $\mathcal{B}(M)$ — это множество всех структур, полученных из M путём добавления и удаления предикатов в сигнатуре, при этом все структуры определяются на одном и том же носителе $|M|$.

Операции в булевой алгебре $\mathcal{B}(M)$ определяются следующим образом:

- **Пересечение структур.** Для $M_1, M_2 \in \mathcal{B}(M)$ пересечение $M_1 \cap M_2$ — это структура с сигнатурой $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, где Σ_i — сигнатура M_i. Предикат в пересечении сохраняется, если он присутствует и одинаково задан в обеих структурах.

- **Объединение структур.** Для $M_1, M_2 \in \mathcal{B}(M)$ объединение $M_1 \cup M_2$ — это структура с сигнатурой $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, в которой каждый предикат берётся из той структуры, где он определён. Если предикат встречается в обеих структурах, предполагается, что он задан одинаково.

- **Дополнение.** Если $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, то дополнение структуры по Σ_0 означает удаление этих предикатов из сигнатуры.

4 Наследование свойств предгеометрий при операциях булевой алгебры

Перед тем как сформулировать основные результаты о сохранении типов предгеометрий, докажем ряд вспомогательных утверждений, которые проясняют поведение оператора acl при переходе к подструктурам и надструктурам в $\mathcal{B}(M)$.

Лемма 1 (О монотонности алгебраического замыкания)**.** *Пусть $M_1 = \langle M, \Sigma_1\rangle$ и $M_2 = \langle M, \Sigma_2\rangle$ — структуры из $\mathcal{B}(M)$, и пусть $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$. Обозначим через acl_1 и acl_2 операторы алгебраического замыкания в M_1 и M_2 соответственно. Тогда для любого множества $X \subseteq M$ выполняется:*

$$\mathrm{acl}_1(X) \subseteq \mathrm{acl}_2(X).$$

Другими словами, обогащение сигнатуры может только расширить алгебраическое замыкание.

Доказательство. Если элемент $a \in \mathrm{acl}_1(X)$, то существует формула $\phi(x, \bar{y})$ в сигнатуре Σ_1 и кортеж $\bar{b} \in X$ такие, что $M_1 \models \phi(a, \bar{b})$ и множество $\{x \in M : M_1 \models \phi(x, \bar{b})\}$ конечно. Поскольку $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, формула ϕ также является формулой в сигнатуре Σ_2, и её множество решений в M_2 совпадает с множеством решений в M_1. Следовательно, $a \in \mathrm{acl}_2(X)$. Что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 1. *Для любых $M_1, M_2 \in \mathcal{B}(M)$ и любого $X \subseteq M$ верно:*

$$\mathrm{acl}_{M_1 \cap M_2}(X) \subseteq \mathrm{acl}_{M_1}(X) \cap \mathrm{acl}_{M_2}(X).$$

В частности, если M_1 и M_2 локально конечны, то и $M_1 \cap M_2$ локально конечна.

Доказательство. Сигнатура пересечения $M_1 \cap M_2$ содержится как в Σ_1, так и в Σ_2. По лемме 1, $\mathrm{acl}_{M_1 \cap M_2}(X) \subseteq \mathrm{acl}_{M_1}(X)$ и $\mathrm{acl}_{M_1 \cap M_2}(X) \subseteq \mathrm{acl}_{M_2}(X)$, откуда и следует включение. Если M_1 локально конечна, то $\mathrm{acl}_{M_1}(X)$ конечно для конечного X, а значит, его подмножество

$$\mathrm{acl}_{M_1 \cap M_2}(X)$$

также конечно. □

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{B}(M)$ — булева алгебра регулярных расширений и ограничений предикатной структуры M. Предположим, что структуры из $\mathcal{B}(M)$ наделены предгеометрией с алгебраическим оператором замыкания. Тогда, если хотя бы одна из структур $M_1, M_2 \in \mathcal{B}(M)$ имеет предгеометрию вырожденного или локально конечного типа, то предгеометрия пересечения $M_1 \cap M_2$ наследует тот же тип.*

Доказательство. Результатом пересечения двух структур $M_1 = \langle M, \Sigma_1 \rangle$, $M_2 = \langle M, \Sigma_2 \rangle \in \mathcal{B}(M)$ будет структура $M' = \langle M, \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \rangle \in \mathcal{B}(M)$.

Для вырожденного или локально конечного типа предгеометрии докажем, что если $\langle M_1, \mathrm{acl} \rangle$ и $\langle M_2, \mathrm{acl} \rangle$ обладают одинаковым типом предгеометрии, то $\langle M', \mathrm{acl} \rangle$ наследует этот тип.

Вырожденность. По определению предгеометрия $\langle M', \mathrm{cl} \rangle$ называется *тривиальной* или *вырожденной*, если для любого $X \subseteq M$, $\mathrm{cl}(X) = \bigcup \{\mathrm{cl}(\{a\}) \mid a \in X\}$.

При пересечении двух структур, набор предикатов в новой сигнатуре может либо уменьшиться, либо остаться прежним. Значит, докажем, что при обеднении структуры $\forall X \subseteq M$ сохраняется равенство $\mathrm{acl}(X) = \bigcup \{\mathrm{acl}(\{a\}) \mid a \in X\}$.

По определению алгебраическое замыкание acl(X) множества X это совокупность конечных множеств решений всевозможных формул от одной переменной с коэффициентами из множества X. Значит, для предгеометрий с алгебраическим оператором замыкания $\langle M', \mathrm{acl} \rangle$ верно:

$$\forall a \in X \subseteq M \quad \mathrm{acl(a)} \subseteq \mathrm{acl(X)}.$$

Значит, в одну сторону равенство сохраняется $\mathrm{acl}(X) \supseteq \bigcup \{\mathrm{acl}(\{a\}) \mid a \in X\}$.

Вхождение замыкания $\mathrm{acl}(X) \subseteq \bigcup \{\mathrm{acl}(\{a\}) \mid a \in X\}$ нарушается в том случае, если существуют формулы, которые при двух и более различных коэффициентах имеют конечное число решений. И эти решения не описываются формулами от одного коэффициента. Заметим, что, по определению, при обеднении структуры мы лишь убираем предикаты.

Это означает, что количество формул, решения которых пойдут в замыкание, может либо снизиться, либо остаться неизменным. Но если структуры до обеднения были вырожденными, значит вышеописанных формул, нарушающих свойство вырожденности, они изначально не имели. А значит, их не может быть в обеднённой структуре. Получается, что $\mathrm{acl}(X) = \bigcup\{\mathrm{acl}(\{a\}) \mid a \in X\}$.

Локально конечность. По определению предгеометрия $\langle M', \mathrm{acl}\rangle$ называется *локально конечной*, если для любого конечного подмножества $A \subseteq M$, множество $\mathrm{acl}(A)$ конечно.

Если множество $\mathrm{acl}(A)$ в структуре до обеднения было конечным, то это значит, что все алгебраические формулы с коэффициентами из множества A давали конечное множество решений. При обеднении структуры произойдёт удаление предикатов из сигнатуры, а это значит, что набор формул может только сократиться. Это может только уменьшить мощность множества решений, а значит при пересечении структур предгеометрией наследуется локально конечность.

$\square$

Из доказательства теоремы 1 в пункте о наследуемости свойства вырожденности следует лемма.

Лемма 2 (О сохранении вырожденности при обеднении)**.** *Пусть $M_1 = \langle M, \Sigma_1\rangle$ имеет вырожденную предгеометрию. Тогда для любой структуры $M_2 = \langle M, \Sigma_2\rangle \in \mathcal{B}(M)$ такой, что $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$, предгеометрия M_2 также вырождена.*

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 не может быть усилено до условия “хотя бы одна из структур обладает свойством модулярности”. Как показывает пример 1, модулярность не сохраняется даже при переходе к подсигнатуре, так как критически зависит от наличия или отсутствия конкретных предикатов.

Теорема 2 (Неустойчивость свойств при объединении)**.** *Свойства локальной конечности и модулярности, вообще говоря, не сохраняются при объединении структур в $\mathcal{B}(M)$.*

1. *Существуют локально конечные структуры $M_1, M_2 \in \mathcal{B}(M)$, такие что $M_1 \cup M_2$ не является локально конечной (см. пример 2).*

2. *Существуют модулярные структуры $M_1, M_2 \in \mathcal{B}(M)$, такие что $M_1 \cup M_2$ не является модулярной.*

Доказательство. **Пункт 1** доказан в примере 2.

Для пункта 2 можно модифицировать пример 1. Рассмотрим модулярные структуры $M_1 = \langle M, \{R\}\rangle$ и $M_2 = \langle M, \{P\}\rangle$, где R и P — независимые друг от друга модулярные предгеометрии (например, проективные плоскости над разными простыми полями). Их объединение $M_1 \cup M_2 = \langle M, \{R, P\}\rangle$ может оказаться немодулярной предгеометрией, если отношения R и P "перемешаны" определённым образом, создавая зависимости, нарушающие модулярный закон (например, по аналогии с конструкцией Хрушовского). □

Пример 1. [Нарушение модулярности при пересечении]

Рассмотрим предгеометрии $M_1 = \langle M, \Sigma_1\rangle$ и $M_2 = \langle M, \Sigma_2\rangle \in \mathcal{B}(M)$, где $\Sigma_1 = \{R, Q\}$ и $\Sigma_2 = \{Q, P\}$.

Пусть R и P — это бесконечные деревья, связывающие все элементы множества M, причём каждая вершина в каждом дереве имеет уникальную (отличающуюся от других) степень. Тогда замыкание пустого множества в предгеометриях M_1 и M_2 совпадает с M, то есть $acl(\emptyset) = M$.

В таком случае размерность любого множества равна нулю,

$$\forall A \subseteq M \quad \dim(A) = 0,$$

и, следовательно, для любых конечномерных подмножеств $X, Y \subseteq M$ выполняется тождество

$$\dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y) = \dim(X \cup Y).$$

Таким образом, предгеометрии M_1 и M_2 являются модулярными, причём их модулярность не зависит от отношения Q. Однако модулярность пересечения предгеометрий уже определяется исключительно отношением Q. Поэтому, если Q не является модулярным, то и предгеометрия $\langle M, \Sigma_1 \cap \Sigma_2\rangle$ не будет модулярной.

Заметим, что в общем случае для объединений данные утверждения неверны.

Пример 2. [Локальная конечность нарушается при объединении]

Рассмотрим две ациклические графовые структуры $M_1 = \langle M, \Sigma_1\rangle$ и $M_2 = \langle M, \Sigma_2\rangle \in \mathcal{B}(M)$, где $\Sigma_1 = \{R_1\}$, $\Sigma_2 = \{R_2\}$. Пусть M_1 и M_2 имеют общий носитель M и каждая из них представляет собой бесконечное дерево, в котором каждая вершина имеет счётную (бесконечную) степень.

Определение 8. Назовём *n-окрестностью* вершины a множество вершин, соединённых с ней через n рёбер. Это множество обозначается через $N_n(a)$.

Построим R_2 из R_1 следующим образом: для каждой вершины $a \in M$ переставим рёбра, инцидентные вершинам из $N_1(a)$ (т.е. непосредственным соседям), на вершины из $N_{i(b)}(a)$, где $i(b) \in \mathbb{N}$ выбирается для каждой вершины $b \in N_1(a)$ индивидуально и так, чтобы для различных $b \in N_1(a)$ значения $i(a)$ были различны. При этом сохраняется ацикличность и бесконечная степень каждой вершины.

Таким образом, обе структуры M_1 и M_2 по отдельности обладают локальной конечностью: алгебраическое замыкание любого множества конечно. Однако в пересечении сигнатур, где сохраняются только те рёбра, которые присутствуют одновременно и в R_1, и в R_2, замыкание выбранной ранее вершины a будет бесконечным из-за пересечения рёбер из $N_1(a)$ и $N_{i(a)}(a)$, что приводит к потере свойства локальной конечности во всей структуре.

Это демонстрирует, что объединение двух локально конечных структур может нарушать локальную конечность предгеометрии.

Теорема 3 (Достаточное условие локальной конечности объединения)**.** *Пусть M_1 и M_2 — локально конечные структуры из $\mathcal{B}(M)$. Если существует константа $c \in \omega$ такая, что для любого конечного $A \subseteq M$ выполняется*

$$|\mathrm{acl}_{M_1}(A)| \leq c \cdot |A| \quad \text{и} \quad |\mathrm{acl}_{M_2}(A)| \leq c \cdot |A|,$$

то объединение $M_1 \cup M_2$ локально конечно.

Доказательство. Пусть $U = M_1 \cup M_2$ и $\Sigma_U = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Рассмотрим произвольное конечное множество $A \subseteq M$. Нам нужно показать, что $\mathrm{acl}_U(A)$ конечно.

Заметим, что любой элемент $b \in \mathrm{acl}_U(A)$ алгебраичен над A в структуре U. Это означает, что существует формула $\phi(x, \bar{y})$ в сигнатуре Σ_U и кортеж $\bar{a} \in A$ такие, что:

1. $U \models \phi(b, \bar{a})$
2. Множество $\{x \in M : U \models \phi(x, \bar{a})\}$ конечно

Ключевое наблюдение: любую формулу $\phi(x, \bar{y})$ в сигнатуре Σ_U можно представить в виде булевой комбинации формул из Σ_1 и Σ_2. В частности, мы можем считать, что $\phi(x, \bar{a})$ имеет вид:

$$\phi(x, \bar{a}) = \psi_1(x, \bar{a}) \wedge \psi_2(x, \bar{a}),$$

где ψ_1 — формула в Σ_1, а ψ_2 — формула в Σ_2, причём каждая из них имеет конечное число решений.

Теперь определим последовательность приближений к $\mathrm{acl}_U(A)$. Положим:

$$A_0 = A$$
$$A_{n+1} = \mathrm{acl}_{M_1}(A_n) \cup \mathrm{acl}_{M_2}(A_n)$$

Докажем по индукции, что для любого $n \in \omega$:

1. A_n конечно
2. $|A_n| \leq (2c)^n \cdot |A|$
3. $A_n \subseteq \mathrm{acl}_U(A)$

База индукции ($n = 0$): $A_0 = A$ конечно по условию, $|A_0| = |A|$, и $A_0 \subseteq \mathrm{acl}_U(A)$ по монотонности замыкания.

Шаг индукции: Предположим, что утверждение верно для n. Тогда:

1. По предположению индукции, A_n конечно. По локальной конечности M_1 и M_2, множества $\mathrm{acl}_{M_1}(A_n)$ и $\mathrm{acl}_{M_2}(A_n)$ конечны, следовательно, A_{n+1} конечно.

2. По условию теоремы:

   $$|\mathrm{acl}_{M_1}(A_n)| \leq c \cdot |A_n| \quad \text{и} \quad |\mathrm{acl}_{M_2}(A_n)| \leq c \cdot |A_n|$$

   Тогда:

   $$|A_{n+1}| \leq |\mathrm{acl}_{M_1}(A_n)| + |\mathrm{acl}_{M_2}(A_n)| \leq c \cdot |A_n| + c \cdot |A_n| = 2c \cdot |A_n|$$

   По предположению индукции $|A_n| \leq (2c)^n \cdot |A|$, следовательно:

   $$|A_{n+1}| \leq 2c \cdot (2c)^n \cdot |A| = (2c)^{n+1} \cdot |A|$$

3. Пусть $b \in A_{n+1}$. Тогда либо $b \in \mathrm{acl}_{M_1}(A_n)$, либо $b \in \mathrm{acl}_{M_2}(A_n)$. Рассмотрим первый случай (второй аналогичен).

   Если $b \in \mathrm{acl}_{M_1}(A_n)$, то существует формула $\psi(x, \bar{y})$ в Σ_1 и кортеж $\bar{c} \in A_n$ такие, что $M_1 \models \psi(b, \bar{c})$ и множество решений $\psi(x, \bar{c})$ конечно. Но тогда в структуре U мы можем рассмотреть формулу:

   $$\phi(x, \bar{c}) = \psi(x, \bar{c}) \wedge (x = x)$$

   где $(x = x)$ — тривиальная формула в Σ_2. Тогда $U \models \phi(b, \bar{c})$ и множество решений $\phi(x, \bar{c})$ конечно (совпадает с множеством решений $\psi(x, \bar{c})$). Следовательно, $b \in \mathrm{acl}_U(\bar{c}) \subseteq \mathrm{acl}_U(A_n)$.

   По предположению индукции $A_n \subseteq \mathrm{acl}_U(A)$, поэтому $\mathrm{acl}_U(A_n) \subseteq \mathrm{acl}_U(\mathrm{acl}_U(A)) = \mathrm{acl}_U(A)$. Таким образом, $b \in \mathrm{acl}_U(A)$.

Теперь рассмотрим множество:

$$A_\infty = \bigcup_{n\in\omega} A_n$$

Из построения следует, что $A_\infty \subseteq \mathrm{acl}_U(A)$ и A_∞ замкнуто относительно acl_{M_1} и acl_{M_2}.

Покажем, что фактически $\mathrm{acl}_U(A) \subseteq A_\infty$. Пусть $b \in \mathrm{acl}_U(A)$. Тогда существует формула $\phi(x, \bar{a})$ в Σ_U с параметрами $\bar{a} \in A$, имеющая конечное число решений. Как отмечалось ранее, ϕ можно представить как булеву комбинацию формул из Σ_1 и Σ_2. В частности, все параметры, от которых зависит конечность множества решений ϕ, уже содержатся в A_∞ по построению.

Более формально: если $b \in \mathrm{acl}_U(A)$, то существует конечное множество $B \subseteq A_\infty$ (полученное за конечное число шагов нашей конструкции) такое, что b алгебраичен над B в U. Но тогда b должен принадлежать A_{n+1} для некоторого n, так как на каждом шаге мы добавляем все элементы, алгебраические над текущим множеством в любой из компонентных структур.

Следовательно, $\mathrm{acl}_U(A) = A_\infty$. Но A_∞ есть объединение цепочки конечных множеств с оценкой размера:

$$|A_n| \leq (2c)^n \cdot |A|$$

Хотя эта оценка растёт экспоненциально, для каждого конкретного конечного A множество $\mathrm{acl}_U(A)$ оказывается конечным как объединение конечной цепочки (поскольку процесс стабилизируется за конечное число шагов для каждого конечного A).

Таким образом, $\mathrm{acl}_U(A)$ конечно для любого конечного $A \subseteq M$, что и означает локальную конечность предгеометрии $M_1 \cup M_2$. □

Замечание 2. Данная теорема показывает, что проблема в примере с деревьями связана не просто с локальной конечностью, а с “суперлинейным ростом” замыкания. В примере с деревьями для конечного множества A мощность $\mathrm{acl}(A)$ может расти как $|A|^2$ или даже быстрее, что нарушает условие линейного роста и позволяет создать контрпример к локальной конечности объединения.

5 Заключение

В данной работе рассмотрены предгеометрии с алгебраическим оператором замыкания, возникающие на семействе регулярных обогащений и обеднений предикатных структур, образующих булеву алгебру $\mathcal{B}(M)$. Основное внимание уделено тому, как различные типы предгеометрий — вырожденная, локально конечная и модулярная — ведут себя при операциях пересечения и объединения структур в $\mathcal{B}(M)$.

В частности, показано, что если хотя бы одна из структур $M_1, M_2 \in \mathcal{B}(M)$ обладает вырожденной или локально конечной предгеометрией, то пересечение этих структур $M_1 \cap M_2$ наследует тот же тип предгеометрии.

С другой стороны, на конкретном контрпримере показано, что аналогичные свойства могут быть нарушены при объединении структур. Даже если обе исходные структуры обладают локальной конечностью, их объединение может утратить это свойство. Это подчёркивает принципиальную несимметричность поведения предгеометрий в булевой алгебре структур: пересечения более устойчивы к сохранению типа, чем объединения.

Полученные результаты расширяют представление о взаимодействии логико-структурных свойств в семействе предикатных расширений и ограничений и могут быть использованы в дальнейшем при изучении геометрических характеристик теорий, особенно в контексте интерпретируемых предгеометрий и геометрической стабильности.

Список литературы

[1] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов М. : Наука, 1990. 384 с.

[2] Малышев С.Б. Виды предгеометрий кубических теорий // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 41, С. 140—149.

[3] Малышев С.Б. Виды предгеометрий ациклических теорий // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 46, С. 110—120.

[4] Малышев С.Б. Наследуемость типов предгеометрий относительно композиций структур // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 52. С. 162-–174.

[5] Судоплатов С.В. Полигонометрии групп, Новосибирск : НГТУ, 2013. 302 с.

[6] Sudoplatov S.V. Closures and generating sets related to combinations of structures // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2016. Т. 16, С. 131–144.

[7] Berenstein A., Vassiliev E. On lovely pairs of geometric structures // Annals of Pure and Applied Logic. 2010. Vol. 161, N 7. P. 866–878.

[8] Berenstein A., Vassiliev E. Weakly one-based geometric theories // J. Symb. Logic. 2012. Vol. 77, N 2. P. 392–422.

[9] Berenstein A., Vassiliev E. Geometric structures with a dense independent subset // Selecta Math. 2016. Vol. 22, N 1. P. 191–225.

[10] Cherlin G.L., Harrington L., Lachlan A.H. ω-categorical, ω-stable structures // Annals of Pure and Applied Logic. 1986. Vol. 28, P. 103–135.

[11] Emel'yanov D.Y., Kulpeshov B.S., Sudoplatov S V. Algebras of binary formulas for compositions of theories // Algebra and Logic. 2020. Vol. 59, N. 4. P. 295-–312.

[12] Emel'yanov D.Y., Kulpeshov B.S., Sudoplatov S.V. Algebras of binary formulas for compositions of theories // Algebra and Logic. 2020. Vol. 59, N. 4. P. 432–457.

[13] Hodges W. Model Theory, Cambridge : Cambridge University Press, 1993. 772 p.

[14] Hrushovski E. A new strongly minimal set // Annals of Pure and Applied Logic. 1993. Vol. 62, P. 147–166.

[15] Markhabatov N.D., Sudoplatov S.V. Topologies, ranks, and closures for families of theories. I // Algebra and Logic. 2021. Vol. 59, N. 6. P. 437–455.

[16] Mukhopadhyay M.M., Vassiliev E. On the Vamos matroid, homogeneous pregeometries and dense pairs // Australian Journal of Combinatorics. 2019. Vol. 75, N. 1. P. 158–170.

[17] Pillay A. Geometric Stability Theory, Oxford : Clarendon Press, 1996. 361 p.

[18] Pillay A. Some remarks on definable equivalence relations in o-minimal structures // The Journal of Symbolic Logic. 1986. Vol. 51, N. 3. P. 709–714.

[19] Sudoplatov S.V. Models of cubic theories // Bulletin of the Section of Logic. 2014. Vol. 43, N. 1–2. P. 19–34.

[20] Sudoplatov S.V. Expansions and restrictions of structures and theories, their hierarchies // arXiv:2502.03051 [math.LO], 2025. 13 p.

[21] Zilber B.I. Uncountably categorical theories: American Mathematical Society. 1993. 117 p.

[22] Zilber B.I. Strongly minimal countably categorical theories // Sibirsk Matematika Zhurnal. 1980. Vol. 21, N. 2. P. 98–112.

[23] Zilber B.I. Strongly minimal countably categorical theories II // Sibirsk Matematika Zhurnal. 1984. Vol. 25, N. 3. P. 71–88.

ФРЕЙМЫ: ПРИМЕРЫ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФРЕЙМОВ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е.В. Мищенко*

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Пр. Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: e.mishchenko@g.nsu.ru

Фреймом называют набор элементов в гильбертовом пространстве, достаточно большой, чтобы иметь возможность представить любой элемент из этого пространства в виде линейной комбинации элементов из набора. Считается общепризнанным, что впервые понятие «фреймы» (или «каркасы», по другой, реже используемой, терминологии [1]) было введено в 1952 году в работе [2] при изучении возможности представления функций из пространства $L^2([-\gamma,\gamma])$, $0<\gamma\leq\pi$, рядом Фурье по комплексным экспонентам $\exp(i\lambda_n t)$. Однако авторы работы [3] считают, что конструкция Мальцева в работе [4] опередила время, не встретив должного внимания, и фактически является первой конструкцией равномерного жёсткого фрейма. Более поздняя «реинкарация» фреймов в другой ипостаси произошла в литературе, посвященной вейвлет-анализу, при описании дискретизации непрерывного вейвлет-преобразования [1, 5, 6, 7].

В отличие от традиционно используемых базисов, элементы фрейма не обязательно должны быть линейно независимыми. Эта «избыточность» дает определённую свободу при выборе фрейма в зависимости от задачи. Понятие фрейма определяется для пространств как бесконечной размерности, так и конечной. В настоящее время наибольшую практическую ценность представляют фреймы для задач, возникающих при обработке сигналов и передаче информации. Эти фреймы обладают устойчивостью к возникновению аддитивного шума [1], квантизации [8], большей свободой для улавливания специфических характеристик

*Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

сигнала [1]. Свойство «избыточности» фреймов позволяет восстанавливать данные, потерянные при обработке сигналов. В работе рассмотрено понятие фрейма для конечномерных и бесконечномерных гильбертовых пространств: построены жесткие фреймы в R^n и C^n, обсуждается восстановление элемента из пространства с помощью фреймового оператора и оптимальность представления элемента через фрейм в разных нормах.

1 Определение и примеры фреймов

Определение 1. *Семейство элементов* $\{f_j\}_{j\in J}$ *из гильбертова пространства* H *со скалярным произведением, которое будет обозначено как* $< f, g >$ *для* $f, g \in H$, *называется* **фреймом**, *если существуют такие числа* $0 < A, B < \infty$, *что для всех* f *из* H *верны оценки*

$$A \cdot ||f||^2 \leq \sum_{j\in J} | < f, f_k > |^2 \leq B \cdot ||f||^2. \qquad (1)$$

Неравенства (1) называют условием устойчивости. Указанные числа A и B называются соответственно нижней и верхней границами фрейма. Очевидно, что числа A и B выбираются не единственным образом. Обычно для работы используются так называемые оптимальные границы A_{opt}, B_{opt}, которые в дальнейшем снова будем называть границами фрейма, опуская слово оптимальные, и обозначать как A и B, опуская индекс opt.

Определение 2. *Оптимальной верхней границей фрейма* $\{f_j\}_{j\in J}$ *называется наименьшая из всех верхних границ фрейма, оптимальной нижней границей фрейма называется наибольшая из всех нижних границ фрейма:*

$$A_{opt} = \sup_A A,$$

$$B_{opt} = \inf_B B,$$

Определение 3. *Фрейм* $\{f_j\}_{j\in J}$ *называется* **жестким**, *если его оптимальная верхняя граница и оптимальная нижняя границы совпадают:*

$$A = B.$$

Фреймы отличаются от базисов — они могут состоять из линейно зависимых элементов. Так, в конечномерном пространстве для жесткого фрейма, в котором норма каждого элемента равна единице, величина границы фрейма характеризует степень избыточности фрейма. «Избыточность» фрейма в бесконечномерном пространстве можно проиллюстрировать на следующем примере.

Пример 1. В качестве H возьмём пространство $L^2(R)$. С помощью функции Хаара $\psi_H(x)$

$$\psi_H(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \ 0 \le x < 1/2, \\ -1, & \text{если} \ \ 1/2 \le x < 1, \\ 0, & \text{если} \ \ x \notin [0,1). \end{cases}$$

образуем семейство функций S:

$$S = \{\psi_{H,\frac{1}{3},j,k}(x); j,k \in Z\}, \quad \psi_{H,\frac{1}{3},j,k}(x) = 2^{j/2}\psi_H\Big(2^j x - \frac{1}{3}\cdot k\Big).$$

Покажем, что семейство S образует фрейм в $L^2(R)$ с границами $A = 1$, $B = 3$. Действительно, если обозначить

$$\gamma_{2j} = 1, \quad \gamma_{2j+1} = 2, \quad j \in Z,$$

и разбить S на три подмножества:

$$S_1 = \{2^{j/2}\psi_H\Big(2^j x - k\Big); \quad ,k \in Z\},$$

$$S_2 = \{2^{j/2}\psi_H\Big(2^j x - k + \frac{\gamma_j}{3}\Big); \quad j,k \in Z\},$$

$$S_3 = \{2^{j/2}\psi_H\Big(2^j x - k - \frac{\gamma_j}{3}\Big); \quad j,k \in Z\},$$

то можно убедиться, что S_1, S_2, S_3 — непересекающиеся множества.

Поскольку $\psi_H(x)$ — функция Хаара, то S_1 уже является ортонормированным базисом в $L^2(R)$. Значит, S – линейно зависимое множество. Оба множества S_2, S_3 – ортнормированные. Тогда

$$||f||^2 \le \sum_{j,k\in Z} |<f, \psi_{H,\frac{1}{3},j,k}>| =$$

$$= ||f||^2 + \sum_{s\in S_2} |<f,s>|^2 + \sum_{s\in S_3} |<f,s>|^2 \le 3||f||^2.\blacktriangle$$

Особый интерес представляют фреймы, построенные в конечномерных пространствах, например, R^n, C^n, поскольку с точки зрения теории информации сигналы могут быть представлены векторами в конечномерных пространствах.

Пример 2. Рассмотрим $H = R^2$ и систему из 3 векторов

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 3. Рассмотрим $H = R^3$ и систему из 4 векторов

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \qquad \blacktriangle$$

Прямые выкладки показывают, что эти векторы образуют жёсткие фреймы в соответствующих пространствах с границами $\frac{3}{2}$ и $\frac{4}{3}$. Примеры 2 и 3 являются частными случаями конструкции жесткого фрейма под названием фрейм Мерседес-Бенц, двухмерный и трехмерный случаи. Обобщением для произвольного $n \geq 2$ является утверждение, приведенное в [9].

Утверждение 1. *Для любого $m \geq 2$ в R^2 можно построить набор из векторов $\{f_k\}_{k=1}^{m+1}$ со свойствами*
1. $||f_k|| = 1, \forall k = 1, ..., m+1$;
2. $< f_i, f_j >= -\frac{1}{m}, i \neq j$;
3. $\sum_{k=1}^{m+1} f_k = 0$;
4. *Набор является жёстким фреймом с границей* $\frac{m+1}{m}$.

Полученные фреймы называются каноническими фреймами Мерседес-Бенц. Интересно отметить, что построение фрейма со свойствами 1–4 связано с задачами минимизации потенциала системы из единичных зарядов, размещенных на единичной сфере в R^n и максимизации расстояния между зарядами из этой системы.

Для следующих примеров сформулируем и докажем следующие утверждения. Их доказательства базируются на следующем замечании.

Замечание 1. Сумма всех корней степени m из $e^{i2\pi l}$ для любого $l \in Z_+$, не кратного m, равна нулю. В этом случае $q = e^{i2\pi l/m} \neq 1$ и тогда

$$(1 + q + \ldots + q^{m-1})(1 - q) = 1 - q^m = 0.$$

Пример 4.

