# Структурные свойства семейств теорий групп

**Ин.И. Павлюк**

Новосибирский государственный технический университет

Эрлагольская конференция 2025

# Введение

В современной теории моделей, наряду с изучением синтаксиса и семантики данных логических систем, включая конкретные элементарные теории и их модели, актуальным является изучение различных семейств элементарных теорий, взаимосвязей теорий в рамках данных семейств, видов аппроксимаций, а также построение теорий и их моделей на основе этих аппроксимаций.

Структурная теория для семейств полных и неполных элементарных теорий в общем виде развита в работах [1] [2] [3] [4] [5]. В настоящей работе эта структурная теория адаптируется и развивается применительно к классам коммутативных и некоммутативных групп и их элементарных теорий.

---

[1] *Мархабатов Н. Д., Судоплатов С. В.* Топологии, ранги и замыкания для семейств теорий. I // Алгебра и логика. — 2020. — Т. 59, No 6. — С. 649–679.

[2] *Мархабатов Н. Д., Судоплатов С. В.* Топологии, ранги и замыкания для семейств теорий. II // Алгебра и логика. — 2021. — Т. 60, No 1. — С. 57–80.

[3] *Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V.* Properties of ranks for families of strongly minimal theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2022. — Vol. 19, No. 1. — P. 120–124.

[4] *Sudoplatov S. V.* Approximations of theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2020. — Vol. 17. — P. 715–725.

[5] *Sudoplatov S. V.* Ranks for families of theories and their spectra // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2021. — Vol. 42, No. 12. — P. 2959–2968.

# Введение

Классы абелевых групп и их элементарные теории широко известны, достаточно богаты и продуктивны как в теории классификаций, так и в приложениях [6] [7] [8].

[6] *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. — М.: Наука, 1982. — 288 с.

[7] *Fuchs L.* Infinite Abelian groups. Volume I, New York, London : Academic Press, 1970, 289 p.

[8] *Fuchs L.* Infinite Abelian groups. Volume II, New York, London, Academic Press, 1973, 364 p.

# Введение

Они обладают различными инструментами и характеристиками, делящие объекты на ясные части. Классификация элементарных теорий абелевых групп основана на шмелевских инвариантах [9] [10] [11], позволяющих определять абелевы группы с точностью до элементарной эквивалентности со стандартными представлениями, построенными как прямые суммы циклических, квазициклических групп и абелевых групп без кручения. Эти инварианты приводят к эффективному управлению замыканиями семейств теорий абелевых групп, для подсчета рангов этих семейств, для характеризации аппроксимируемости над заданными семействами.

---

[9] *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. — М. : Физматлит, 2011. — 356 с.

[10] *Eklof P. C., Fischer E. R.* The elementary theory of Abelian groups // Annals of Mathematical Logic. — 1972. — Vol. 4. — P. 115–171.

[11] *Szmielew W.* Elementary properties of Abelian groups // Fundamenta Mathematicae. — 1955. — Vol. 41. — P. 203–271.

# Введение

- Описаны аппроксимации и значения рангов для семейств теорий абелевых групп. В терминах шмелевских инвариантов охарактеризовано условие псевдоконечности теорий абелевых групп. Получена классификация свойств семейств теорий абелевых групп, с указанием их характеристик в терминах рангов и шмелевских инвариантов.
- Описаны возможности алгебраических и определимых замыканий для абелевых групп. Доказано, что имеет место трихотомия для степеней алгебраизации. Установлена дихотомия значений разности между алгебраическими замыканиями и определимыми замыканиями для абелевых групп, определяемых шмелёвскими инвариантами для циклических частей. Показано, что абелевы группы без кручения квазиурбаниковы.

# Введение

- Описаны аппроксимации, замыкания и ранги для семейств упорядоченных, счетно категоричных и сильно минимальных теорий, в частности, для упорядоченных, счетно категоричных и сильно минимальных теорий групп.
- Изучены приложения общего подхода для арностей и аритизируемостей теорий к теориям групп и моноидов. Доказано, что теория группы $G$ аритизируема тогда и только тогда, когда группа $G$ конечна. Показано, что для моноидов и группоидов этот критерий не выполняется: существует бесконечный моноид, имеющий бинарную теорию.

