КВАЗИПОЛЯ С УСЛОВИЕМ ХОЛЛА

Кравцова О. В.
(совместно с В. С. Логиновой)

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Новосибирск, 19-20 июня 2025 г.

Квазиполе

Множество $Q = (Q, +, \cdot)$ с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$ называют **правым квазиполем**,[1] если выполняются следующие аксиомы:

1) $Q^+ = (Q, +)$ – абелева группа;

2) $Q^* = (Q \backslash \{0\}, \cdot)$ – лупа;

3) $x \cdot 0 = 0$ для любого $x \in Q$;

4) правый дистрибутивный закон $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ для любых $x, y, z \in Q$;

5) если $a, b, c \in Q$ и $a \neq b$, то уравнение $x \cdot a = x \cdot b + c$ однозначно разрешимо в Q.

Левое квазиполе определяют аналогично.

Полуполе – квазиполе с двусторонней дистрибутивностью.

Почти-поле – квазиполе с ассоциативным умножением.

[1] **Hughes D.R., Piper F.C.** Projective planes. Springer–Verlag New–York Inc., 1973. 292 p.

Квазиполя и плоскости трансляций

Тесно связанные исследования проективных плоскостей трансляций и координатизирующих квазиполей проводятся уже более века (Диксон[2], Веблен и Маклаган Веддерберн[3]).

С середины прошлого века широко используются методы компьютерной алгебры (см., например, Клейнфелд[4]).

Исследования отражены в обзоре Джонсона и др. (2007)[5].

---

[2] **Dickson L.E.** Linear algebras in which division is always uniquely possible. Trans. Amer. Math. Soc. 1906. Vol. 7, no.3. P. 370–390.

[3] **Veblen O., Maclagan–Wedderburn J.H.** Non-Desarguesian and Non-Pascalian Geometries. Trans. Amer. Math. Soc. 1907. Vol. 8, no. 3. P. 379–388.

[4] **Kleinfeld E.** Techniques for enumerating Veblen-Wedderburn systems. J. Assoc. Comput. Mach. 1960. Vol. 7. P. 330–337.

[5] **Johnson N.L., Jha V., Biliotti M.** Handbook of finite translation planes. London New York, Chapman Hall/CRC. 2007. 888 p.

Квазиполя Холла

Первые примеры нетривиальных конечных полуполей указаны Л. Диксоном в 1906 году, почти-полей – в 1905 году. Все конечные почти-поля полностью классифицировал Х. Цассенхауз в 1936 году.

Первые примеры конечных квазиполей, не являющихся ни полуполями, ни почти-полями, построил М. Холл в 1943 году. [6]

Пусть многочлен $\varphi(x) = x^2 - rx - s$ неприводим над $GF(q)$ ($q = p^n$, p — простое). Квазиполе Q порядка q^2 с ядром $K \simeq GF(q)$ называется **квазиполем Холла**, если каждый элемент из $Q \setminus K$ — это корень многочлена $\varphi(x)$.

Ядром правого квазиполя Q называется множество элементов $k \in Q$, удовлетворяющих условиям:

1) $k(a+b) = ka + kb$;
2) $k(ab) = (ka)b$ для всех $a, b \in Q$.

[6] **Hall M., Jr.** Projective planes // Trans. Amer. Math. Soc. 1943. Vol. 54. P. 229–277.

Квазиполя Холла

В конечном квазиполе Холла Q каждый элемент из ядра K коммутирует со всеми элементами из Q (т. е. K — **центр** Q).

Группа автоморфизмов $Aut_K Q$, поэлементно фиксирующих ядро, транзитивна на $Q \setminus K$.

Конечное квазиполе Холла является полем тогда и только тогда, когда оно имеет порядок 4; является нетривиальным почти-полем, если $K = GF(3)$ и $\varphi(x) = x^2 + 1$.

Квазиполя Холла над одним конечным полем K **изотопны**[7] и координатизируют изоморфные плоскости трансляций — **плоскости Холла**. Так, все три неизоморфных квазиполя Холла порядка 9 изотопны почти-полю Диксона порядка 9.

