О МИНИМАЛЬНО ПОЛНЫХ ПОЛУГРУППАХ МАРТЫНОВА С НУЛЕМ

Д.В. Соломатин

Омский государственный педагогический университет,
наб. Тухачевского, 14, Омск, 644099, Россия
e-mail: solomatin_dv@omgpu.ru

1 Введение

Развитие всякой математической теории часто проходит через такие стадии, как: формулирование гипотезы (эта стадия включает в себя выдвижение новой идеи или догадки, которая требует доказательства); проверка и верификация (учёные проверяют правильность гипотезы, используя различные методы и примеры); доказывание (если гипотеза выдерживает проверку, её пытаются доказать формально с использованием логики и математических инструментов); разработка и обобщение (после доказательства гипотезу расширяют, развивая новые теории и выявляя дополнительные применения); публикация и признание (доказанные результаты публикуются в научных журналах и обсуждаются в научном сообществе); применение и интеграция (новая теория находит применение в решении задач или становится основой для дальнейших исследований). Теория полноты, редуцированности, примарности и чистоты для алгебр [1] находится сейчас на стадии публикации и признания. Частью этой стадии является поиск учеников и последователей, а одним из ключевых моментов такого поиска очевидна чёткая передача знаний. Материалы должны быть понятны и доступны для студентов разного уровня подготовки, хорошие объяснения и примеры всегда играют большую роль.

Поэтому начнём с самого простого, с азов, чтобы читатели смогли понимать через некоторое время все связанное с излагаемой теорией. Представим первоначальные базовые понятия вопросов, которыми интересовался Леонид Матвеевич, и которые продолжают будоражить умы современных математиков. В его последнем обзоре поставлено много всевозможных нерешенных проблем, еще никем нерешенных задач. Леонид Матвеевич, ввел ряд новых понятий в алгебре, обобщая известные понятия из теории абелевых групп. В настоящей заметке пойдет речь о полных полугруппах с нулем. Вкратце опишем, что такое полугруппа и затем перейдём к объяснению понятия полноты для полугрупп.

2 Предварительные сведения

Итак, полугруппа, суть, непустое множество элементов произвольной природы, замкнутое относительно бинарной алгебраической операции «умножение», обладающей свойством ассоциативности. Операция умножения может быть различной, например, мы знаем в школе операцию умножения чисел. Берем, например, целые числа от нуля 0 до 10 и рассматриваем здесь умножение. Получается, если 3 умножить на 7, то будет 21 и мы уже не попали в исходное множество. Следовательно, это не алгебраическая операция. Нам нужно рассмотреть множество, состоящее из таких элементов, чтобы результат их умножения вновь принадлежал этому множеству, тогда множество будет замкнуто относительно умножения. Например, если мы возьмем все натуральные числа с нулем по умножению, то произведение любых двух натуральных чисел снова натуральное, никакого другого числа мы не получим. Это будет алгебраическая операция на множестве. Бинарной её называют потому, что умножались два элемента. Но для того, чтобы это множество можно было назвать полугруппой, нужно, чтобы выполнялось еще свойство ассоциативности, так называемый сочетательный закон умножения, то есть чтобы выполнялось равенство $(ab)\,c = a\,(bc)$ для всех a, b и c из рассматриваемого множества. Вот если выполнены эти два требования: 1) непустое множество, 2) на нём задана бинарная алгебраическая операция, мы назовём её умножением, но может быть сложение, то есть какая-то операция, когда двум элементам ставится в соответствие третий и эта операция замкнута на этом множестве, - говорят, что множество замкнуто относительно данной операции. Но чтобы это множество назвать полугруппой относительно этой операции, надо, чтобы еще выполнялся сочетательный закон, он называется свойством ассоциативности. Например, в векторных пространствах сложение ассоциативно, в школе это называлось сочетательным законом сложения и умножения. Рассмотрим другой пример: целые числа по операции вычитание. Разность двух целых чисел целое число. Как бы мы из одного целого числа не вычитали другое, всегда будет целое получаться. Эта операция алгебраическая на данном множестве. Множество целых чисел замкнуто относительно вычитания. Но, к сожалению, для вычитания закон ассоциативности не выполняется, так как, в частности, $(2-3)-4 \neq 2-(3-4)$. По-разному скобки расставили, результат получился разным, то есть вычитание не обладает сочетательным законом или по-другому, эта операция не ассоциативна, значит целые числа относительно вычитания нельзя назвать полугруппой.