# Шмелевские инварианты

Пусть $\mathcal{A}$ — абелева группа сигнатуры $\Sigma = \langle +^{(2)}, -^{(1)}, 0^{(0)} \rangle$. Через $k\mathcal{A}$ обозначается ее подгруппа $\{ka \mid a \in A\}$, через $\mathcal{A}[k]$ — подгруппа $\{a \in A \mid ka = 0\}$. В дальнейшем через $P$ будем обозначать множество всех простых чисел. Если $p \in P$, т.е. если $p$ — простое число и $pA = \{0\}$, то через $\mathrm{dim}\mathcal{A}$ обозначается размерность группы $\mathcal{A}$, рассматриваемой как векторное пространство над полем из $p$ элементов. Следующие числа для произвольных $p$ и $n$ ($p$ — простое, $n$ — натуральное) называются инвариантами Шмелевой [12] для группы $\mathcal{A}$ [13]:

$$\alpha_{p,n}(\mathcal{A}) = \min\{\mathrm{dim}((p^n\mathcal{A})[p]/(p^{n+1}\mathcal{A})[p]), \omega\},$$

$$\beta_p(\mathcal{A}) = \min\{\inf\{\mathrm{dim}((p^n\mathcal{A})[p] \mid n \in \omega\}, \omega\},$$

$$\gamma_p(\mathcal{A}) = \min\{\inf\{\mathrm{dim}((\mathcal{A}/\mathcal{A}[p^n])/p(\mathcal{A}/\mathcal{A}[p^n])) \mid n \in \omega\}, \omega\},$$

$$\varepsilon(\mathcal{A}) \in \{0, 1\}, \text{ и } \varepsilon(\mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow (n\mathcal{A} = \{0\} \text{ для некоторого } n \in \omega, n \neq 0).$$

---

[12] *Szmielew W.* Elementary properties of Abelian groups // Fundamenta Mathematicae. — 1955. — Vol. 41. — P. 203–271.

[13] *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. — М. : Физматлит, 2011. — 356 с.

# Шмелевские инварианты

Из совпадения теорий абелевых групп, имеющих одинаковые инварианты Шмелевой, вытекает, что любая абелева группа $\mathcal{A}$ элементарно эквивалентна группе

$$\oplus_{p,n}\mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus \oplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\beta_p)} \oplus \oplus_p R_p^{(\gamma_p)} \oplus \mathbb{Q}^{(\varepsilon)},$$

где $\mathcal{B}^{(k)}$ означает прямую сумму $k$ подгрупп, изоморфных группе $\mathcal{B}$. Таким образом, теория любой абелевой группы имеет в качестве своей модели некоторую прямую сумму базисных групп. Группы вида называются *стандартными*.

Для множества $P$ всех простых чисел обозначим через **Szm** множество
$\{\alpha_{p,n} \mid p \in P, n \in \omega \setminus \{0\}\} \cup \{\beta_p \mid p \in P\} \cup \{\gamma_p \mid p \in P\} \cup \{\varepsilon\}$
всех шмелевских инвариантов теорий абелевых групп.

# Псевдоконечные абелевы группы и их теории

Обозначим через $\mathcal{T}_A$ (соответственно $\mathcal{T}_{A,\mathrm{fin}}$) множество всех полных теорий (конечных) абелевых групп, и рассмотрим множество всех псевдоконечных теорий абелевых групп, т.е. множество $\mathcal{T}_{A,\mathrm{pf}} = \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_{A,\mathrm{fin}}) \setminus \mathcal{T}_{A,\mathrm{fin}}$.

## Теорема

Для любой теории $T$ абелевых групп следующие условия эквивалентны:
(1) $T \in \mathcal{T}_{A,\mathrm{pf}}$;
(2) теория $T$ имеет некоторое бесконечное значение $\alpha_{p,n}$ или бесконечное число положительных конечных значений $\alpha_{p,n}$, и при этом все положительные значения $\beta_p$ и $\gamma_p$ влекут $|\{n \mid \alpha_{p,n}\}| = \omega$ и $\beta_p = \gamma_p = \omega$, а равенство $\varepsilon = 1$ влечет $|\{\langle p, n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$.

# Замыкания семейств теорий абелевых групп

**Теорема**

Если $\mathcal{T}$ — бесконечное семейство теорий абелевых групп, и $T \notin \mathcal{T}$ — теория абелевой группы, то $T \in \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ тогда и только тогда, когда $T$ имеет бесконечные модели (т. е. $T$ имеет некоторые бесконечные $\alpha_{p,n}$ или некоторые положительные $\beta_p$, $\gamma_p$, $\varepsilon$) и локально соответствует $\mathcal{T}$.

# Замыкания семейств теорий абелевых групп

## Теорема

Для любого бесконечного семейства $\mathcal{T}$ теории абелевых групп следующие условия эквивалентны:
(1) семейство $\mathcal{T}$ является $e$-минимальным;
(2) $\dim(\mathcal{T}) = 1$;
(3) для любой верхней границы $\xi \geq m$ или нижней границы $\xi \leq m$, где $m \in \omega$, шмелевского инварианта $\xi \in \mathbf{Szm}$ существует конечное число теорий в $\mathcal{T}$, удовлетворяющих этой границе; при наличии конечного числа теорий с условием $\xi \geq m$ существует бесконечно много теорий в $\mathcal{T}$ с фиксированным значением $\alpha_{p,n} < m$, если $\xi = \alpha_{p,n}$, с фиксированным значением $\beta_p < m$, если $\xi = \beta_p$, с фиксированным значением $\gamma_p < m$, если $\xi = \gamma_p$ и с фиксированным значением $\varepsilon < m$, если $\xi = \varepsilon$.