[7] **Nesbitt–Stobert S.B., Garner C.W.L.** A direct proof that all Hall planes of the same finite order are isomorphic // Riv. Mat. Univ. Parma. 1986. Vol. 12, № 4. P. 241–247.

Умножение в квазиполе, регулярное множество

Правое квазиполе Q порядка q^n с ядром $K \simeq GF(q)$ является n-мерным левым векторным пространством над полем K, умножение справа на элемент $u \in Q$ является линейным преобразованием:

$$x \circ u = x \cdot \theta(u), \qquad \theta(u) \in GL_n(q) \cup \{0\}.$$

Множество $R = \{\theta(u) \mid u \in Q\}$ всех таких преобразований называют *регулярным множеством* квазиполя Q.

Пусть Q – квазиполе Холла порядка q^2 с ядром $K \simeq GF(q)$ и ассоциированным многочленом $\varphi(x) = x^2 - rx - s$. Тогда его регулярное множество состоит из матриц

$$\theta(x,0) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \qquad \theta(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y^{-1}\varphi(x) & r - x \end{pmatrix}, \ x, y \in GF(q), \ y \neq 0,$$

все нескалярные матрицы принадлежат одному классу сопряженности (с характеристическим многочленом $\varphi(x)$).

Квазиполя Холла и обобщения

Г. Наги выделяет[8] квазиполя Холла, допускающие дважды транзитивные множества четных подстановок.
Ю. Хирамин предлагает[9] к рассмотрению **обобщенное квазиполе Холла** Q с базисом 1, λ над ядром K, каждый элемент которого $\xi = a + b\lambda$ из $Q \setminus K$ удовлетворяет уравнению $\xi^2 - r(b)\xi - s(b) = 0$, где r и s — отображения из K^* в K.
М. Билиотти и соавторы формулируют вопросы[10] о существовании бесконечных обобщений квазиполей Холла.

(1) *Может ли квазиполе Холла быть некоммутативным телом?*
(2) *Может ли система Холла иметь в качестве ядра алгебраически замкнутое поле?*

---

[8] **Nagy G.P.** Doubly transitive sete of even permutations // Bul. Acad. Ştiinţe. Repub. Mold. Mat. 2016. № 1. P. 78–82.

[9] **Hiramine Y.** A generalization of Hall quasifields// Osaka J. Math. 1985. Vol. 22. P. 61–69.

[10] **Biliotti M., Jha V., Johnson N.L.** Foundations of translation planes. Marcel Dekker Inc., New York, Basel, 2001. 542 p.

Вопросы

(3) *Пусть $K \simeq GF(q)$, $\varphi(x) \in K[x]$ — неприводимый многочлен степени s. При каких $m, s \in \mathbb{N}$ существует (правое) квазиполе Q порядка q^m с ядром K, каждый элемент которого $a \in Q \setminus K$ является корнем многочлена $\varphi(x)$?*

(4) *Может ли конечное квазиполе Холла содержать подквазиполе размерности более 2 над своим ядром?*

Пусть $Q = (Q, +, \cdot)$ — (правое) квазиполе порядка q^m ($q = p^n$, p — простое число) с центром $K \simeq GF(q)$. Будем говорить, что Q – **квазиполе с условием Холла**, если существует такой неприводимый многочлен $\varphi(x) = x^2 - rx - s \in K[x]$, что всякий элемент $a \in Q \setminus K$ является корнем многочлена $\varphi(x)$. Таким образом, при $m = 2$ мы получаем определение квазиполя Холла.

Вопросы строения конечных квазиполей

В.М. Левчук, научно-исследовательский семинар кафедры высшей алгебры Московского государственного университета, 2013 г.

(A) *Перечислить максимальные подполя, найти их число и возможные порядки.*

(B) *Выявить конечные квазиполя Q с неоднопорожденной лупой Q^*.*
Гипотеза: *лупа Q^* всякого конечного полуполя Q однопорождена.*

(C) *Выявить, какие возможны спектры лупы Q^* конечного полуполя и квазиполя Q.*

(D) *Найти порядок группы автоморфизмов.* [11]

[11] **Levchuk V.M., Kravtsova O.V.** Problems on structure of finite quasifields and projective translation planes. Lobachevskii J. Math. 2017. Vol. 38, no. 4, P. 688–698.