Полугруппы это в первую очередь множества, но их элементы не обязательно числа. Множество, на котором задана операция умножение, должно быть таким, чтобы результат применения этой операции к любым двум элементам данного множества, снова был элементом данного множества. А чтобы назвать это множество полугруппой, ещё должен выполняться закон ассоциативности, который обобщает сочетательный закон арифметики. Причем в математике для полугрупп общепринята мультипликативная терминология, в которой операция называется умножением. Хотя в принципе могли операцию плюсиком обозначить, придерживаясь аддитивной терминологии, или каким-то кружочком операцию назвать, но всегда двум элементам, как операндам, взятым в определенном порядке, ставится в соответствие третий элемент, результат операции.

Полугруппа называется полугруппой с нулем, если в ней есть такой элемент 0, умножая на который слева направо, или справа налево любой другой элемент полугруппы, всегда будет получаться 0, этот элемент называется нулем полугруппы. Другими словами, если в полугруппе есть ноль, то это такой элемент, который ведет себя как привычный ноль по умножению для чисел, например, взяв натуральные числа с нулем по умножению, ноль умножив на любое число всегда в результате даст ноль.

Приведём несколько дополнительных примеров, чтобы полностью осознать, что такое полугруппа. Например, возьмем множество всех действительных чисел, по умножению они будут полугруппой с нулем. Целые числа по сложению, например, будут полугруппой, в которой нет нуля, так как отсутствует такое число, которое получается в результате прибавления его самого к любому другому целому числу, то есть не выполняется аксиома нуля $\forall x \in \mathbb{Z}{:}0 \circ x = x \circ 0 = 0$, если в качестве полугрупповой операции $\circ$ рассматривать сложение целых чисел. Более точно излагая языком универсальной алгебры, множество целых чисел по сложению обладает структурой группы, поэтому там нулей нет. Таким образом, не всегда полугруппа обладает нулем. Ниже будем рассматривать полугруппы, у которых есть нуль.

Рассмотрим еще один пример, уже не совсем числовой. Будем рассматривать множество $\left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\right\}$ чисел с черточками и умножение на нём будем определим таблицей умножения на Рис.1, когда множество состоит из небольшого числа элементов, их умножение записывают как таблицу умножения в школе в некоторых тетрадях по математике на последней страничке. В данном случае заменим обычное умножение умножением по модулю 6, то есть поменяем каждое произведение на остаток, получаемый при его делении на 6. Например, 3 на 5 умножили, получили 15, разделили на 6, получили остаток 3, поэтому $\overline{3}$ умножить на $\overline{5}$ будет $\overline{3}$.

$\circ$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Рис.1. Таблица Кэли для мультипликативной полугруппы $\mathbb{Z}_6$ вычетов по модулю 6.

Если по таблице Кэли хотим узнать чему будет равным 2 на 4 при таком умножении, то ищем строчку под номером 2, столбец под номером 4, и видим что на их пересечении получается 2, следовательно, 2 умножить на 4 будет 2 в такой модулярной арифметике.

Аналогичным образом можно построить другую полугруппу с нулем по умножению, например, $\mathbb{Z}_4$ состоящую из классов эквивалентности на множестве целых чисел, дающих одинаковые остатки при делении на 4, так называемых классов вычетов по модулю 4.

Заметим, что в основном множестве элементов полугруппы есть подмножества, которые сами являются полугруппами, их называют подполугруппами. Например, в $\mathbb{Z}_6$ возьмем подмножество $G = \left\{\overline{1},\ \overline{5}\right\}$, как бы мы не умножали$\overline{1}$ на $\overline{5}$, или $\overline{5}$ на $\overline{1}$, или $\overline{1}$ на $\overline{1}$, или $\overline{5}$ на $\overline{5}$, мы никуда выйдем из этого множества, значит оно является полугруппой. Аналогично с $K = \left\{\overline{2},\ \overline{4}\right\}$, как бы не умножали эти два элемента между собой, не перемножали самих на себя, слева направо, справа налево, всегда будет получаться $\overline{2}$ или $\overline{4}$. Более того, $\overline{3}\circ\overline{3} = \overline{3}$ и $\overline{0}\circ\overline{0} = \overline{0}$, поэтому полугруппами являются одноэлементные множества $P = \left\{\overline{3}\right\}$ и $O = \left\{\overline{0}\right\}$. Элементы, совпадающие со своими квадратами, называются идемпотентами. Для числовых множеств известных со школы такими были 0 и 1. В то же время, множество $\left\{\overline{1}, \overline{2}\right\}$, не является полугруппой, так как не замкнуто относительно умножения, ибо $\overline{2} \circ \overline{2} \notin \{\overline{1}, \overline{2}\}$. Таким образом, не любой фрагмент полугруппы может сам быть полугруппой.