# Аппроксимируемость теорий абелевых групп

**Теорема**

Для любой теории $T$ абелевой группы $\mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны: (1) теория $T$ аппроксимируется некоторым семейством теорий; (2) теория $T$ аппроксимируется некоторым $e$-минимальным семейством; (3) группа $\mathcal{A}$ бесконечна.

**Теорема**

Для любого бесконечного семейства $\mathcal{T}\dot{\cup}\{T\}$ теорий абелевых групп следующие условия эквивалентны:
(1) $T$ является $\mathcal{T}$-аппроксимируемым;
(2) $T$ имеет бесконечную модель, и для любого конечного набора шмелевских инвариантов $\xi$ для $T$ существует бесконечно много теорий $T_k \in \mathcal{T}$, $k \in \omega$, таких, что каждая $\xi$ либо совпадает для всех $T_k$ и для $T$, либо $\xi$ для $T$ является пределом соответствующих шмелевских инвариантов для $T_n$ (либо с тем же именем $\xi$, либо как предел для $\alpha^{T_k}_{p,n}$).

# $e$-спектры и порождающие множества

**Теорема**

Для любого $\lambda \in \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$ существует $E$-комбинация $T$ теорий конечных абелевых групп (в $\mathbf{A} \cap \mathcal{F}$ и с наименьшим порождающим множеством), для которой $e\text{-}\mathrm{Sp}(T) = \lambda$.

**Теорема**

Для любого $\lambda \in \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$ существует $E$-комбинация $T$ теорий из $\mathbf{ВЕ}$ (соответственно, $\mathbf{ГЕ}$, $\mathbf{АГЕ}$, $\mathbf{ВГЕ}$, $\mathcal{T}_A$) и с наименьшим порождающим множеством, так что при этом $e\text{-}\mathrm{Sp}(T) = \lambda$.

**Теорема**

Существует $2^\omega$ семейств $\mathrm{Cl}_E(\mathbf{ВЕ})_D$ (соответственно, $\mathrm{Cl}_E(\mathbf{ГЕ})_D$, $\mathrm{Cl}_E(\mathbf{АГЕ})_D$, $\mathrm{Cl}_E(\mathbf{ВГЕ})_D$, $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_A)_D$), у которых $E$-замыкания не имеют наименьших порождающих множеств и у которых $E$-комбинации $T$ удовлетворяют равенству $e\text{-}\mathrm{Sp}(T) = 2^\omega$.

# $e$-спектры и порождающие множества

## Теорема

Если $\mathcal{T}_0'$ является порождающим множеством для $E$-замкнутого множества $\mathcal{T}_0$ теорий абелевых групп, то следующие условия эквивалентны:
(1) $\mathcal{T}_0'$ является наименьшим порождающим множеством для $\mathcal{T}_0$;
(2) $\mathcal{T}_0'$ является минимальным порождающим множеством для $\mathcal{T}_0$;
(3) любая теория из $\mathcal{T}_0'$ изолируется некоторым множеством $(\mathcal{T}_0')_\varphi = \{T \in \mathcal{T}_0' \mid \varphi \in T\}$, т. е. для любого $T \in \mathcal{T}_0'$ существует предложение $\varphi \in T$ такое, что $(\mathcal{T}_0')_\varphi = \{T\}$;
(4) любая теория в $\mathcal{T}_0'$ изолирована некоторым множеством $(\mathcal{T}_0)_\varphi$, т.е. для любого $T \in \mathcal{T}_0'$ существует предложение $\varphi \in T$ такое, что $(\mathcal{T}_0)_\varphi = \{T\}$;
(5) для любой теории $T \in \mathcal{T}_0'$ существует конечное множество шмелевских инвариантов $\xi$ такое, что не существует бесконечного множества теорий $T_k \in \mathcal{T}_0'$, $k \in \omega$, для которых каждый $\xi$ либо совпадает для всех $T_k$ и для $T$, либо $\xi$ для $T$ является пределом соответствующих шмелевских инвариантов для $T_k$ (либо одноименных $\xi$, либо как предел для $\alpha_{p,n}^{T_k}$).