Утверждение 2. *Набор векторов вида*

$$f_k = \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \frac{2\pi k}{m}) \\ \sin(\varphi + \frac{2\pi k}{m}) \end{pmatrix}, \quad \forall \varphi, k = 0, \ldots, m-1, \quad m \geq 3,$$

образует жесткий фрейм в R^2 с границей $m/2$.

Доказательство. Набор векторов образует жесткий фрейм тогда и только тогда, когда найдется такая константа $0 < A < \infty$, что для любого вектора $f \in R^2$ выполнено из :

$$A(f_1^2 + f_2^2)) = \sum_{k=0}^{m-1} |< f, e_k >|^2.$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} |< f, e_i >|^2 = \sum_{k=0}^{m-1} \left(f_1^2 \cdot \cos^2 \left(\varphi + \frac{2\pi(k-1)}{m} \right) + f_2^2 \cdot \sin^2 \left(\varphi + \frac{2\pi(k-1)}{m} \right) + \right.$$

$$\left. +2f_1 \cdot f_2 \cdot \cos \left(\varphi + \frac{2\pi k}{m} \right) \cdot \sin \left(\varphi + \frac{2\pi k}{m} \right) \right) =$$

$$= f_1^2 \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \cos^2 \left(\varphi + \frac{2\pi k}{m} \right) + f_2^2 \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \sin^2 \left(\varphi + \frac{2\pi k}{m} \right) + f_1 \cdot f_2 \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \sin \left(2\varphi + \frac{4\pi k}{m} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} f_1^2 \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 + \cos \left(2\varphi + \frac{4\pi k}{m} \right) \right) + \frac{1}{2} f_2^2 \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \cos \left(2\varphi + \frac{4\pi k}{m} \right) \right) +$$

$$+f_1 \cdot f_2 \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \sin \left(2\varphi + \frac{4\pi k}{m} \right) = \frac{m}{2} \left(f_1^2 + f_2^2 \right),$$

поскольку суммы $\sum_{k=0}^{m-1} \cos(2\varphi + 4\pi k/m)$ и $\sum_{k=0}^{m-1} \sin(2\varphi + 4\pi k/m)$ зануляются будучи вещественной и мнимой частью выражения

$$\sum_{k=0}^{m-1} e^{i \cdot (2\varphi + 4\pi k/m)} = e^{i \cdot 2\varphi} \sum_{k=0}^{m-1} e^{i \cdot 4\pi k/m},$$

обращающегося в нуль для любого φ, т.к. $\sum_{k=0}^{m-1} e^{i \cdot 4\pi k/m}$ является суммой всех корней степени m из числа $e^{i2\pi l}$, $l = 2$ и согласно Замечанию 1 равна нулю. ▲

Пример 5.

Утверждение 3. *Набор векторов вида* $\{e_k\}_{0 \le k \le KN-1}$ *с компонентами* $e_{k,n} = e^{i2\pi kn/KN}$, $n = 1, \ldots, N$, *образует жесткий фрейм в* C^N *с границей* KN *для любого положительного целого* K.

Доказательство. Введем обозначения: вещественную и мнимую части каждой компоненты вектора $f \in C^N$ обозначим через $(Ref)_n = a_n$, $(Imf)_n = b_n$, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\cos\varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$, $\sin\varphi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$, $\psi_{nk} =$

$\varphi_n - \frac{2\pi kn}{KN}$, $n = 1, \dots, N$, $k = 0, \dots, KN-1$. Нам необходимо указать константу $0 < A < \infty$, такую что

$$A||f||^2 = \sum_{k=0}^{KN-1} | < f, e_k > |^2.$$

Тогда

$$||f||^2 = \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2),$$

$$< f, e_k >= f_1 \cdot \overline{e_{k,1}} + \ldots + f_N \cdot \overline{e_{k,N}} = \sum_{n=1}^{N} f_n e^{-i2\pi kn/KN} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \Big(a_n \cos\frac{2\pi kn}{KN} + b_n \sin\frac{2\pi kn}{KN}\Big) + i \sum_{n=1}^{N} (b_n \cos\frac{2\pi kn}{KN} - a_n \sin\frac{2\pi kn}{KN}),$$

$$| < f, e_k > |^2 = \Big(\sum_{n=1}^{N} \Big(a_n \cos\frac{2\pi kn}{KN} + b_n \sin\frac{2\pi kn}{KN}\Big)\Big)^2 +$$

$$+ \Big(\sum_{n=1}^{N} \Big(b_n \cos\frac{2\pi kn}{KN} - a_n \sin\frac{2\pi kn}{KN}\Big)\Big)^2 =$$

$$= \Big(\sum_{n=1}^{N} A_n \cos\psi_{nk}\Big)^2 + \Big(\sum_{n=1}^{N} A_n \sin\psi_{nk}\Big)^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} A_n^2(\cos^2\psi_{nk} + \sin^2\psi_{nk}) + 2 \cdot \sum_{1\le n<m\le N} A_n A_m cos(\psi_{nk} - \psi_{mk}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} A_n^2 + 2 \cdot \sum_{1\le n<m\le N} A_n A_m cos(\psi_{nk} - \psi_{mk}).$$

Суммируя по k, получаем

$$\sum_{k=0}^{KN-1} | < f, e_k > |^2 = \sum_{k=0}^{KN-1} \Big(\sum_{n=1}^{N} A_n^2 + 2 \cdot \sum_{1\le n<m\le N} A_n A_m cos(\psi_{nk} - \psi_{mk})\Big) =$$

$$= KN||f||^2 + 2 \cdot \sum_{1\le n<m\le N} A_n A_m \sum_{k=0}^{KN-1} cos(\psi_{nk} - \psi_{mk}) =$$

$$= KN||f||^2 + 2 \cdot \sum_{1\le n<m\le N} A_n A_m \sum_{k=0}^{KN-1} \cos\Big((\varphi_n - \varphi_m) + \frac{2\pi k(m-n)}{KN}\Big).$$

Внутренняя сумма во втором слагаемом равна нулю $\forall\ 1 \le n < m \le N$ согласно замечанию 1. ▲

2 Фреймовые операторы. Фреймовые операторы в конечномерном пространстве.

Центральным вопросом при обработке сигнала и в теории передачи информации является вопрос, какой информацией об исходном сигнале и каким инструментарием нужно обладать, чтобы по этой информации можно было восстановить исходный сигнал, особенно в случае потери информации при приеме.

В [5] было введено понятие фреймового оператора T для случая $H = L^2(R)$ и некоторой выбранной функции $\psi(x) \in L^2(R)$ и показано, что если $||\psi|| = 1$ и функция $\psi(x)$ удовлетворяет условию допустимости

$$\int_R \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty,$$

а для множества $\{\psi_{b_0,j,k}, j,k \in Z\}, b_0 > 0, \psi_{b_0,j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j x - kb_0)$, выполнено условие (1), которое в теории вейвлетов также называется условием устойчивости, можно гарантировать, что любая функция $f \in L^2(R)$ восстанавливается по её значениям $< f, \psi_{b_0,j,k} >$ с помощью фреймового оператора

$$Tf = \sum_{j,k\in Z} < f, \psi_{b_0,j,k} > \psi_{b_0,j,k}, \quad \forall f \in L^2(R).$$

Условие устойчивости означает, что оператор T — взаимнооднозначный ограниченный линейный оператор, у которого существует обратный оператор T^{-1}. При этом

$$f = T^{-1}Tf = \sum_{j,k\in Z} < f, \psi_{b_0,j,k} > T^{-1}\psi_{b_0,j,k} = \sum_{j,k\in Z} < f, \psi_{b_0,j,k} > \psi_{b_0}^{j,k}, \quad (2)$$

где через $\{\psi_{b_0}^{j,k} = T^{-1}\psi_{b_0,j,k}\}$ мы обозначили множество, сопряженное к фрейму $\{\psi_{b_0,j,k}, j,k \in Z\}$. Таким образом, сигнал из $L^2(R)$ можно восстановить без потерь, зная сопряженное к фрейму множество и значения скалярных произведений. Введя сопряженный фрейм, мы, тем не менее, имеем мало информации о том, как он выглядит. Например, в теории вейвлетов вопрос о нахождении сопряженного можно сформулировать так: существует ли функция $\tilde{\psi}$ такая, что сопряженное к фрейму множество также являлось набором сдвигов и сжатий этой единственной функцией.

Аналогично, фреймовый оператор вводится и для конечномерных пространств. При этом оказывается, что в обоих случаях (конечномерного или бесконечномерного пространства H) процедура восстановления сигнала становится значительно легче, если фрейм жесткий.

Определение 4. *Пусть $\{f_k\}_{k=1}^m$ образует фрейм в гильбертовом пространстве H.*
Оператором синтеза *назовем оператор T, действующий по формуле*

$$T : R^m \to H, \quad Tf = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k, \quad c = (c_1, \ldots, c_m)^*$$

Оператором анализа *назовем оператор T^*, действующий по формуле*

$$T^* : H \to R^m, \quad T^* f = c, \quad c = (< f, f_1 >, \ldots, < f, f_m >)^*)$$

Фреймовым оператором *назовем оператор S, действующий по формуле*

$$S : H \to H, \quad S = TT^*, \quad Sf = \sum_{k=1}^{m} < f, f_k > f_k.$$

Замечание 2. Фреймовый оператор является линейным. Пространство фреймовых операторов из пространства H размерности n в H изоморфно множеству матриц размера $n \times n$.

Пример 6. Рассмотрим жесткий фрейм из примера 4. Возьмем произвольный вектор f из R^2

$$f = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$< f, f_k > f_k = \begin{pmatrix} \left(a \cdot \cos(\varphi + \frac{2\pi k}{m}) + b \sin(\varphi + \frac{2\pi k}{m})\right) \cos(\varphi + \frac{2\pi k}{m}) \\ \left(a \cdot \cos(\varphi + \frac{2\pi k}{m}) + b \sin(\varphi + \frac{2\pi k}{m})\right) \sin(\varphi + \frac{2\pi k}{m}) \end{pmatrix},$$

Тогда

$$Sf = \sum_{k=0}^{m-1} < f, f_k > f_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \left(\begin{array}{c} \left(a \cdot \cos(\varphi + \frac{2\pi k}{m}) + b \sin(\varphi + \frac{2\pi k}{m})\right) \cos(\varphi + \frac{2\pi k}{m}) \\ \left(a \cdot \cos(\varphi + \frac{2\pi k}{m}) + b \sin(\varphi + \frac{2\pi k}{m})\right) \sin(\varphi + \frac{2\pi k}{m}) \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c} a \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \cos^2(\varphi + \frac{2\pi k}{m}) + b \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \sin(\varphi + \frac{2\pi k}{m}) \cos(\varphi + \frac{2\pi k}{m}) \\ a \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \sin(\varphi + \frac{2\pi k}{m}) \cos(\varphi + \frac{2\pi k}{m}) + b \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \sin^2(\varphi + \frac{2\pi k}{m}) + \end{array} \right) =$$

$$= \frac{m}{2} \left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right) = \frac{m}{2} f,$$

поскольку в Утверждении 1 показано, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} \cos\left(\varphi + \frac{2\pi k}{m}\right) \sin\left(\varphi + \frac{2\pi k}{m}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \sin\left(2\varphi + \frac{4\pi k}{m}\right) = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(\cos^2\left(\varphi + \frac{2\pi k}{m}\right) - \sin^2\left(\varphi + \frac{2\pi k}{m}\right)\right) = \sum_{k=0}^{m-1} \cos\left(2\varphi + \frac{4\pi k}{m}\right) = 0,$$

а, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \cos^2(\varphi + \frac{2\pi k}{m}) = \sum_{k=0}^{m-1} \sin^2(\varphi + \frac{2\pi k}{m}) = \frac{m}{2}.$$

Таким образом,

$$S = \frac{m}{2} I. \blacktriangle$$

Справедливо следующее более общее

Утверждение 4. *Фрейм* $\{f_k\}_{k \in J}$, *где* J *— множество значений индексов элементов фрейма, является жестким с границей* A *тогда и только тогда, когда* $\forall f \in H$

$$f = \frac{1}{A} \sum_{k \in J} < f, f_k > f_k,$$

$$S = A \cdot I.$$

$\Leftarrow$

$$||f||^2 = \frac{1}{A} \sum_{k \in J} < f, f_k >< f, f_k >= \frac{1}{A} \sum_{k \in J} | < f, f_k > |^2,$$

т.е. фрейм жесткий.

$\Rightarrow$

Так как по определению S и условию (1) для жесткого фрейма

$$< Sf, f >= \left\langle \sum_{k\in J} < f, f_k > f, f_k \right\rangle = \sum_{k\in J} | < f, f_k > |^2 = A||f||^2 =< AIf, f >,$$

то $S = A \cdot I$, $S^{-1} = \frac{1}{A}I$, $f = \frac{1}{A}\sum_{k\in J} < f, f_k > f_k$.▲

Следующие общие свойства фреймового оператора справедливы [10].

Утверждение 5. *Пусть* $\{f_k\}_{k=1}^m$ *— фрейм в* H*. Тогда*

1. S *— обратимый и самосопряженный.*

2. $\forall f \in H$

$$f = \sum_{k=1}^{m} < f, S^{-1}f_k > f_k = \sum_{k=1}^{m} < f, f_k > S^{-1}f_k,$$

поскольку

$$f = S(S^{-1}f) = \sum_{k=1}^{m} < S^{-1}f, f_k > f_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} < f, (S^{-1})^* f_k > f_k = \sum_{k=1}^{m} < f, S^{-1}f_k > f_k. \qquad (6)$$

$$f = S^{-1}Sf = S^{-1}\sum_{k=1}^{m} < f, f_k > f_k = \sum_{k=1}^{m} < f, f_k > S^{-1}f_k. \qquad (7)$$

3. *Если* $f = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k$, *то*

$$\sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{m} | < f, S^{-1}f_k > |^2 + \sum_{k=1}^{m} |c_k - < f, S^{-1}f_k > |^2.$$

Числа $< f, S^{-1}f_k >, k = 1, ..., m$, называются фреймовыми коэффициентами, а набор $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^m$ — каноническим сопряженным к $\{f_k\}_{k=1}^m$. Таким образом, Свойство 2 говорит о двух возможностях представить элемент f: с использованием фрейма и фреймовых коэффициентов (6), либо с использованием канонического сопряжения к фрейму и значений скалярного произведения (7) (аналогичная формула (2) справедлива для фреймового оператора в $L^2(R)$). Очевидно, для жесткого фрейма каноническое сопряжение определяется как

$$S^{-1}f_k = \frac{1}{A}f_k.$$

Избыточность фрейма означает, что элемент $f \in H$ может быть представлен различными линейными комбинациями элементов фрейма, т.е. $\exists\, \tilde{c_k}, k = 1, \ldots, m, \sum_{k=1}^m |\tilde{c_k}|^2 \neq 0,\ 0 = \sum_{k=1}^m \tilde{c_k} f_k$. В этом смысле Свойство 3 говорит о том, именно фреймовые коэффициенты доставляют минимум l^2-нормы последовательности коэффициентов разложения произвольного элемента из H по фрейму $\{f_k\}_{k=1}^m$ и этот минимум достигается на единственной последовательности.

Иная ситуация возникает, если рассматривается l^1-норма. В этом случае минимум l^1-нормы достигается.

Утверждение 6. *Пусть $\{f_k\}_{k=1}^m$ —- фрейм в H. Для любого $f \in H$ существует последовательность $\{d_k\}_{k=1}^m$,*

$$\sum_{k=1}^m |d_k| = \inf\{\sum_{k=1}^m |c_k| : f = \sum_{k=1}^m c_k f_k\}.$$

Действительно, зафиксируем для $f \in H$ некоторое представление в виде линейной комбинации элементов фрейма

$$f = \sum_{k=1}^m \tilde{c}_k f_k.$$

Если

$$\sum_{k=1}^m |\tilde{c}_k| = \min\{\sum_{k=1}^m |c_k| : f = \sum_{k=1}^m c_k f_k\},$$

то

$$\{d_k\}_{k=1}^m = \{\tilde{c}_k\}_{k=1}^m.$$

В противном случае рассмотрим множество

$$\Big\{\{c_k\}_{k=1}^m : f = \sum_{k=1}^m c_k f_k,\ \sum_{k=1}^m |c_k| \leq m\Big\}, \tag{8}$$

которое является ограниченным и замкнутым в R^m и функцию $F(c) = \sum_{k=1}^m |c_k|$, $c = (c_1, \ldots, c_m)^* \in R^m$, непрерывно действующую из R^m в R. По теореме Вейерштрасса существует такой элемент $d = (d_1, \ldots, d_m)^*$ из компакта (8), на котором достигается минимум функции F. ▲

Но, как показывает следующий пример, минимум достигается не обязательно на единственной последовательности.

Пример 7. Пусть $H = R^n$ и $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — орты в H,

$$e_j = (0 \ldots \underbrace{1}_{j-\text{ е место}} \ldots 0)^*.$$

Набор $\{f_k\}_{k=1}^{n+1} = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_1 + e_n, e_1 - e_n\}$ является фреймом с границами $A = 1$, $B = 3$: пусть

$$g \in H, g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix},$$

тогда

$$\sum_{k=1}^{n+1} |< g, f_k >|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} |g_k|^2 + |g_1 + g_n|^2 + |g_1 - g_n|^2 = ||g||^2 + 2|g_1|^2 + |g_n|^2,$$

$$||g||^2 \leq \sum_{k=1}^{n+1} |< g, f_k >|^2 \leq 3||g||^2.$$

Возьмем элемент $g = e_1$ и представим его в виде линейной комбинации через элементы фрейма

$$e_1 = \sum_{k=1}^{n-1} c_k e_k + c_n(e_1 + e_n) + c_{n+1}(e_1 - e_n).$$

Коэффициенты разложения связаны соотношениями

$$1 = c_1 + c_n + c_{n+1},\ c_n + c_{n+1} = 1 - c_1$$

$$c_j = 0, \quad j = 2, \dots, n-1,$$

$$0 = c_n - c_{n+1},\ c_n = c_{n+1},$$

l^1-норма

$$\sum_{k=1}^{n+1} |c_k| = |c_1| + |1 - c_1|$$

достигает своего минимального значения

$$\min_{\{c_k\}} \sum_{k=1}^{n+1} |c_k| = 1,$$

на последовательностях $\{d_k\}_{k=1}^{m}$ вида

$$d_1 - \text{любое из } [0,1],\ d_j = 0, j = 2, \dots, n-1,\ d_n = d_{n+1} = \frac{1 - d_1}{2}.$$

Для этого примера l^2 — норма последовательности коэффициентов разложения по фрейму

$$\sum_{k=1}^{n+1} |c_k|^2 = |c_1|^2 + 2\Big|\frac{1-c_1}{2}\Big|^2$$

достигает минимума в единственной точке экстремума $c_1 = \frac{1}{3}$. Тогда $c_n = c_{n+1} = 1/3$, прочие коэффициенты равны нулю.

Найдем фреймовые коэффициенты. Согласно утверждению 5

$$Sf = \sum_{k=1}^{n+1} < f, S^{-1}f_k > f_k.$$

Тогда имеем

$$Se_1 = f_1 + f_n + f_{n+1} = 3e_1,$$

$$Se_j = e_j,\ j = 2, \ldots, n-1,$$

$$Se_n = f_n + f_{n+1} = 2e_n,$$

$$S^{-1}e_1 = \frac{1}{3}e_1,\ S^{-1}e_j = e_j, j = 2, \ldots, n-1,\ S^{-1}e_n = \frac{1}{2}e_n. \tag{9}$$

Фреймовые коэффициенты для элемента e_1 находятся по формуле $c_k =< e_1, S^{-1}f_k >$ и с учетом (9)

$$c_1 = \frac{1}{3},\ c_j = 0, j = 2, \ldots, n-1,\ c_n = \frac{1}{3},\ c_{n+1} = \frac{1}{3},$$

что находится в согласии с найденным ранее. ▲

Список литературы

[1] И. Добеши. Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 464 стр.

[2] R.J. Duffin, A.C. Scaeffer. A class of nonharmonic Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. —- 1952. —- Vol. 72. —- P. 341–366.

[3] С.Я. Новиков, В.В. Севостьянова. Равномерные жесткие фреймы Мальцева // Изв. РАН. Сер. матем. — 2022 — Том 86, выпуск 4. — С. 162—174.

[4] А.И. Мальцев. Замечание к работе А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова и Ю.М. Смирнова “Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов” // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1947 — том 11, выпуск 6. — С. 567-–568.

[5] Ч. Чуи. Введение в вейвлеты. — Мир: Москва, 2001. — 412 стр.

[6] К. Блаттер. Вейвлет–анализ. Основы теории. — Москва: Техносфера, 2006. — 272 стр.

[7] С. Малла. Вейвлеты в обработке сигналов. — Москва: Мир, 2001. — 671 стр.

[8] V.K. Goyal, M. Vetterli, and N.T. Thao. Quantized overcomplete expansions in R^N // Analysis, synthesis and algorithms, IEEE Trans. Inform. Th. — 1998 — V. 44 — P. 16–31.

[9] М.Н. Истомина, А.Б. Певный. О расположении точек на сфере и фрейме Мерседес–Бенц» // Mat. Pros. — 2007. — Issue 11. — P. 105—112.

[10] O. Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. — Boston: Birkhauser, 2002. — 440 p.

О ДВУХ РАЗЛИЧНЫХ ТИПАХ ОРДИНАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИЙ ВНУТРЕННИХ ФУНКТОРОВ

Н.Л. Поляков

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»,
Москва, 109028, Покровский бульвар, 11
e-mail: npolyakov@hse.ru

В работе [1] для теоретико-модельной характеризации некоторых естественных предпорядков на множестве $\boldsymbol{\beta}\omega$ ультрафильтров на множестве ω было введено понятие *скошенной предельной ультрастепени* ординального ранга α произвольной модели $\mathfrak{M}$ по ультрафильтру $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{\beta}\omega$. Мы покажем, что это понятие допускает широкие обобщения, которые могут быть определены в терминах теории категорий. Для упрощения обозначений в определениях категорных конструкций мы будем использовать символы теоретико-множественных операций. Если угодно, все нижеследующие категории можно воспринимать как «достаточно богатые» малые категории.

Определим понятие категории с пределами. Пусть $\mathcal{K} = (\mathrm{Ob}_{\mathcal{K}}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}})$ есть категория и $\mathcal{J} = (\mathrm{Ob}_{\mathcal{J}}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{J}})$ есть малая категория. Для каждой диаграммы $D : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ *конусом* над D называется пара (c, In), где $c \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{K}}$, $\mathrm{In} = \{\mathrm{in}_a\}_{a \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{J}}}$, $\mathrm{in}_a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(D(a), c)$ и для любых $a, b \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{J}}$ и $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{J}}(a, b)$ выполнено: $D(f) \circ \mathrm{in}_b = \mathrm{in}_a$. Класс всех конусов над D обозначим символом $\mathrm{C}(D)$.

Определение предела диаграммы D мы даем без требования его единственности. Для каждой диаграммы $D : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ *пределом* D мы называем тройку $(c, \mathrm{In}, \mathrm{Out})$, где $\mathrm{In} = \{\mathrm{in}_a\}_{a \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{J}}}$, пара (c, In) есть конус над D, $\mathrm{Out} = \{\mathrm{out}_C\}_{C \in \mathrm{C}(D)}$, и для каждого конуса $C = (c', \{\mathrm{in}'_a\}_{a \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{J}}})$ над диаграммой D и объекта $a \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{J}}$ выполнено: $\mathrm{in}_a \circ \mathrm{out}_C = \mathrm{in}'_a$. Пусть $(c, \mathrm{In}, \mathrm{Out})$ есть предел диаграммы D. Тогда объект c называется ее *предельным объектом*, морфизм in_a, $a \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{J}}$, ее *предельным входящим морфизмом* из $D(a)$ в c, а морфизм out_C, $C \in \mathrm{C}(D)$, ее *предельным исходящим морфизмом* из c в C.

Категория $\mathcal{J} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Hom})$ называется *направленной*, если для любых двух объектов $a, b \in \mathrm{Ob}$ множество $\mathrm{Hom}(a, b) \cup \mathrm{Hom}(b, a)$ состоит из не более чем одного элемента, и для любых двух объектов $a, b \in \mathrm{Ob}$ существует такой объект $c \in \mathrm{Ob}$, что множества $\mathrm{Hom}(a, c)$ и $\mathrm{Hom}(b, c)$ не пусты. Диаграмма $D : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ называется *направленной*, если категория $\mathcal{J}$ направленная.

Категория $\mathcal{K}$ называется *категорией с пределами*, если для каждой направленной диаграммы $D : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ зафиксирован некоторый предел.

Пусть $(c, \mathrm{In}, \mathrm{Out})$ есть предел диаграммы $D : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$, а $(c', \mathrm{In}', \mathrm{Out}')$ есть предел диаграммы $D' : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$. Тогда можно канонически определить предел любого естественного преобразования $\{f_a\}_{a \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{J}}}$ из D в D', т.е. такой морфизм $f \in \mathrm{Hom}(c, c')$, что для каждого объекта a категории $\mathcal{J}$ коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "f"] & c' \\
D(a) \arrow[u, "\mathrm{in}_a"] \arrow[r, "f_a"] & D'(a) \arrow[u, "\mathrm{in}'_a"']
\end{tikzcd}$$

Для этого надо положить f равным предельному исходящему морфизму out_C диаграммы D из c в конус $C = (c', \{f_a \circ \mathrm{in}'_a\}_{a \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{J}}})$ над диаграммой D. Таким образом, в категориях с пределами канонически определены пределы любых естественных преобразований из направленной диаграммы $D : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ в направленную диаграмму $D' : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$.

Внутренним функтором категории $\mathcal{K} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Hom})$ будем назвать любую пару (Φ, E), где Φ есть эндофунктор категории $\mathcal{K}$, а E есть такое семейство $\{e_a\}_{a \in Ob}$ морфизмов категории $\mathcal{K}$, что

1. $e_a \in \mathrm{Hom}(a, \Phi(a))$,
2. для любых объектов $a, b \in \mathrm{Ob}$ и морфизмов $f \in \mathrm{Hom}(a, b)$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\Phi(a) \arrow[r, "\Phi(f)"] & \Phi(b) \\
a \arrow[u, "e_a"] \arrow[r, "f"] & b \arrow[u, "e_b"']
\end{tikzcd}$$

Пример 1. Тривиальным примером внутреннего функтора произвольной категории $\mathcal{K} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Hom})$ является пара, состоящая из тождественного функтора и семейства $\{\mathrm{id}_a\}_{a \in \mathrm{Ob}}$.

Пример 2. Следующий пример служит основной мотивацией нашего исследования. Пусть $\mathcal{M} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Hom})$ есть категория элементарных вложений (вложений, гомоморфизмов) моделей первого порядка некоторой сигнатуры L. Пусть $\mathfrak{u}$ есть ультрафильтр на некотором множестве X, а Prod есть отображение, который каждой модели $\mathfrak{A} \in \mathrm{Ob}$ ставит в соответствие ее ультрастепень $\prod_{\mathfrak{u}} \mathfrak{A}$, а каждому морфизму $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ функцию $f^{\mathfrak{a}} : \prod_{\mathfrak{a}} \mathfrak{A} \to \prod_{\mathfrak{a}} \mathfrak{B}$, определенную формулой $f^{\mathfrak{a}}(g_{\mathfrak{a}}) := (f \circ g)_{\mathfrak{a}}$ для всех $g_{\mathfrak{a}}$ из носителя модели $\prod_{\mathfrak{u}} \mathfrak{A}$. Пусть $d_{\mathfrak{A}}$ обозначает диагональное вложение $\mathfrak{A}$ в $\prod_{\mathfrak{A}}$, и $D := \{d_{\mathfrak{A}}\}_{\mathfrak{A} \in \mathrm{Ob}}$. Легко проверить, что (Prod, D) есть внутренний функтор категории $\mathcal{M}$.

Пример 3. Из результатов работ [2, 3] можно извлечь другой содержательный пример для той же категории $\mathcal{M}$. Пусть Ext есть отображение, которое каждой модели $\mathfrak{A} \in \mathrm{Ob}$ ставит в соответствие ее ультрарасширение $\widetilde{\mathfrak{A}}$, а каждому морфизму $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ функцию $\widetilde{f}$. Пусть $e_{\mathfrak{A}}$ обозначает естественное вложение $\mathfrak{A}$ в $\widetilde{\mathfrak{A}}$, и $E := \{e_{\mathfrak{A}}\}_{\mathfrak{A} \in \mathrm{Ob}}$. Тогда вновь получаем, что (Ext, E) есть внутренний функтор категории $\mathcal{M}$.

Для каждого ординала α определена малая направленная категория с множеством объектов α и множествами морфизмов

$$\mathrm{Hom}(\gamma, \beta) = \begin{cases} \{(\gamma, \beta)\}, & \text{если } \gamma \leqslant \beta, \\ \emptyset, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Мы будем обозначать эту категорию тем же символом α, и для каждого функтора $D : \alpha \to \mathcal{K}$ и ординалов $\gamma \leqslant \beta$ вместо $D((\gamma, \beta))$ будем записывать $D(\gamma, \beta)$. Для каждого функтора $D : \alpha \to \mathcal{K}$ и ординала $\beta \leqslant \alpha$ символом D_β будем обозначать ограничение функтора D на множество объектов β и множество морфизмов (δ, γ), $\delta \leqslant \gamma < \beta$.

Определение 1. Пусть $\mathcal{K} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Hom})$ есть категория с пределами, а (Φ, E) есть внутренний функтор категории $\mathcal{K}$. Для каждого ординала $\alpha > 1$ *системой ординальных итераций* ранга $< \alpha$ внутреннего функтора (Φ, E) категории $\mathcal{K}$ будем называть пару $(\mathcal{F}, \mathcal{D})$ семейств $\mathcal{F} = \{\Phi^\beta\}_{\beta < \alpha}$ функторов $\Phi^\beta : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ и $\mathcal{D} = \{D^a\}_{a \in \mathrm{Ob}}$ функторов (направленных диаграмм) $D^a : \alpha \to \mathcal{K}$, где

1. Φ^0 есть тождественный функтор, и для любого ординала $\beta + 1 < \alpha$ выполнено: $\Phi^{\beta+1} = \Phi \circ \Phi^\beta$;

2. для любого объекта $a \in \mathrm{Ob}$ и ординала $\beta < \alpha$ выполнено: $D^a(0, 1) = e_a$ и $D^a(\beta) = \Phi^\beta(a)$;

3. для любых объектов $a, b \in \mathrm{Ob}$ и морфизма $f \in \mathrm{Hom}(a, b)$ семейство $\{\Phi^\beta(f)\}_{\beta<\alpha}$ есть естественное преобразование из D^a в D^b,

4. если β есть предельный ординал, то для любых объектов $a, b \in \mathrm{Ob}$ и морфизма $f \in \mathrm{Hom}(a, b)$ объект $\Phi^\beta(a)$ есть предельный объект направленной диаграммы D^a, морфизм $\Phi^\beta(f)$ есть предел естественного преобразования $\{\Phi^\beta(f)\}_{\beta<\alpha}$ из D^a в D^b, и для каждого ординала $\gamma < \beta$ морфизм $D^a(\gamma, \beta)$ есть предельный входящий морфизм диаграммы D^a_β из $\Phi^\gamma(a)$ в $\Phi^\beta(a)$.

