

КОНГРУЭНЦ-АЛГЕБРЫ РИСА В НЕКОТОРЫХ ПОДКЛАССАХ КЛАССА АЛГЕБР С ОДНИМ ОПЕРАТОРОМ И ОСНОВНЫМИ ТЕРНАРНОЙ И НУЛЬАРНЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Усольцев В.Л.

Волгоградский государственный социально-педагогический
университет

XVII Международная летняя школа-конференция
“Пограничные вопросы теории моделей
и универсальной алгебры”
Эрлагол-2025

Новосибирск, Эрлагол, 19-26 июня 2025 г.

Понятие конгруэнции Риса, первоначально введенное для полугрупп, в работе [1] обобщается на произвольные универсальные алгебры. Возникающие при этом определения, приведенные ниже, даны в формулировках монографии [2].

Конгруэнция θ алгебры $\mathbf{A}$ называется *конгруэнцией Риса*, если она представляется как $\theta = B^2 \cup \Delta_A$ для некоторой подалгебры B алгебры $\mathbf{A}$. Подалгебра B алгебры $\mathbf{A}$ называется *подалгеброй Риса*, если $B^2 \cup \Delta_A$ есть конгруэнция алгебры $\mathbf{A}$.

Алгебра $\mathbf{A}$ называется *алгеброй Риса*, если любая ее подалгебра является подалгеброй Риса.

[1] Tichy R. F. The Rees congruences in universal algebras // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1981. V. 29. P. 229–239.

[2] Chajda I., Eigenthaler G., Länger H. Congruence classes in universal algebra. — Vienna: Heldermann-Verlag, 2003.

Конгруэнц-полугруппой Риса [3] называется такая полугруппа, в которой любая ненулевая конгруэнция является конгруэнцией Риса.

Конгруэнц-алгеброй Риса [4] называется универсальная алгебра, каждая конгруэнция которой является конгруэнцией Риса.

Универсальная алгебра называется *рисовски простой* [4], если она неоднородна и не имеет нетривиальных рисовских конгруэнций.

[3] Lavers T., Solomon A. The endomorphisms of a finite chain form a Rees congruence semigroup // Semigroup Forum. 1999. V. 59, iss. 2. P. 167–170.

[4] Усольцев В. Л. Алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в одном классе алгебр с оператором и основной операцией почти единогласия // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 4(60). С. 157–166.

Унарной алгеброй называется алгебра, имеющая только унарные (и возможно, нульарные) операции. Алгебра с одной унарной операцией называется *унаром*.

Для любого элемента x унара $\langle A, f \rangle$ через $f^n(x)$ обозначается результат n -кратного применения операции f к элементу x ; при этом $f^0(x) = x$. Для любых чисел $h > 0$, $t \geq 0$ положим $C_h^t = \langle a \mid f^t(a) = f^{t+h}(a) \rangle$. Объединение непересекающихся унаров B и C обозначается через $B + C$.

Теорема 1 [5]

Унар $\langle A, f \rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса тогда и только тогда, когда он изоморфен либо C_p^0 , где p — простое число, либо $C_p^0 + C_1^0$, либо C_1^t , где $t \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, либо $C_1^t + C_1^0$, либо $C_1^0 + C_1^0 + C_1^0$.

Теорема 2 [5]

Унар $\langle A, f \rangle$ является рисовски простым тогда и только тогда, когда $\langle A, f \rangle$ изоморфен либо C_1^1 , либо $C_1^0 + C_1^0$, либо C_n^0 для некоторого $n > 1$.

[5] Усольцев В. Л. Конгруэнц-алгебры Риса в классах унаров и алгебр с операторами // Фунд. и прикл. матем. 2024. Т. 25. N 1. С. 219–235.

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ сигнатуры $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, Ω_1 произвольна и непуста, а Ω_2 состоит из унарных операций, перестановочных с любой операцией из Ω_1 , то есть, действующих как эндоморфизмы относительно операций из Ω_1 . Унарные операции из Ω_2 называются *операторами*.

Если f — унарная операция из сигнатуры Ω , то унар $\langle A, f \rangle$ называется *унарным редуктом* алгебры $\langle A, \Omega \rangle$.

Мы предлагаем и развиваем неклассический подход, состоящий в исследовании алгебр с операторами с точки зрения операторной части их сигнатуры. В рамках этого подхода изучаются связи между свойствами алгебр с операторами и строением их унарных редуктов.