# Замыкания и ранги

Следуя [Sudoplatov S. V. Ranks for families of theories and their spectra // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2021. — Vol. 42, No. 12. — P. 2959–2968.], определим *ранг* $\mathrm{RS}(\cdot)$ для семейств полных теорий данной сигнатуры, аналогичный рангу Морли, а также иерархию семейств относительно этих рангов.
Для пустого семейства $\mathcal{T}$ положим $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = -1$, для конечных непустых семейств $\mathcal{T}$ — $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = 0$ и для бесконечных семейств $\mathcal{T}$ — $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \geq 1$.
Для семейства $\mathcal{T}$ и ординала $\alpha = \beta + 1$ положим $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \geq \alpha$, если существуют попарно несовместные $\Sigma(\mathcal{T})$-предложения $\varphi_n$, $n \in \omega$, такие, что $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{\varphi_n}) \geq \beta$, $n \in \omega$.
Если $\alpha$ — предельный ординал, то $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \geq \alpha$, если $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \geq \beta$ для любого $\beta < \alpha$.

# Замыкания и ранги

Положим $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \alpha$, если $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \geq \alpha$ и $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \not\geq \alpha + 1$.
Если $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \geq \alpha$ для любого $\alpha$, то полагаем $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \infty$.
Семейство $\mathcal{T}$ называется *e-тотально трансцендентным*, или *тотально трансцендентным*, если $\mathrm{RS}(\mathcal{T})$ является ординалом.
Если $\mathcal{T}$ является тотально трансцендентным, с $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \alpha \geq 0$, то определим *степень* $\mathrm{ds}(\mathcal{T})$ семейства $\mathcal{T}$ как максимальное число попарно несовместных предложений $\varphi_i$ таких, что $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{\varphi_i}) = \alpha$.

# Замыкания и ранги

**Теорема**

Пусть $\alpha$ — не более чем счетный ординал, $n \in \omega \setminus \{0\}$. Тогда существует $d$-определимое подсемейство $(\mathcal{T}_A)_\Phi$ такое, что $\mathrm{RS}((\mathcal{T}_A)_\Phi) = \alpha$ и $\mathrm{ds}((\mathcal{T}_A)_\Phi) = n$.

**Теорема**

Пусть $\alpha$ — не более чем счетный ординал, $n \in \omega \setminus \{0\}$. Тогда существует подсемейство $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{A,\mathrm{fin}}$ такое, что $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \alpha$, $\mathrm{ds}(\mathcal{T}) = n$ и $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}_{A,\mathrm{fin}} \cup \mathcal{T}_{A,\mathrm{pf}}$ является $d$-определимым семейством с условием $(\mathrm{RS}(\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})), \mathrm{ds}(\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})) = (\alpha, n)$.

# Замыкания и ранги

**Теорема**

Для любого предложения $\varphi \in \mathrm{Sent}(\Sigma_0)$ и $P = \mathcal{T}_A$ либо $P_\varphi$ $E$-замкнуто и конечно, либо $P_\varphi$ $E$-замкнуто с $|P_\varphi| = 2^\omega$.

**Следствие**

Для любого предложения $\varphi \in \mathrm{Sent}(\Sigma_0)$ и $P = \mathcal{T}_A$ либо $\varphi$ является $P$-генерическим, либо $\neg\varphi$ является $P$-генерическим.

# Замыкания и ранги

**Теорема**

Для любого предложения $\varphi \in \mathrm{Sent}(\Sigma_0)$ и богатого $P \subseteq \mathcal{T}_A$ имеют место следующие возможности:
(1) $\mathrm{RS}_P(\varphi) = -1$, если $\varphi$ $\mathcal{T}_A$-несовместно;
(2) $\mathrm{RS}_P(\varphi) = 0$, если $\varphi$ $\mathcal{T}_A$-совместно и принадлежит (в конечном количестве) теориям из $\mathcal{T}_A$, имеющим только конечные модели;
(3) $\mathrm{RS}_P(\varphi) = \infty$, если $\varphi$ принадлежит теории $T \in \mathcal{T}_A$, имеющей бесконечную модель.

**Следствие**

Для любого предложения $\varphi \in \mathrm{Sent}(\Sigma_0)$ и богатого $P \subseteq \mathcal{T}_A$ либо $\varphi$ представляется в виде дизъюнкции конечного числа предложений $\varphi_i$, изолирующих теории $T_i \in \mathcal{T}_A$ с конечными моделями, либо $\varphi$ является $P$-генерическим.

**Следствие**

Для любого предложения $\varphi \in \mathrm{Sent}(\Sigma_0)$ и богатого $P \subseteq \mathcal{T}_A$ либо $\varphi$ является $P$-генерическим, либо $\neg\varphi$ является $P$-генерическим.