Степени и порядки элементов

Пусть Q – конечное квазиполе с единицей e. **Право-** и **левоупорядоченные степени** элемента $a \in Q^*$ определяют индуктивно правилом

$$a^{0)} := e = a^{(0}, \quad a^{s)} := a^{s-1)} \cdot a, \quad a^{(s} := a \cdot a^{(s-1}, \quad s \in \mathbb{N},$$

n-й степенью элемента a называют всякое произведение n множителей, каждый из которых равен a.
Левым порядком элемента $a \in Q^*$ называется такое наименьшее число n, что $a^{(n} = e$. Множество всех левых порядков ненулевых элементов составляет **левый спектр** лупы Q^*. Правый порядок, порядок, правый спектр, спектр определяются аналогично.
Лупа Q^* называется **левопримитивной**, если $Q^* = \{e, a^{(1}, a^{(2}, \dots\}$, a – **левопримитивный** элемент (правопримитивность – аналогично).

Гипотеза примитивности

Гипотеза Венэ, 1991. *Каждое конечное полуполе содержит левопримитивный либо правопримитивный элемент.* [12]

КОНТРПРИМЕРЫ:
I.F. Rúa, 2004: $|Q| = 32$;
I.F. Rúa, I.R. Hentzel, 2007: $|Q| = 64$.

M. Кордеро и В. Джа изучали проблему примитивности для квазиполей.[13]

Теорема

Квазиполе Холла Q порядка q^2, $q = p^n$, где $n > 1$ и не является степенью 2, допускает покрытие собственными подквазиполями Холла, такими, что любые два из этих подквазиполей пересекаются в точности по собственному подполю ядра.

---

[12] **Wene G.P.** On the multiplicative structure of finite division rings // Aequationes Math. 1991. Vol. 41. P. 222–233.

[13] **Cordero M., Jha V.** On the multiplicative structure of quasifields and semifields: cyclic and acyclic loops // Note di Matematica. 2009. Vol. 29, № 1. P. 45–59.

Квазиполя Холла: спектры, примитивность[14]

Теорема

Правый спектр квазиполя Холла Q равен $M \cup \{k\}$, где M — множество всех делителей числа $q-1$, k — делитель числа q^2-1, не делящий $q-1$. И обратно, для любого множества $M \cup \{k\}$ описанного вида существует квазиполе Холла с таким правым спектром. Левый порядок любого нецентрального элемента в квазиполе Холла равен трем при $r = s$, четырем при $r = 0$ и больше четырех в остальных случаях.

Теорема

Квазиполе Холла Q правопримитивно тогда и только тогда, когда $P = K$ и $\varphi(x)$ — примитивный неприводимый многочлен. Для любого $q = p^n$ существует $\varphi(q^2-1)/(2n)$ правопримитивных квазиполей Холла порядка q^2.

Здесь φ — функция Эйлера. P – минимальное подполе в K, содержащее коэффициенты r, s многочлена $\varphi(x)$; $P \simeq GF(p^t)$.

[14] **Кравцова О. В., Логинова В. С.** Вопросы строения конечных квазиполей Холла // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2024. Том 30, № 1. С. 128–141.

Квазиполя Холла: подполя, группа автоморфизмов

Теорема

Центр K конечного квазиполя Холла Q является единственным его максимальным подполем, за исключением случая $K \simeq GF(2^{2k+1})$, $\varphi(x) = x^2 + x + 1$, когда Q есть объединение K и подполей порядка 4.

Теорема

Группа автоморфизмов $Aut\, Q$ квазиполя Холла Q имеет порядок $(q^2 - q)n/t$ и состоит из всех полулинейных преобразований

$$(x, y) \to (x^\sigma, y^\sigma) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $a, b \in K$, $b \neq 0$, $\sigma \in Aut_P K$. Стабилизатор ядра $Aut_K Q$ имеет порядок $q^2 - q$ и состоит из всех линейных преобразований (1) при $\sigma = 1$.