Некоторые полугруппы можно разбить на подмножества и считать эти подмножества полноценными элементами новой полугруппы, так называемыми классами. Например, в нашем случае $\mathbb{Z}_6 = G \cup K \cup P \cup O$ является объединением четырех попарно непересекающихся подмножеств. Полугруппу $\mathbb{Z}_6$ мы смогли разбить на подмножества и считать их как единое целое. В этом случае говорят, что можно индуцировать на это множество операцию умножения в самой полугруппе. Рассмотрим множество $\{G, K, P, O\}$, состоящее из обозначенных выше множеств. Операция с ними будет такая: берем по одному представителю из перемножаемых множеств, перемножаем выбранные представители по правилу умножения в полугруппе $\mathbb{Z}_6$ и смотрим в какой класс попадем, этот класс и будет результатом умножения исходных классов. Например, 1 из G умножив на 2 из K получим 2, следовательно, умножая G на K получится K. Но могло ли случиться так, что при выборе других представителей, 5 умножая на 2, получилось бы что-то другое? Нет, в этом смысле разбиение достаточно хорошее. Какие бы представители не выбирались из разных классов после умножения мы всегда будем попадать в один и тот же класс, возможно в разные элементы, но класс будет один и тот же. Например, умножая 1 на 2 получали 2, и 5 умножая на 2 получали 4, представитель из того же класса, что и 2. Таким образом заданная операция стабильна, результат операции не зависит от выбора представителей перемножаемых классов. Таким образом мы получили из шестиэлементной полугруппы $\mathbb{Z}_6$ новую полугруппу, четырехэлементную $\{G, K, P, O\}$, причем так разбили исходную полугруппу, что в каждой паре классов нет одинаковых элементов, в попарных пересечениях пустое множество, а если их все объединить, то получится $\mathbb{Z}_6$. Кроме того, если индуцируем операцию из исходной полугруппы на эти классы, то всё сохранится. В таких случаях говорят, что получили фактор полугруппу по данному множеству. Далее с каждым элементом можно осуществлять умножение и рассматривать его степень, формируя циклические полугруппы. При этом, если осуществлять умножение самих на себя натуральных чисел отличных от единицы, возводя в натуральную степень, то никогда не будем получать одинаковых элементов, последовательность степеней неограниченно возрастает. А в полугруппе $\mathbb{Z}_6$ ситуация иная. Например, если возьмем $\overline{5}$ из $G = \{\overline{1},\ \overline{5}\}$, то возводя его в квадрат получим $\overline{1}$, дальнейшее умножение на $\overline{5}$ не приведет к появлению новых элементов, всё зациклилось, когда происходит такое зацикливание говорят, что элемент периодический. В приведенном примере элемент $\overline{5}$ периодический.

При первом знакомстве с теорией полугрупп как правило возникает вопрос: где применяются полугруппы? Понятие это настолько общее, что практически вездесущее. Куда бы вы ни глянули в математические разделы, вы с полугруппами так или иначе столкнётесь. То есть для описания математических объектов, на языке этой абстрактной алгебры, полугруппы это одно из простейших явлений которое везде проявляется. Приведенный пример есть частный случай полугрупп вычетов, которые находят применение в криптографии. Полугруппы есть и в далеких от математики областях, например в биологии. На самом деле есть теории, которые пока нигде не применяются, но опыт показывает, что когда-то зачем-то математиков заинтересовали простые и составные числа, позднее обнаружились числа Ферма, числа Мерсенна, изучаемые в XVII веке. А потом выяснилось, в XXI веке, что без этих простых чисел ни одну банковскую карточку мы не сможем защитить на сегодняшний день. То есть иногда бывает так, что абстрактные математические объекты в народном хозяйстве совершенно никак не вспашешь, не польешь и не посадишь. Но потом, сотни лет спустя, они вдруг встречаются практически везде. Об одной из таких перспективных конструкций - полные полугруппы - пойдет речь ниже.