# Степени алгебраизации

## Теорема

Для любой конечной абелевой группы $\mathcal{S} = \oplus_{p,n}\mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})}$,

$$\deg_{\mathrm{acl}}(\mathrm{Th}(\mathcal{S})) = \prod_{p,n}(p^{n\alpha_{p,n}} - (p^n - \varphi(p^n))^{\alpha_{p,n}}).$$

## Следствие

Если группа $\mathcal{G}$ представлена в виде $\mathcal{G}' \oplus \mathcal{S}$, где $\mathcal{S} = \oplus_{p,n}\mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})}$ — конечная абелева группа, то

$$\deg_{\mathrm{acl}}(\mathrm{Th}(\mathcal{G})) \geq \prod_{p,n}(p^{n\alpha_{p,n}} - (p^n - \varphi(p^n))^{\alpha_{p,n}}).$$

# Степени алгебраизации

## Предложение

Для любого конечного регулярного объединения $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ и теорий $T_1$, $T_2$, $T$ структур $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, соответственно,

$$\max\{o(T_1), o(T_2)\} \leq \mathrm{deg}_{\mathrm{acl}}(T) \leq o(T_1) + o(T_2). \qquad (1)$$

## Лемма

Если $T$ — теория абелевой группы $\mathcal{A}$ со всеми $\alpha_{p,n} = 0$, и $\beta_p = 0$ или $\beta_p = \omega$, то теория $T$ квазиурбаникова.

## Следствие

Любая теория $T$ абелевой группы без кручения квазиурбаникова, т. е. $\mathrm{acl}\text{-}\mathrm{dcl}_{\mathrm{dif}}() = 0$.

## Степени алгебраизации

**Теорема**

Для любой теории $T$ абелевой группы $\mathcal{A}$ выполняется ровно одно из следующих условий:
1) $\mathrm{deg}_{\mathrm{acl}}(T) = 1$, если $\beta_p \in \{0, \omega\}$ для любых $p$, $\alpha_{p,n} \in \{0, \omega\}$ для любых $(p, n) \neq (2, 1)$ и $\alpha_{2,1} \in \{0, 1, \omega\}$;
2) $\mathrm{deg}_{\mathrm{acl}}(T) \in \omega \setminus \{0, 1\}$, если $\beta_p \in \{0, \omega\}$ для любого $p$, некоторый положительный $\alpha_{p,n}$ конечен помимо возможности $\alpha_{2,1} = 1$, и существует конечное число натуральных положительных $\alpha_{p,n}$;
3) $\mathrm{deg}_{\mathrm{acl}}(T) = \infty$, если значения $p$ или $n$ для натуральных $\alpha_{p,n} > 0$ не ограничены, или $\beta_p \in \omega \setminus \{0\}$ для некоторого $p$.

# Степени алгебраизации

**Теорема**

Для любой абелевой группы $\mathcal{A}$ и ее теории $T$ либо $\mathrm{acl\text{-}dcl}_{\mathrm{dif}}(T)$ конечно, если $\mathcal{A}$ конечна или все $\alpha_{p,n} \in \{0, \omega\}$, за исключением, может быть, $\alpha_{2,1} = 1$ и $\beta_p \in \{0, \omega\}$, либо $\mathrm{acl\text{-}dcl}_{\mathrm{dif}}(T) = \infty$ в противном случае, т. е. если $\mathcal{A}$ бесконечно и существуют положительные $\alpha_{p,n} \in \omega$ или $\beta_p \in \omega$ помимо $\alpha_{2,1} = 1$.

# Степени жесткости

**Предложение**

Для любой конечной абелевой группы $\mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:
(1) $\mathcal{A}$ квазиурбаникова;
(2) $\deg_4(\mathcal{A}) = (0, 0, 0, 0)$;
(3) $|\mathcal{A}| \leq 2$.

**Теорема**

Для любой конечной абелевой группы $\mathcal{A}$ либо
$\deg_4(\mathcal{A}) = (0, 0, 0, 0)$ если $|A| \leq 2$, либо
$\deg_4(\mathcal{A}) = (\delta(\mathcal{A}), \delta(\mathcal{A}), \zeta(\mathcal{A}), \zeta(\mathcal{A}))$, в противном случае.

# Степени жесткости

**Теорема**

Для любой стандартной бесконечной абелевой группы $\mathcal{A}$ выполняется одно из следующих условий:
1) $\deg_4(\mathcal{A}) = (1, 1, 2, 2)$, если $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = 1$;
2) $\deg_4(\mathcal{A}) = (1, 1, 3, 3)$, если $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = 2$ и имеется свободный элемент порядка 2 для циклической части $\mathcal{A}$;
3) $\deg_4(\mathcal{A}) = (r - 1, r - 1, \infty, \infty)$, если $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = r > 2$ конечно и имеется свободный элемент порядка 2 для циклической части $\mathcal{A}$;
4) $\deg_4(\mathcal{A}) = (r, r, \infty, \infty)$, если $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = r > 2$ конечно и нет свободного элемента порядка 2 для циклической части $\mathcal{A}$;
5) $\deg_4(\mathcal{A}) = (\infty, \infty, \infty, \infty)$, если $\mathrm{rk}(\mathcal{A})$ бесконечно.