Квазиполя с условием Холла: существование

У. Демпволф – квазиполя порядка 16. [15]

В. М. Левчук, П .К. Штуккерт [16] – три из этих квазиполей представляют теоретико-множественное объединение семи максимальных подполей порядка 4.
Это не квазиполя Холла, они имеют размерность 4 над ядром $\mathbb{Z}_2$, хотя все нецентральные элементы являются корнями многочлена $x^2 + x + 1$. Более того, эти квазиполя не содержатся ни в каком конечном квазиполе Холла.

Задача. Построить все, с точностью до изоморфизма, 4-мерные квазиполя порядка 16 с условием Холла.

[15] **Dempwolff U.** File of Translation Planes of Small Order. http://www.mathematik.uni-kl.de/$\sim dempw/dempw_$Plane.html .

[16] **Levchuk V.M., Shtukkert P.K.** Problems on structure for quasifields of orders 16 and 32 // J. of Siberian Federal University. Ser. Mathematics & Physics. 2014. Vol.7, № 3. P. 362–372.

Квазиполя порядка 16 с условием Холла

Теорема

Существуют точно 11, с точностью до изоморфизма, квазиполей порядка 16 с условием Холла. Регулярное множество каждого из них содержится в объединении классов сопряженности матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

с $\{0, E\}$. *Группы автоморфизмов:* S_3 *(2 квазиполя),* S_4 *(6 квазиполей),* A_4, $\mathbb{Z}_7 \leftthreetimes \mathbb{Z}_3$, $PSL(2,7)$. *Квазиполя порядка 16 с условием Холла не содержатся в качестве подквазиполей ни в одном квазиполе Холла.*

Построен, таким образом, явный пример конечного квазиполя с простой неабелевой группой автоморфизмов $PSL(2,7)$.
Матрицы регулярного множества каждого квазиполя заданы семейством из 16 многочленов от четырех переменных над полем $\mathbb{Z}_2$.

Регулярное множество квазиполя порядка 16 с условием Холла, $Aut\, Q \simeq PSL(2,7)$

Пусть $\theta(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x & y & z & x \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} & \theta_{24} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} & \theta_{34} \\ \theta_{41} & \theta_{42} & \theta_{43} & \theta_{44} \end{pmatrix}$, где $\theta_{ij} = \theta_{ij}(x,y,z,t)$.

$\theta_{21} = y + z + t + xz + zt + xyz + xyt$
$\theta_{22} = x + y + yz + zt + xyz$
$\theta_{23} = t + xz + yz + zt + yzt$
$\theta_{24} = z + t + yt + zt + xzt + yzt$
$\theta_{31} = z + xy + xyz + xyt + xzt$
$\theta_{32} = t + xy + yz + yzt$
$\theta_{33} = x + z + t + yz + yt + xyz + yzt$
$\theta_{34} = y + t + zt + xyt + yzt$
$\theta_{41} = z + t + xyz + xyt + xzt$
$\theta_{42} = z + xy + yz + xyt + yzt$
$\theta_{43} = y + z + xz + yz + xzt + yzt$
$\theta_{44} = x + y + z + t + yt + zt + yzt$

Квазиполя с условием Холла: общие результаты

Теорема

1. Если Q – конечное квазиполе с условием Холла, то его размерность m над ядром $K = Z(Q)$ не может быть равна 3.
2. Конечное квазиполе Q с условием Холла размерности $m > 2$ над ядром не является ни полуполем, ни почти-полем.
3. Конечное квазиполе Q с условием Холла размерности $m > 2$ над ядром не является правопримитивным.
4. Правый спектр квазиполя Холла Q с ядром $K \simeq GF(q)$ равен $M \cup \{k\}$, где M — множество всех делителей числа $q - 1$, k — делитель числа $q^2 - 1$, не делящий $q - 1$.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2025-1790).