Легко проверить, что для любого внутреннего функтора (Φ, E) можно определить систему ординальных итераций ранга $< \omega$, причем по меньшей мере двумя, вообще говоря, различными способами. Действительно, условие 1 Определения 1 однозначно определяет функтор Φ^n, $0 < n < \omega$, а тот факт, что D^a есть функтор, однозначно определяет морфизмы $D^a(m, n)$, $a \in \mathrm{Ob}$, $m \leqslant n < \omega$, при заданных морфизмах $D^a(k, k+1)$, $k < \omega$. Последние же можно определить одним из двух способов: положив $D^a(k, k+1) = e_{\Phi^k(a)}$ либо $D^a(k, k+1) = \Phi^k(e_a)$. Это следует из того, что обе диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\Phi^{k+1}(a) \arrow[r, "\Phi^{k+1}(f)"] & \Phi^{k+1}(b) \\
\Phi^k(a) \arrow[u, "e_{\Phi^k(a)}"] \arrow[r, "\Phi^k(f)"] & \Phi^k(b) \arrow[u, "e_{\Phi^k(b)}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Phi^{k+1}(a) \arrow[r, "\Phi^{k+1}(f)"] & \Phi^{k+1}(b) \\
\Phi^k(a) \arrow[u, "\Phi^k(e_a)"] \arrow[r, "\Phi^k(f)"] & \Phi^k(b) \arrow[u, "\Phi^k(e_b)"']
\end{tikzcd}$$

коммутативны. Размышления над этим фактом приводят к следующим определениям.

Определение 2. Систему ординальных итераций $(\{\Phi^\beta\}_{\beta<\alpha}, \{D^a\}_{a\in\mathrm{Ob}})$ ранга $< \alpha$ внутреннего функтора (Φ, E) категории $\mathcal{K} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Hom})$ будем называть

1. *прямой*, если для любого объекта $a \in \mathrm{Ob}$ и ординала $\beta + 1 < \alpha$ выполнено: $D^a(\beta, \beta+1) = e_{\Phi^\beta(a)}$,

2. *скошенной*, если для любого объекта $a \in \mathrm{Ob}$ и ординалов $\gamma + 1 < \beta + 1 < \alpha$ выполнено:

   (a) $D^a(\gamma+1, \beta+1) = \Phi(D^a(\gamma, \beta))$,

(b) если β есть предельный ординал, то $D^a(\beta, \beta+1)$ есть предельный исходящий морфизм out_C диаграммы D^a_β из $\Phi^\beta(a)$ в конус $C = (\Phi^{\beta+1}(a), \{D^a(\gamma, \beta+1)\}_{\gamma<\beta})$ над диаграммой D^a_β.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{K}$ есть категория с пределами, а (Φ, E) есть внутренний функтор категории $\mathcal{K}$. Тогда для любого ординала α однозначно определены как прямая, так и скошенная система ординальных итераций внутреннего функтора (Φ, E) ранга $< \alpha$. При этом,*

1. *если $(\{\Phi^\beta\}_{\beta<\alpha}, \{D^a\}_{a\in\mathrm{Ob}})$ есть прямая система ординальных итераций внутреннего функтора (Φ, E) ранга $< \alpha$, то для любых ординалов $\delta, \gamma, \beta < \alpha$ выполнено:*
   (a) $\Phi^\beta \circ \Phi^\gamma = \Phi^{\gamma+\beta}$,
   (b) если $\gamma < \beta$, то $D^{\Phi^\delta(a)}(\gamma, \beta) = D^a(\delta+\gamma, \delta+\beta)$;
2. *если $(\{\Phi^\beta\}_{\beta<\alpha}, \{D^a\}_{a\in\mathrm{Ob}})$ есть скошенная система ординальных итераций внутреннего функтора (Φ, E) ранга $< \alpha$, то для любых ординалов $\delta, \gamma, \beta < \alpha$ выполнено:*
   (a) $\Phi^\beta \circ \Phi^\gamma = \Phi^{\gamma+\beta}$,
   (b) если $\gamma < \beta$, то $\Phi^\delta(D(\gamma, \beta)) = D^a(\gamma+\delta, \beta+\delta)$.

Замечание 1. Несмотря на то, что конечные итерации внутреннего функтора в прямом и скошенном смысле «почти не отличаются», можно показать, что на трансфинитных шагах α прямые и скошенные системы итераций (если они существуют) приводят к существенно различным конструкциям. В частности, объекты $\Phi^\alpha(a)$ в прямом и скошенном смысле, вообще говоря, не изоморфны.

В категории $\mathcal{M}$ из Примера 2 определены естественные пределы, и, следовательно, относительно них однозначно определены прямая и скошенная итерации внутреннего функтора (Prod, D). Будем обозначать их $(\{\mathrm{Prod}^\beta\}_{\beta<\alpha}, \{D^a\}_{a\in\mathrm{Ob}})$ и $(\{\mathrm{Prod}^\beta_*\}_{\beta<\alpha}, \{D^a_*\}_{a\in\mathrm{Ob}})$ соответственно.

Предложение 1. *Для любого объекта $\mathfrak{A}$ категории $\mathcal{M}$ и ординала α объект $\mathrm{Prod}^\alpha(\mathfrak{A})$ есть предельная ультрастепень $\mathfrak{A}$ ранга α по ультрафильтру $\mathfrak{u}$, а объект $\mathrm{Prod}^\alpha_*(\mathfrak{A})$ есть скошенная предельная ультрастепень $\mathfrak{A}$ ранга α по ультрафильтру $\mathfrak{u}$.*

Благодарность. Автор выражает благодарность профессору Владимиру Борисовичу Гисину за плодотворное обсуждение результатов данной работы.

Список литературы

[1] Poliakov N.L., Saveliev D.I. Generalizations of the Rudin-Keisler preorder and their model-theoretic applications // Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, computer science, mechanics series, 151, 2 (2025): 6–11.

[2] Saveliev D.I. On ultrafilter extensions of models // S.-D. Friedman et al. (eds.). The Infinity Project Proc. CRM Documents 11, Barcelona, 599–616 (2012).

[3] Poliakov N.L., Saveliev D.I. On ultrafilter extensions of first-order models and ultrafilter interpretations // Arch. Math. Logic, 60, 625–681 (2021).

[4] Mac Lane, S. Categories for the Working Mathematician. Graduate Texts in Mathematics. Vol. 5 (2nd ed.). Springer-Verlag (1998).

[5] Гисин В.Б. Прикладная теория категорий. М., Прометей (2025).

ON AUTOMORPHISMS OF THE INTEGRAL GROUP RINGS OF FINITE GROUPS

A.M. Popova, E.V. Grachev

Novosibirsk State Technical University,
K. Marx Avenue, 20, Novosibirsk, 630073, Russia
e-mail: popovaam1946@yandex.ru

1 Preliminaries

We study automorphisms of the integral group rings of finite groups with the use of representation theory. If $T_1(G), \cdots, T_s(G)$ are all irreducible nonequivalent representations of G then consider the representation

$$D(G) = \{\mathrm{diag}(T_1(g), T_2(g), ..., T_s(g)), g \in G\}.$$

Obviously, $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}[D(G)]$. If χ_i is the character of the representation $T_i(G)$, $\mathbb{Q}(\chi_i)$ is the field of χ_i, $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i))$, τ' is an extension of τ to an automorphism of the field of $T_i(G)$ then, on the algebra $\mathbb{Q}[T_i(G)]$, one can define an authomorphism $\hat{\tau'}$ by the rule $\hat{\tau'}((a_{ij})) = (a_{ij}^{\tau'})$.

In the article [1], the authors obtained a factorization of automorphisms of the integral group rings of finite groups by considering the ring $\mathbb{Z}[D(G)]$. In particular, we introduced the notion of a stabilizing automorphism, which is the composition $\hat{\tau'} \circ \varphi_s$, where φ_s is the conjugation by some unit s of the algebra $\mathbb{Q}[D(G)]$. The natural question arises whether for every $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i))$ there is a matrix s such that the composition $\hat{\tau'} \circ \varphi_s$ is an automorphism of the ring $\mathbb{Z}[D(G)]$.

Pass from the ring $\mathbb{Z}[D(G)]$ to the isomorphic ring $\mathbb{Z}[R(G)^t]$, where $R(G)$ is the right regular representation of the finite group $G = \{e, g_2, \cdots, g_n\}$ and the matrix $t \in GL_n(\mathbb{C})$ is such that the matrices $(R(G))^t$ have cell-diagonal form in which each regular representation $T_i(G)$ occurs exactly n_i times, where n_i is the degree of this representation.

Our nearest aim is to formulate conditions under which such s exists.

Observe first of all that a necessary condition for the existence of such s is the coincidence of the $\mathbb{Q}$-algebras $\mathbb{Q}[R(G)^t]$ and $\mathbb{Q}[(R(G)^t)^{\hat{\tau'}}]$.

Agree to refer to the rings $\mathbb{Z}[T_i(G)]$ as *cells* of the ring $\mathbb{Z}[D(G)]$.

Between different cells of $\mathbb{Z}[D(G)]$, we have the mappings

$$\mu_{ij} : \sum_{g\in G} \alpha_g T_i(g) \longleftrightarrow \sum_{g\in G} \alpha_g T_j(g), \alpha_g \in \mathbb{Z},$$

which are isomorphisms or not.

Concerning the family of those cells $\mathbb{Z}[T_i(G)], i = 1, ..., s$, between which the mappings μ_{ij} are isomorphisms, we say that they *constitute a block*. If for a cell $\mathbb{Z}[T_i(G)]$ none of the mappings μ_{ij} is an isomorphism then the cell constitutes a block. If for a mapping $\mathbb{Z}[T_i(G)]$ there are cells $\mathbb{Z}[T_j(G)]$ such that μ_{ij} are isomorphisms, we may assume without loss of generality that these cells are $\mathbb{Z}[T_{i+1}(G)]$,...,$\mathbb{Z}[T_{i+k-1}(G)]$. Put

$$D_l(G) = \{\mathrm{diag}(T_i(g), ..., T_{i+k-1}(g)), g \in G\}.$$

Refer to the ring $O_l = \mathbb{Z}[D_l(G)]$ as a *block*. In such notations,

$$D(g) = \mathrm{diag}(D_1(g), ..., D_t(g)).$$

Lemma 1. *Suppose that cells $\mathbb{Z}[T_i(G)], \mathbb{Z}[T_{i+1}(G)], \ldots, \mathbb{Z}[T_{i+k-1}(G)], k \geqslant 1$, with the respective characters $\chi_i, ..., \chi_{i+k-1}$ constitute a block O. Then the degrees of the representations $T_i(G), \ldots, T_{i+k-1}(G)$ coincide, $k = |\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i))|$, and the representation $T_{i+j}(G)$ is equivalent to the representation $\hat{\tau'}(T_i(G))$, where $\tau' \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(T_i(G)))$ is an extension of some automorphism $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i))$ depending on j, $j = 0, ..., k-1$.*

Proof. All the cells $\mathbb{Z}[T_i(G)], \mathbb{Z}[T_{i+1}(G)], \ldots, \mathbb{Z}[T_{i+k-1}(G)]$ in the block O are isomorphic between each other.

In each cell $\mathbb{Z}[T_j(G)], j = i, \ldots, i+k-1$, consider the subring generated by the *class sums*

$$\sum_{g\in g_0^G} T_j(g) = \frac{|g_0^G|\chi_j(g_0)}{n_j} e_{n_j},$$

where g_0^G is the conjugacy class of an element $g_0 \in G$. Obviously, the mappings μ_{ij} define isomorphisms between the corresponding subrings. The quotient fields of these subrings are isomorphic, and each of them is isomorphic to its corresponding character field $\mathbb{Q}(\chi_j)$; therefore, the character fields are also isomorphic. Thus, every cell isomorphism induced by the mapping μ_{ij} is extendable to an isomorphism of the corresponding fields $\mathbb{Q}(\chi_i)$ and $\mathbb{Q}(\chi_j)$. Further, this isomorphism can be extended to some automorphism of a finite algebraic extension $K = \mathbb{Q}(\omega_l)$ containing the fields under consideration

([3]). The automorphisms of the represnetation field K of G take each character field $\mathbb{Q}(\chi_j) \subseteq K$ into itself, which yields the equalities $\mathbb{Q}(\chi_i) = \cdots = \mathbb{Q}(\chi_{i+k-1})$. Consequently, the mappings $\mu_{ij}, j = i+1, \ldots, i+k-1$, induce automorphisms of the character field $\mathbb{Q}(\chi_i)$.

Let $\tau_{ij} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i))$ be the automorphism induced by μ_{ij}, then

$$\frac{|g_0^G|(\chi_i(g_0))^{\tau_{ij}}}{n_i} = \left(\frac{|g_0^G|\chi_i(g_0)}{n_i}\right)^{\tau_{ij}} = \frac{|g_0^G|\chi_j(g_0)}{n_j}.$$

Consequently, the image of the irreducible character $\chi_i^{\tau_{ij}} = \dfrac{n_i}{n_j}\chi_j$. Since all irreducible characters are linearly independent over $\mathbb{C}$, we have $n_i = n_j$. Obviously, to disctinct mappings μ_{ij} there correspond different automorphisms $\tau_{ij} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i))$; therefore, $k \leqslant |\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i))|$.

On the other hand, automorphisms of the field $\mathbb{Q}(\chi_i)$ extend to automorphisms of the field $\mathbb{Q}(T_i(G))$ and then to automorphisms of the field K (see [2]). Any automorphism of the representation field of G maps an irreducible character to an irreducible character ([3]). This gives that any automorphism of the field $\mathbb{Q}(\chi_i)$ takes χ_i to some irreducible character χ_j. If we extend this automorphism to an automorphism of the field $\mathbb{Q}(T_i(G))$ and apply it to the entries of the matrix $T_i(G)$ then, up to equivalence, we obtain the representation $T_j(G)$ due to the coincidence of the characters. Obviously, the mapping μ_{ij} induced by an automorphism of the field $\mathbb{Q}(T_i(G))$ and the conjugation by a matrix from $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{C})$ defines an isomorphism. Thus, the cell $\mathbb{Z}[T_j(G)]$ gets into the block O and $k \geqslant |\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i))|$.

The above arguments imply that if $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi_i)) = \{\tau_1 = id, \tau_2, ..., \tau_r\}$ then $k = r$ and the representation $T_{i+j}(G)$ is equivalent to the representation $\hat{\tau'}_{j+1}(T_i(G))$, $j = 0, ..., r-1$, τ'_{j+1} is an extension of τ_{j+1} up to an automorphism of the field $\mathbb{Q}(T_i(G))$. Thus, the lemma is proved. $\square$

2 Description of the algorithm and the main theorem

Lemma 1 implies that each block contains $k_i n_i^2$ linearly independent matrices and a matrix in a block is uniquely defined by its first cell. Therefore, if the *Schur index* (see [2]) is equal to 1 then from an additive basis of the block one can "compose" any matrix in the algebra $(\mathbb{Q}(\chi_i))_{n_i}$, which implies the coincidence of the $\mathbb{Q}$-algebras of the block under the action of $\hat{\tau}'$. Hence, in the particular case when all the representations $T_i(G)$ have Schur index 1, the necessary condition for the existence of a matrix s is fulfilled.

If for some representations $T_i(G)$ the Schur index is greater than 1 then the coincidence of the $\mathbb{Q}$-algebras may fail. So, let τ' be an automorphism of the representation field of G.

For convenience of the exposition, enumerate the steps of our considerations.

1. Suppose the coincidence of the $\mathbb{Q}$-algebras $\mathbb{Q}[R(G)^t]$ and $\mathbb{Q}[(R(G)^t)^{\hat{\tau}'}]$.

2. The coincidence of the $\mathbb{Q}$-algebras implies that the elements $((R(g_i))^t)^{\hat{\tau}'}$ are $\mathbb{Q}$-linear combinations of the elements $(R(g_i))^t$.

3. Item 2 implies that the elements $((R(G))^t)^{\hat{\tau}'}$ in the $\mathbb{Q}$-algebra of the left regular representation of G have the form

$$L(g_i) = \frac{p_1^i}{q_1^i} R_l(e) + \cdots + \frac{p_n^i}{q_n^i} R_l(g_n), g_i \in G, i = 1, \ldots, n.$$

We obtain a representation $L(G)$ of the group G in the algebra $\mathbb{Q}[R_l(G)]$.

4. Observe that by $\mathbb{Z}^n$ we mean the set of integral vectors of length n written as a row or a column. It is always clear from the context which of the cases is being considered. The same applies to the canonical basis $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

Consider the algebra $\mathbb{Q}[R_l(G)]$. The first columns of the matrices $R_l(e)$, $\ldots$, $R_l(g_n)$ constitute the canonical basis of $\mathbb{Z}^n$, and each matrix $R_l(g_i)$ is uniquely determined by its first column. Namely, the first column of this matrix is the vector e_i of the canonical basis of $\mathbb{Z}^n$, the second column equals $R(g_2)e_i$, where $R(G)$ is the right regular representation of G, etc. Thus, $R_l(g_i) = (e_i \ R(g_2)e_i \ \cdots \ R(g_n)e_i)$. It is now clear that if $a = u_1 R_l(e) + \cdots + u_n R_l(g_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$ then $a = (u^T \ R(g_2)u^T \ \cdots \ R(g_n)u^T)$.

5. If $a = \alpha_1 R_l(e) + \cdots + \alpha_n R_l(g_n) \in \mathbb{Q}[R_l(G)] \cap M_n(\mathbb{Z})$ then item 4 implies that $a \in \mathbb{Z}[R_l(G)]$.

6. By Burnside's theorem (see [4, p. 68]), for the group $L(G)$ there exists a matrix $s \in GL_n(\mathbb{Q})$ such that $(L(G))^s \subseteq GL_n(\mathbb{Z})$. In our case, the positive answer to the above-posed question means that that there is a unit s_l of the algebra $\mathbb{Q}[R_l(G)]$ such that $(L(G))^{s_l} \subseteq GL_n(\mathbb{Z})$. Obviously, the existence of s_l implies the existence of s.

7. Following the idea of the proof of Burnside's theorem, we must find a submodule N in $\mathbb{Z}^n$ invariant under $L(G)$ and such that the transition matrix from the basis of N to the canonical basis of $\mathbb{Z}^n$ be from $\mathbb{Q}[R_l(G)]$. Then the matrices of $\mathbb{Z}[L(G)]$ conjugated by such a transition matrix remain in $\mathbb{Q}[R_l(G)]$ and become integral, i.e., the ring $\mathbb{Z}[L(G)]$ under such conjugation gets into the ring $\mathbb{Z}[R_l(G)]$, which implies the existence of the matrix s_l and hence of the matrix s. We will consider right modules. Then the coordinated of the basis of N in the canonical basis of $\mathbb{Z}^n$ are the rows of the transition matrix. If we recall that transposition is an anti-isomorphism of the algebra

$\mathbb{Q}[R_l(G)]$ and $(R(g_i))^T = R(g_i^{-1})$ then the transition matrix must have the form

$$S(u) = \begin{pmatrix} u \\ uR(g_2^{-1}) \\ \vdots \\ uR(g_n^{-1}) \end{pmatrix},$$

or, equivalently, N must have the basis $u, uR(g_2^{-1}), \dots, uR(g_n^{-1})$, i.e., $N = u\mathbb{Z}[R(G)]$.

8. Invariance of N under $L(G)$. Put $p_i = (\frac{p_1^i}{q_1^i}, \cdots, \frac{p_n^i}{q_n^i})$. Then, by item 4,

$$L(g_i) = (p_i^T \ R(g_2)p_i^T \ \cdots \ R(g_n)p_i^T),$$

$$uL(g_i) = (up_i^T, uR(g_2)p_i^T, \dots, uR(g_n)p_i^T) =$$

$$= (p_i u^T, \dots, p_i R(g_n^{-1})u^T) = p_i(u^T \cdots R(g_n^{-1})u^T) = p_i\widetilde{S}(u),$$

where $\widetilde{S}(u) = (u^T \cdots R(g_n^{-1})u^T)$.

The invariance of N under $L(G)$ implies that $p_i\widetilde{S}(u) = (z_1^i, \dots, z_n^i)S(u)$. Consider the matrix $L' = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$. The last equality implies that

$$L'\widetilde{S}(u) = AS(u), \text{ where } A \in M_n(\mathbb{Z}) \qquad (*)$$

The automorphism $\widehat{\tau}'$, defined on the algebra $\mathbb{Q}[(R(G))^t]$, induces an automorphism $\sigma : R_l(G) \to L(G)$ on the algebra $\mathbb{Q}[R_l(G)]$. L' is the matrix of σ in the basis $R_l(e), \dots, R_l(g_n)$ of the algebra $Q[R_l(G)]$, which implies that $|L'| = \pm 1$ since σ has finite order. Then condition (*) gives $|A| = \pm 1$ because $|\widetilde{S}(u)| = \pm|S(u)|$. Since $uL(g_i) = p_i\widetilde{S}(u)$, the rows of the matrix $L'\widetilde{S}(u)$ are the coordinates of the basis of the module $u\mathbb{Z}[L(G)]$. Therefore, condition $(*)$ for $|A| = \pm 1$ means that the modules $u\mathbb{Z}[L(G)]$ and $u\mathbb{Z}[R(G)]$ coincide. Thus, condition $(*)$ determines the invariance of the module $N = u\mathbb{Z}[R(G)]$ under $L(G)$ since the module $u\mathbb{Z}[L(G)]$ is obviously invariant under $L(G)$.

9. We infer that the existence of the matrix s is equivalent to the existence of a vector $u = (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{Z}^n$ satisfying the following conditions:

(1) $uL(g_i) \in \mathbb{Z}^n, i = 1, ..., n$;

(2) the matrix $s_l = u_1R_l(e) + \cdots + u_nR_l(g_n)$ is invertible;

(3) condition $(*)$ is fulfilled.

Theorem 1. *If* $\mathbb{Q}[(R(G))^t] = \mathbb{Q}[((R(G))^t)^{\hat{\tau'}}]$ *then, given* $\tau \in Aut\mathbb{Q}(\chi_i)$*, there exists a unit* s *of the algebra* $\mathbb{Q}[(R(G))^t]$ *such that the composition* $\hat{\tau'} \circ \varphi_s$ *is an automorphism of the ring* $\mathbb{Z}[(R(G))^t]$ *if and only if the following conditions hold: there exists a vector* $u = (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{Z}^n$ *such that*

(1) $uL(g_i) \in \mathbb{Z}^n, i = 1, ..., n$*;*

(2) the matrix $s_l = u_1 R_l(e) + \cdots + u_n R_l(g_n)$ *is invertible;*

(3) $L'\widetilde{S}(u) = AS(u)$*, where* $A \in M_n(\mathbb{Z})$*.*

Proof. Necessity. Suppose that s exists. Then the $\mathbb{Q}$-algebras coincide and there exists a unit $s' \in \mathbb{Q}[R_l(G)]$ such that $\mathbb{Z}[L(G)]^{s'} = \mathbb{Z}[R_l(G)]$. By item 4,

$$s' = (v^T \ R(g_2)v^T \ \cdots \ R(g_n)v^T),$$

where $v = (\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n})$. Assume that

$$q = \text{l.c.m.}(q_1, \ldots, q_n), \ u = qv, \ qs' = (u^T \ R(g_2)u^T \ \cdots \ R(g_n)u^T),$$

and we can take qs' instead of s'. In this case, the vector $u \in \mathbb{Z}^n$ satisfies conditions (1),(2),(3). Indeed, the vectors $u, uR(g_2^{-1}), \ldots, uR(g_n^{-1})$ are linearly independent, i.e., (2) holds. In this basis, the matrices $L(g_i)$ are integral. Then $uL(g_i) = z_1 u + \cdots + z_n u(R(g_n^{-1}) \in \mathbb{Z}^n$, i.e., (1) is fulfilled. Moreover, the module N with basis $u, uR(g_2^{-1}), \ldots, uR(g_n^{-1})$ is invariant under $L(G)$, i.e., the matrices $L(G)$ become integral, and this means the fulfillment of condition (3).

Sufficiency. Note that conditions (1),(2),(3) coincide with conditions (1)-(3) of item 9, which is equivalent to the existence of s. The theorem is proved. □

Список литературы

[1] A.M. Popova, E.V. Grachev. The Factorization Problem for Automorphisms of Group Rings of Finite Groups // Algebra and Model Theory 11, Novosibirsk 2017, 75–80.

[2] Ch.W. Curtis, I. Reiner. Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras. Interscience Publishers, New York–London, 1962, 685 pp. [Nauka, Moscow, 1969, 668 pp.].

[3] V.A. Belonogov. Representations and Characters in the Theory of Finite Groups. Akad. Nauk SSSR Ural. Otdel., Sverdlovsk, 1990. 380 pp. [in Russian].

[4] D. A. Suprunenko. Matrix Groups. Nauka, Moscow, 1972, 351 pp. [AMS, Providence, R.I., 1976. viii+252 pp.]

ISOMORPHISMS AND DERIVATIONS OF PRE-LIE ALGEBRAS

A.P. Pozhidaev

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
4, Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Russia
e-mail: app@math.nsc.ru

Recall the definition of the left-symmetric (pre-Lie) algebras (LSA): they are given by the identity $(x, y, z) = (y, x, z)$, where $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$. Every LSA is Lie-admissible. In what follows the symbol := denotes an equality by definition.

The main examples: let $(\mathcal{A}; \cdot)$ be a commutative associative algebra, and let d be its derivation, $\alpha \in \mathcal{A}$. Then $a \circ b = a \cdot d(b) + \alpha \cdot a \cdot b$ turns $\mathcal{A}$ into a pre-Lie algebra.

Endomorph $E(\mathcal{A})$**.** Let $\mathcal{A}$ be an algebra. Consider $E(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \oplus End\,\mathcal{A}$ with the natural product and $\phi a = a\phi + [\phi, R_a]$ for all $a \in \mathcal{A}, \phi \in End\,\mathcal{A}$. The obtain algebra is called an *endomorph* of $\mathcal{A}$. Such an algebra is usually simple. If $\mathcal{A}$ is LSA then $E(\mathcal{A})$ is LSA as well.

Recall that the Novikov algebra is a LSA whose right multiplication operators R_x are mutually commutative.

The examples show that there are simple left-symmetric algebras with solvable and reductive adjoint Lie algebras.

Denote by L_x the left multiplication operator and by $\mathcal{M}$ the subalgebra of $End\,\mathcal{A}$ generated by left and right multiplication operators. Let $\mathcal{R}$ be the subalgebra of $\mathcal{M}$ generated by the right multiplication operators. Let $C_{\mathcal{M}}(\mathcal{R})$ be the centralizer of $\mathcal{R}$ in $\mathcal{M}$.

Theorem 1. [1] *Let J be the Jacobson radical of the right multiplication algebra $\mathcal{R}$ of a LSA $\mathcal{A}$ over a field $\mathcal{F}$:*

(1) *if $[L_x, J] \subseteq J$ for all $x \in \mathcal{A}$ then $J = 0$, $\mathcal{R}$ is a simple subalgebra of $\mathcal{M}$, and $\mathcal{R}$ contains the identity element of $\mathcal{M}$;*
(2) *if $\mathcal{F}$ is an algebraically closed field then $\mathcal{M} \cong \mathcal{R} \otimes C_{\mathcal{M}}(\mathcal{R})$;*
(3) *if $\mathcal{F}$ is of characteristic zero then $[L_x, J] \subseteq J$ for every $x \in \mathcal{A}$.*

Let $\mathcal{A}$ be a simple finite-dimensional pre-Lie algebra, $\mathfrak{g} = \mathcal{A}^{(-)}$ (*adjoint algebra*) be a metabelian Lie algebra, and $[\mathcal{A},\mathcal{A}]([\mathcal{A},\mathcal{A}][\mathcal{A},\mathcal{A}]) = 0$. Denote the class of such algebras by $\mathbf{A}$.

Theorem 2. [1] $\mathbf{A}$ *contains infinitely many non-isomorphic simple algebras.*

Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be LSA; $\circ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ $(x \circ y = y \circ x)$, and let we have a Lie homomorphism $\mathcal{D} : \mathcal{B}^{(-)} \mapsto Der\,\mathcal{A}$, which is defined such that

$$\mathcal{D}_b(x) \circ y + x \circ \mathcal{D}_b(y) = b(x \circ y),$$

$$(xy) \circ z - x \circ (yz) = (yx) \circ z - y \circ (xz)$$

for all $x, y, z \in \mathcal{A},\ b \in \mathcal{B},\ \mathcal{D}_b := \mathcal{D}(b)$. Consider $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ is a subalgebra,

$$b \cdot x = \mathcal{D}_b(x), \quad x \cdot b = 0, \quad x \cdot y = xy + x \circ y$$

for all $x, y \in \mathcal{A},\ b \in \mathcal{B}$. Denote it by $\mathcal{A} \circ_{\mathcal{D}} \mathcal{B}$ [3].

Theorem. $\mathcal{A} \circ_{\mathcal{D}} \mathcal{B}$ *is LSA.*

Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be some algebras with the following actions:

$$\begin{array}{ll} \triangleright : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}; & \triangleright : \mathcal{B} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}; \\ \triangleleft : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{A}; & \triangleleft : \mathcal{B} \times \mathcal{A} \to \mathcal{B}; \\ \multicolumn{2}{l}{a \triangleright b \in \mathcal{B},\ b \triangleright a \in \mathcal{A},\ a \triangleleft b \in \mathcal{A},\ b \triangleleft a \in \mathcal{B}} \end{array}$$

for all $a \in \mathcal{A},\ b \in \mathcal{B}$. Given two products $\circ_i,\ i = 1, 2$, from $\mathcal{A}$ into $\mathcal{B}$ and from $\mathcal{B}$ into $\mathcal{A}$, define on $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ the new product $\cdot$:

$$\begin{array}{rcl} b \cdot a &=& b \triangleright a + b \triangleleft a, \\ a \cdot b &=& a \triangleright b + a \triangleleft b, \\ a_1 \cdot a_2 &=& a_1 a_2 + a_1 \circ_1 a_2, \\ b_1 \cdot b_2 &=& b_1 b_2 + b_1 \circ_2 b_2 \end{array}$$

for all $a, a_i \in \mathcal{A},\ b, b_i \in \mathcal{B}$. Denote: $E(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

The first Witt double $\mathcal{A}_d$ [3].