## Степени жесткости

### Теорема

Для любой стандартной бесконечной абелевой группы $\mathcal{A}$ либо $\mathrm{ind}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{A})$ конечно и удовлетворяет формуле $\mathrm{ind}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{A}) = \prod\limits_{\alpha_{p,n} \in \omega} (p^{n\alpha_{p,n}} - (p^n - \varphi(p^n))^{\alpha_{p,n}})$, если все положительные значения $\beta_p(\mathcal{A})$ бесконечны и $\mathcal{A}$ имеет конечное число положительных натуральных $\alpha_{p,n}$, либо $\mathrm{ind}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{A}) = \omega$ в противном случае.

# Теории линейных порядков

**Теорема**

Пусть $\mathcal{T}$ — семейство полных теорий чистого линейного порядка. Тогда для любых $m, n < \omega$ с условием $n \geq 1$ существует предложение $\phi$ такое, что $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_\phi) = m$, $\mathrm{ds}(\mathcal{T}_\phi) = n$.

**Теорема**

Пусть $T$ — полная теория бесконечного линейного порядка. Тогда следующие условия эквивалентны:
(1) теория $T$ псевдоконечна;
(2) $T = \mathrm{Th}(\langle \omega + \omega^*, < \rangle)$;
(3) $T = \mathrm{Th}(\langle \omega + \sum\limits_{i \in I} (\omega^* + \omega)_i + \omega^*, < \rangle)$ для некоторого множества индексов $I$, где $(\omega^* + \omega)_i$ — копии порядка $\omega^* + \omega$.

# Псевдо-счетно-категоричные теории

### Теорема

Любая теория $T$ сигнатуры $\Sigma^1$ является псевдо-$\aleph_0$-категоричной тогда и только тогда, когда $T$ не имеет конечных моделей и не является $\aleph_0$-категоричной.

### Теорема

Для любой сигнатуры $\Sigma$ имеет место $\overline{\mathcal{T}}_{\rm pcc} \cap \mathcal{T}_\Sigma \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\Sigma$ содержит хотя бы один функциональный символ местности $\geq 1$ или хотя бы один предикатный символ местности $\geq 2$.

### Теорема

Для любой счетно категоричной теории $T$ любое ее константное обогащение $T'$ либо счетно категорично, если добавляется лишь конечное число попарно различных констант, либо псевдо-счетно-категорично, если добавляется бесконечное число попарно различных констант.

# Псевдо-счетно-категоричные теории линейных порядков

**Теорема**

Пусть $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ — слабо о-минимальный не $\aleph_0$-категоричный линейный порядок. Тогда теория $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ псевдо-$\aleph_0$-категорична тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ есть конкатенация $n_1$ порядков $\mathbb{Q}$, $n_2$ порядков $\omega + \omega^*$ и $n_3$ конечных порядков для некоторых $1 \leq n_1 < \omega$, $1 \leq n_2 < \omega$, $0 \leq n_3 < \omega$.

**Теорема**

Пусть $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ — псевдо-$\aleph_0$-категоричный слабо о-минимальный линейный порядок, $\mathcal{M}'$ — обогащение структуры $\mathcal{M}$ конечным или счетным числом одноместных предикатов. Тогда если теория $\mathrm{Th}(\mathcal{M}')$ слабо о-минимальна, то эта теория псевдо-$\aleph_0$-категорична.

# Псевдо-счетно-категоричные теории линейных порядков

**Теорема**

Любая элементарная теория $T$ бесконечного не счетно-категоричного линейного порядка псевдо-$\aleph_0$-категорична тогда и только тогда, когда $T$ принадлежит множеству $\mathrm{PCCLO}$.

**Теорема**

Пусть $\mathcal{M} := \langle \mathbb{Q}_n(t_1, t_2, \ldots, t_n), < \rangle$, где $t_i \in F \cup D$, $1 \leq n < \omega$. Тогда $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ псевдо-$\aleph_0$-категорична тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:
(1) $t_i \in D$ для некоторого $1 \leq i \leq n$;
(2) если $t_i = \omega$ ($t_i = \omega^*$) для некоторого $1 \leq i \leq n$, то $t_j = \omega^*$ ($t_j = \omega$) или $t_j = \omega + \omega^*$ для некоторого $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$;
(3) если $t_i = \omega^* + \omega$ для некоторого $1 \leq i \leq n$, то $t_j = \omega + \omega^*$ для некоторого $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$.