Данный подход позволяет изучать с единых позиций алгебры с операторами, имеющие различные основные операции, и получать результаты для алгебр с произвольной основной сигнатурой. Кроме того, для изучения алгебр с операторами в терминах их унарных редуктов можно использовать хорошо развитый аппарат теории унар.

Элемент a унара называется **узловым**, если найдутся такие различные элементы b и c , отличные от a , что $f(b) = a = f(c)$.

Элемент a унара $\langle A, f \rangle$ называется **неподвижным**, если $f(a) = a$.

Унар $\langle A, f \rangle$ называется **связным**, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n \geq 0, m \geq 0$.

Связный унар с неподвижным элементом называется **корнем**.

Корнем без нетривиальных узлов называется корень, не имеющий узловых элементов, кроме, может быть, неподвижного.

Теорема 3 [5]

Пусть $\langle A, \Omega \cup \{f\} \rangle$ — алгебра с оператором f и произвольной основной сигнатурой Ω . Если $\langle A, \Omega \cup \{f\} \rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса, то либо операция f инъективна, либо унар $\langle A, f \rangle$ является неодноэлементным корнем без нетривиальных узлов, либо $\langle A, f \rangle$ является суммой неодноэлементного корня без нетривиальных узлов и произвольного унара с инъективной операцией.

Необходимые условия конгруэнц-рисовости, приведенные в теореме 3, в общем случае не являются достаточными.

Классический подход к построению алгебр с операторами заключается в том, что сигнатура алгебры из заданного класса пополняется выделенными эндоморфизмами данной алгебры.

В [6] Л. А. Скорняковым была поставлена следующая **проблема**: для данного унара $\langle A, f \rangle$ определить на множестве A операции таким образом, чтобы полученная алгебра принадлежала к заданному классу и унарная операция f была ее эндоморфизмом.

Мы предлагаем называть все алгебры с операторами, построенные способом, предложенным Л. А. Скорняковым, **унарно определяемыми**.

[6] *Skornjakov L. A. Unars // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1981. V. 29. P.735–743.*

АЛГЕБРЫ С ОДНИМ ОПЕРАТОРОМ И ОСНОВНОЙ ТЕРНАРНОЙ ОПЕРАЦИЕЙ

В [7] на произвольном унаре $\langle A, f \rangle$ задается тернарная операция $p(x, y, z)$, перестановочная с операцией f . Пусть $x, y \in A$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x, y) = \min M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$, и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \leq k(y, z) \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \quad (1)$$

Операция p удовлетворяет тождествам Пиксли

$p(y, y, x) = p(x, y, y) = p(x, y, x) = x$. Как следствие, класс алгебр $\langle A, p, f \rangle$ содержится в арифметическом (т. е., конгруэнц-перестановочном и конгруэнц-дистрибутивном) многообразии.

Основные результаты, полученные при изучении конгруэнц-свойств алгебр $\langle A, p, f \rangle$ с оператором f приводятся в [8].

[7] Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Межд. сем. «Универсальная алгебра и ее приложения», посв. памяти проф. Л. А. Скорнякова: тез. докл. — Волгоград: Перемена, 1999. С. 31–32.

[8] Усольцев В. Л. Унары с тернарной мальцевской операцией // Успехи матем. наук. 2008. Т. 63, вып. 5. С. 201–202.

АЛГЕБРЫ С ОДНИМ ОПЕРАТОРОМ И ОСНОВНОЙ ТЕРНАРНОЙ ОПЕРАЦИЕЙ

На основе подхода, предложенного в [7], на произвольном унаре $\langle A, f \rangle$ задается тернарная операция $s(x, y, z)$ [9], названная симметрической, которая перестановочна с операцией f :

$$s(x, y, z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) < k(y, z); \\ y, & \text{если } k(x, y) = k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z), \end{cases} \quad (2)$$

Из (2) следует, что операция s удовлетворяет тождествам $s(x, y, y) = s(y, y, x) = s(y, x, y) = x$, то есть является операцией меньшинства и мальцевской операцией. Тем самым, класс алгебр $\langle A, s, f \rangle$ содержится в конгруэнц-модулярном многообразии.

Также, s является слабой операцией почти единогласия (weak near-unanimity operation). Алгебры, имеющие термальную операцию такого рода используются в рамках алгебраического подхода к исследованию вычислительной сложности ограничений задачи CSP (Constraint Satisfaction Problem) и в смежных областях.

[9] Усольцев В. Л. О полиномиально полных и абелевых унарах с мальцевской операцией // Уч. зап. Орловского гос. ун-та. 2012. Т. 6(50). Ч. 2. С. 229–236.