Let $\mathcal{A}$ be an associative commutative algebra, $0 \neq d \in Der(\mathcal{A})$, $\bar{\mathcal{A}}$ be a copy of $\mathcal{A}$. Define:

$$\bar{x} \cdot y = xd(y), \quad x \cdot \bar{y} = 0, \quad x \cdot y = xy + \overline{xy}, \bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xd(y)}.$$

Theorem. $\mathcal{A}_d$ *is LSA,* $\mathcal{A}_d$ *is simple iff* $\mathcal{A}$ *is* d*-simple.*

Let $Aut\,\mathcal{A}$ be the automorphism group of $\mathcal{A}$. Define

$$Aut_d\,\mathcal{A} := \{\phi \in Aut\,\mathcal{A} : \phi d = d\phi\},\ Aut_d\,\mathcal{A} \leq Aut\,\mathcal{A}.$$

Theorem. *Let $\mathcal{A}$ be a finite-dimensional associative commutative d-simple algebra. Then $\phi \in Aut\,\mathcal{A}_d$ iff $\phi = \psi + \overline{\psi}$ with $\psi \in Aut_d\,\mathcal{A}$.*

Theorem. *Let $\mathcal{A}$ be a finite-dimensional associative commutative d-simple algebra over an algebraically closed field $\mathcal{F}, d \neq 0$. Then $Aut\mathcal{A}_d \cong Aut_d\mathcal{A}$.*

The second Witt double $W_d(\mathcal{A})$ [3].

Let $\mathcal{A}$ be as above. Define the following actions:

$$a \triangleright \bar{b} = \overline{ab}, \quad \bar{b} \triangleright a = bd(a),\ a \triangleleft \bar{b} = 0, \quad \bar{b} \triangleleft a = \overline{ab}$$

for all $a, b \in \mathcal{A}$. Put

$$\begin{aligned} \bar{b} \cdot a &= bd(a) + \overline{ba},\ \ a \cdot \bar{b} = \overline{ab}, \\ a \cdot b &= ab,\ \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ad(b)}. \end{aligned}$$

Theorem. *$W_d(\mathcal{A})$ is LSA. $W_d(\mathcal{A})$ is simple iff $\mathcal{A}$ is d-simple.*

$$\begin{aligned} Aut_d^q\,\mathcal{A} &:= \{\phi \in Aut\,\mathcal{A} : \phi d = \alpha d\phi \text{ for some } \alpha = \alpha_\phi \in \mathcal{F}^*\}; \\ Aut_d^*\,\mathcal{A} &:= \{\phi \in Aut\,\mathcal{A} : \phi d = \alpha d\phi \text{ for some } \alpha \in \mathcal{A} \setminus N\}. \end{aligned}$$

Lemma. $Aut_d^q\,\mathcal{A},\ Aut_d^*\,\mathcal{A} \leq Aut\,\mathcal{A}$; $Aut_d\,\mathcal{A} \trianglelefteq Aut_d^q\,\mathcal{A}$.

Theorem. *Let A be a finite-dimensional associative commutative d-simple algebra over an algebraically closed field of characteristic not 2, $d \neq 0$. Then*

$$Aut\,\mathcal{W}_d(\mathcal{A}) \cong Aut_d^\star\,\mathcal{A}.$$

Isomorphisms of Endomorphs and Witt doubles.

Say that $\mathcal{A}$ is *strictly local* (*s.l.*) if there is an ideal $I_\mathcal{A}$ such that $\mathcal{A}/I_\mathcal{A} \cong \mathcal{F}$.

s.l.-Algebras $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are *τ-isomorphic* if there are isomorphisms $\psi : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ and $\tau : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{B})$ of right $\mathcal{M}(\mathcal{A})$-modules $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ and $\mathcal{M}(\mathcal{B})$-module $\mathcal{M}(\mathcal{B})$; and $\theta : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{B})$:

$$\psi(xy) = \psi(x)\psi(y) + \psi(x)\tau(y) + \psi(y)\tau(x),$$

$$\tau(xA) = \tau(x)\theta(A),\ \psi(xA) = \psi(x)\theta(A)$$

for all $x, y \in \mathcal{A}$; moreover, $\psi(I_{\mathcal{A}}) = I_{\mathcal{B}}$, $I_{\mathcal{B}}\tau(\mathcal{A}) = 0$, $f_1\tau(e_1) - f_1 \in I_{\mathcal{B}}$, where $e_1 + I_{\mathcal{A}}$ and $f_1 + I_{\mathcal{B}}$ are unities in $\mathcal{A}/I_{\mathcal{A}}$ and $\mathcal{B}/I_{\mathcal{B}}$.

Isomorphisms of Endomorphs.

Theorem. *Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be finite-dimensional algebras over $\mathcal{F}$, ϕ be an isomorphism of $E(\mathcal{A})$ and $E(\mathcal{B})$. Then $\phi = \psi + \tau$ for some uniquely defined $\psi : E(\mathcal{A}) \mapsto \mathcal{B}$ and $\tau : E(\mathcal{A}) \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{B})$. Assume that τ is nondegenerate being restricted on $\mathcal{A}$. Then $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are s.l.-algebras; the restriction of τ on $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ is an isomorphism, and $\psi : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ is a τ-isomorphism. Conversely, if $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are s.l. and τ-isomorphic then $E(\mathcal{A}) \cong E(\mathcal{B})$.*

Say that $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are $\mathcal{M}$-isomorphic if there is an isomorphism ψ of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ such that $\psi(xA) = \psi(x)\tau(A)$ for some isomorphism $\tau : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{B})$; notation: $\mathcal{A} \overset{\mathcal{M}}{\cong} \mathcal{B}$.

Theorem. *Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be finite-dimensional algebras over $\mathcal{F}$ (not s.l.). Then*

$$E(\mathcal{A}) \cong E(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \overset{\mathcal{M}}{\cong} \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}.$$

Automorphisms.

$\mathrm{Aut}_{\mathcal{M}}\mathcal{A} := \{\psi \in \mathrm{Aut}\mathcal{A} : \exists \tau \in \mathrm{Aut}\mathcal{M} : \psi(xB) = \psi(x)\tau(B)\ \forall x \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{M}\} \leq \mathrm{Aut}\mathcal{A}$.

Theorem. *Let $\mathcal{A}$ be a finite-dimensional algebra over a field $\mathcal{F}$ (not s.l.). Then $\mathrm{Aut}E(\mathcal{A}) \cong \mathrm{Aut}_{\mathcal{M}}\mathcal{A}$.*

Theorem. *Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be finite-dimensional algebras over a field $\mathcal{F}$ (not s.l.). Then $E_l(\mathcal{A}) \cong E_l(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.*

Isomorphisms of Witt doubles [2].

Let $d_1, d_2 \in \mathrm{End}\,\mathcal{A}$ be a pair of linear mappings. Put

$$\mathrm{Aut}_{d_1,d_2}\mathcal{A} := \{\psi \in \mathrm{Aut}\mathcal{A} : \psi d_1 = d_2\psi\}.$$

Say that d_1 and d_2 are *conjugated* by ψ.

Theorem. *Let $\mathcal{A}$ be a finite-dimensional associative commutative d_i-simple algebra over $\mathcal{F}$. Then $\phi : \mathcal{A}_{d_1} \mapsto \mathcal{A}_{d_2}$ is an isomorphism iff d_1 and d_2 are conjugated by $\psi \in \mathrm{Aut}_{d_1,d_2}\mathcal{A}$, and $\phi = \psi + \overline{\psi}$.*

Denote by $\mathcal{A}^\star$ the set of invertible $\alpha \in \mathcal{A}$ such that there is an invertible $\gamma \in \mathcal{A}$ (or zero if $\alpha \in \mathcal{F}$) with the property $\gamma^2 + \alpha d_2(\gamma) = 0$ and $d_2(\gamma) \in \mathcal{F}$.

Theorem. *Let $\mathcal{A}$ be a finite-dimensional associative commutative d_i-simple algebra over an algebraically closed field $\mathcal{F}$, $i = 1, 2$. Then $W_{d_1}(\mathcal{A})$ and $W_{d_2}(\mathcal{A})$ are isomorphic iff d_1 and d_2 are α-conjugated by $\psi \in \mathrm{Aut}^\star_d\mathcal{A}$.*

Derivations of simple Novikov algebras.

Say that $H \in Der\mathcal{A}$ is *α-commuting* with $\mathcal{D} = d + R_a$ if

$$H\mathcal{D} = \mathcal{D}(H + \alpha)$$

for some $\alpha := \omega(H) \in \mathcal{A}$ $(H + \alpha := H + R_\alpha)$. Put

$$Der_{\mathcal{D}}\,\mathcal{A} = \{H \in Der\,\mathcal{A} : H\mathcal{D} = \mathcal{D}(H + \omega(H))\}.$$

Theorem. *Let $\mathcal{A}$ be a finite-dimensional associative commutative d-simple algebra over an algebraically closed field $\mathcal{F}$ of characteristic $p > 0$ and $(\mathcal{A}, d, a)$ be simple. Then $G \in Der(\mathcal{A}, d, a)$ iff $G = H + \omega(H)$ for some $H \in Der_{\mathcal{D}}\,\mathcal{A}$; moreover, $\omega(H) \in \mathcal{F}$ in the case $a = 0$.*

Derivations of simple Witt doubles.

Say that a derivation $\mathcal{D}$ of $\mathcal{A}_d$ is *induced* by $\tau \in Der\,\mathcal{A}$ if for all $a \in \mathcal{A}$ we have

$$\mathcal{D}(a) = \tau(a), \quad \mathcal{D}(\bar{a}) = \overline{\tau(a)},$$

where $Der_d\,\mathcal{A}$ is the subspace of derivations in $Der\,\mathcal{A}$ commuting with d.

Theorem. *$\mathcal{D} \in Der\mathcal{A}_d$ iff $\mathcal{D}$ is induced by $\tau \in Der_d\,\mathcal{A}$.*

Say that $\mathcal{D} \in Der\,W_d(\mathcal{A})$ is *induced* by an (α, d)-commuting $\tau \in Der\,\mathcal{A}$ if

$$\mathcal{D}(a) \;=\; \tau(a), \quad \mathcal{D}(\overline{a}) = \gamma a + \overline{(\tau + \alpha)(a)}$$

for all $a \in \mathcal{A}$ and some $\alpha, \gamma \in \mathcal{A}$ such that $d(\gamma) = 0,\ 2\gamma + d(\alpha) = 0$.

Theorem. *If the field $\mathcal{F}$ is algebraically closed then every derivation of a finite-dimensional simple algebra $W_d(\mathcal{A})$ is induced by an α-commuting with d derivation τ of $\mathcal{A}$.*

References

[1] A. Pozhidaev, U. Umirbaev, V. Zhelyabin, On simple left-symmetric algebras // J. Algebra **621**, (2023), 58–86.

[2] A. P. Pozhidaev, Automorphism groups of the pre-Lie Witt doubles // Sib. Math. J. **65**, 6 (2024), 1214–1226.

[3] A. P. Pozhidaev, On a generalized Mizuhara construction // Sib. Math. J. **65**, 3 (2024), 599–610.

PRECOMPLETE RELATIONS AND THEIR PRESERVATIONS

T.E. Rajabov, S.V. Sudoplatov*

Novosibirsk State University,
1, Pirogova street, Novosibirsk, 630090, Russia;
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State Technical University,
20, K.Marx avenue, Novosibirsk, 630073, Russia
e-mail: temurboy264@gmail.com, sudoplat@math.nsc.ru

1 Introduction

Relations form the foundation of algebraic systems representing links between elements [1, 2, 3]. In [4] some general principles of preservation of properties are introduced and studied. In the present paper we study possibilities of preservations for precomplete relations.

2 Preliminaries

Definition. [3] Let $\mathcal{M}$ be a structure, $P_1 \subseteq M^{k_1}, \ldots, P_n \subseteq M^{k_n}$, $Q \subseteq M^m$ be properties, $\Phi = \Phi(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n, \overline{y})$ be a type with $l(\overline{x}_1) = k_1$, $\ldots$, $l(\overline{x}_n) = k_n$, $l(\overline{y}) = m$. We say that the tuple $(P_1, \ldots, P_n, Q)$ is (*totally*) Φ*-preserved*, or Φ is (*totally*) $(P_1, \ldots, P_n, Q)$*-preserving*, if for any $\overline{a}_1 \in P_1, \ldots, \overline{a}_n \in P_n$,

$$\Phi(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n, \mathcal{M}) \subseteq Q.$$

Here we also say on *universal* Φ- and $(P_1, \ldots, P_n, Q)$-preservation.

If $\Phi(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n, \mathcal{M}) \subseteq Q$ for some $\overline{a}_1 \in P_1, \ldots, \overline{a}_n \in P_n$, then we say that $(P_1, \ldots, P_n, Q)$ is *existentially* Φ*-preserved*, or Φ is *existentially* $(P_1, \ldots, P_n, Q)$*-preserving*.

*The work was carried out in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No. FWNF-2022-0012.

If $\Phi(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n,\mathcal{M})\cap Q\neq\emptyset$ for some $\overline{a}_1\in P_1,\ldots,\overline{a}_n\in P_n$ then we say that $(P_1,\ldots,P_n,Q)$ is *$\exists$-partially Φ-preserved*, or Φ is *$\exists$-partially $(P_1,\ldots,P_n,Q)$-preserving*. If this property holds for any $\overline{a}_1\in P_1,\ldots,\overline{a}_n\in P_n$, we say that $(P_1,\ldots,P_n,Q)$ is *$\forall$-partially Φ-preserved*, or Φ is *$\forall$-partially $(P_1,\ldots,P_n,Q)$-preserving*.

We say that the tuple $(P_1,\ldots,P_n,Q)$ is *$\exists$-partially Φ-non-preserved*, or Φ is *$\exists$-partially $(P_1,\ldots,P_n,Q)$-non-preserving*, if $\Phi(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n,\mathcal{M})\cap\overline{Q}\neq\emptyset$ for some $\overline{a}_1\in P_1,\ldots,\overline{a}_n\in P_n$, where $\overline{Q}=M^m\setminus Q$. If this property holds for any $\overline{a}_1\in P_1,\ldots,\overline{a}_n\in P_n$, we say that $(P_1,\ldots,P_n,Q)$ is *$\forall$-partially Φ-non-preserved*, or Φ is *$\forall$-partially $(P_1,\ldots,P_n,Q)$-non-preserving*. In the latter case we also say that the tuple $(P_1,\ldots,P_n,Q)$ is *totally Φ-non-preserved*, or Φ is *totally $(P_1,\ldots,P_n,Q)$-non-preserving*.

If $\Phi(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n,\mathcal{M})\subseteq\overline{Q}$ for some $\overline{a}_1\in P_1,\ldots,\overline{a}_n\in P_n$, then we say that $(P_1,\ldots,P_n,Q)$ is *existentially Φ-disjoint*, or Φ is *existentially $(P_1,\ldots,P_n,Q)$-disjointing*.

If $\Phi(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n,\mathcal{M})\subseteq\overline{Q}$ for any $\overline{a}_1\in P_1,\ldots,\overline{a}_n\in P_n$, then we say that $(P_1,\ldots,P_n,Q)$ is *totally Φ-disjoint* or *universally Φ-disjoint*, or Φ is *totally $(P_1,\ldots,P_n,Q)$-disjointing*, or *universally $(P_1,\ldots,P_n,Q)$-disjointing*.

If Φ is a singleton $\{\varphi\}$ then totally/existentially/partially Φ-(non-)preserved/disjoint tuples are called *totally/existentially/partially φ-(non-)preserved/disjoint*, respectively, and φ is *totally/existentially/partially $(P_1,\ldots,P_n,Q)$-(non-)preserving/disjointing*.

If $P_1=\ldots=P_n=Q$ then $(P_1,\ldots,P_n,Q)$-preserving type Φ is called *$(P_1,\ldots,P_n,Q)$-idempotent* and $(P_1,\ldots,P_n,Q)$ is *Φ-idempotent*.

If $\Phi=\{\varphi\}$ then we replace Φ by φ in the definitions above.

The following example illustrates the notion of total Φ-preservation.

Example 2.1. Let $M=\{0,1\}$, $P_1=P_2=Q=\{(0,0),(0,1),(1,1)\}\subseteq M^2$. For the type $\Phi(x_1,x_2,y)=\{x_1\approx y\wedge x_2\approx y\}$ we have the following. For any $(a_1,a_2)\in P_1$, $\Phi(a_1,a_2,M)=\emptyset$ if $a_1\neq a_2$, and $\Phi(a_1,a_2,M)\subset \mathrm{id}_M=\{(b,b)\mid b\in M\}=\{(0,0),(1,1)\}\subset Q$. Thus (P_1,P_2,Q) is totally Φ-preserved, with the idempotence.

3 Precomplete binary relations and their preservations

Recall [2, 3] that a binary relation $Q\subseteq M^2$ is *complete* if $Q=M^2$.

The following proposition gives a characterizations of the emptiness and completeness of Q in terms of preservation.

Proposition 3.1. [4] *Let $\Gamma = \langle M; Q\rangle$ be a graph. The following conditions are equivalent:*
1) $Q = \emptyset$ *(respectively,* $Q = M^2$*);*
2) *the formula* $Q(x, y)$ $(\neg Q(x, y))$ *is* $(M, \emptyset)$*-preserving;*
3) *the formula* $Q(x, y)$ $(\neg Q(x, y))$ *is* (M, M)*-disjoint.*

A relation $Q \subseteq M^2$ is called *precomplete*, or *totally comparing*, if $Q \cup Q^{-1} = M^2$. Following [2, 3] totally comparing partial orders are called *linear orders*. So we can say that precomplete non-complete binary relations are *linear*.

By the definition any complete relation Q is precomplete, and the vice versa holds iff M is a singleton.

Proposition 3.2. *For any binary relation* $Q \subseteq M^2$ *and the type*

$$\Phi_{\rm pc}(x_1, x_2; y_1, y_2) = \{x_1 \approx y_1 \wedge x_2 \approx y_2\}$$

the following conditions are equivalent:
1) Q *is precomplete;*
2) *the pair* $(M^2, Q \cup Q^{-1})$ *is totally* $\Phi_{\rm pc}$*-preserved;*
3) *the formula* $\neg(Q(x, y) \vee Q(y, x))$ *is* $(M, \emptyset)$*-preserving.*

Proof. 1) $\Leftrightarrow$ 2) follows immediately by the definition of $\Phi_{\rm pc}$, where an arbitrary pair $(a, b) \in M^2$ is transformed to the same pair solving $\Phi_{\rm pc}(a, b; y_1, y_2)$ and belonging to $Q \cup Q^{-1}$.

1) $\Leftrightarrow$ 3). The $(M, \emptyset)$-preservation of $\neg(Q(x, y) \vee Q(y, x))$ means that this formula in not satisfied in $\langle M; Q\rangle$, i.e. all pairs in M^2 satisfies $Q(x, y) \vee Q(y, x)$. The latter property is equivalent to the equality $Q \cup Q^{-1} = M^2$. $\square$

Proposition 3.2 immediately implies:

Corollary 3.3. *For any binary relation* $Q \subseteq M^2$ *the following conditions are equivalent:*
1) Q *is not precomplete;*
2) *the pair* $(M^2, \overline{Q \cup Q^{-1}})$ *is partially* $\Phi_{\rm pc}$*-preserved;*
3) *the formula* $\neg(Q(x, y) \vee Q(y, x))$ *is not* $(M, \emptyset)$*-preserving.*

Corollary 3.4. *For any partial order* $Q \subseteq M^2$ *the following conditions are equivalent:*
1) Q *is a linear order;*
2) *the pair* $(M^2, Q \cup Q^{-1})$ *is totally* $\Phi_{\rm pc}$*-preserved;*
3) *the formula* $\neg(Q(x, y) \vee Q(y, x))$ *is* $(M, \emptyset)$*-preserving.*

Example 3.5. Let $M = \{0, 1, 2\}$. Consider the relation

$$Q = \{(0, 0),\ (0, 1),\ (0, 2),\ (1, 1),\ (1, 2),\ (2, 2)\},$$

which corresponds to the linear order $\leq$ on M. Then $Q \cup Q^{-1} = M^2$. For the type $\Phi_{pc}(x_1, x_2;\, y_1, y_2) = \{\, x_1 \approx y_1 \wedge x_2 \approx y_2 \,\}$ and for any $(a, b) \in M^2$ we have $\Phi_{pc}(a, b;\, y_1, y_2) = \{(a, b)\} \subseteq Q \cup Q^{-1}$. The formula $\neg\, (Q(x, y) \,\vee\, Q(y, x))$ is not satisfied un the graph $\langle M; Q\rangle$.

4 Precomplete relations of greater arities

It is known that linear orders admit generalizations till circular [5–11] and spherical ones [12–15]. These generalizations have the following axiom for a n-ary relation K_n, $n \geq 2$, on a set M.

Let $\overline{x}$ be a n-tuple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, σ be a permutation of degree n. Then the tuple $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ is denoted by $\overline{x}_\sigma$ and following [15] we have:

(nso1) If $\overline{x} \in M^n$ and σ is a transposition on $\{1, 2, \ldots, n\}$, then $\overline{x} \in K_n$ or $\overline{x}_\sigma \in K_n$.

Clearly, K_2 satisfies the axiom (nso1) iff K_2 is precomplete.

For $n \geq 3$ we say that any relation K_n satisfying (nso1) is called *precomplete under transpositions*.

More generally, for a set S of permutations of degree n, we say that a relation $Q \subseteq M^n$, $n \in \omega$, is called *S-precomplete* if $\bigcup\limits_{\sigma \in S} Q_\sigma = M^n$, where $Q_\sigma = \{\overline{x}_\sigma \mid \overline{x} \in Q\}$.

Clearly, if $Q \subseteq M^n$ is S-precomplete for some set S then for any n-tuple $\overline{a} \in M^n$, Q contains a permutation $\overline{a}_\sigma$ of $\overline{a}$. Besides, we have the following *monotony property*: if $S_1 \subseteq S_2$ are sets of permutations of degree n and Q is S_1-precomplete then Q is S_2-precomplete.

By the definition a relation $Q \subseteq M^n$ is precomplete under a transposition σ iff Q is $\{\varepsilon, \sigma\}$-precomplete, i.e. precomplete with respect the two-element group with the universe $\{\varepsilon, \sigma\}$, where ε is the identical permutation.

If $n \leq 1$ then the group of permutations is a singleton and therefore Q is precomplete (with respect to $S = \{\varepsilon\}$) iff Q is complete. More general, Q is S-precomplete for a singleton S iff Q is complete.

The following lemma is obvious.

Lemma 4.1. *For any relation $Q \subseteq M^n$, a tuple $\overline{a} \in M^n$, and a permutation σ of degree $n \geq 2$, $\overline{a} \in Q_\sigma$ iff $\overline{a}_{\sigma^{-1}} \in Q$.*

Generalizing Proposition 3.2 for $n \geq 2$, we have:

Theorem 4.2. *For any n-ary relation $Q \subseteq M^n$ a set S of permutations* *of degree $n \geq 2$ and the type*

$$\Phi_{\mathrm{pc},S}(\overline{x};\overline{y}) = \left\{ \bigvee_{\sigma\in S} \overline{y} \approx \overline{x}_{\sigma^{-1}} \right\}$$

the following conditions are equivalent:

1) *Q is S-precomplete;*

2) *the pair (M^n, Q) is totally $\Phi_{\mathrm{pc},S}$-preserved;*

3) *the formula $\neg \left(\bigvee_{\sigma\in S} Q_\sigma(\overline{x}) \right)$ is $(M^k, \emptyset)$-preserving with respect to any partition of $\overline{x}$ into two nonempty parts of lengths k and $n-k$, respectively.*

Proof. 1) $\Rightarrow$ 2). Let Q be S-precomplete. Taking a tuple $\overline{a} \in M^n$ we have $\overline{a} \in Q_\sigma$ for some $\sigma \in S$ confirming the $\Phi_{\mathrm{pc},S}$-preservation for $(\{\overline{a}\}, Q)$ using Lemma 4.1. Thus, the pair (M^n, Q) is totally $\Phi_{\mathrm{pc},S}$-preserved.

2) $\Rightarrow$ 1) follows again by Lemma 4.1, since for any tuple $\overline{a} \in M^n$ the $\Phi_{\mathrm{pc},S}$-preservation implies $\overline{a}_{\sigma^{-1}} \in Q$ for some $\sigma \in S$, so $\overline{a} \in Q_\sigma$. Thus $M^n = \bigcup_{\sigma\in S} Q_\sigma$, i.e. Q is S-precomplete.

1) $\Leftrightarrow$ 3). The $(M^k, \emptyset)$-preservation of $\neg \left(\bigvee_{\sigma\in S} Q_\sigma(\overline{x}) \right)$ with respect to the partition of $\overline{x}$ means that this formula in not satisfied in $\langle M; Q\rangle$, i.e. all tuples in M^n satisfies $\bigvee_{\sigma\in S} Q_\sigma(\overline{x})$. The latter property is equivalent to the equality $\bigcup_{\sigma\in S} Q_\sigma = M^n$. □

Example 4.3. Let M be an n-element set $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $Q \subseteq M^n$ consist of all n-tuples with some repeated coordinates and of one tuple $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ with pairwise distinct coordinates. We observe that Q is S_n-precomplete, where S_n consists of all permutations of degree n, and Q is not S-precomplete for arbitrary proper $S \subset S_n$.

Combining unions of Q_σ one can obtain S-precomplete, non-complete relations with smaller S having at least two permutations.

Example 4.4. Let $M = \{a_1, a_2, a_3\}$ be a three-element set. Let $Q \subseteq M^3$ consist of all triples with repeated coordinates together with (a_1, a_2, a_3). Let $S = S_3$. Then $\bigcup_{\sigma\in S_3} Q_\sigma = M^3$. Moreover, the type

$$\Phi_{pc,S}(\overline{x};\overline{y}) = \{ \bigwedge_{\sigma\in S_3} \overline{y} \approx \overline{x}_{\sigma^{-1}} \}$$

witnesses the S_3-precompleteness of Q.

Example 4.5. Let $M = \{a, b\}$, $a \neq b$, and $Q = \{(a, a, b), (a, b, a), (b, a, a)\}$. Let $S = S_2$. Then $\bigcup\limits_{\sigma \in S} Q_\sigma \neq M^3$, since, for example, (b, b, b) is missing. Thus Q is not precomplete with respect to permutations.

5 Conclusion

We considered some possibilities of preservation for precomplete relations. These possibilities open ways to use the suggested machinery of preservation for various special standard relations and their natural modifications.

References

[1] Fraïssé R. Theory of relations. — Amsterdam : North-Holland, 1986. — 451 p.

[2] Ershov Yu. L., Palyutin E. A. Mathematical logic. — Moscow : Fizmatlit, 2011. — 356 p. [in Russian]

[3] Sudoplatov S. V., Ovchinnikova E. V. Discrete mathematics. — Moscow : Urait, 2025. — 280 p. [in Russian]

[4] Rajabov T. E., Sudoplatov S. V. Kinds of preservations for properties // arXiv:2509.21876 [math.LO], 2025. — 15 p.

[5] Fuchs L. Partially Ordered Algebraic Systems. — Oxford, London, New York, Paris: Pergamon Press, 1963. — 230 p.

[6] Novák V. Cyclically ordered sets // Czechoslovak Mathematical Journal. — 1982. — Vol. 32, No. 3. — P. 460–473.

[7] Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D. Minimality conditions on circularly ordered structures // Mathematical Logic Quarterly. — 2005. — Vol. 51, No. 4. — P. 377–399.

[8] Droste M., Giraudet M., Macpherson D. Periodic ordered permutation groups and cyclic orderings // J. Combin. Theory, Ser. B. — 1995. — Vol. 63. — P. 310–321.

[9] Truss J.K. On the automorphism group of the countable dense circular order // Fundamenta Mathematicae. — 2009. — Vol. 204, No. 2. — P. 97–111.

[10] Altaeva A.B., Kulpeshov B.Sh. On almost binary weakly circularly minimal structures // Bulletin of Karaganda University, Mathematics. — 2015. — Vol. 78, No. 2. — P. 74–82.

[11] Kulpeshov B.Sh. On almost binarity in weakly circularly minimal structures // Eurasian Mathematical Journal. — 2016. — Vol. 7, No. 2. — P. 38–49.

[12] Sudoplatov S.V. Arities and aritizabilities of first-order theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2022. — Vol. 19, No. 2. — P. 889–901.

[13] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Spherical orders, properties and countable spectra of their theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2023. — Vol. 20, No. 2. — P. 588–599.

[14] Sudoplatov S.V. Minimality conditions, topologies and ranks for spherically ordered theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2023. — Vol. 20, No 2. — P. 600–615.

[15] Sudoplatov S.V. Spherically ordered groups // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2024. — Vol. 21, No. 2. — P. 1337–1346.

SOME SPECTRA OF SPHERICAL ORDERABILITY OF FINITE GROUPS. II

A.S. Savin

Novosibirsk State University,
1, Pirogov Street, Novosibirsk, 630090, Russia
e-mail: sav1nru@mail.ru

1 Introduction

Let $\overline{x}$ be a n-tuple $(x_1, \dots, x_n)$, σ be a permutation of degree n. Then the tuple $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ is denoted by $\overline{x_\sigma}$.

Definition [1, 2]. The following generalization of linear and circular orders produces an n-ball, or n-spherical, or n-circular order relation, for $n \geq 2$, which is described by an an n-ary relation K_n satisfying the following conditions:

(nso1) If $\overline{x} \in A^n$ and σ is a transposition on $\{1, 2, \dots, n\}$, then $\overline{x} \in K_n$ or $\overline{x_\sigma} \in K_n$;

(nso2) If $\overline{x} \in A^n$ and σ is a transposition on $\{1, 2, \dots, n\}$, then $\overline{x} \in K_n$ and $\overline{x_\sigma} \in K_n$ iff there are distinct indices i and j such that $x_i = x_j$;

(nso3) For any $\overline{x} \in K^n$ and any element $t \in A$, there is an index i such that $(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \in K_n$

Definition [2]. A group G is called (agreed) *n-spherically ordered*, or *n-s-ordered*, if G is provided with a *n-spherical* order K_n such that for any $(x_1, \dots, x_n) \in K_n$ and any $y \in G$ the tuples $(x_1y, \dots, x_ny)$ and $(yx_1, \dots, yx_n)$ belong to K_n.