3 Примеры полных полугрупп

Более детально изучим полные полугруппы с нулем, то есть будем рассматривать не просто полугруппу, а ассоциативную алгебру, в которой имеется выделенный нуль. Полугруппами с нулями будут являться только те, в которых есть нуль, отдельной выделенный элемент нуль. Не просто свой нуль, а полугруппы с нулем которые мы изучаем, это полугруппы, рассматриваемые как алгебры с одной бинарной ассоциативной операцией и одной нульарной операцией выделения нуля. Причем, наличие выделенного нуля несколько упрощает задачу, если у нас просто полугруппа, то там одна ситуация, а если полугруппа с нулем, то немного другая.

Рассмотрим всевозможные конгруэнции на полугруппах, не обязательно вербальные, то есть рассмотрим лишь отношения эквивалентности выдерживающие умножения. Для этого можем разбить имеющееся множество на подмножества некоторым способом. Например, если разбить $\mathbb{Z}_6 = \left\{\overline{0}\right\} \cup \left\{\overline{1}, \overline{5}\right\} \cup \left\{\overline{2}, \overline{3},\ \overline{4}\right\}$, то это отношение эквивалентности не будет конкуренцией, так как не выдерживает умножения: из $\overline{2} \sim \overline{3}$ не следует $\left(\overline{2} \circ \overline{2}\right) \sim \left(\overline{3} \circ \overline{2}\right)$. А нужно, чтобы выдерживало, тогда будет как в предыдущем примере при разбиении $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}\} \cup \{\overline{1}, \overline{5}\} \cup \{\overline{2},\ \overline{4}\} \cup \{\overline{3}\}$, как с каждой конгруэнцией, что на самом деле является отношением эквивалентности, для классов эквивалентности которого операция выполняется корректно. Аналогично тому, как получаются фактор группы, это называется фактор алгебры по конгруэнции. Конгруэнция — это частный случай отношения эквивалентности. На классах эквивалентности задается операция и требуется, чтобы операция была стабильная. За счет этой стабильности получается, что операция корректна. Какие бы два представителя не выбрали из перемножаемых классов, если эти два представителя после умножения попадут в некоторых класс эквивалентности, то и перемножая другие представители исходных классов результат умножения попадет туда же. Таким образом получаем фактор полугруппы по данной конгруэнции.

При разбиении может случиться так, что одни классы будут являться подалгебрами в данной алгебре, а другие нет, тогда появляется понятие россыпи, означающее что из имеющихся классов конгруэнции выбираем лишь те классы, которые являются подалгебрами алгебры X. Получается россыпь, соответствующая данной конгруэнции. Когда рассматриваем конгруэнции на полугруппах с выделенным элементом нулем, то таких классов будет не много, ровно один. Лишь там, где находится выделенный нуль сформируется единственный класс, который является подалгеброй. Других быть не может потому, что в полугруппе должен быть выделенный элемент нуль. Поэтому единственным классом X-вербальной конгруэнции на полугруппе с выделенным нулем является класс содержащий тот ноль. В обозначениях из примера с $\mathbb{Z}_6 = G \cup K \cup P \cup O$ имеем россыпь $S(\mathbb{Z}_6) = \{O\}$ для полугрупп с сигнатурным нулем, это единственная одноэлементная россыпь. И имеем четырехэлементную россыпь $S(\mathbb{Z}_6) = \{G, K, P, O\}$ для класса полугрупп как элементов полугруппового многообразия, то есть если рассматривать просто полугруппы без выделенного элемента, лишь с одной бинарной операцией, там дело обстоит чуть сложнее.