Также, на произвольном унаре $\langle A, f \rangle$ можно определить тернарную операцию $m(x, y, z)$ [10], перестановочную с операцией f :

$$m(x, y, z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \geq k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) < k(y, z). \end{cases} \quad (3)$$

Из (3) следует, что операция m удовлетворяет тождествам $m(x, y, y) = m(y, y, x) = m(y, x, y) = y$, то есть является операцией большинства. Тем самым, класс алгебр $\langle A, m, f \rangle$ содержится в конгруэнц-дистрибутивном многообразии.

Операцией почти единогласия (near-unanimity operation) (см. [9]) называется n -арная операция φ , удовлетворяющая тождествам $\varphi(x, \dots, x, y) = \varphi(x, \dots, x, y, x) = \dots = \varphi(y, x, \dots, x) = x$ ($n \geq 3$). Операция большинства является тернарным вариантом операции почти единогласия.

[10] Усольцев В. Л. О строго простых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, вып. 4(48). С. 196–204.

[9] Baker K. A., Pixley A. Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems // Math. Zeitschrift. 1975. V. 143. P. 165–174.

Теорема 4 [5]

Пусть $\langle A, d, f \rangle$ — алгебра с оператором f и основной тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) – (3). Алгебра $\langle A, d, f \rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса тогда и только тогда, когда либо операция f инъективна, либо унар $\langle A, f \rangle$ является неодноэлементным корнем без нетривиальных узлов, либо $\langle A, f \rangle$ является суммой неодноэлементного корня без нетривиальных узлов и подунара с инъективной операцией.

Теорема 5

Пусть $\langle A, d, 0, f \rangle$ — алгебра с оператором f , основной нульарной операцией 0 и основной тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) – (3). Алгебра $\langle A, d, 0, f \rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

- 1) операция f инъективна и множество $\{0\}$ является компонентой связности унара $\langle A, f \rangle$;
- 2) унар $\langle A, f \rangle$ является неоднородным корнем без нетривиальных узлов, в котором 0 является неподвижным элементом;
- 3) унар $\langle A, f \rangle$ есть сумма неоднородного корня без нетривиальных узлов, в котором 0 является неподвижным элементом, и произвольного унара с инъективной операцией.

Теорема 6

Пусть $\langle A, \{d, f\} \cup \Omega_0 \rangle$ — алгебра с оператором f , основной тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) – (3), а множество Ω_0 есть множество нульарных операций на A , причем $|\Omega_0| > 1$. Алгебра $\langle A, \{d, f\} \cup \Omega_0 \rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса тогда и только тогда, когда операция f инъективна, а каждый из элементов множества Ω_0 образует одноэлементную компоненту связности унара $\langle A, f \rangle$.

Следствие

Алгебра $\langle A, \{d, f\} \cup \Omega_0 \rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса тогда и только тогда, когда она является конгруэнц-простой.

Теорема 7 [11]

Пусть $\langle A, d, f \rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) — (3). Алгебра $\langle A, d, f \rangle$ рисовски проста тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

(1) $\langle A, f \rangle$ — связный унар без кручения;

(2) $\langle A, f \rangle$ — связный унар, содержащий подунар, изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$;

(3) $\langle A, f \rangle$ — неоднородный унар, содержащий такой элемент a , что $f(x) = a$ для любого $x \in A$;

(4) $\langle A, f \rangle$ — несвязный унар, каждая компонента связности которого является либо унаром без кручения, либо одноэлементным унаром, либо унаром, содержащим подунар, изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$.

[11] Усольцев В. Л. О рисовском замыкании в некоторых классах алгебр с оператором // Чебышевский сб. 2021. Т. 22, вып. 2(78). С. 271–287.

Теорема 8

Пусть $\langle A, d, 0, f \rangle$ — алгебра с оператором f , основной нульарной операцией 0 и основной тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) – (3). Алгебра $\langle A, d, 0, f \rangle$ является рисовски простой тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

- 1) унар $\langle A, f \rangle$ является корнем глубины 1, в котором 0 является неподвижным элементом;
- 2) унар $\langle A, f \rangle$ есть сумма одноэлементной компоненты связности $\{0\}$ и произвольного унара.

Теорема 9

Пусть $\langle A, \{d, f\} \cup \Omega_0 \rangle$ — алгебра с оператором f , основной тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) – (3), а множество Ω_0 есть множество нульарных операций на A , причем $|\Omega_0| > 1$. Тогда алгебра $\langle A, \{d, f\} \cup \Omega_0 \rangle$ является рисовски простой.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!