A group G is called *n-spherically* orderable, or *n-s-orderable*, if G has a *n-spherically* ordered expansion. A group G is called spherically orderable if it is *n-spherically* orderable for some n.

2 Spectra

For a group G we define its *spectrum* Sp_{so} of spherical orderability, or spherical spectrum, as follows:

$$Sp_{so}(G) = \{n \in \omega \setminus \{0, 1\} \mid G \text{ is } n\textit{-spherically orderable}\}$$

A group G is called totally spherically orderable, or totally s-orderable, if G has maximal spectrum of spherical orderability, i.e. $Sp_{so}(G) = \omega \setminus \{0, 1\}$.

A group G is called almost totally spherically orderable, or almost totally s-orderable, if $Sp_{so}(G)$ is a cofinite subset of ω.

A group G is (almost) not s-orderable in any way if $Sp_{so}(G)$ is empty (respectively, finite).

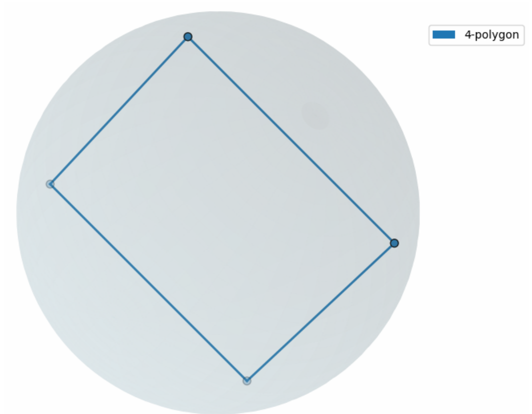
If $|G| = n$, then $\omega \setminus n \subseteq Sp_{\mathrm{so}}(G)$.

3 Visualization

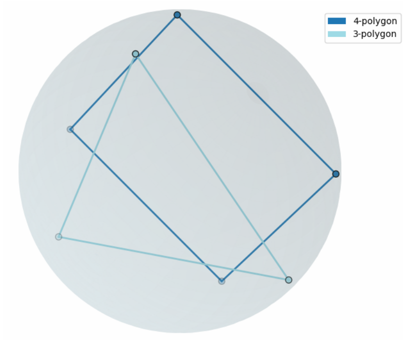
When obtaining spectra of spherical ordering, a question arose related to their correct visualization. The solution chosen was to construct a set of regular polygons inscribed in a sphere. Each polygon with n vertices represents n-spherical orderability of the group in question.

Also, n-spherical orderability can be represented as an n-dimensional simplex. This approach extends the idea of mapping a linear order on a line, a cyclic order on a circle. But using this approach - it is not possible to map the spectrum at once, and the information content is lost for n-spherical order, where $n > 6$.

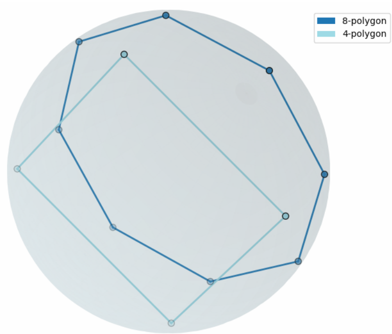
4 Results



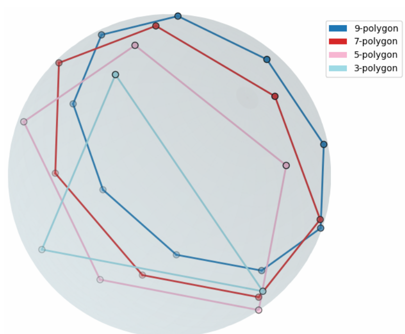
$$Sp_{so}(V_4) = \omega \setminus \{0, 1, 2, 3\}$$



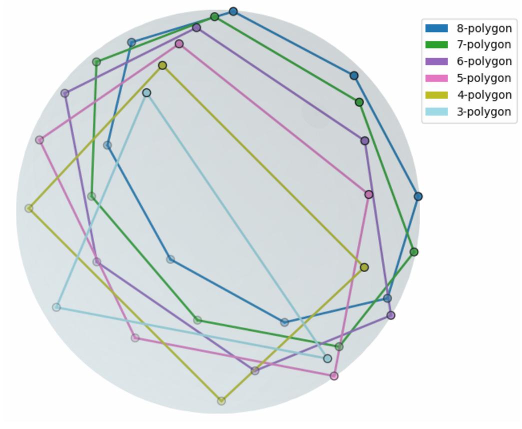
$$Sp_{so}(GF(2^2)) = \omega \setminus \{0,1,2\}$$



$$Sp_{so}(Q_8) = Sp_{so}(Z_2^3) = \omega \setminus \{0,1,2,3,5,6,7\}$$



$$Sp_{so}(Z_9) = \omega \setminus \{0,1,2,4,6,8\}$$



$$Sp_{so}(G) = \omega \setminus \{0, 1, 2\}, |G| = 8$$

References

[1] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, Spherical orders, properties and countable spectra of their theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2023. Vol. 20, No. 2. P. 588–599.

[2] S.V. Sudoplatov, Spherically ordered groups // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2024. Vol. 21, No. 2. P. 1337–1346.

ТЕРНАРНЫЕ ГРУППОИДЫ С ЛЕВОЙ ОБРАТИМОСТЬЮ

Н.А. Щучкин

Волгоградский государственный социально-педагогический университет,
400005, г. Волгоград, проспект имени В.И.Ленина, дом 27
e-mail: nikolaj_shchuchkin@mail.ru

1 Введение

Наряду с классическими алгебрами, такими как кольца вычетов, конечные поля, которые активно участвуют в создании различных алгоритмов в криптографии, применяются в криптографии неассоциативные структуры [1], к ним можно причислить квазигруппы [2] и различные их обобщения.

Наиболее распространенным криптографическим средством является шифрование, которое обеспечивает безопасность связи (см. [3], стр. 26). В [4] приведено преобразование слов с помощью квазигрупп, а в [5] и [6] это преобразование было обобщено на тернарный случай.

Здесь мы рассмотрим различные алгебраические свойства тернарной L-квазигруппы, которые способствуют более эффективно применять эти алгебры для преобразования слов. Идентификация подходящих алгебраических структур для криптографических целей является исследовательской проблемой. С алгебраической точки зрения для криптографических приложений особый интерес представляют полиномиально полные алгебраические структуры, поскольку проблема установления разрешимости системы уравнений в полиномиально полной алгебре является NP-полной [7]. Поэтому использование таких структур при разработке криптографических алгоритмов обеспечивает высокую стойкость.

В последнее время активно изучаются полиномиально полные квазигруппы. В статье [8] авторы разработали методы и алгоритмы для проверки свойства полиномиальной полноты некоторых конечных квазигрупп, исследуя их соответствующие латинские квадраты. В работе [9] даны критерии полиномиальной полноты конечной квазигруппы в терминах ее мультипликативной группы и в терминах ее латинского квадрата. Авторы статьи [10] привели процедуру проверки полиномиальной полноты квазигрупп простого порядка, а в статье [11] показано, что проверка полиномиальной полноты конечной квазигруппы может быть осуществлена за полиномиальное относительно порядка квазигруппы время.

В данной работе изучаются свойства тернарных L-квазигрупп, связанные с полиномиальной полнотой этих алгебр. Изучение свойств тернарной L-квазигруппы со средней единицей осуществляется в разделе 4, а в разделе 5 приводится достаточный признак простоты таких алгебр. Алгоритм проверки простоты конечной тернарной L-квазигруппы приводится в разделе 6. В разделе 7 изучаются аффинные тернарные L-квазигруппы. Алгоритм проверки аффинности конечной тернарной L-квазигруппы со средней единицей приводится в разделе 8. В последнем разделе указан признак полиномиальной полноты тернарной L-квазигруппы со средней единицей.

2 Предварительные сведения

Множество Q с одной тернарной операцией f называют тернарной квазигруппой, если для любых элементов a, b, c из Q уравнения

$$f(x, b, c) = a, f(a, y, c) = b, f(a, b, z) = c, \tag{1}$$

разрешимы однозначно ([12], стр. 6 при $n = 3$).

Рассмотрим тернарный группоид, в котором разрешимо однозначно только одно уравнение из (1).

Тернарный группоид $\langle Q, f\rangle$, в котором для любых элементов a, b, c из Q разрешимо однозначно только первое (второе, третье) уравнение из (1), будем называть тернарной L-квазигруппой или тернарный группоид с левой обратимостью (M-квазигруппой, R-квазигруппой или тернарный группоид со средней и правой обратимостью соответственно). Ниже мы будем рассматривать тернарные L-квазигруппы.

На множестве Q, в силу однозначной разрешимости первого уравнения из (1), имеется еще одна тернарная операция u, заданная по правилу

$$u(a, b, c) = d \Leftrightarrow f(d, b, c) = a. \tag{2}$$

Обе тернарные операции u и f подчиняются тождествам

$$u(f(x, y, z), y, z) = x = f(u(x, y, z), y, z), \tag{3}$$

а значит, на тернарную L-квазигруппу можно смотреть как на универсальную алгебру $\langle Q, f, u\rangle$ с набором тождеств (3).

Конечной тернарной L-квазигруппе $\langle Q, f\rangle$ порядка m соответствует 3-мерная матрица $B = (b_{ijk}|i, j, k = 1, 2, \ldots, m)$ того же порядка ([13], стр. 5), где $b_{ijk} = f(i, j, k)$, причем, в силу однозначной разрешимости первого уравнения из (1), в строках направления 1 стоят разные элементы из Q. Верно и обратное, любая 3-мерная матрица m-го порядка $B = (b_{ijk}|i, j, k = 1, 2, \ldots, m)$, у которой в строках направления 1 стоят разные элементы из Q, определяет конечную тернарную L-квазигруппу $\langle Q, f\rangle$ порядка m, где $f(i, j, k) = b_{ijk}$. Итак, между конечными тернарными L-квазигруппами и 3-мерными матрицами указанного вида имеется взаимно однозначное соответствие.

Каждая 3-мерная матрица B, которая построена выше для тернарной L-квазигруппы, где $Q = \{1, 2, \ldots, m\}$, определяет набор m квадратных таблиц умножения на множестве Q с операцией $i \circ_k j = f(i, j, k)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Таким образом, на 3-мерную матрицу B можно смотреть как на упорядоченный набор таблиц умножения правых квазигрупп (определение правой квазигруппы смотри в [14]) в количестве, равном числу элементов множества Q.

Мы можем вычислить количество $L(m; 3)$ тернарных L-квазигрупп порядка m:

$$L(m; 3) = m!^{m^2} [6].$$

Мы имеем большое число тернарных L-квазигрупп, построенных на конечном множестве. А значит, имеются перспективы использования тернарных L-квазигрупп в криптографии.

3 Преобразования слов

Для преобразования слов в заданном алфавите используют квазигруппы [4]. Мы обобщаем преобразования слов из этой работы на тернарный случай, т.е. в работе [5] и [6] было указано преобразование слов с помощью тернарных квазигрупп и тернатных L-квазигрупп. Рассмотрим это преобразование из [6].

Полагаем $\langle Q, f\rangle$ — конечная тернарная L-квазигруппа порядка m. Множество всех слов в алфавите Q обозначим

$$Q^+ = \{x_1 \ldots x_s | x_i \in Q, s \geq 1\}.$$

Для заданной пары элементов a, b из Q, в терминах работы [4] эти элементы назовем лидерами, на множестве Q^+ определим отображение

$$A_{a,b}(x_1x_2 \ldots x_s) = y_1y_2 \ldots y_s =$$

$$= \begin{cases} y_1 = f(x_1, a, b), \\ y_2 = f(x_2, y_1, a), \\ y_{i+1} = f(x_{i+1}, y_i, y_{i-1}), i = 2, 3, \dots, s-1. \end{cases} \quad (4)$$

Теорема 1. *[6] Отображение $A_{a,b}$, построенное по правилу (4), является биективным.*

Для той же пары элементов a, b из Q на множестве Q^+ строим еще одно отображение

$$B_{a,b}(y_1 y_2 \dots y_s) = x_1 x_2 \dots x_s =$$

$$= \begin{cases} x_1 = u(y_1, a, b), \\ x_2 = u(y_2, y_1, a), \\ x_{i+1} = u(y_{i+1}, y_i, y_{i-1}), i = 2, 3, \dots, s-1. \end{cases} \quad (5)$$

Теорема 2. *[6] Отображение $B_{a,b}$, построенное по правилу (5), является обратным для отображения $A_{a,b}$.*

Для преобразования слов с помощью тернарных L-квазигрупп можно использовать композицию отображений вида (4). Выбираем набор $\langle Q, f_1 \rangle$, $\langle Q, f_2 \rangle$, ..., $\langle Q, f_t \rangle$ тернарных L-квазигрупп и упорядоченные пары $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_t, b_t)$ элементов из Q $(t > 1)$. Строим по правилу (4) отображения $A^1_{a_1,b_1}, A^2_{a_2,b_2}, \dots, A^t_{a_t,b_t}$, а затем рассматриваем композицию

$$A_{a_1,b_1,a_2,b_2,\dots,a_t,b_t} = A^1_{a_1,b_1} \circ A^2_{a_2,b_2} \circ \dots \circ A^t_{a_t,b_t}. \quad (6)$$

Для этих же тернарных L-квазигрупп и пар элементов строим соответственно по правилу (5) отображения $B^1_{a_1,b_1}, B^2_{a_2,b_2}, \dots, B^t_{a_t,b_t}$, и также рассматриваем композицию $B_{a_t,b_t,\dots,a_2,b_2,a_1,b_1} = B^t_{a_t,b_t} \circ \dots \circ B^2_{a_2,b_2} \circ B^1_{a_1,b_1}$. Очевидно, $B_{a_t,b_t,\dots,a_2,b_2,a_1,b_1}$ — обратное отображение для отображения $A_{a_1,b_1,a_2,b_2,\dots,a_t,b_t}$.

В криптографии очень важно, чтобы зашифрованное слово можно было расшифровать однозначно. В нашем случае имеем следующий факт.

Теорема 3. *[6] Пусть $\langle Q, f_1 \rangle$, $\langle Q, f_2 \rangle$, ..., $\langle Q, f_t \rangle$ — набор тернарных L-квазигрупп, где $Q = \{1, \dots, m\}$. Для любого слова $y_1 y_2 \dots y_s$ из Q^+ и для любых упорядоченных пар $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_t, b_t)$ элементов из Q существует единственное слово $x_1 x_2 \dots x_s$ из Q^+ такое, что верно равенство*

$$A_{a_1,b_1,a_2,b_2,\dots,a_t,b_t}(x_1 x_2 \dots x_s) = y_1 y_2 \dots y_s.$$

4 Тернарные L-квазигруппы со средней единицей

В тернарном группоиде $\langle Q, f\rangle$ элемент e называют средней единицей, если для любого элемента a из Q верно равенство $f(e, a, e) = a$ (смотри [15], стр. 21 при n=3). Очевидно, в тернарной L-квазигруппе если есть средняя единица, то их может быть больше чем одна. Найдем количество конечных тернарных L-квазигрупп порядка m с k средними единицами, $1 \leq k \leq m$.

Теорема 4. *Количество тернарных L-квазигрупп порядка m с k средними единицами ($1 \leq k \leq m$) равно*

$$(m-1)!^{m\cdot k} \cdot m!^{m\cdot(m-k)}.$$

Доказательство. 3-Мерная матрица B тернарной L-квазигруппы $\langle Q, f\rangle$ порядка m с k средними единицами e_i, $i = 1, \ldots, k$, представлена упорядоченным набором таблиц умножения правых квазигрупп в количестве, равном числу элементов множества Q, среди которых имеется ровно k таблиц умножения правых квазигрупп с левой единицей e_i.

Фиксируем таблицу с номером e_i, где $i = 1, \ldots, k$. В этой таблице в строке с номером e_i стоят элементы из Q в таком же порядке, как в Q, а все столбцы являются некоторыми перестановками на множестве Q. Значит, количество различных таблиц с фиксированным номером e_i равно $(m-1)!^m$.

В каждой таблице, где нет средней единицы, все столбцы являются некоторыми перестановками на множестве Q. Значит, количество различных таблиц без средней единицы с фиксированным номером равно $m!^m$. Итак, число различных 3-мерных матриц B равно $(m-1)!^{m\cdot k} \cdot m!^{m\cdot(m-k)}$. □

Теорема 5. *В тернарной L-квазигруппе $\langle Q, f\rangle$ со средней единицей e верно тождество $u(x, x, e) = e$. Верно и обратное, если в тернарной L-квазигруппе $\langle Q, f\rangle$ для некоторого элемента e верно тождество $u(x, x, e) = e$, то этот элемент будет средней единицей.*

Доказательство. Согласно определению средней единицы, верно тождество $f(e, x, e) = x$, а тогда, согласно правилу (2), верно тождество $u(x, x, e) = e$.

Обратно. Из верности тождества $u(x, x, e) = e$ для некоторого элемента e, согласно правилу (2), верно тождество $f(e, x, e) = x$, то есть e — средняя единица. □

Операцию $m(x, y, z)$ называют термом Мальцева, если верно равенство $m(x, x, y) = y = m(y, x, x)$.

Теорема 6. *В тернарной L-квазигруппе $\langle Q, f\rangle$ со средней единицей e имеется терм Мальцева*

$$m(x, y, z) = f(u(z, y, e), x, e).$$

Доказательство. Согласно второму тождеству из (2),

$$m(x, x, y) = f(u(y, x, e), x, e) = y.$$

Далее, $m(y, x, x) = f(u(x, x, e), y, e)$, но, согласно теореме 5, $u(x, x, e) = e$, тогда $m(y, x, x) = f(e, y, e) = y$. □

5 Конгруэнции на тернарных L-квазигруппах

Любая конгруэнция на тернарной L-квазигруппе $\langle Q, f, u\rangle$ (как на универсальной алгебре с набором тождеств (3)) это отношение эквивалентности, стабильное относительно тернарных операций f, u. Оказывается, как и для квазигрупп и тернарных квазигрупп, для конечных тернарных L-квазигрупп достаточно рассматривать только стабильность отношения эквивалентности относительно операции f, то есть верна

Теорема 7. *[6] Отношение эквивалентности τ на конечной тернарной L-квазигруппе $\langle Q, f, u\rangle$ является конгруэнцией тогда и только тогда, когда τ стабильно относительно операции f.*

Класс конгруэнции τ обозначим через $[a]_\tau$.

Теорема 8. *В тернарной L-квазигруппе $\langle Q, f, u\rangle$ со средней единицей e класс конгруэнции, содержащий e, является тернарной L-подквазигруппой. В тернарной L-квазигруппе со средней единицей классы конгруэнции равномощны.*

Доказательство. Докажем первое утверждение, рассмотрим класс $[e]_\tau$, где τ — конгруэнция на $\langle Q, f, u\rangle$. Возьмем любые три элемента a, b, c из $[e]_\tau$, то есть $a\tau e$, $b\tau e$ и $c\tau e$, тогда $f(a, b, c)\tau f(e, e, e)$. Так как $f(e, e, e) = e$, то $f(a, b, c)\tau e$, значит, $f(a, b, c) \in [e]_\tau$. Далее, $u(a, b, c)\tau u(e, e, e)$, но $u(e, e, e) = e$ (согласно теореме 5), следовательно $u(a, b, c)\tau e$, то есть $u(a, b, c) \in [e]_\tau$.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть $a \in Q$. Рассмотрим отображение $L : x \to f(x, a, e)$ для любого элемента $x \in [e]_\tau$. Поскольку $x\tau e, a\tau a, e\tau e$, то $f(x, a, e)\tau f(e, a, e)$, но $f(e, a, e) = a$, тогда $f(x, a, e)\tau a$, т. е. $f(x, a, e) \in [a]_\tau$.

Докажем инъективность отображения L. Пусть $L(x_1) = L(x_2)$, то есть $f(x_1, a, e) = f(x_2, a, e)$ для любых элементов x_1 и x_2 из $[e]_\tau$. В силу однозначной разрешимости первого уравнения из (1), $x_1 = x_2$. Инъективность отображения L доказана.

Докажем сюръективность отображения L. Выбираем $b \in [a]_\tau$. Решением уравнения $f(x, a, e) = b$, согласно (3), является $x = u(b, a, e)$. Покажем, что $u(b, a, e) \in [e]_\tau$. Так как $b\tau a$, то $u(b, a, e)\tau u(a, a, e)$, но $u(a, a, e) = e$ (согласно теореме 5), тогда $u(b, a, e)\tau e$, значит, $u(b, a, e) \in [e]_\tau$ и $L(u(b, a, e)) = b$. Сюръективность отображения L доказана. □

Следствие 9. *Если $\langle Q, f, u\rangle$ — конечная тернарная L-квазигруппа со средней единицей, то порядок каждого класса конгруэнции делит порядок $\langle Q, f, u\rangle$.*

Алгебра называется простой, если в ней только тривиальные конгруэнции.

Следствие 10. *Конечная тернарная L-квазигруппа со средней единицей простого порядка является простой.*

Приведем достаточный признак простоты конечной тернарной L-квазигруппы со средней единицей. Аналогичный признак есть для квазигрупп в [8], предложение 3.13, и для тернарных квазигрупп в [5], теорема 9. Нам понадобится

Лемма 11. *[6] Выбираем перестановку $L_{a,b}(x) = f(x, a, b)$ на множестве Q, значения которой составляют столбец элемента a таблицы умножения правой квазигруппы с номером b из упорядоченного набора таблиц умножения правых квазигрупп 3-мерной матрицы B конечной тернарной L-квазигруппы $\langle Q, f\rangle$. Пусть в разложении $L_{a,b}$ на произведение независимых циклов имеется цикл σ длины l и τ является конгруэнцией в $\langle Q, f\rangle$. Тогда наименьшее положительное целое число k, такое что $\sigma^k(c) \in [c]_\tau$, где $c \in Q$, делит l.*

Теорема 12. *Пусть $\langle Q, f\rangle$ — конечная тернарная L-квазигруппа со средней единицей. Если найдется перестановка $L_{a,b}(x) = f(x, a, b)$, в разложении которой на произведение независимых циклов имеется цикл длины l и l — простое число, $l > \frac{|Q|}{2}$, то $\langle Q, f\rangle$ является простой.*

Доказательство. От противного, пусть в $\langle Q, f\rangle$ имеется нетривиальная конгруэнция τ. Поскольку l — простое число, то, согласно лемме 11, $k = 1$ либо $k = l$. Если $k = l$, то все элементы $\{c, \sigma(c), \sigma^2(c), \ldots, \sigma^{l-1}(c)\}$ цикла σ из разных классов конгруэнции τ, а значит, число классов конгруэнции τ не меньше l, что противоречит условию $l > \frac{|Q|}{2}$ согласно следствию 9. Если $k = 1$, то все элементы цикла σ лежат в одном классе $[c]_\tau$, то есть $l \le |[a]_\tau|$ и $|[c]_\tau| \le \frac{|Q|}{2}$, что противоречит условию $l > \frac{|Q|}{2}$. □

6 Проверка простоты тернарной L-квазигруппы

В работе [10] описан процесс проверки простоты квазигрупп. Опираясь на этот процесс, в работе [6] приведен алгоритм проверки простоты тернарных L-квазигрупп. Нам понадобится

Лемма 13. *[6] Отношение эквивалентности τ сохраняет операцию f в тернарной L-квазигруппе $\langle Q, f\rangle$ тогда и только тогда, когда все отображения $L_{a,b}(x) = f(x, a, b)$, $M_{a,b}(y) = f(a, y, b)$ и $R_{a,b}(z) = f(a, b, z)$, $a, b \in Q$ сохраняют τ.*

Пусть $\langle Q, f\rangle$ — конечная тернарная L-квазигруппа и $Q = \{1, 2, \ldots, m\}$. Выбираем $i, j \in Q$ и $i \ne j$. Рассмотрим алгоритм нахождения наименьшей конгруэнции τ, которая содержит пару (i, j).

Алгоритм 1.[6]

1. Составляем список всех неупорядоченных пар (s, t), где $1 \le s, t \le m$, $s \ne t$. Каждой паре из этого списка ставим в соответствие две метки — эквивалентность и рассмотренность. В начальный момент времени все пары из списка не эквивалентны и не рассмотрены.

2. Выбираем отношение эквивалентности τ, в котором содержится пара (i, j), остальные пары с одинаковыми компонентами. Отмечаем, что пара (i, j) эквивалентна.

3. Выбираем произвольную не рассмотренную и эквивалентную пару (u, v) из списка и находим все пары $(F(u), F(v))$ с разными компонентами, где F пробегает все отображения $L_{a,b}(x) = f(x, a, b)$, $M_{a,b}(y) = f(a, y, b)$ и $R_{a,b}(z) = f(a, b, z)$, $a, b \in Q$. Заметим, что при $F = L_{a,b}$ компоненты пары $(F(u), F(v))$ будут всегда разными, поскольку $L_{a,b}$ является биективным отображением, а вот при $F = M_{a,b}$ и $F = R_{a,b}$ компоненты пары $(F(u), F(v))$ могут быть одинаковыми,поскольку $M_{a,b}$ и $R_{a,b}$ являются отображениями, но не обязательно биективными. Если

пара $(F(u), F(v))$ не эквивалентна, то добавляем ее в отношение τ, отмечаем ее эквивалентность и переходим к пункту 4. Итак для всех пар $(F(u), F(v))$. После этого переходим к пункту 5.

4. Объединяем классы эквивалентности, которым принадлежат компоненты этой пары, получаем новое отношение эквивалентности τ. Отмечаем новые эквивалентные пары, которые получились после объединения.

5. Помечаем пару (u, v) как рассмотренную.

6. Если в списке не рассмотренных и эквивалентных пар нет или все элементы Q попарно эквивалентны, то конец работы алгоритма. Иначе переходим к пункту 3.

Теорема 14. *[6] Пусть $\langle Q, f\rangle$ — конечная тернарная L-квазигруппа и $Q = \{1, 2, \ldots, m\}$. Для любой неупорядоченной пары (i, j), где $i, j \in Q$ и $i \neq j$, алгоритм 1 находит наименьшую конгруэнцию τ, которая содержит пару (i, j).*

С помощью теоремы 14 можно доказать признак простоты для конечной тернарной L-квазигруппы.

Теорема 15. *[6] Конечная тернарная L-квазигруппа $\langle Q, f\rangle$ является простой тогда и только тогда, когда для любой неупорядоченной пары (i, j), где $i, j \in Q$ и $i \neq j$, алгоритм 1 находит наименьшую конгруэнцию τ, которая равна $Q \times Q$.*

Поскольку в тернарной L-квазигруппе со средней единицей классы конгруэнции равномощны, то для таких конечных тернарных L-квазигрупп признак простоты формулируется проще.

Следствие 16. *Конечная тернарная L-квазигруппа $\langle Q, f\rangle$ со средней единицей e является простой тогда и только тогда, когда для любой пары (e, i), где $i \in Q$ и $i \neq e$, алгоритм 1 находит наименьшую конгруэнцию τ, которая равна $Q \times Q$.*

7 Аффинные тернарные L-квазигруппы

Алгебра A называется аффинной, если A снабжена структурой аддитивной абелевой группы $\langle A, +\rangle$ такой, что каждая термальная операция t имеет вид

$$t(x_1, \ldots, x_r) = a + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_r x_r, \tag{7}$$

где $a \in A$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ являются групповыми эндоморфизмами.

Предложение 17. *[6] В аффинной тернарной L-квазигруппе $\langle Q, f\rangle$ относительно абелевой группы $\langle Q, +\rangle$ тернарная операция f действует по правилу*
$$f(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z + c, \tag{8}$$
где α — автоморфизм, β, γ — эндоморфизмы группы $\langle Q, +\rangle$, $c \in Q$.

Набор $(\langle Q, +\rangle, \alpha, \beta, \gamma, c)$ назовем формой аффинной тернарной L-квазигруппы $\langle Q, f\rangle$.

Верно и обратное утверждение:

Предложение 18. *Если для тернарной L-квазигруппе $\langle Q, f\rangle$ найдется абелева группа $\langle Q, +\rangle$ такая, что для любых элементов $x, y, z \in Q$ верно равенство (8), где α — автоморфизм, β, γ — эндоморфизмы группы $\langle Q, +\rangle$, $c \in Q$, то $\langle Q, f\rangle$ будет аффинной алгеброй.*

Доказательство. Доказательство ведем индукцией по числу n вхождений основных операций f, u в произвольную термальную операцию t. Если $n = 1$, то термальная операция t имеет один из видов: $f(x, y, z)$, $u(x, y, z)$. В первом случае имеем равенство (8), а во втором случае, согласно определению операции u в (2), имеем
$$u(x, y, z) = \alpha^{-1}x - \alpha^{-1}\beta y - \alpha^{-1}\gamma z - \alpha^{-1}c.$$

Пусть теперь термальная операция $t(x_1, \ldots, x_r)$ имеет $n > 1$ вхождений основных операций f, u и для термов с меньшим числом вхождений равенство (7) справедливо. Термальная операция t имеет вид $g(t_1, t_2, t_3)$, где $g = f$ или $g = u$, t_1, t_2, t_3 — некоторые термальные операции с меньшим значением числа n. Согласно индуктивному предположению,
$$t_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}}) = a_1 + \alpha_{1i_1}x_{i_1} + \ldots + \alpha_{1i_{n_1}}x_{i_{n_1}},$$
$$t_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_2}}) = a_2 + \alpha_{2j_1}x_{j_1} + \ldots + \alpha_{2j_{n_2}}x_{j_{n_2}},$$
$$t_3(x_{k_1}, \ldots, x_{k_{n_3}}) = a_3 + \alpha_{3k_1}x_{k_1} + \ldots + \alpha_{3k_{n_3}}x_{k_{n_3}},$$
где $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_2}}, x_{k_1}, \ldots, x_{k_{n_3}} \in \{x_1, \ldots, x_r\}$, $a_1, a_2, a_3 \in Q$, $\alpha_{1i_1}, \ldots, \alpha_{1i_{n_1}}, \alpha_{2j_1}, \ldots, \alpha_{2j_{n_2}}, \alpha_{3k_1}, \ldots, \alpha_{3k_{n_3}}$ являются эндоморфизмами группы $\langle Q, +\rangle$.