Более строго, X-вербальная конгруэнция — это наименьшая конгруэнция факторалгебры, фактор-полугруппы по которым принадлежат данному многообразию. Например, можем рассматривать конгруэнции на $\mathbb{Z}_6$ такие, чтобы факторалгебры по ним были связками. Пересечения конгруэнций являются конгруэнциями. Следовательно, наименьшая из конгруэнций будет пересечением всех конгруэнций, фактор-полугруппы по которым принадлежат нашему многообразию. Например, зафиксируем многообразие коммутативных связок $S = \mathrm{var}\{xy \approx yx, x^2 \approx x\}$ и многообразие полугрупп с нулевым умножением $Z = \mathrm{var}\{xy \approx 0\}$, являющиеся атомами как в многообразии полугрупп, так и в многообразии полугрупп с нулем. Если задано такое многообразие S, то обозначение $S(\mathbb{Z}_6)$ это класс, в котором находится нуль, в минимальной конгруэнции факторполугруппа полугруппы $\mathbb{Z}_6$ по которой будет коммутативной связкой. Это и будет называться X-вербалом полугруппы $\mathbb{Z}_6$. Разобьем полугруппу на четыре подполугруппы: $\mathbb{Z}_6 = G \cup K \cup P \cup O$. Так как каждый класс является полугруппой, то он является идемпотентом, ибо в факторполугруппе имеют место равенства $G^2 = G$, $K^2 = K$, $P^2 = P$, $O^2 = O$. В данном случае разбив полугруппу таким способом получилась конгруэнция, все классы факторполугруппы по которой являются подполугруппами полугруппы $\mathbb{Z}_6$, следовательно, это россыпь, которая называется X-вербальной россыпью в терминологии Л.М. Мартынова. Для сравнения, в полугруппе с выделенным нулем получился просто X-вербал, так как элемент один, это ноль, потому что остальные хоть и полугруппы, но выделенного нуля там нет, следовательно, из этих классов полугруппой с нулем будет являться одна только O. А полугруппа называется X-полной, если фактор (X-вербал), то есть описанная выше россыпь, совпадает со всей полугруппой. Другими словами, если $X(\mathbb{Z}_6) = \mathbb{Z}_6$, то полугруппа $\mathbb{Z}_6$ будет X-полной. То есть она не разбивается на фрагменты такой с же структурой X, которую имеет сама, у нее нет факторалгебры, в которой больше, чем один класс и которая бы принадлежала исходному многообразию, тогда она называется X-полный. В рассматриваемом случае зафиксировав многообразие S анализируется S-полнота. Другими словами, если бы коммутативную связку из многообразия S разбили на классы так, чтобы эти классы будучи полугруппами принадлежали многообразию коммутативных связок S, при том, что не сможем разбить иначе кроме как склеить все элементы в один класс, то она называлась бы S-полной потому, что вся полугруппа в этот единственный класс попадает. В нашем случае это не так, ибо удалось разбить полугруппу $\mathbb{Z}_6$ на классы, в результате чего получили связку по некоторой вербальной конгруэнции. А именно, четырехэлементная полугруппа $\{G, K, P, O\}$ будет связкой, то есть полугруппой коммутативных идемпотентов. Следовательно, $\mathbb{Z}_6$ не является S-полной. Аналогичным образом можно рассуждать о полугруппах в любом фиксированном многообразии. В общем случае полная полугруппа — это такая полугруппа в некотором многообразии, которую нельзя как-либо разбить на меньшие подполугруппы из того же многообразия. Нельзя найти такую конгруэнцию, чтобы по ней сформировалось более одного класса. Очевидный пример полной полугруппы доставляет тривиальный случай $\mathbb{Z}_1$. Ниже будет приведен пример нетривиальной полной полугруппы. Среди коммутативных полугрупп таких примеров нет. В примере с $\mathbb{Z}_6$ мы разбили полугруппу на связку, меньше чем в $\{G, K, P, O\}$ элементы получить нельзя, так как если мы будем расчленять двухэлементные классы на одноэлементные, то не будет получаться идемпотентность. Таким образом, $\{G, K, P, O\}$ это наименьшая конгруэнция, фактор по которой является коммутативной связкой. При этом, Z-вербал состоит от одного лишь нуля. Итак, полугруппа $\mathbb{Z}_6$ не является S-полной, так как полугруппа называется полной, если по каждому атому она будет полной, в случае с $\mathbb{Z}_6$ эта полугруппа полной не является. Чтобы она была полной, она должна по имеющимся двум атомам многообразия, из которого эта полугруппа, и по первому, и по второму быть полной. В решетке многообразий полугрупп с нулем в данном случае всего только два атома: S (многообразие всех коммутативных идемпотентных полугрупп с нулем) и Z (полугруппы с нулевым умножением). Если же брать атомы в решетке всех многообразий полугрупп, в полугрупповой сигнатуре, то добавляются связки левых нулей $L = \mathrm{var}\{xy \approx x\}$, связки правых нулей $R = \mathrm{var}\{xy \approx y\}$ и абелевы группы $A_p = \mathrm{var}\{x^p \approx 1\}$ простой экспоненты p, тогда чуть сложнее получается теория, сначала разберемся со случаем с выделенным элементом. Полугруппа $\mathbb{Z}_6$ не является S-полной, выясним, будет ли она Z-полной. Для этого необходимо разбить полугруппу $\mathbb{Z}_6$ так, чтобы факторполугруппа была полугруппой с нулевым умножением, но там где есть единица очевидно всё будет склеиваться. А именно, если нам нужно чтобы для любых элементов в виде классов x умноженных на y результат был равным нулю, то $\overline{1}$ умножая на $\overline{1}$ должно получиться $\overline{0}$, но $\overline{1}$ на $\overline{1}$ это $\overline{1}$, по определению единицы, следовательно, $\overline{1}$ склеилась с $\overline{0}$ попав в один класс. Но если $\overline{1}$ склеилась с $\overline{0}$, тогда и $\overline{5}$ умножая на $\overline{1}$ чтобы выполнялась стабильность совпадёт с $\overline{5}$ умноженным на $\overline{0}$. Таким образом, в класс с нулем попадут все элементы полугруппы с единицей. И это будет наименьшая конгруэнция, фактор по которой формирует полугруппу с нулевым умножением, в данном случае получается вся полугруппа $\mathbb{Z}_6$ в одном классе, потому что мельче её разбить не сможем, куда единица попала туда попало все. К тому же выводу можно прийти и другим путём. Формально хорошо известный факт проявляется в том, что для любой полугруппы S её Z-вербал $Z(S)$ равен $S \bullet S$, то есть всегда в полугруппе S этот Z-вербал по полугруппам с нулевым умножением находится как результат умножения S на S. Это происходит потому, что S на S является идеалом, так как выдерживает умножение на любой элемент из S. Если профакторизуем полугруппу S по этому идеалу, то нулем будет считаться всё. Тогда получается полугруппа с нулевым умножением, ибо $S \bullet S$ являющийся идеалом будет нулем в факторполугруппе и произведение любых двух элементов из S попадает в S, так как любой элемент этой полугруппы можем представить в виде произведения двух. Получилось, что $\mathbb{Z}_6$ как полугруппа с выделенным нулем является Z-полной. В общем случае Л. М. Мартынов называл полугруппу полной, полная или атомна полная, когда она полная по каждому атому. Чтобы вот $\mathbb{Z}_6$ была полная, нужно, чтобы она еще и по S была полная, но выше показано, что она не является S-полной. Аналогичным способом вместо нуля можно брать единицу выделенным элементом, в группах как частном случае полугрупп всё также.