# Псевдо-счетно-категоричные теории групп и модулей

## Теорема

Для любой полной теории $T$ абелевых групп следующие условия эквивалентны:
(1) теория $T$ псевдо-счетно-категорична;
(2) теория $T$ имеет бесконечное число положительных значений $\alpha_{p,n}$, и при этом все положительные значения $\beta_p$ и $\gamma_p$ влекут $|\{n \mid \alpha_{p,n}\}| = \omega$ и $\beta_p = \gamma_p = \omega$, а равенство $\varepsilon = 1$ влечет $|\{\langle p, n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = omega$.

## Теорема

Для любого счетного кольца $R$ и счетного $R$-модуля $A$ следующие условия эквивалентны:
(i) $A$ является псевдо-$\aleph_0$-категоричным;
(ii) существуют конечные или псевдоконечные $R$-модули $B_i$, $i < \omega$, и кардиналы $\kappa_i \leq \omega$ такие, что $A = \bigoplus\limits_{i<\omega} B_i^{(\kappa_i)}$ и $\max\{\kappa_i \mid i < \omega\} = \omega$; при этом если количество нетривиальных слагаемых конечно, то некоторый $R$-модуль $B_i$ является псевдоконечным.

# Псевдо-сильно-минимальные теории

**Теорема**

Любая теория $T$ сигнатуры $\Sigma^1$, состоящей из константных и одноместных предикатных символов, является псевдо-сильно-минимальной тогда и только тогда, когда $T$ не имеет конечных моделей и не является сильно минимальной.

**Теорема**

Любая теория $T$ сигнатуры $\Sigma^2 = \Sigma^1 \cup \{E_i^2 \mid i \in I\}$, где каждое $E_i$ задает отношение эквивалентности, является псевдо-сильно-минимальной тогда и только тогда, когда $T$ не имеет конечных моделей и не является сильно минимальной.

# Псевдо-сильно-минимальные теории

**Теорема**

Для любой сигнатуры $\Sigma$, $\overline{\mathcal{T}}_{\rm psm} \cap \mathcal{T}_\Sigma \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\Sigma$ содержит хотя бы один функциональный символ арности $\geq 1$ или хотя бы один предикатный символ арности $\geq 2$.

**Теорема**

Для любой (псевдо-)сильно-минимальной теории $T$ любое ее расширение $T'$ константами также (псевдо-)сильно-минимально.

**Теорема**

Бесконечный частичный порядок $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ с конечной шириной $w_1(\mathcal{M})$ является сильно минимальным тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ имеет бесконечно много связных компонент, которые являются одиночными, и, кроме того, может иметь только конечное число конечных связных компонент, которые не являются одиночными.

**Теорема**

Бесконечный частичный порядок $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$, имеющий только тривиальные связные компоненты, является псевдо-сильно-минимальным тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ имеет бесконечно много синглетонов и произвольное количество связных компонент, которые являются конечными или псевдоконечными, такими, что по крайней мере одна из них является псевдодоконечной или существует бесконечно много конечных связных компонент, которые не являются синглетонами.

# Псевдо-сильно-минимальные теории

**Теорема**

Для любой теории $T \in \mathcal{T}_{\rm smc} \cup \mathcal{T}_{\rm psmc}$ выполняются следующие условия:
1) если $T' \in \mathcal{T}_{\rm smc} \cup \mathcal{T}_{\rm psmc}$, тогда $T' = T$ тогда и только тогда, когда ${\rm Inv}_{T'} = {\rm Inv}_T$,
2) ${\rm Inv}_T(1) = \infty$,
3) $T \in \mathcal{T}_{\rm smc}$ тогда и только тогда, когда ${\rm Supp}(T)$ является конечным подмножеством $\omega$ с конечными значениями ${\rm Inv}_T(n)$ только,
4) $T \in \mathcal{T}_{\rm psmc}$ тогда и только тогда, когда либо ${\rm Supp}(T)$ бесконечен, с ${\rm Inv}_T(\infty) = 1$, либо ${\rm Supp}(T)$ конечен с некоторым значением ${\rm Inv}_T(n) = \infty$, или $\infty \in {\rm Supp}(T)$.

# Псевдо-сильно-минимальные теории групп

**Теорема**

Пусть $G$ — группа. Тогда следующие условия эквивалентны:
1) группа $G$ псевдо-сильно-минимальна,
2) группа $G$ абелева и имеет вид $G = \mathbb{Q}^{(\lambda)} \oplus \bigoplus\limits_{p} \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\beta_p)}$, где $\lambda$ и $\beta_p$ — некоторые кардиналы, включая хотя бы один бесконечный $\beta_p$, т. е. для теории $\mathrm{Th}(G)$ все $\alpha_{p,n} = 0$, $\beta_p \in \omega + 1$, $\gamma_p = 0$, $\varepsilon = 1$, с $\max\limits_{p} \beta_p = \omega$.