Если $g = f$, то, согласно (8), получим
$$t(x_1, \ldots, x_r) = f(t_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}}), t_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_2}}), t_3(x_{k_1}, \ldots, x_{k_{n_3}})) =$$
$$= \alpha t_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}}) + \beta t_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_2}}) + \gamma t_3(x_{k_1}, \ldots, x_{k_{n_3}}) + c =$$

$$= \alpha(a_1 + \alpha_{1i_1}x_{i_1} + \ldots + \alpha_{1i_{n_1}}x_{i_{n_1}}) + \beta(a_2 + \alpha_{2j_1}x_{j_1} + \ldots + \alpha_{2j_{n_2}}x_{j_{n_2}}) +$$
$$+\gamma(a_3 + \alpha_{3k_1}x_{k_1} + \ldots + \alpha_{3k_{n_3}}x_{k_{n_3}}) + c = \alpha a_1 + \alpha\alpha_{1i_1}x_{i_1} + \ldots + \alpha\alpha_{1i_{n_1}}x_{i_{n_1}} +$$
$$+\beta a_2 + \beta\alpha_{2j_1}x_{j_1} + \ldots + \beta\alpha_{2j_{n_2}}x_{j_{n_2}} + \gamma a_3 + \gamma\alpha_{3k_1}x_{k_1} + \ldots + \gamma\alpha_{3k_{n_3}}x_{k_{n_3}} + c =$$
$$= (\lambda_1(1)\alpha\alpha_{11} + \lambda_1(2)\beta\alpha_{21} + \lambda_1(3)\gamma\alpha_{31})x_1 + \ldots$$
$$\ldots + (\lambda_r(1)\alpha\alpha_{1r} + \lambda_r(2)\beta\alpha_{2r} + \lambda_r(3)\gamma\alpha_{3r})x_r + \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 + c.$$

Здесь $\lambda_s(1) = 0$, если среди переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}}$ не встретилась переменная x_s, и $\lambda_s(1) = 1$, если встретилась, для $s = 1, \ldots, r$. Аналогично $\lambda_s(2) = 0$, если среди переменных $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_2}}$ не встретилась переменная x_s, и $\lambda_s(2) = 1$, если встретилась, для $s = 1, \ldots, r$, и $\lambda_s(3) = 0$, если среди переменных $x_{k_1}, \ldots, x_{k_{n_3}}$ не встретилась переменная x_s, и $\lambda_s(3) = 1$, если встретилась, для $s = 1, \ldots, r$. Таким образом, для термальной операции $t(x_1, \ldots, x_r)$ равенство (7) справедливо.

Аналогично доказывается справедливость равенства (7) для термальной операции $t(x_1, \ldots, x_r)$, если $g = u$. □

Предложение 19. *Если в аффинной тернарной L-квазигруппе $\langle Q, f\rangle$ с формой $(\langle Q, +\rangle, \alpha, \beta, \gamma, c)$ есть средняя единица e, то тернарная операция f действует по правилу*

$$f(x, y, z) = \alpha x + y + \gamma z - \alpha e - \gamma e. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть 0 — нуль группы $\langle Q, +\rangle$. Согласно (8), имеем $f(e, 0, e) = \alpha e + \gamma e + c$, но $f(e, 0, e) = 0$, значит, $c = -\alpha e - \gamma e$. Вновь согласно (8), имеем $f(e, y, e) = \alpha e + \beta y + \gamma e + c$, но $f(e, y, e) = y$ и $c = -\alpha e - \gamma e$, значит, $\beta y = y$. □

Заметим, что для аффинной тернарной L-квазигруппы $\langle Q, f\rangle$ со средней единицей e из предложения 19 форма имеет вид $(\langle Q, +\rangle, \alpha, 1_Q, \gamma, -\alpha e - \gamma e)$. Если средних единиц несколько, то для любых двух средних единиц e_1 и e_2 верно равенство $\alpha e_1 + \gamma e_1 = \alpha e_2 + \gamma e_2$.

Следствие 20. *Пусть $\langle Q, f\rangle$ — конечная аффинная тернарная L-квазигруппа порядка m со средними единицами e_s, $s = 1, \ldots, r$, где $1 \leq r \leq m$, и с формой $(\langle Q, +\rangle, \alpha, 1_Q, \gamma, -\alpha e_s - \gamma e_s)$. Тогда*

1) все таблицы умножения с номерами e_s, $s = 1, \ldots, r$, из упорядоченного набора таблиц умножения с операциями $i \circ_k j = f(i, j, k)$, которые представляют 3-мерную матрицу B тернарной L-квазигруппы $\langle Q, f\rangle$, будут определять аффинную квазигруппу с левой единицей e_s и с формой $(\langle Q, +\rangle, \alpha, 1_Q, -\alpha e_s)$;

2) все остальные таблицы умножения с номерами b из этого набора будут определять аффинную квазигруппу с формой $(\langle Q, +\rangle, \alpha, 1_Q, \gamma b - \alpha e_s - \gamma e_s)$, в которой есть левая единица, отличная от b.

Доказательство. Выбираем таблицу умножения с номером e_s, где e_s — средняя единица $\langle Q, f\rangle$. Умножение в этой таблице будет действовать по правилу $x \circ_{e_s} y = f(x, y, e_s)$. Тогда, согласно предложению 19, верно равенство $x \circ_{e_s} y = \alpha x + y + \gamma e_s - \alpha e_s - \gamma e_s$ или $x \circ_{e_s} y = \alpha x + y - \alpha e_s$, то есть эта таблица умножения определяет аффинную квазигруппу $\langle Q, \circ_{e_s}\rangle$ с формой $(\langle Q, +\rangle, \alpha, 1_Q, -\alpha e_s)$. Средняя единица e_s тернарной L-квазигруппы $\langle Q, f\rangle$ будет левой единицей квазигруппы $\langle Q, \circ_{e_s}\rangle$. Действительно, $e_s \circ_{e_s} x = f(e_s, x, e_s) = x$.

Выбираем теперь таблицу умножения с номером b, где b не является средней единицей $\langle Q, f\rangle$. Умножение в этой таблице будет действовать по правилу $x \circ_b y = f(x, y, b)$. Тогда, согласно предложению 19, верно равенство $x \circ_b y = \alpha x + y + \gamma b - \alpha e_s - \gamma e_s$, то есть эта таблица умножения определяет аффинную квазигруппу $\langle Q, \circ_b\rangle$ с формой $(\langle Q, +\rangle, \alpha, 1_Q, \gamma b - \alpha e_s - \gamma e_s)$. Далее, для элемента $-(\gamma b - \alpha e_s - \gamma e_s)$ найдется элемент e' такой, что $\alpha e' = -(\gamma b - \alpha e_s - \gamma e_s)$. Докажем, что e' является левой единицей в квазигруппе $\langle Q, \circ_b\rangle$. Действительно, $e' \circ_b x = \alpha e' + x + \gamma b - \alpha e_s - \gamma e_s = x$. Осталось доказать, что $e' \neq b$. От противного. Пусть $e' = b$, тогда $f(b, x, b) = b \circ_b x = x$, то есть b – средняя единица в тернарной L-квазигруппе $\langle Q, f\rangle$, а это не так. □

Верно и обратное утверждение:

Предложение 21. *Пусть $\langle Q, f\rangle$ — конечная тернарная L-квазигруппа порядка m со средними единицами e_s, $s = 1, \dots, r$, где $1 \leq r \leq m$. Если каждая таблица умножения с номером b, $b \in Q$, из упорядоченного набора таблиц умножения с операциями $i \circ_k j = f(i, j, k)$, которые представляют 3-мерную матрицу B тернарной L-квазигруппы $\langle Q, f\rangle$, будет определять аффинную квазигруппу с левой единицей e и с формой $(\langle Q, +\rangle, \alpha, 1_Q, -\alpha e)$ и найдется эндоморфизм γ группы $\langle Q, +\rangle$ такой, что $\gamma(b - e_s) = \alpha(e_s - e)$, то $\langle Q, f\rangle$ будет аффинной алгеброй с формой $(\langle Q, +\rangle, \alpha, 1_Q, \gamma, -\alpha e_s - \gamma e_s)$.*

Доказательство. Выбираем произвольные элементы $x, y, z \in Q$. Если $z = e_s$ для некоторого s из набора индексов $\{1, \dots, r\}$, то e_s будет левой единицей в квазигруппе $\langle Q, \circ_z\rangle$. Тогда

$$f(x, y, z) = x \circ_{e_s} y = \alpha x + y - \alpha e_s = \alpha x + y + \gamma z - \alpha e_s - \gamma e_s.$$

Если z не является средней единицей тернарной L-квазигруппы $\langle Q, f\rangle$, то из равенства $\gamma(z - e_s) = \alpha(e_s - e)$ получим $-\alpha e = \gamma z - \alpha e_s - \gamma e_s$. Тогда

$$f(x, y, z) = x \circ_z y = \alpha x + y - \alpha e = \alpha x + y + \gamma z - \alpha e_s - \gamma e_s.$$

□

8 Проверка аффинности тернарной L-квазигруппы со средней единицей

В работе [10] описан процесс проверки аффинности квазигрупп. Опираясь на этот процесс, приведем алгоритм проверки аффинности тернарных L-квазигрупп со средней единицей.

Вначале рассмотрим конечную квазигруппу $\langle Q, \cdot \rangle$ с левой единицей e. Пусть $Q = \{1, 2, \ldots, m\}$ и K — ее латинский квадрат. В работе [6] был рассмотрен алгоритм проверки аффинности этой квазигруппы. Приведем этот алгоритм.

Алгоритм 2.[6]

1. Строим инверсную квазигруппу $\langle Q, * \rangle$ по правилу

$$x * y = \beta^{-1}x \cdot y, \tag{10}$$

где β — перестановка, соответствующая первому столбцу латинского квадрата K. Пусть K' — латинский квадрат $\langle Q, * \rangle$.

2. Проверяем симметричность латинского квадрата K' (что равносильно коммутативности операции $*$). Если симметричность нарушена, то завершаем алгоритм сообщением “квазигруппа $\langle Q, \cdot \rangle$ не аффинна”.

3. Проверяем ассоциативность операции $*$, т.е. для любых трех чисел $i, j, k \in Q$ проверяем равенство $i*(j*k) = (i*j)*k$. Если ассоциативность нарушена, то завершаем алгоритм сообщением “квазигруппа $\langle Q, \cdot \rangle$ не аффинна”.

4. Выбираем столбец латинского квадрата K, первый элемент которого совпадает с верхним левым элементом латинского квадрата K', обозначаем заданную этим столбцом перестановку через α.

5. Проверяем, что перестановка α сохраняет операцию $*$, т.е. для любых чисел $i, j \in Q$ проверяем равенство $\alpha(i*j) = \alpha(i)*\alpha(j)$. Если α не сохраняет операцию $*$, то завершаем алгоритм сообщением “квазигруппа $\langle Q, \cdot \rangle$ не аффинна”.

6. Выбираем элемент c из верхнего левого угла латинского квадрата K.

7. Проверяем, что для любых чисел $i, j \in Q$ верно равенство

$$i \cdot j = \alpha(i) * j * c.$$

Если это равенство неверно хотя бы для одной пары чисел, то завершаем алгоритм сообщением “квазигруппа $\langle Q, \cdot \rangle$ не аффинна”. В противном случае завершаем алгоритм сообщением “квазигруппа $\langle Q, \cdot \rangle$ аффинна”.

Теорема 22. *[6] Конечная квазигруппа $\langle Q, \cdot\rangle$ с левой единицей e является аффинной тогда и только тогда, когда алгоритм 2 завершается сообщением “квазигруппа $\langle Q, \cdot\rangle$ аффинна”.*

Рассмотрим теперь конечную тернарную L-квазигруппу $\langle Q, f\rangle$ со средними единицами e_s, $s = 1, \dots, r$, где $1 \leq r \leq m$, и $Q = \{1, 2, \dots, m\}$. Укажем алгоритм проверки аффинности $\langle Q, f\rangle$.

Алгоритм 3.

1. Проверяем, что все таблицы умножения с номерами b, где $b \in Q$, упорядоченного набора таблиц с операциями $x \circ_b y = f(x, y, b)$, которые представляют 3-мерную матрицу B тернарной L-квазигруппы $\langle Q, f\rangle$, будут определять квазигруппы $\langle Q, \circ_b\rangle$. Если хотя бы одна из правых квазигрупп $\langle Q, \circ_b\rangle$ не будет квазигруппой, то завершаем алгоритм сообщением “тернарная L-квазигруппа $\langle Q, f\rangle$ не аффинна”.

2. Проверяем, что в каждой квазигруппе $\langle Q, \circ_b\rangle$ с операцией $x \circ_b y = f(x, y, b)$, где $b \in Q$ и b не является средней единицей, есть левая единица. Если хотя бы в одной из указанных квазигрупп нет левой единицы, то завершаем алгоритм сообщением “тернарная L-квазигруппа $\langle Q, f\rangle$ не аффинна”.

3. Проверяем с помощью алгоритма 2, что каждая квазигруппа $\langle Q, \circ_b\rangle$, где $b \in Q$, является аффинной. Если хотя бы одна из квазигрупп $\langle Q, \circ_b\rangle$ не является аффинной, то завершаем алгоритм сообщением “тернарная L-квазигруппа $\langle Q, f\rangle$ не аффинна”.

4. Проверяем, что каждая аффинная квазигруппа $\langle Q, \circ_b\rangle$ со своей левой единицей e, где $b \in Q$, имеет форму $(\langle Q, +\rangle, \alpha, 1_Q, -\alpha e)$. Если это не так, то завершаем алгоритм сообщением “тернарная L-квазигруппа $\langle Q, f\rangle$ не аффинна”.

5. Находим эндоморфизм γ группы $\langle Q, +\rangle$ такой, что для любого элемента $b \in Q$ верно $\gamma(b - e_s) = \alpha(e_s - e)$, где e — левая единица квазигруппы $\langle Q, \circ_b\rangle$. Если такого эндоморфизма нет, то завершаем алгоритм сообщением “тернарная L-квазигруппа $\langle Q, f\rangle$ не аффинна”. В противном случае завершаем алгоритм сообщением “тернарная L-квазигруппа $\langle Q, f\rangle$ аффинна”.

Теорема 23. *Конечная тернарная L-квазигруппа $\langle Q, f\rangle$ порядка m со средними единицами e_s, $s = 1, \dots, r$, где $1 \leq r \leq m$, является аффинной тогда и только тогда, когда алгоритм 3 завершается сообщением “тернарная L-квазигруппа $\langle Q, f\rangle$ аффинна”.*

Доказательство. Необходимость. Согласно следствию 20, все пункты алгоритма 3 пройдены и алгоритм завершается сообщением “тернарная L-квазигруппа $\langle Q, f\rangle$ аффинна”.

Достаточность. Если все пункты алгоритма 3 пройдены, то, согласно предложению 21, тернарная L-квазигруппа $\langle Q, f\rangle$ будет аффинной. $\square$

9 Полиномиально полные тернарные L-квазигруппы

Определение полиномиально полной алгебры можно найти в работе [16].

Теорема 24. *([17]) Пусть A — конечная F-алгебр, содержащая по меньшей мере два элемента. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) A полиномиально полна;

(ii) существует терм Мальцева в алгебре A и A является простой и неаффинной.

Следствие 25. *Пусть $\langle Q, f\rangle$ — конечная тернарная L-квазигруппа со средней единицей, содержащая по меньшей мере два элемента. Тогда $\langle Q, f\rangle$ полиномиально полна тогда и только тогда, когда $\langle Q, f\rangle$ является простой и неаффинной.*

Устанавливать простоту $\langle Q, f\rangle$ в следствие 25 можно с помощью алгоритма 1 и следствия 16. Устанавливать неаффинность $\langle Q, f\rangle$ в следствие 25 можно с помощью алгоритма 3.

Список литературы

[1] Марков В. Т., Михалчв А. В., Нечаев А. А., “Неассоциативные алгебраические структуры в криптографии и кодировании”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **21**:4 (2016), 99–124.

[2] Глухов М. М., “О применениях квазигрупп в криптографии”, *ПДМ*, **2** (2008), 28–32.

[3] Венбо Мао, *Современная криптография. Теория и практика*, пер. с англ., Издательский дом “Вильямс”, Москва. Киев, 2005, 768 с.

[4] Markovski S., Gligoroski D., Bakeva V., “Quasigroup String Processing: Part 1”, *Proc. of Maked. Academ. of Sci. and Arts for Math. And Tect. Sci. XX.*, 1999, 155–162

[5] Щучкин Н. А., “Применение тернарных квазигрупп к преобразованию слов”, *Дискрет. матем.*, **36**:2 (2024), 132Ц-143

[6] Щучкин Н. А., “Преобразование слов с помощью тернарных L-квазигрупп”, *Дискрет. матем.*, **37**:3 (2025), 3Ц-17

[7] Horva’th G., Nehaniv Gh. L., Szabo’ Cs., “An assertion concerning functionally complete algebras and NP-completeness”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **76** (2010), 35Ц-48

[8] Artamonov V. A., Chakrabarti S., Gangopadhyay S., Pal S. K., “Latin squares of polynomially complete quasigroups and quasigroups generated by shifts”, *Quasigroups and Related Systems*, **21**:2 (2013), 117–130

[9] Artamonov V.A., Chakrabarti S., Pal S.K., “Characterizations of highly non-associative quasigroups and associative triples”, *Quasigroups and Related Systems*, **25**:1 (2017), 1–19

[10] Галатенко А. В., Панкратьев А. Е.,Родин С. Б., “О полиномиально полных квазигруппах простого порядка”, *Алгебра и логика*, **57**:5 (2018), 327Ц-335

[11] Галатенко А. В., Панкратьев А. Е., “О сложности проверки полиномиальной полноты конечных квазигрупп”, *Дискрет. матем.*, **30**:4 (2018), 3–11

[12] Белоусов В. Д., *n-Арные квазигруппы*, “Штиинца”, Кишинев, 1972, 228 с.

[13] Соколов Н. П., *Введение в теорию многомерных матриц*, Наукова думка, Киев, 1972, 175 с.

[14] В. А. Щербаков, “О конгруэнциях группоидов, тесно связанных с квазигруппами”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **14**:5 (2008), 237–251

[15] Щучкин Н. А., *Введение в теорию n-групп*, Принт, Волгоград, 2019, 234 с.

[16] Артамонов В. А., “Полиномиально полные алгебры”, *Ученые записки Орловского государ. университета*, **6**:2 (2012), 23–29

[17] Hagemann J., Herrmann C., “Arithmetically locally equational classes and representation of partial functions”, *Universal Algebra, Estergom (Hungary), vol. 29, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, 1982, 345–360

О МИНИМАЛЬНО ПОЛНЫХ ПОЛУГРУППАХ МАРТЫНОВА С НУЛЕМ

Д.В. Соломатин

Омский государственный педагогический университет,
наб. Тухачевского, 14, Омск, 644099, Россия
e-mail: solomatin_dv@omgpu.ru

1 Введение

Основным объектом исследования настоящей статьи являются полугруппы с сигнатурным нулём. Рассмотрим конгруэнции на полугруппах, не обязательно вербальные. Для этого можно разбить данное множество на подмножества некоторым образом. Например, если разбиение имеет вид $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}\} \cup \{\overline{1}, \overline{5}\} \cup \{\overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$, то соответствующее отношение эквивалентности не является конгруэнцией, так как оно не сохраняется относительно умножения: из $\overline{2} \sim \overline{3}$ не следует, что $(\overline{2} \circ \overline{2}) \sim (\overline{3} \circ \overline{2})$. Необходимо, чтобы условие сохранялось, например, как при разбиении $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}\} \cup \{\overline{1}, \overline{5}\} \cup \{\overline{2}, \overline{4}\} \cup \{\overline{3}\}$. При разбиении может оказаться, что одни классы являются подалгебрами данной алгебры, а другие — нет. В этом случае вводится понятие россыпи, означающее, что из классов конгруэнции выбираются лишь те, которые являются подалгебрами алгебры X. Таким образом, каждой конгруэнции соответствует определённая россыпь. Если рассматривать конгруэнции на полугруппах с выделенным элементом — нулём, то таких классов будет не много, а ровно один: именно тот, в котором содержится выделенный нуль. Других быть не может, поскольку в полугруппе обязательно должен присутствовать выделенный элемент — нуль. Следовательно, единственным классом X-вербальной конгруэнции на полугруппе с выделенным нулём является класс, содержащий этот нуль. В обозначениях из примера $\mathbb{Z}_6 = G \cup K \cup P \cup O, \quad G = \{\overline{1}, \overline{5}\},\ K = \{\overline{2}, \overline{4}\},\ P = \{\overline{3}\},\ O = \{\overline{0}\}$. Имеем россыпь $S(\mathbb{Z}_6) = \{O\}$ для полугрупп с сигнатурным нулём. Это единственная одноэлементная россыпь. Для класса полугрупп как элементов полугруппового многообразия (без выделенного нуля) получаем четырёхэлементную россыпь $S(\mathbb{Z}_6) = \{G, K, P, O\}$.

Более строго, X-вербальная конгруэнция определяется как наименьшая конгруэнция, фактор-полугруппы по которой принадлежат данному многообразию. Например, можно рассматривать конгруэнции на $\mathbb{Z}_6$, такие что соответствующие фактор-алгебры являются связками. Так как пересечение конгруэнций также является конгруэнцией, то наименьшая конгруэнция получается как пересечение всех конгруэнций, фактор-полугруппы по которым принадлежат заданному многообразию.

Зафиксируем многообразие коммутативных связок

$$S = \mathrm{var}\{xy \approx yx,\ x^2 \approx x\},$$

и многообразие полугрупп с нулевым умножением

$$Z = \mathrm{var}\{xy \approx 0\},$$

которые являются атомами как в решётке многообразий полугрупп, так и в решётке многообразий полугрупп с нулём.

Если задано многообразие S, то обозначение $S(\mathbb{Z}_6)$ означает класс, содержащий нуль, в минимальной конгруэнции, фактор-полугруппа по которой является коммутативной связкой. Этот класс называется X-вербалом полугруппы $\mathbb{Z}_6$.

Разобьём полугруппу на четыре подполугруппы:

$$\mathbb{Z}_6 = G \cup K \cup P \cup O.$$

Каждый класс является полугруппой и идемпотентом, так как в фактор-полугруппе выполняются равенства $G^2 = G$, $K^2 = K$, $P^2 = P$, $O^2 = O$. Таким образом, получена конгруэнция, все классы фактор-полугруппы по которой являются подполугруппами исходной полугруппы $\mathbb{Z}_6$. Следовательно, это россыпь, называемая X-вербальной россыпью в терминологии Л. М. Мартынова. Для сравнения, в полугруппе с выделенным нулём получается лишь X-вербал, так как единственный класс, содержащий нуль, является подалгеброй, а остальные классы, хотя и являются полугруппами, не содержат выделенного нуля.

Полугруппа называется X-полной, если её фактор (X-вербал), то есть описанная выше россыпь, совпадает со всей полугруппой. Иными словами, если $X(\mathbb{Z}_6) = \mathbb{Z}_6$, то полугруппа $\mathbb{Z}_6$ является X-полной. Это означает, что она не разбивается на фрагменты с той же структурой X, и не существует фактор-алгебры с более чем одним классом, принадлежащей исходному многообразию.

В рассматриваемом случае, зафиксировав многообразие S, мы анализируем S-полноту. Если бы коммутативную связку из S можно было разбить на классы так, чтобы каждый из них, будучи полугруппой, принадлежал S, и при этом единственным возможным разбиением было бы склеивание всех элементов в один класс, то такая связка называлась бы S-полной. Однако для $\mathbb{Z}_6$ это не так: удалось разбить её на четыре класса, и фактор-полугруппа $\{G, K, P, O\}$ является связкой, то есть коммутативной полугруппой идемпотентов. Следовательно, $\mathbb{Z}_6$ не является S-полной. Аналогичные рассуждения применимы к полугруппам в любом фиксированном многообразии. В общем случае полная полугруппа — это такая полугруппа в некотором многообразии, которую нельзя разбить на меньшие подполугруппы из того же многообразия. Очевидный пример полной полугруппы даёт тривиальный случай $\mathbb{Z}_1$. Ниже будет приведён пример нетривиальной полной полугруппы. Среди коммутативных полугрупп таких примеров нет.

В примере с $\mathbb{Z}_6$ мы разбили полугруппу на связку, и меньшего числа элементов, чем $\{G, K, P, O\}$, получить нельзя: если разделить двухэлементные классы на одноэлементные, то нарушится идемпотентность. Таким образом, $\{G, K, P, O\}$ — это наименьшая конгруэнция, фактор по которой является коммутативной связкой. При этом Z-вербал состоит только из нуля.

Итак, полугруппа $\mathbb{Z}_6$ не является S-полной. Полная полугруппа определяется как полная по каждому атому. В случае $\mathbb{Z}_6$ это условие не выполняется: она не является S-полной. В решётке многообразий полугрупп с нулём в данном случае имеется два атома: S (многообразие всех коммутативных идемпотентных полугрупп с нулём) и Z (полугруппы с нулевым умножением). Если же рассматривать атомы в решётке всех многообразий полугрупп (в полной полугрупповой сигнатуре), то к уже упомянутым S и Z добавляются:

— связки левых нулей

$$L = \mathrm{var}\{xy \approx x\},$$

— связки правых нулей

$$R = \mathrm{var}\{xy \approx y\},$$

— абелевы группы простой экспоненты p

$$A_p = \mathrm{var}\{x^p \approx 1\}.$$

В этом случае теория становится более сложной, поэтому сначала целесообразно рассмотреть случай с выделенным элементом.

Полугруппа $\mathbb{Z}_6$ не является S-полной. Выясним, будет ли она Z-полной. Для этого необходимо разбить $\mathbb{Z}_6$ так, чтобы фактор-полугруппа была полугруппой с нулевым умножением. Однако наличие единицы приводит к тому, что все элементы, связанные с ней, «склеиваются» с нулём. В результате наименьшая конгруэнция, фактор по которой образует полугруппу с нулевым умножением, совпадает со всей полугруппой $\mathbb{Z}_6$: все её элементы попадают в один класс.

Этот вывод можно получить и другим путём. Хорошо известный факт заключается в том, что для любой полугруппы S её Z-вербал равен $S \bullet S$, то есть идеалу, образованному всеми произведениями элементов S. Факторизация по этому идеалу приводит к полугруппе с нулевым умножением. Следовательно, $\mathbb{Z}_6$ как полугруппа с выделенным нулём является Z-полной.

В общем случае Л. М. Мартынов называл полугруппу полной (или атомно полной), если она является полной по каждому атому. Чтобы $\mathbb{Z}_6$ была полной, необходимо, чтобы она была полной и по S, и по Z. Однако выше показано, что она не является S-полной.

2 Примеры полных полугрупп

Известные пятиэлементные полугруппы Брандта, для которых стандартное обозначение во всех полугрупповых статьях — A_2 и B_2, задаются своими копредставлениями:

$$\mathrm{A}_2 = \langle a, b \mid aba = a,\ bab = b,\ a^2 = a,\ b^2 = 0 \rangle,$$

$$\mathrm{B}_2 = \langle a, b \mid aba = a,\ bab = b,\ a^2 = 0,\ b^2 = 0 \rangle.$$

На рис. 1 для наглядности представлены графы Кэли этих полугрупп.

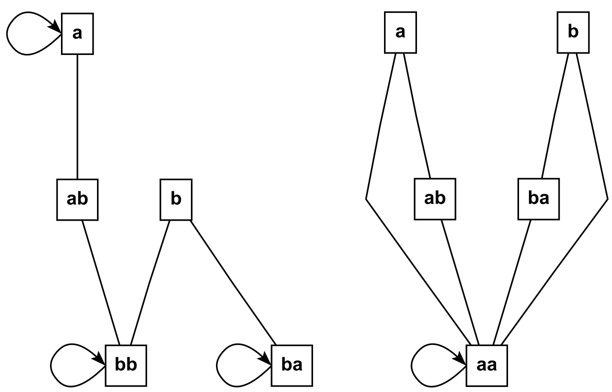


Рис. 1. Графы Кэли полугрупп A_2 (слева) и B_2 (справа).

Докажем, что A_2 является полной. Для этого необходимо показать, что она полна по всем атомам, то есть по S и по Z.

Полугруппа A_2 полна по S, так как её невозможно разложить на коммутативную связку, то есть нельзя построить фактор-полугруппу, в которой для любых классов x и y выполнялись бы соотношения $xy = yx$ и $x^2 = x$.

Действительно, произведение a и b коммутативно, следовательно, ab должно склеиться с ba. Умножим обе части равенства $ab = ba$ слева на b: получаем $bab = bba$. Но $bba = 0$, тогда как $bab = b$. Следовательно, b склеивается с 0. Из этого следует $a = aba = 0$, то есть образующие a и b также склеиваются с нулём. Таким образом, вся полугруппа A_2 сводится к одному нулевому классу, и разложить её в коммутативную связку невозможно. Следовательно, A_2 полна по S.

Докажем теперь полноту по Z. Для этого построим Z-вербал по полугруппам с нулевым умножением. Им является квадрат рассматриваемой полугруппы A_2. Заметим, что любой образующий элемент A_2 можно представить как произведение двух элементов этой полугруппы. Следовательно, $A_2 \bullet A_2 = A_2 = Z(A_2)$. Таким образом, A_2 является Z-полной.

Итак, A_2 служит примером полной полугруппы в классе полугрупп с нулём. Более того, она полна и в классе всех полугрупп.

Известен общий результат Т. Ю. Финк [2], который можно уточнять в дальнейшем:

Предложение [2, Следствие 2]. Конечная полугруппа S с нулём является минимально полной тогда и только тогда, когда она является идеальным расширением нильполугруппы N с помощью либо полугруппы A_2, либо полугруппы B_2, и для любого элемента $x \in N$ множество $S \setminus J_x$, где J_x — множество порождающих главного идеала S^1xS^1, не является подполугруппой.

Конечная полугруппа с нулём называется минимально полной, если среди её подполугрупп нет полных. То есть сама она является полной, но ни одна её подполугруппа полной не является. Так, например, A_2 является минимально полной.

3 Заключение

Следующая теорема О. В. Князева уточняет предложение Т. Ю. Финк:

Теорема 1 (О. В. Князев). *Конечная полугруппа S с нулём является минимально полной в классе полугрупп с нулём тогда и только тогда,* *когда она либо совпадает с полугруппой* A_k*, либо является гомоморфным образом полугруппы* $\mathrm{B}_{n,k}$*, являющимся идеальным расширением конечной нильполугруппы с помощью полугруппы* B_2*.*

Полугруппа $\mathrm{A}_k = \langle a, b \mid aba = a,\ bab = b,\ a^2 = a,\ b^k = 0\rangle, \quad k \geq 2$, является обобщением A_2 и изоморфна ей при $k = 2$. При этом, полугруппа $\mathrm{B}_{n,k} = \langle a, b \mid aba = a,\ bab = b,\ a^n = 0,\ b^k = 0\rangle, \quad n, k \geq 2$, также играет ключевую роль. Любой её гомоморфный образ является полной полугруппой, так как, как показал О. В. Князев, полнота наследуется при гомоморфных отображениях. Для конечных полугрупп гомоморфизм сохраняет не только полноту, но и минимальную полноту. В частности, при $n = k = 2$ из $\mathrm{B}_{n,k}$ получается пятиэлементная полугруппа Брандта B_2.