Приведём теперь примеры полных полугрупп. Известные пятиэлементные полугруппы Брандта, для которых стандартное обозначение во всех полугрупповых статьях A_2 и B_2, могут быть заданы своими копредставлениями $A_2 = \langle a, b \mid aba = a, bab = b, a^2 = a, b^2 = 0\rangle$ и $B_2 = \langle a, b \mid aba = a, bab = b, a^2 = 0, b^2 = 0\rangle$ соответственно. На Рис.2 для наглядности представлены графы Кэли этих полугрупп.

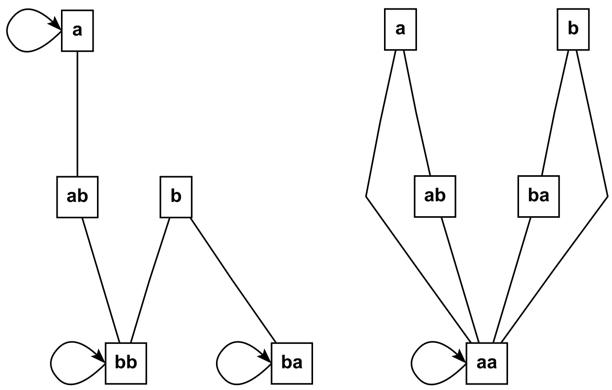

Рис.2. Графы Кэли полугрупп A_2 (слева) и B_2 (справа).