# Аритизируемые теории групп

**Теорема**

Пусть $\mathcal{G}$ — $\emptyset$-определимая подгруппа в структуре $\mathcal{M}$. Тогда следующие условия эквивалентны:
(1) все формулы теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$, определяющие подмножества конечных декартовых степеней $\mathcal{G}$, $n$-аритизуемы для некоторого фиксированного натурального $n$, и образуют $n$-аритизуемую $\mathrm{Th}(\mathcal{G})$;
(2) все формулы $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$, определяющие подмножества конечных декартовых степеней $\mathcal{G}$, являются унаритизируемыми и задают унаритизируемую $\mathrm{Th}(\mathcal{G})$;
(3) $\mathcal{G}$ — конечная группа.

# Аритизируемые теории групп

## Теорема

Для любой группы $\mathcal{G}$ следующие условия эквивалентны:
(1) $\mathrm{Th}(\mathcal{G})$ аритизируема,
(2) $\mathrm{Th}(\mathcal{G})$ почти $n$-аритизируема для некоторых ,
(3) $\mathrm{Th}(\mathcal{G})$ унаритизируема,
(4) $\mathrm{Th}(\mathcal{G})$ почти унаритизируема,
(5) $\mathrm{Th}(\mathcal{G})$ является $n$-арной для некоторого $n \in \omega$,
(6) $\mathcal{G}$ — конечная группа.

## Следствие

Для любой группы $\mathcal{G}$ либо $\mathrm{ar}(\mathrm{Th}(\mathcal{G})) \in \omega$, если $\mathcal{G}$ конечна, либо $\mathrm{ar}(\mathrm{Th}(\mathcal{G})) = \infty$, если $\mathcal{G}$ бесконечна.

# Аритизируемые алгебры

## Предложение

Любой моноид (группоид) $\mathcal{M}$ с конечным $R(\mathcal{M}) = \{a \cdot b \mid a, b \in M, a \neq e, b \neq e\}$ бинаризируем с $\mathrm{aar}(\mathrm{Th}(\mathcal{M})) = 1$.

## Предложение

Любая алгебра $\mathcal{A}$ конечной сигнатуры $\{f_1, \ldots, f_k\}$ и с конечным $R(\mathcal{A}) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} f_i(A, A, \ldots, A)$ аритизируема и $\mathrm{aar}(\mathrm{Th}(\mathcal{A})) = 1$.

# Литература


- *Кулпешов Б.Ш., Павлюк И.И., Судоплатов С.В.* Ранги и аппроксимации для семейств упорядоченных теорий // Математические заметки. — 2024. — Т. 116, № 4. — С. 531–551. Перевод: *Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* Ranks and approximations for families of ordered theories // Mathematical Notes. — 2024. — Vol. 116, No. 4. — P. 669–684. (ВАК, Белый список, РИНЦ, Scopus, WoS)
- *Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* Pseudo-strongly-minimal structures and theories // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — Vol. 45, No. 12. — P. 6515–6525. (Белый список, РИНЦ, Scopus, WoS)
- *Кулпешов Б.Ш., Павлюк И.И., Судоплатов С.В.* Псевдо-счетно-категоричные формулы и теории // Математические заметки. — 2025. — Т. 117, № 3. — С. 422–442. Перевод: *Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* Pseudo-countably categorical formulae and theories // Mathematical Notes. — 2025. — Vol. 117, No. 3. — P. 442–457. (ВАК, Белый список, РИНЦ, Scopus, WoS)

# Литература


- *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* Families of theories of abelian groups and their closures // Вестник Карагандинского университета. Серия. Математика = Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. — 2018. — Vol. 92, No. 4. — P. 72–78. (Белый список, РИНЦ, Scopus, WoS)
- *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* Ranks for families of theories of Abelian groups // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2019. — Vol. 28. — P. 95–112. (ВАК, Белый список, РИНЦ, Scopus, WoS)
- *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* Approximations for Theories of Abelian Groups // Mathematics and Statistics. — 2020. — Vol. 8, No. 2. — P. 220–224. (Белый список, Scopus)
- *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* Formulas and properties for families of theories of Abelian Groups // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2021. — Vol. 36. — P. 95–109. (ВАК, Белый список, РИНЦ, Scopus, WoS)

# Литература


- *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* Arities and arizabilities of group, monoid and groupoid theories // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 43, No. 3. — P. 682–686. (Белый список, РИНЦ, Scopus, WoS)
- *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* Variations of rigidity for abelian groups // Mathematics and Statistics. — 2024. — Vol. 12, No. 2. — P. 204–210. (Белый список, Scopus)
- *Pavlyuk In. I.* On Algebraic and Definable Closures for Theories of Abelian Groups = Об алгебраических и определимых замыканиях для теорий абелевых групп // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2024. — Vol. 47. — P. 107–118. (ВАК, Белый список, РИНЦ, Scopus, WoS)