Случай, когда n и k различны, остаётся открытым: пока не найдено условий конечности в виде ограничений на параметры n, k и дополнительные соотношения. Вместо этого используется общее условие: полугруппа должна быть гомоморфным образом $\mathrm{B}_{n,k}$, являющимся идеальным расширением конечной нильполугруппы с помощью B_2. Очевидно, что такая полугруппа не всегда конечна. Например, при $n \geq 3$ и $k \geq 3$ в $\mathrm{B}_{n,k}$ формируются попарно различные слова вида $(a^2b^2)^n$ для любого натурального n, что приводит к бесконечной полугруппе.

Остаётся задача: определить гомоморфный образ полугруппы $\mathrm{B}_{n,k}$ в явном виде так, чтобы он являлся идеальным расширением конечной нильполугруппы с помощью B_2.

Список литературы

[1] L.M. Martynov, Completeness, reducibility, primarity and purity for algebras: results and problems // Sib. Elektron. Mat. Izv., 13 (2016), 181—241. (in Russian)

[2] T.Ju. Fink, Embeddability and minimal completeness of finite semigroups // Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmSPU, 1 (2002), 20—25. (in Russian)

UNION, INTERSECTION AND COMPARISON OF LINGUISTIC STRUCTURES

A.I. Stukachev, C. Liu, Z. Cao

Sobolev Institute of Mathematics
Acad. Koptyuga avenue 4
Novosibirsk State University
Pirogova street 1
630090 Novosibirsk Russia
e-mail: aistu@math.nsc.ru

Classical notions and techniques from model theory are used in mathematical linguistics since Montague seminal works [1], with precise formal representations of language structures, both syntactical and semantical. However, in modern computational linguistics machine learning and statistical methods generate linguistic data structures (datasets) of different type. In particular, these structures do not always satisfy the requirements of formal correctness.

We choose an example of formal mathematical definition of a linguistic data structure and introduce operations of union, intersection and comparison for such structures, formalized in algebraic and model-theoretic terms. We describe a modification algorithm for correct merging of linguistic datasets that guarantee the semantic consistency. Also, the operation of intersection of linguistic datasets can be introduced in a natural way, forming a lattice.

Another natural and important question for linguistic structures is a comparison of relevance or similarity. In distributional language models, cosine similarity is a method for measuring semantic similarity of words based on their vector representations. We define a method for measuring semantic similarity for texts and linguistic datasets, by generating corresponding graph structures and calculating the graph editing distance.

The research continues that started in [2, 3, 4]. It is supported by the IM SB RAS state assignment, project number FWNF-2022-0012.

References

[1] D.R. Dowty, Introduction to Montague Semantics, D. Reidel Publishing Company (1989).

[2] A.S. Burnistov, A.I. Stukachev, Generalized computable models and Montague semantics // Studies in Computational Intelligence, 1081 (2023), 107–124.

[3] A.S. Burnistov, A.I. Stukachev, Computable functionals of finite types in Montague semantics // Siberian Electronic Mathematical Reports, v. 21, N 2 (2024), pp. 1460–1472.

[4] A.I. Stukachev, U.D. Penzina, Skolem functions and generalized quantifiers for negative polarity items semantics // Lecture Notes in Networks and Systems, 1198 (2025), 123–132.

КОНГРУЭНЦ-АЛГЕБРЫ РИСА В НЕКОТОРЫХ ПОДКЛАССАХ КЛАССА АЛГЕБР С ОДНИМ ОПЕРАТОРОМ И ОСНОВНЫМИ ТЕРНАРНОЙ И НУЛЬАРНЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

В.Л. Усольцев

Волгоградский государственный социально-педагогический университет,
просп. им. В. И. Ленина, 27, Волгоград, 400005, Россия
e-mail: usl2004@mail.ru

1 Введение

В работе рассматриваются некоторые виды алгебр, связанные с понятием конгруэнции Риса. В [1] Р. Тичи обобщает понятие конгруэнции Риса, первоначально возникшее в теории полугрупп [2], на произвольные универсальные алгебры. Вариант этого определения (вместе с двойственным ему определением рисовской подалгебры), приведенный ниже, дается в формулировке монографии [3].

Определение 1. [3] Конгруэнция θ универсальной алгебры A называется *конгруэнцией Риса*, если для некоторой подалгебры B алгебры A выполняется равенство $\theta = B^2 \cup \triangle_A$, где $\triangle_A$ — отношение равенства на носителе алгебры A. Подалгебра B универсальной алгебры A называется *подалгеброй Риса* алгебры A, если отношение $B^2 \cup \triangle_A$ является конгруэнцией алгебры A.

Ряд свойств рисовских конгруэнций был изучен в [1]. В контексте универсальной алгебры конгруэнции и подалгебры Риса также рассматривались в [4]—[6]. Интерес к конгруэнциям Риса во многом обусловлен тем, что с их помощью задается ряд алгебраических конструкций, таких, как рисовские гомоморфизмы и факторы, а также тем, что они являются одноблоковыми [7], то есть, имеют не более одного неодноэлементного класса. Одноблоковые конгруэнции обладают рядом интересных свойств, и этим конгруэнциям (а в их числе и конгруэнциям Риса) посвящена отдельная глава монографии [3].

Обозначим через $Con\,A$ решетку конгруэнций алгебры A, а через $Sub\,A$ решетку ее подалгебр. Следуя [1], положим $\emptyset \in Sub\,A$. При этом условии совокупность всех конгруэнций Риса алгебры A образует полную решетку $Con_R\,A$ относительно включения, нулем и единицей которой являются тривиальные конгруэнции: единичная $\bigtriangledown_A = A^2 \cup \triangle_A$ и нулевая $\triangle_A = \emptyset^2 \cup \triangle_A$. Это позволяет ставить для Con_RA задачи, аналогичные тем, которые возникают при изучении решетки $ConA$.

В первую очередь вызывают интерес условия, при которых решетки $ConA$ и Con_RA совпадают. В связи с этим, в [8] было введено следующее понятие.

Определение 2. [8] *Конгруэнц-алгеброй Риса* называется универсальная алгебра, в которой любая конгруэнция является рисовской.

Близкое понятие возникает в теории полугрупп: конгруэнц-полугруппой Риса [9] называется такая полугруппа, в которой любая ненулевая конгруэнция является конгруэнцией Риса.

Также привлекает внимание и противоположная ситуация, когда решетка Con_RA является двухэлементной цепью. Неодноэлементная универсальная алгебра называется *рисовски простой* [8], если она не имеет нетривиальных рисовских конгруэнций.

Таким образом, естественно возникает задача описания конгруэнц-алгебр Риса и рисовски простых алгебр в различных классах алгебр. В [10] такое описание было получено для класса всех *унаров*, то есть алгебр с одной унарной операцией. С унарами тесно связан другой обширный класс алгебр, а именно, алгебры с операторами.

Алгеброй с операторами (см. [11], §13) называется универсальная алгебра $\langle A, \Omega\rangle$, сигнатура которой является дизъюнктным объединением двух непустых частей Ω_1 и Ω_2, где часть Ω_1 (называемая основной) произвольна, а часть Ω_2 состоит из *операторов* — унарных операций, перестановочных с любой операцией из Ω_1, то есть, действующих как эндоморфизмы относительно операций из Ω_1. Тем самым, если 0 — основная нульарная операция данной алгебры, а f — ее оператор, то $f(0) = 0$.

Если f — унарная операция из сигнатуры Ω, то унар $\langle A, f\rangle$ называется *унарным редуктом* алгебры $\langle A, \Omega\rangle$. В [10] было найдено необходимое условие конгруэнц-рисовости (в терминах унарных редуктов) для алгебр с одним оператором и произвольной основной сигнатурой.

На этой основе было получено описание конгруэнц-алгебр Риса в некоторых классах алгебр с одним оператором и одной тернарной основной операцией, определение которых дается ниже.

В [12] Л. А. Скорняковым была поставлена следующая проблема: для данного унара $\langle A, f\rangle$ определить на множестве A операции таким образом, чтобы полученная алгебра принадлежала к заданному классу и унарная операция f была ее эндоморфизмом. Тем самым, им был предложен подход к построению различных классов алгебр с операторами, отличный от классического.

В [13] В. К. Карташов определил на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ тернарную операцию $p(x, y, z)$, перестановочную с операцией f, следующим образом. Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар. Для любого элемента $x \in A$ через $f^n(x)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу x; также полагаем $f^0(x) = x$. Пусть $x, y \in A$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathrm{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x, y) = \min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$, и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x,y,z) \overset{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) \leqslant k(y,z) \\ x, & \text{если } k(x,y) > k(y,z). \end{cases} \tag{1}$$

Из определения следует, что операция p является мальцевской и удовлетворяет тождествам Пиксли $p(y, y, x) = p(x, y, y) = p(x, y, x) = x$. Как следствие, класс алгебр $\langle A, p, f\rangle$ содержится в многообразии, которое является конгруэнц-дистрибутивным и конгруэнц-перестановочным.

На основе подхода, предложенного в [13], на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ можно определить тернарные операции $s(x, y, z)$ и $m(x, y, z)$ (см. [8]), также перестановочные с операцией f:

$$s(x,y,z) \overset{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) < k(y,z); \\ y, & \text{если } k(x,y) = k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) > k(y,z), \end{cases} \tag{2}$$

$$m(x,y,z) \overset{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) \geqslant k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) < k(y,z). \end{cases} \tag{3}$$

Из (2) следует, что операция s удовлетворяет тождествам $s(x, y, y) = s(y, y, x) = s(y, x, y) = x$, то есть является мальцевской, и кроме того, операцией меньшинства. Тем самым, класс алгебр $\langle A, s, f\rangle$ содержится в конгруэнц-модулярном многообразии. Из (3) вытекает, что операция m удовлетворяет тождествам $m(x, y, y) = m(y, y, x) = m(y, x, y) = y$, то есть является операцией большинства. Как следствие, класс алгебр $\langle A, m, f\rangle$ содержится в конгруэнц-дистрибутивном многообразии.

Отметим, что алгебры, имеющие термальные операцию большинства или мальцевскую операцию, используются в рамках алгебраического подхода к исследованию вычислительной сложности ограничений задачи CSP (Constraint Satisfaction Problem) и в смежных областях.

Конгруэнц-алгебры Риса в классе алгебр $\langle A, m, f\rangle$ были описаны в [8], в классах алгебр $\langle A, p, f\rangle$, $\langle A, s, f\rangle$ — в работе [10].

Целью настоящей работы является описание конгруэнц-алгебр Риса в классах алгебр, полученных из рассмотренных выше расширением их сигнатуры с помощью нульарных операций, а именно алгебр $\langle A, d, 0, f\rangle$ и $\langle A, \{d, f\} \cup \Omega_0\rangle$, где f — оператор; d — одна из тернарных операций p, s, m; 0 — основная нульарная операция; Ω_0 есть множество основных нульарных операций, где $|\Omega_0| > 1$.

2 Основной результат

Дадим предварительно некоторые определения и введем обозначения. Неодноэлементная алгебра называется конгруэнц-простой, если она имеет только тривиальные конгруэнции. Класс конгруэнции θ, порожденный элементом x, обозначается через $[x]\theta$. Конгруэнция $\overline{\alpha}$ алгебры A называется расширением конгруэнции α подалгебры B алгебры A, если условие $x\overline{\alpha}y$ для $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $x\alpha y$, либо $x = y$.

Унар $\langle A, f\rangle$ называется связным, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$. Компонентой связности унара называется его максимальный по включению связный подунар. Объединение непересекающихся унаров называется их суммой.

Унар $\langle a | f^n(a) = a\rangle$ называется циклом длины n. Элемент a унара называется циклическим, если подунар, порожденный элементом a, является циклом.

Элемент a унара называется периодическим, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geqslant 0$ и $n > 0$. Унар называется периодическим, если каждый его элемент является периодическим. Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t, для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некотором $n \geqslant 1$, называется глубиной элемента a и обозначается через $t(a)$.

Элемент a унара называется неподвижным, если $f(a) = a$. Связный унар с неподвижным элементом называется корнем. Элемент a унара называется узловым, если найдутся такие различные элементы b и c, отличные от a, что $f(b) = a = f(c)$. Корнем без нетривиальных узлов называется корень, не содержащий узловых элементов, кроме, может быть, неподвижного.

Через σ_n, где $n \in N$, обозначается конгруэнция алгебры $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ с основной сигнатурой Ω и оператором f, которая является ядром эндоморфизма f^n. Через σ обозначается конгруэнция на $\langle A, \Omega\rangle$, определенная как $x\sigma y \Leftrightarrow \exists s > 0\ f^s(x) = f^s(y)$.

Теорема 1. *Пусть $\langle A, d, 0, f\rangle$ — алгебра с оператором f, основной нульарной операцией 0 и основной тернарной операцией d, заданной по одному из правил (1) – (3). Алгебра $\langle A, d, 0, f\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:*
1) операция f инъективна и множество $\{0\}$ является компонентой связности унара $\langle A, f\rangle$;
2) унар $\langle A, f\rangle$ является неодноэлементным корнем без нетривиальных узлов, в котором 0 является неподвижным элементом;
3) унар $\langle A, f\rangle$ есть сумма неодноэлементного корня без нетривиальных узлов, в котором 0 является неподвижным элементом, и произвольного подунара с инъективной операцией.

Доказательство.

Необходимость. Пусть алгебра $\langle A, d, 0, f\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса. Тогда, по теореме 3 [10], либо операция f инъективна на A, либо унар $\langle A, f\rangle$ является неодноэлементным корнем без нетривиальных узлов, либо $\langle A, f\rangle$ является суммой неодноэлементного корня без нетривиальных узлов и подунара, на котором операция f инъективна. Рассмотрим возникающие случаи.

Случай 1: операция f инъективна на A.

Предположим, что в компоненте связности B унара $\langle A, f\rangle$, содержащей 0, найдется элемент $b \neq 0$. По условию, $f(0) = 0$, то есть, подунар $\{0\}$ является одноэлементным циклом. Тогда, по лемме 11 [10], компонента связности B есть периодический унар, а значит, элемент b является периодическим. Отсюда, $f^t(b) = f^{t+n}(b)$ для некоторых $t \geqslant 0$ и $n > 0$, а значит, элемент $f^t(b)$ является циклическим, откуда $f^t(b) = 0$. С другой стороны, из $f(0) = 0$ следует $f^t(0) = 0$, что, с учетом инъективности операции f, противоречит выбору элемента b.

Таким образом, компонента связности унара $\langle A, f\rangle$, содержащая элемент 0, имеет вид $\{0\}$.

Случай 2: унар $\langle A, f\rangle$ является неодноэлементным корнем без нетривиальных узлов.

Так как корень — это связный унар, то в силу условия $f(0) = 0$, элемент 0 и есть неподвижный элемент $\langle A, f\rangle$.

Случай 3: унар $\langle A, f\rangle$ есть сумма неодноэлементного корня без нетривиальных узлов, в котором 0 является неподвижным элементом, и произвольного подунара с инъективной операцией.

Пусть B — компонента связности унара $\langle A, f\rangle$, которая является неодноэлементным корнем без нетривиальных узлов. Если $0 \in B$, то, как и выше, 0 — неподвижный элемент корня B.

Предположим теперь, что $0 \notin B$. Из замечания 2 [14] следует, что бинарное отношение σ на A является конгруэнцией алгебры $\langle A, d, 0, f\rangle$. Отсюда, по условию, σ — рисовская конгруэнция.

Докажем, что любой класс конгруэнции σ, порожденный элементом из $A \setminus B$, одноэлементен. Предположим, что найдется элемент $a \in A \setminus B$, для которого $|[a]\sigma| > 1$. Тогда для некоторого $c \in A$, где $c \neq a$, имеем $c\sigma a$. Отсюда, $f^n(c) = f^n(a)$ для некоторого $n > 0$. Если $c \in B$, то, по последнему равенству, $a \in B$, что противоречит выбору элемента a. Отсюда, $c \in A \setminus B$. Тогда, поскольку операция f инъективна на $A \setminus B$, то из $f^n(c) = f^n(a)$ следует, что $c = a$, а это противоречит выбору элемента c. Таким образом, $|[a]\sigma| = 1$ для любого элемента $a \in A \setminus B$.

Пусть v — неподвижный элемент подунара B и $x, y \in B$. Обозначим $k = \max\{t(x), t(y)\}$. Тогда $f^k(x) = v = f^k(y)$ и, следовательно, $x\sigma y$. Тем самым, учитывая, что любой класс конгруэнции σ, порожденный элементом из $A \setminus B$, одноэлементен, имеем $\sigma = B^2 \cup \triangle_A$. Но поскольку $0 \notin B$, то B не является подалгеброй алгебры $\langle A, d, 0, f\rangle$, и, следовательно, σ не будет рисовской конгруэнцией, что противоречит условию.

Достаточность. Пусть операция f инъективна на A. В этом случае алгебра $\langle A, d, f\rangle$ является конгруэнц-простой (для операции p это следует из теоремы 2 [14]; для операции s — из теоремы 9 [15]; для операции m — из теоремы 2 [16]). Отсюда, конгруэнц-простой будет и алгебра $\langle A, d, 0, f\rangle$. Тогда, поскольку тривиальные конгруэнции являются рисовскими, то $\langle A, d, 0, f\rangle$ будет конгруэнц-алгеброй Риса.

Пусть теперь унар $\langle A, f\rangle$ является неодноэлементным корнем без нетривиальных узлов, в котором 0 является неподвижным элементом. Тогда, по лемме 12 [14], любая нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, p, f\rangle$ имеет вид σ_n для некоторого $n > 0$. По лемме 11 [17] аналогичное верно и для алгебры $\langle A, s, f\rangle$, а по следствию 1 из леммы 4 [8] — и для алгебры $\langle A, m, f\rangle$. Тогда это же утверждение выполняется и для алгебр $\langle A, d, 0, f\rangle$. Учитывая, что поскольку 0 — неподвижный элемент унара $\langle A, f\rangle$, то он содержится в любой подалгебре алгебры $\langle A, d, f\rangle$, по лемме 15 [10] получаем, что алгебра $\langle A, d, 0, f\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса.

Наконец, пусть унар $\langle A, f\rangle$ есть сумма неодноэлементного корня без нетривиальных узлов, в котором 0 является неподвижным элементом, и произвольного подунара с инъективной операцией.

Обозначим через B компоненту связности унара $\langle A, f\rangle$, являющуюся корнем. По определениям (1) – (3), подунар B замкнут относительно операций p, s, m; кроме того, он содержит нульарную операцию 0. Отсюда, B является подалгеброй алгебры $\langle A, d, 0, f\rangle$.

Так как по условию унар $\langle A, f\rangle$ представляется как сумма компоненты связности, на которой операция f не инъективна, и подунара с инъективной операцией, то по лемме 15 [18], любая нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, p, f\rangle$ является расширением некоторой конгруэнции подалгебры B. По лемме 11 [17], то же утверждение выполняется и для алгебры $\langle A, s, f\rangle$, а по лемме 6 [8] — и для алгебры $\langle A, m, f\rangle$. Как следствие, этот же факт верен и для алгебр $\langle A, d, 0, f\rangle$. Окончательно, с учетом леммы 15 [10] и замечания 4 [10], получаем, что алгебра $\langle A, d, 0, f\rangle$ есть конгруэнц-алгебра Риса.

Теорема 2. *Пусть $\langle A, \{d, f\} \cup \Omega_0\rangle$ — алгебра с оператором f, основной тернарной операцией d, заданной по одному из правил (1) – (3), а множество Ω_0 состоит из нульарных операций на A, причем $|\Omega_0| > 1$. Алгебра $\langle A, \{d, f\} \cup \Omega_0\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса тогда и только тогда, когда операция f инъективна.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\langle A, \{d, f\} \cup \Omega_0\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса. Поскольку $|\Omega_0| > 1$ и $f(e) = e$ для любого $e \in \Omega_0$, то унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, \{d, f\} \cup \Omega_0\rangle$ несвязен. Тогда, по теореме 3 [10], либо операция f инъективна на A, либо унар $\langle A, f\rangle$ есть сумма компоненты связности B, являющейся неодноэлементным корнем без нетривиальных узлов, и подунара $A \setminus B$ с инъективной операцией.

Предположим, что операция f не инъективна на A. Из замечания 2 [14] следует, что $\sigma \in Con\langle A, \{d, f\} \cup \Omega_0\rangle$, причем, по условию, σ — конгруэнция Риса. Рассуждая, как в Случае 3 в доказательстве необходимости теоремы 1, получаем, что $\sigma = B^2 \cup \triangle_A$. Отсюда, множество B является подалгеброй алгебры $\langle A, \{d, f\} \cup \Omega_0\rangle$. Как следствие, в этом случае B содержит все нульарные операции из Ω_0, что ведет к противоречию, так как поскольку $f(e) = e$ для любой $e \in \Omega_0$, то каждая нульарная операция принадлежит отдельной компоненте связности, а из условия $|\Omega_0| > 1$ следует, что таких компонент связности будет более одной.

Достаточность. Рассуждения аналогичны случаю, когда операция f инъективна, в доказательстве достаточности теоремы 1.

Следствие 1. *Если алгебра $\langle A, \{d, f\} \cup \Omega_0\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса, то каждый из элементов множества Ω_0 образует одноэлементную компоненту связности унара $\langle A, f\rangle$.*

Доказательство. Рассуждения аналогичны Случаю 1 в доказательстве необходимости теоремы 1.

Следствие 2. *В классе алгебр* $\langle A, \{d, f\} \cup \Omega_0 \rangle$, *где* $|\Omega_0| > 1$, *любая конгруэнц-алгебра Риса является конгруэнц-простой, а следовательно, и рисовски простой.*

Доказательство. Следует из теоремы 2 [14], теоремы 9 [15] и теоремы 2 [16].

Список литературы

[1] Tichy R.F. The Rees congruences in universal algebras // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1981. V. 29. P. 229–239.

[2] Rees D. On semigroups // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1940. V. 36. P. 387–400.

[3] Chajda I., Eigenthaler G., Langer H. Congruence classes in universal algebra. — Vienna: Heldermann-Verlag, 2003. 192 p.

[4] Chajda I., Duda J. Rees algebras and their varieties // Publ. Math. (Debrecen). 1985. V. 32. P. 17–22.

[5] Šešelja B., Tepavčević A. On a characterization of Rees varieties // Tatra Mountains Math. Publ. 1995. V. 5. P. 61–69.

[6] Szász G. Rees factor lattices // Publ. Math. 1968. V. 15. P. 259–266.

[7] Agliano P. The one-block property in varieties of semigroups // Semigroup Forum. 1991. V. 42. P. 253–264.

[8] Усольцев В.Л. Алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в одном классе алгебр с оператором и основной операцией почти единогласия // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 4(60). С. 157–166.

[9] Lavers T., Solomon A. The endomorphisms of a finite chain form a Rees congruence semigroup // Semigroup Forum. 1999. V. 59, iss. 2. P. 167–170.

[10] Усольцев В.Л. Конгруэнц-алгебры Риса в классах унаров и алгебр с операторами // Фунд. и прикл. матем. 2024. Т. 25, вып. 1. С. 219–235.

[11] Курош А.Г. Общая алгебра. Лекции 1969-1970 учебного года. — М.: Наука, 1974.

[12] Skornjakov L.A. Unars // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1981. V. 29. P. 735–743.

[13] Карташов В.К. Об унарах с мальцевской операцией // Межд. семинар “Универсальная алгебра и ее приложения”, посв. памяти профессора МГУ Л. А. Скорнякова: тез. докл. (Волгоград, 6-11 сентября 1999 г.). — Волгоград: Перемена, 1999. С. 31–32.

[14] Usoltsev V.L. Simple and pseudosimple algebras with operators // Journal of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 164, № 2. P. 281–293.

[15] Усольцев В.Л. О полиномиально полных и абелевых унарах с мальцевской операцией // Уч. зап. Орловского гос. ун-та. 2012. Т. 6(50), часть 2. С. 229–236.

[16] Усольцев В. Л. О решетках конгруэнций алгебр с одним оператором и основной операцией почти единогласия // Научно-техн. вестник Поволжья. 2016. Вып. 2. С. 28–30.

[17] Лата А.Н. О конгруэнц-когерентных алгебрах Риса и алгебрах с оператором // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 2(62). С. 154–172.

[18] Усольцев В.Л. О подпрямо неразложимых унарах с мальцевской операцией // Изв. Волгоградского гос. пед. ун-та, сер. “Ест. и физ.-мат. науки”. 2005. № 4(13). С. 17–24.

РАНГИ ЭКВАЦИОНАЛЬНОСТИ СЕМЕЙСТВ ФОРМУЛ И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ

А.В. Васенёва

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск, Россия
e-mail: a.vaseneva@g.nsu.ru

1 Ранги эквациональности

Пусть T — произвольная полная теория, M — модель теории T, $\varphi(x, a)$ — формула теории T с набором параметров $a \in M$, Δ — множество формул теории T.

Определение 1. *Рангом эквациональности* $\mathrm{ER}(\varphi(x, a))$ формулы $\varphi(x, a)$ (относительно модели M) называется минимальная длина вложенных цепей пересечений $\bigcap\limits_i \varphi(M, a_i)$, в которые входит $\varphi(M, a)$, дающих максимальное пересечение, при этом каждое следующее пересечение в цепи получается добавлением копии $\varphi(M, a_j)$ для некоторого j, не уменьшающей общее пересечение.
По определению любое значение $\mathrm{ER}(\varphi(x, a)) \geq 0$ либо конечно, либо является бесконечным ординалом, зависящим от модели M. Если в рамках одной модели M ранг эквациональности принимает и конечные, и бесконечные значения при переборе всех параметров a_i из M, то итоговое значение $\mathrm{ER}(\varphi(x, a)) = \sup\{\mathrm{ER}(\varphi(x, a_i)) \mid, a_i \in M\}$.
Рангом эквациональности семейства формул Δ будем называть величину

$$\mathrm{ER}(\Delta) = \sup\{\mathrm{ER}(\varphi(x, a)) \mid \varphi(x, y) \in \Delta, a \in M, l(a) = l(y)\}.$$

Примеры: 1. Формулы $\varphi(M, c) = \{x : x = c\}$, задающие константы c, всегда имеют ранг эквациональности 0 , так как $\varphi(M, c_1) \cap \varphi(M, c_2) = \varnothing$ при $c_1 \neq c_2$ и самому себе при $c_1 = c_2$.

2. Формулы $P(x)$ одноместных предикатов P также всегда имеют ранг эквациональности, равный нулю.

Следующее замечание дает эквивалентную переформулировку понятий уравнения и эквациональной теории из работы [2].

Замечание 1. Формула $\varphi(x, y)$ теории T является *уравнением*, если каждая формула $\varphi(x, a)$ имеет конечный (и ограниченный при подстановке параметров a) ранг эквациональности.
Теория T является *эквациональной*, если любая формула теории T является T-эквивалентной некоторой булевой комбинации формул из Δ, где Δ состоит из уравнений.

Определение [3]. Теория T называется Δ-*базируемой*, где Δ — некоторое множество формул без параметров, если любая формула теории T эквивалентна в T некоторой булевой комбинации формул из Δ.
Для Δ-базируемых теорий T также говорят, что T имеет *элиминацию* или *сокращение кванторов* с точностью до множества Δ.

Теорема 1. 1. *Для любого натурального* $n \geq 1$ *существует* Δ_n*-базируемая эквациональная теория* T_n*, для которой* $\mathrm{ER}(\Delta_n) = n$*.*
2. *Для любого положительного ординала* α *существует* Δ_α*-базируемая теория* T *с моделью* M_α *такая, что* $\mathrm{ER}(\Delta_\alpha) = \alpha$ *относительно модели* M_α*.*

Доказательство. 1. Рассмотрим двудольный граф $G = (X, Y, E)$, X и Y — доли двудольного графа. Обозначим через $Q(M, y)$ множество вершин $x \in X$ в которые можно попасть из вершины y.
По индукции.
Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, $Y = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Для $n = 0$ достаточно рассмотреть граф с биекцией между долями графа, то есть между вершинам $a_i \in Y$ и $x_j \in X, i, j = 1, ..., k$ существует ребро тогда и только тогда, когда $i = j$. Так как для любых $a_1, a_2 \in Y$

$$Q(M, a_1) \cap Q(M, a_2) = \emptyset$$

и для всех $a \in Y$ имеем $|Q(M, a)| = 1$, получаем $\mathrm{ER}(Q(x, y)) = 0$.
Предположим, для $n = k - 2$ утверждение верно.
Для $n = k - 1$ построим граф следующим образом. Пусть

$$\begin{gathered} Q(M, a_1) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}, \\ Q(M, a_2) = \{x_1, x_3, x_4, ..., x_k\}, \\ Q(M, a_3) = \{x_1, x_2, x_4, .., x_k\}, \\ \ldots \\ Q(M, a_k) = \{x_1, x_2, ..., x_{k-2}, x_{k-1}\}. \end{gathered}$$

Таким образом элемент $x_1 \in X$ является общим для всех $a_i \in Y, i = 1, ..., k$.

При таком построении пересечение $Q(M, y_1) \cap Q(M, y_2) \cap \ldots \cap Q(M, y_k)$ состоит из одного элемента $\{x_1\}$, а ранг формулы будет в точности равен $k - 1$.

2. Рассмотрим отношение, заданное формулой $\neg x \approx a$. Пусть b — некоторый кортеж $b_1, b_2, \ldots, b_k$ из M_α , множество решений формулы $\varphi_k(x, \overline{y})$ задается как

$$\{x : \neg x \approx y_i, i = 1, ..., k\},$$

где $1 \leq k \leq \alpha$. Тогда

$$\Delta_\alpha = \{\varphi_k(x, \overline{b}) : l(\overline{b}) = k, \overline{b} \in M, 1 \leq k \leq \alpha\}.$$

По построению $\mathrm{ER}(\Delta_\alpha) = \alpha$.

Заметим, что в доказательстве пункта 1 был построен граф с конечным множеством X, но это не обязательное условие: мощность X может быть бесконечной, в таком случае в качестве общих вершин можно взять коконечное множество $X \setminus \{x_2, ..., x_k\}$.

Замечание 2. Теория T эквациональна тогда и только тогда, когда для каждого конечного множества Δ_0 формул теории T существует конечное множество Δ_1 формул теории T такое, что $\mathrm{ER}(\Delta_1) \in \omega$ и любая формула из Δ_0 T-эквивалентна некоторой булевой комбинации формул из Δ_1.

1.1 Связь рангов эквациональности и булевых комбинаций формул

1.1.1 Дизъюнкции формул

Установим поведение ранга эквациональности при взятии дизъюнкций формул по индукции.