Покажем, что A_2 полная. Для этого необходимо доказать, что она полная по всем атомам, то есть полная по S и полная по Z. Полугруппа A_2 полная по S, так как её нельзя разбить на коммутативную связку, нельзя построить соответствующую факторполугруппу, то есть нельзя разбить так, на множество классов, чтобы для любой пары классов x и y было $xy = yx$ и $x^2 = x$. В самом деле, произведение a на b коммутативно, следовательно, ab должно склеиться с ba. Теперь умножив обе части равенства $ab = ba$ на b слева получится $bab = bba$, но $bba = 0$ и $bab = b$. Получается, что b склеилось с 0. Зная это получим $a = aba = 0$, образующие a и b склеились с нулем, следовательно вся полугруппа A_2 склеилась в один нулевой класс, то есть в коммутативную связку её никак не разложить, и A_2 полная по S. Докажем теперь полноту по Z. Для этого построим Z-вербал по полугруппам с нулевым умножением, им является квадрат рассматриваемой полугруппы A_2. Но видим, что любой образующий элемент полугруппы A_2, можно представить как произведение двух элементов полугруппы A_2. Следовательно, что $A_2 \bullet A_2 = A_2 = Z(A_2)$. Таким образом, A_2 оказалась Z-полной. Приходим к выводу о том, что A_2 является примером полной полугруппы в классе полугрупп с нулем. Но на самом деле она полная и во всех полугруппах. Известен общий результат Т.Ю. Финк [2], который можно уточнять в дальнейшем:

Предложение [2, Следствие 2]. Конечная полугруппа S с нулем является минимально полной тогда и только тогда, когда она является идеальным расширением нильполугруппы N с помощью либо полугруппы A_2, либо полугруппы B_2 и для любого элемента x из N множество $S \backslash J_x$, где J_x множество порождающих главного идеала S^1xS^1, не является подполугруппой.

Конечная полугруппа с нулем называется минимально полной, если среди подполугрупп этой полугруппы нет полных полугрупп. Внутри такой полугруппы любая подполугруппа не будет полной. Сама она полная, а внутри нет, тогда это минимально полная. Так, например, A_2 является минимально полной.

4 Заключение

Следующая теорема О.В. Князева, уточняющая предложение Т.Ю Финк, гласит:

Теорема 1 (О.В. Князев)**.** *Конечная полугруппа S с нулем является минимально полной в классе полугрупп с нулем тогда и только тогда, когда она либо совпадает с полугруппой A_k, либо является гомоморфным образом полугруппы $B_{n.k}$, являющимся идеальным расширением конечной нильполугруппы с помощью полугруппы B_2.*

Полугруппа $A_k = \langle a, b \mid aba = a, bab = b, a^2 = a, b^k = 0 \rangle$, где $k \geq 2$, будучи обобщением полугруппы A_2, изоморфна A_2 при $k = 2$. А упомянутая полугруппа $B_{n,k} = \langle a, b \mid aba = a, bab = b, a^n = b^k = 0 \rangle$, определяется для $n, k \geq 2$. Любой гомоморфный образ полугруппы $B_{n,k}$ при этом тоже будет полной полугруппой. Так как было доказано О.В. Князевым, что гомоморфный образ полной полугруппы снова полный. В частности, для конечных полугрупп гомоморфным отображением наследуется не только полнота, но и минимальная полнота, а при n=k= 2 из $B_{n,k}$ получается конечная пятиэлементная полугруппа Брандта B_2. Случай когда n и k разные, остается открытым, так как не найдено условия конечности, в виде ограничений на параметры n, k и добавляемые определяющие соотношения, вместо этого используется общее ограничение в том, что полугруппа является гомоморфным образом $B_{n,k}$, являющимся идеальным расширением конечной нильполугруппы с помощью B_2. Ясно, что такая полугруппа конечна не всегда. Для получения бесконечной полугруппы достаточно выбрать $n \geq 3$ и $k \geq 3$, чтобы в полугруппе $B_{n,k}$ сформировались попарно различные слова вида $(a^2b^2)^n$ для любого натурального n. Остаётся понять, как определить гомоморфный образ полугруппы $B_{n,k}$, представленной в явном виде, таким способом, чтобы он был идеальным расширением конечной нильполугруппы с помощью полугруппы B_2.

Список литературы

[1] L.M. Martynov, "Completeness, reducibility, primarity and purity for algebras: results and problems Sib. Èlektron. Mat. Izv., 13 (2016), 181–241. (in Russian)

[2] T. Ju. Fink, "Embeddability and minimal completeness of finite semigroups Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, 1 (2002), 20–25. (in Russian)