Пусть $\varphi(M, a_1, a_2) = \psi_1(M, a_1) \cup \psi_2(M, a_2)$, при этом $\mathrm{ER}(\psi_1(x, y)) = r_1$, $\mathrm{ER}(\psi_2(x, y)) = r_2$ и $r_1 < r_2$. При подстановке разных значений параметров a_1 и a_2 будут уменьшаться пересечения копий каждой из формул $\psi_1(x, y), \psi_2(x, y)$. Когда значения параметров будут изменены r_1 раз так, что пересечения копий каждый раз уменьшались, для формулы $\psi_1(x, y)$ пересечение копий далее не будет уменьшаться. Однако, для формулы $\psi_2(x, y)$ нужно продолжать процедуру перебора параметров еще $r_2 - r_1$

раз. В итоге добавлять в пересечения копии формул нужно r_2 раз, таким образом $\mathrm{ER}(\varphi(x, y_1, y_2)) = r_2$.
Шаг индукции. Пусть для $\varphi(M, a_1, .., a_{n-1}) = \psi_1(M, a_1) \cup ... \cup \psi_{n-1}(M, a_{n-1})$ верно

$$\mathrm{ER}(\varphi(x, y_1, ..., y_{n-1})) = sup\{r_i : i = 1...n-1, r_i = \mathrm{ER}(\psi_i(x, y))\}.$$

Объединение $\psi_1(M, a_1) \cup ... \cup \psi_n(M, a_n)$ будем рассматривать, как объединение двух копий формул $\varphi(M, a_1, .., a_{n-1}) \cup \psi_n(M, a_n)$, для которого верно

$$\mathrm{ER}(\varphi(x, y_1, .., y_{n-1}) \cup \psi_n(x, y_n)) =$$
$$= \sup\{\mathrm{ER}(\varphi(x, y_1, .., y_{n-1})), \mathrm{ER}(\psi_n(x, y_n))\} =$$
$$= \sup\{r_i : i = 1...n, r_i = \mathrm{ER}(\psi_i(x, y_i))\}.$$

1.1.2 Конъюнкции формул

При рассмотрении конъюнкций формул возможны два случая, при этом один из них является тривиальным и не рассматривается подробно, а именно:
Случай 1: Множество значений формул $\psi_1(M, a_1)$ и $\psi_2(M, a_2)$ не пересекаются $\forall a_1, \forall a_2 \in M$. То есть множество решений формулы $\varphi(x, y_1, y_2) = \psi_1(x, y_1) \wedge \psi_2(x, y_2)$ всегда пусто, а для равенства нулю ранга эквациональности формулы это множество должно содержать хотя бы один элемент.
Случай 2: Существует хотя бы одна пара параметров $a_1, a_2 \in M$ такая, что пересечение $\psi_1(M, a_1) \cap \psi_2(M, a_2)$ не пусто. Тогда значение ранга эквациональности формулы $\varphi(x, y_1, y_2) = \psi_1(x, y_1) \wedge \psi_2(x, y_2)$ меняется от единицы до значения $max\{\mathrm{ER}(\psi_1(x, y_1)), \mathrm{ER}(\psi_2(x, y_2))\}$. Это следует из того, что далее на некотором шаге $i, i > 1$ при подстановке других пар параметров копии могут либо давать общее пересечение с $\psi_1(M, a_{i-1}) \cap \psi_2(M, a_{i-1})$ и тогда ранг эквациональности будет увеличиваться, либо может не иметь общего пересечения и в таком случае ранг эквациональности принимает значение, равное номеру предыдущего шага $i - 1$.

1.1.3 Отрицание формулы

Пусть ранг эквациональности $\mathrm{ER}(\varphi(x, y)) = r$ и этот ранг получен путем пересечения копий $\varphi(M, a_1) \cap ... \cap \varphi(M, a_r)$. Множество решений формулы $\neg\varphi(M, a_1) \cap ... \cap \neg\varphi(M, a_r)$ совпадает с множеством

$M \setminus (\varphi(M, a_1) \cup ... \cup \varphi(M, a_r))$. Заметим, что ранг эквациональности формулы $\neg\varphi(x, y)$ при этом может быть как меньше r, так и больше r: все зависит от модели, формулы и параметров $a_1, ..., a_r$.

Критерий конечности ранга эквациональности при взятии отирцания формулы:
Ранг эквациональности $\mathrm{ER}(\neg\varphi(x, y))$ может быть конечным только в случае, когда дополнение к объединению множеств

$$(\varphi(M, a_1) \cup ... \cup \varphi(M, a_r))$$

в M является конечным. В противном случае, благодаря возможности бесконечного изменения параметров a, ранг эквациональности принимает бесконечное ординальное значение, зависящее от конкретной модели M.

Пример сохранения конечности ранга эквациональности при взятии отрицания формулы:
Рассмотрим случай отношения эквивалентности $E(x, y)$. В этом случае ранг эквациональности равен нулю, поскольку для любых параметров из одного класса эквивалентности множества $E(M, a)$ совпадают.
При переходе к отрицанию $\neg E(x, y)$ конечность ранга эквациональности эквивалентна тому, что все классы эквивалентности должны быть конечными. Действительно: 1. Если классы эквивалентности бесконечны, появляется возможность бесконечного варьирования параметров a. 2. Конечность классов эквивалентности гарантирует, что отрицание сохраняет конечный ранг эквациональности.

1.2 Теории графов

Опишем поведение рангов эквациональности в теориях графов. Будем рассматривать $Q(M, y)$ – множество вершин графа, в которые можно попасть из вершины y. Для начала сделаем следующее замечание:

Замечание 3. Далее в работе рассматриваются связные графы. В случае несвязности рассматриваются ранги эквациональности в каждой компоненте связности и далее берется супремум полученных рангов эквациональности.
В ходе исследования было рассмотрено несколько различных классов графов. Для некоторых из них было установлено, что различия этих классов не накладывают ограничений на ранг эквациональности, а именно:

1. Для ациклических ориентированных и неориентированных графов с петлями и без петель, а также для двудольных графов ранг эквациональности может принимать любые неотрицательные значения.
Рассмотрим на примере ациклического ориентированного графа без петель:
Пусть

$$Q(M, a_1) = \{b_1, b_2, ..., b_n\}, Q(M, a_i) = \{b_1, ., b_{i-1}, b_{i+1}.., b_n\}, i = 2..n-1,$$
$$Q(M, a_n) = \{b_1, b_2, ..., b_{n-1}\}, Q(M, b_j) = \{c_j\}, j = 1..n.$$

При таком построении потребуется пересечь множества $Q(M, a_1)$, $\ldots$, $Q(M, a_n)$ для получения максимального пересечения, а ранг эквациональности $\mathrm{ER}(Q(x, y)) = n - 1$. Таким образом, варьируя количество вершин n графа можно можно получить различные значения ранга эквациональности.

2. Полный граф. Пусть $\{a_1, ..., a_n\}$ – множество вершин полного графа. $Q(M, a_i) = \{a_1, .., a_{i-1}, a_{i+1}, .., a_n\}$ При взятии пересечений $Q(M, a_i) \cap Q(M, a_j)$ получим все множество вершин графа без вершин a_i и a_j. Таким образом ранг эквациональности формулы $Q(x, y)$ для полных графов с n вершинами всегда будет равен $n - 2$.

Таким образом можно сформулировать следствие из теоремы 1 и приведенных примеров:

Следствие 1. *Для любого натурального* $n \geq 0$ *существует* Δ_n-*базируемая эквациональная теория графов* T_n, *для которой* $\mathrm{ER}(\Delta_n) = n$.

1.3 Порядки

Для описания рангов эквациональности, относящихся к частичным порядкам, будем рассматривать множества решений формул $x \leq a$ и $a \leq x$, где a — параметр.

1.3.1 Линейные порядки

1. Линейные порядки на натуральных числах, параметр a может меняться от 0 до $+\infty$.
При подстановке различных значений параметра множества значений формул будут иметь вид $\{0, .., a\}$ для $x \leq a$ и $\{a, a + 1, a + 2, ...\}$ для $a \leq x$.
Таким образом для формулы $x \leq a$ мы можем получить наименьшее

множество значений $\{0\}$, подставив значение параметра $a = 0$. Отюда ранг эквациональности формулы $x \leq a$ всегда равен нулю.
Заметим, что у формулы $a \leq x$ множество значений всегда будет состоять из бесконечного числа натуральных чисел. Отсюда, ранг эквациональности формулы $a \leq x$ равен бесконечному ординалу ω.
Для получения конечного ранга эквациональности формулы $a \leq x$ нужно рассматривать порядок на отрицательных целых числах.

2. Линейные порядки на целых числах.
В данном случае для формул $x \leq a$ и $a \leq x$ имеем следующие множества значений x соответственно $\{..., a-2, a-1, a\}$ и $\{a, a+1, a+2, ...\}$. То есть при подстановке любого зачения параметра $a \in \mathbb{Z}$ нельзя за конечное число шагов достичь максимального пересечения копий для обеих формул. Следовательно ранг эквациональности формул $x \leq a$ и $a \leq x$ в данном случае – бесконечный ординал.

3. Линейные плотные порядки.
Данный случай включает себя порядки на иррациональных, рациональных и вещественных числах и аналогичен случаю 2: при подстановке любого значения параметра a нельзя за конечное число шагов достичь максимального пересечения для обеих формул, так как в силу плотности порядкой для пары чисел a_1, a_2 найдется $a_3 : a_1 < a_3 < a_2$.
Если рассмотреть случай вещественных положительных чисел, имеем следующее: для формулы $x \leq a$ стоит рассматривать значение параметра $a = 0$ и тогда ранг эквациональности формулы $x \leq a$ равен нулю.
Для формулы $a \leq x$ действуют аналогичные рассуждения действуют на множестве $x \in \mathbb{R}^-$.

Таким образом для линейных порядков будет верна следующая теорема:

Теорема 2. *Для линейных порядков ранг эквациональности формулы $x \leq a$ (соответственно $a \leq x$) равен либо нулю, если каждая (бесконечная) цепь имеет наименьший (наибольший) элемент, либо бесконечному ординалу, зависящему от модели.*

1.3.2 Нелинейные частичные порядки

Предложение 1. Для частичных порядков, не являющихся линейными, ранг эквациональности может принимать любое целое неотрицательное значение.

Доказательство. Рассмотрим в частичном порядке, не являющимся линейным, попарно несравнимые элементы $a_1, .., a_{k+1}$. Обозначим за $Q(M, a_i)$ множество всех $x \in M$, таких что $x \leq a_i$, то есть $Q(M, a_i) = \{x \in M | x \leq a_i\}$. Пусть

$$\begin{gathered} Q(M, a_1) = \{a_1, b_1, b_2, .., b_{k+1}, c_1, d_1\} \\ Q(M, a_2) = \{a_2, b_1, b_3, .., b_{k+1}, c_1, d_1\} \\ ... \\ Q(M, a_{k+1}) = \{a_k, b_1, b_2, .., b_k, c_1, d_1\}, \end{gathered}$$

где элементы $b_1, .., b_{k+1}$ тоже попарно несравнимы, $d_1 < c_1, c_1 < b_i, i = 1, .., k+1$. При таком построении ранг эквациональности формулы $x \leq a$ будет равен конечному (или ординальному) числу k.
Таким образом любое неотрицательное значение ранга эквациональности достигается пересечениями множеств решений формул $x \leq a_i$ (или $a_i \leq x$) для некоторых попарно несравнимых элементов a_i.

1.4 Нормальные теории

Нормальные теории базируются *нормальными формулами*, т.е. формулами $\varphi(x, y)$, у которых копии $\varphi(M, a)$ имеют либо совпадающие, либо непересекающиеся множества решений. Фактически эти копии образуют классы эквивалентности.

Получаем характеризацию нормальности теории:

Теорема 3. *Теория T является нормальной тогда и только тогда, когда ранг эквациональности для подходящего множества базисных формул теории T равен нулю.*
Для доказательства теоремы 3 установим вспомогательную лемму:

Лемма 1. *Формула $\varphi(x, y)$ является нормальной тогда и только тогда, когда ее ранг эквациональности равен нулю.*

Доказательство. Пусть формула $\varphi(x, y)$ нормальна, то есть $\forall a_1, a_2 \in M$ верно, что либо $\varphi(M, a_1) = \varphi(M, a_2)$, либо $\varphi(M, a_1) \cap \varphi(M, a_2) = \emptyset$. Такой случай возможен тогда и только тогда, когда ранг эквациональности формулы $\varphi(x, y)$ равен нулю: $\mathrm{ER}(\varphi(x, y)) = 0$.
Обратно, равенство нулю ранга эквациональности означает, что различные копии формулы не дают собственные пересечения. По определению, такие формулы являются нормальными.

Доказательство теоремы 3. По определению рангом эквациональности множества базисных формул Δ является величина

$$\mathrm{ER}(\Delta) = \sup\{\mathrm{ER}(\varphi(x, a)) \mid \varphi(x, y) \in \Delta, a \in M, l(a) = l(y)\}.$$

Таким образом $\mathrm{ER}(\Delta) = 0$ тогда и только тогда, когда Δ состоит из формул $\varphi(x, y)$ с рангом эквациональности $\mathrm{ER}(\varphi(x, y)) = 0$. В силу Леммы 1 Δ состоит из нормальных формул $\varphi(x, y)$, откуда следует, что теория T является нормальной теорией.
Обратно, пусть T — нормальная теория, которая базируется множеством нормальных формул Δ. Так как все формулы $\varphi(x, y) \in \Delta$ нормальны, в силу Леммы 1 имеем $\mathrm{ER}(\varphi(x, y)) = 0$ для всех формул множества Δ. В силу определения ранга эквациональности множества формул имеем равенство $\mathrm{ER}(\Delta) = 0$.

Такое поведение ранга эквациональности можно наблюдать у одноместных формул. Так ранее рассматривался пример с формулами, задающими константы: $x = c$, где $c = const$.

В частности, любая теория одноместных предикатов является нормальной и, как было показано ранее, имеет ранг эквациональности равный 0, в силу отсутствия пересечения копий двух различных предикатов $P_1(x)$ и $P_2(x)$. Также нормальными являются:

- теории абелевых групп,
- стабильные хорновы теории [6],
- теории T, у которых $h-$компаньон T^h имеет немаксимальный несчетный спектр [7],
- теории локально свободных алгебр [10],
- теории T^* уноидов, удовлетворяющих предложениям $\alpha_{n,m,k,l}$ для всех допустимых $< n, m, k, l >$ [11],
- теории T, допускающие элиминацию кванторов, сигнатуры

  $$\langle f_i, P_i, E_i \rangle_{i \in I, j \in J, k \in K},$$

  где f_i, $i \in I$, — одноместные функциональные символы, P_j, $j \in J$, — одноместные предикатные символы, E_k, $k \in K$, — двухместные предикатные символы такие, что соответствующие предикаты $E_k(x, y)$ — эквивалентности в T [12, 13].

1.5 Слабо нормальные теории

Слабо нормальные теории были введены А. Пилаем как обобщение нормальных теорий. Такие теории базируются формулами $\varphi(x, y)$, у которых любое бесконечное пересечение попарно различных копий $\varphi(M, a_i)$ является пустым.

Утверждение 1. *В случае слабо нормальных теорий ранг эквациональности формул может принимать любые конечные значения.*

Доказательство. Слабо нормальные теории базируются формулами, обладающими следующим свойством:
1. Для некоторых наборов параметров a множества решений $\varphi(M, a)$ имеют непустое общее пересечение.
2. Одновременно существуют другие копии $\varphi(M, b)$, которые не пересекаются с этим общим пересечением.
Таким образом, при подстановке в формулу $\varphi(x, y)$ различных параметров можно достичь максимального пересечения копий за конечное число шагов. При этом количество шагов не ограничено. Следовательно, ранг эквациональности может принимать любое конечное значение.

К слабо нормальным теориям относятся теории почти абелевых групп, то есть групп, содержащих абелеву подгруппу конечного индекса.

2 Разность стабилизации

В ходе исследования было замечено, что в рамках рассмотрения одной модели M у одной и той же формулы $\varphi(x, y)$ могут получаться различные значения рангов эквациональности в зависиммости от того, какие параметры $a \in M$ подставляются в формулу.
В связи с этим введем новое понятие:

Определение 2. *Разностью стабилизации* формулы $\mathrm{DE}(\varphi(x, y))$ будем называть величину, задаваемую следующим образом:
1) разность стабилизации формулы равна разности между наибольшим и наименьшим значениями рангов эквациональности формулы $\varphi(x, y)$:

$$\mathrm{DE}(\varphi(x, y)) = \max \mathrm{ER}(\varphi(x, y)) - \min \mathrm{ER}(\varphi(x, y)),$$

если ранг эквациональности формулы принимает только конечные значения при подстановке параметров a,
2) разность стабилиации формулы равна паре из минимального и максимального значений рангов эквациональности:

$$\mathrm{DE}(\varphi(x,y)) = (\min \mathrm{ER}(\varphi(x,y)), \max \mathrm{ER}(\varphi(x,y))),$$

если ранг эквациональности $\mathrm{ER}(\varphi(x,y))$ принимает бесконечное значение при подстановке некоторых параметров $a \in M$.

Напомним, что в случае, когда для фиксированной модели M ранг эквациональности формулы $\varphi(x,y)$ может быть как конечным, так и бесконечным в зависимости от выбора параметров $a_i \in M$, итоговое значение ранга эквациональности определяется как супремум всех возможных значений. Следовательно, в таких случаях разность стабилизации формулы $\mathrm{DE}(\varphi(x,y))$ будет записана в виде пары (min, max), где $min-$минимальное конечное значение ранга экваицональности формулы, $max-$бесконечное ординальное значение ранга экваициональности формулы.

Далее рассмотрим поведение разности стабилизации для уже рассмотренных примеров в различных теориях:

2.1 Теории графов

1. Полный граф. Ранг эквациональности для полных графов с n вершинами всегда будет равен $n-2$ и разность стбилизации равна

$$\mathrm{DE}(Q(x,y)) = 0.$$

2. При исследовании поведения значений ранга эквациональности формулы $Q(x,y)$ в теориях графов был использован такой способ построения, при котором в случае двудольных графов, ациклических ориентированных и неориентированных графов с петлями и без петель для любого натурального n ранг эквациональности формулы равен $n-1$. Таким образом можно построить примеры перечисленных графов, в которых ранг эквациональности $\mathrm{ER}(Q(x,y))$ будет принимать любое неотрицательное значение. Следовательно разность стабилизации $\mathrm{DE}(Q(x,y))$ может принимать любые неотрицательные значения.

Это наблюдение позволяет сформулировать для разности стабилизации следующее утверждение:

Предложение 2. *Для любого натурального $n \geq 1$ существует формула $\varphi_n(x,y)$ в теории графов T_n, для которой $\mathrm{DE}(\varphi_n(x,y)) = n$.*

2.2 Порядки

1. Для линейных порядков на натуральных числах разность стабилизации $\mathrm{DE}(x \le a) = 0$ в силу того, что $\mathrm{ER}(x \le a) = 0$ всегда.

2. Для линейных порядков на целых числах разность стабилизации для обеих формул $x \le a$ и $a \le x$ будет равен паре (min, max), где $min = max$ и принимает значение бесконечного ординала.

3. Для плотных линейных порядков ранг эквациональности всегда равен бесконечному ординалу, следовательно разность стабилизации

$$\mathrm{DE}(Q(x, y)) = (min, max)$$

аналогично случаю 2.

4. Для нелинейных порядков разность стабилизации будет записываться в виде пары значений (min, max), причем min равен нулю, а max равен мощности модели, в рамках которой рассматривается частичный порядок.

2.3 Нормальные теории

Нормальные теории характеризуются нулевым значением ранга эквациональности. Из этого непосредственно вытекает, что разность стабилизации для таких теорий равна нулю для любой формулы $\varphi(x, y)$.

2.4 Слабо нормальные теории

В случае слабо нормальных теорий ранг эквациональности может достигать произвольных конечных величин, что непосредственно влечёт аналогичное свойство для разности стабилизации — она также может принимать любое конечное неотрицательное значение.

Список литературы

[1] Martin-Pizarro A., Ziegler M. Noetherian theories // Journal of Mathematical Logic. — 2024. DOI: 10.1142/S0219061324500247

[2] Pillay A., Srour G. Closed sets and chain conditions in stable theories // Journal of Symbolic Logic. — 1984. — Vol. 49. — P. 1350–1362.

[3] Saffe Y., Palyutin E. A., Starchenko S. S. Models of superstable Horn theories // Algebra and logic. — 1985. — Vol. 24, No 3. — P. 278–326.

[4] Martin-Pizarro A., Ziegler M. Trois couleurs: a new non-equational theory, arXiv:1905.08294v3 [math.LO], 2020.

[5] Даниярова Э.Ю., Мясников А.Г., Ремесленников В.Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами // Монография, Издательство Сибирского отделения РАН. Новосибирск. 2016. 243 с. ISBN 978-5-7692-1512-4.

[6] Палютин Е.А. Категоричные хорновы классы. I // Алгебра и логика. — 1980. — Т. 19, № 5. — С. 582–614.

[7] Палютин Е.А. Нормальность хорновых теорий с немаксимальным спектром // Алгебра и логика. — 1985. — Т. 24, № 5. — С. 551–587.

[8] Pillay A. Countable Models of Stable Theories // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1983. — Vol. 89. — No. 4. — P. 666–672.

[9] Hrushovski U., Pillay A. Weakly Normal Groups // Studies in Logic and the Foundations of Mathematics // Logic Colloquium '85. — 1987. — Volume 122. — P. 233–244.

[10] Белеградек О.В. Теория моделей локально свободных алгебр // Тр. Ин-та математики / АН СССР. Сибирское отделение. — 1988. — Т. 8: Теория моделей и ее применения. — С. 3–25.

[11] Иванов А.А. Простые экзистенциально замкнутые расширения уноидов // Математические заметки. — 1988. — Т. 44, № 4. — С. 449–456.

[12] Судоплатов С.В. Условия нормальности элементарных теорий // Материалы XXIV Всесоюз. науч. студ. конф. Математика. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1986. С. 60–64.

[13] Судоплатов С.В. Базируемость стабильных теорий и свойства счётных моделей с мощными типами : дис... канд. физ.-мат. наук : 01.01.06 / С. В. Судоплатов. — Новосибирск, 1990. — 142 с.

Abstracts

O. Al-Raisi, M. Shahryari, *Finite* CSA *groups and generalizations.*

We present an elementary proof for the fact that every finite CSA group is abelian, and then the main idea of this elementary proof is applied for a wide class of CS$\mathfrak{X}$ groups.

A.V. Chekhonadskikh, *Encoding and enumeration of root locations of real polynomials.*

The paper is devoted to developing of theoretical foundations for polynomial design of control systems with low-order controllers. The method of critical root diagrams allows one to construct control systems with optimal relative stability and oscillability, basing on locations and multiplicities of the rightmost system poles. However, a system behavior over a disturbance time interval requires consideration of all the solution modes and poles. For describing all possible root locations we introduce R-grading, preorder on root sets and corresponding matrix encodings of different root locations. Codes for various system pole locations are enumerated by induction on characteristic polynomial degrees. Key words: linear time-invariant system, control system, polynomial design, pole location, preorder, matrix coding.

G. Czédli, *Notes on the congruence densities and quasiorder densities of sublattices.*

For a positive integer n, let $\mathrm{mnc}(n)$ denote the maximum number of congruences among all n-element lattices; that is, $\mathrm{mnc}(n) = \max\{|\mathrm{Con}\, L| : L$ is an n-element lattice$\}$, where $\mathrm{Con}\, L$ stands for the congruence lattice of L. We know from a 1997 paper of R. Freese that $\mathrm{mnc}(n) = 2^{n-1}$. The *congruence density* $\mathrm{cd}(L)$ of a finite lattice L is defined to be the quotient $|\mathrm{Con}\, L|/\mathrm{mnc}(|L|)$. That is, if an n-element lattice L has exactly k congruences, then $\mathrm{cd}(L) = k/2^{n-1}$. The maximum number of (compatible) quasiorders of an n-element lattice L is 2^{2n-2}, and we define the *quasiorder density* $\mathrm{qd}(L)$ of L — analogously to $\mathrm{cd}(L)$ — as $\mathrm{qd}(L) := |\mathrm{Quo}(L)|/2^{2n-2}$, where $\mathrm{Quo}(L)$ is the quasiorder lattice of L. We prove that if S is a sublattice of a finite lattice L and at least one of the following three conditions holds: (i) L is modular; (ii) S is a cover-preserving sublattice of L; or (iii) L is a dismantlable extension of S, then $\mathrm{cd}(L) \le \mathrm{cd}(S)$ and $\mathrm{qd}(L) \le \mathrm{qd}(S)$.

A.A. Davlatbekov, *On homomorphisms of parastrophes of linear and alinear quasigroups.*

Results on homomorphisms of parastrophs of generalized linear quasigroups are obtained.

E.L. Efremov, A.A. Stepanova, S.G. Chekanov, *On the stability of the class of T-pseudofinite S-acts.*

The questions of stability of the theory of acts over a monoid were considered by T.G. Mustafin. Namely, T.G. Mustafin described monoids, the theory of each act over which is stable. In this paper, we construct a monoid S such that the theory of all T-pseudofinite acts over S is stable, but there exists an act over S with unstable theory, where T is the theory of all acts over S.

D.Yu. Emelyanov, *Algebras of binary isolating formulas for Cartesian and tensor products of star graphs.*

Algebras of binary isolating formulas for Cartesian and tensor products of star graphs are escribed.

N.Yu. Galanova, *On cuts of some fields of generalised power series.*

There are various classifications of cuts of totally ordered fields that make it possible to geometrically visualize the algebraic properties of the ordered fields. The type of a cut is invariant under ordered isomorphism of ordered structures, making cuts a useful tool in classifying fields. For a field k and an ordered commutative group G, a Hahn field is any subfield of the field of generalised power series $k[[G]]$. I. Kaplansky proved that each real closed field F is embedded in a field of generalised power series $\mathbb{R}[[G_F]]$, where G_F is a group of Archimedean classes of F. The present paper considers examples of an application of a cut theory for some classes of Hahn fields. We prove a necessary and sufficient condition of a symmetric cut, we give proof a criterion for the representability of a formal power series by a fraction for some construction of fields, and consider the classification of cuts in some fields of generalized power series by the type of fundamentality, symmetry, and algebraicity.

A. Gkantzounis, F. Skarpelos, *Topologies and separation axioms in the institution-independent model theory framework.*

In this paper we study the behavior of certain topologies on classes of models in the abstract model-theoretic framework of institution theory. We study the Semantic Topology and the Identification Semantic Topology and their relation to various separation axioms in classical topology, generalizing and furthering previous results. Model theoretic notions such as semantic equivalence and cardinality of syntax prove to be linked to topological ones. In the final section, we demonstrate some results on preservation through signature morphisms. Those results justify the choice of the institution-theoretic framework, as they imply a certain "preservation" of the axioms.

D.S. Khramchenok, *On axiomatisability of several classes of acts and semimodules.*

The question of axiomatizability of classes of polygons over semigroups and semimodules over semirings is considered.

P.S. Kolesnikov, *Simple finite Novikov conformal algebras.*

We describe simple Novikov conformal algebras of finite type over an algebraically closed field $\Bbbk$ of characteristic zero. It turns out that, apart from the trivial example of the current conformal algebra over $\Bbbk$, there exists an infinite series of such algebras V_α of rank one, $\alpha \in \Bbbk$, such that the commutator algebras $V_\alpha^{(-)}$ are isomorphic to the Virasoro Lie conformal algebra. This is a joint work with Jiefeng Liu.

I.B. Kozhukhov, *Artinianity and Noetherianity in polygons over semigroups and their generalizations.*

A series of notions and properties related to Artinianity and Noetherianity in polygons over semigroups and is considered and studied.

B.Sh. Kulpeshov, In.I. Pavlyuk, S.V. Sudoplatov, *On pseudo-stable formulae, structures, and theories.*

Possibilities for approximations of structures and theories by stable ones are studied.

S.B. Malyshev, *On heritability of types of pregeometries relative to a family of relational structures.*

The paper investigates pregeometries equipped with an algebraic closure operator on the family of regular enrichments and restrictions of predicate structures forming a Boolean algebra. We focus on pregeometry types such as degenerate, locally finite, and modular. It is shown that under intersection of structures, degeneracy and local finiteness are preserved, while modularity is generally not inherited. In contrast, for unions of structures, even local finiteness may fail to hold. These findings refine the understanding of how pregeometry properties are inherited under structural compositions and contribute to the development of geometric methods in model theory within the framework of Boolean algebras.

E.V. Mishchenko, *Frames: examples and some properties of frames in finite-dimensional spaces.*

The paper considers the concept of a frame for finite-dimensional and infinite-dimensional Hilbert spaces: rigid frames are constructed in R^n and C^n, the recovery of an element from a space using a frame operator and the optimality of representing an element through a frame in different norms are discussed.

N.L. Polyakov, *On two different types of ordinal iterations of inner functors.*

We show that the concept of a skew limit ultrapower admits broad generalizations that can be defined in terms of category theory.

A.M. Popova, E.V. Grachev, *On automorphisms of the integral group rings of finite groups.*

We study automorphisms of the integral group rings of finite groups using representation theory. A criterion is found for the existence of such a unit of a rational group algebra that the conjugation by this unit in composition with an automorphism of the group algebra induced by an automorphism of the field of character of some irreducible representation of this group determines the automorphism of the integral group ring.

A.P. Pozhidaev, *Isomorphisms and derivations of pre-Lie algebras.*

Isomorphisms and derivations of pre-Lie algebras are studied.

T.E. Rajabov, S.V. Sudoplatov, *Precomplete relations and their preservations.*

We study possibilities of preservations for precomplete relations.

A.S. Savin, *Some spectra of spherical orderability of finite groups. II.*

We describe spectra of spherical orderability for an extended list of finite groups.

N.A. Shchuchkin, *Ternary groupoids with left reversibility.*

We study the properties of ternary L-quasigroups. For a finite ternary L-quasigroup, a primality testing algorithm is given, and for the same L-quasigroup with middle unit, primality and affinity testing algorithms are given.

D.V. Solomatin, *On minimally complete Martynov semigroups with zero.*

Examples of minimally complete Martynov semigroups with zero are considered.

A.I. Stukachev, C. Lyu, T. Tsao, *Union, intersection and comparison of linguistic structures.*

We discuss operations of union, intersection and comparison for structures used in mathematical and computational linguistics.

V.L. Usol'tsev, *Rees congruence algebras in some subclasses of class of algebras with one operator and main ternary and nullary operations.*

Some types of algebras related to the concept of Rees congruence are considered.

A.V. Vaseneva, *Equationality ranks for families of formulas and elementary theories.*

Equationality ranks are described for some families of formulas and elementary theories.

Оглавление