Кожухов И.Б.

Артиновость и нётеровость в полигонах над полугруппами и их обобщения

Полигон над полугруппой S – это множество X вместе с отображением $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющим условию $x(st) = (xs)t$ при $x \in X$, $s, t \in S$ (см. [1, 2]). Полигон X называется *унитарным*, если полугруппа S имеет единицу e и $xe = x$ для всех $x \in X$. Полигон X назовём *квазиунитарным*, если $XS = X$. В случае полугруппы с единицей эти понятия совпадают.

Рисовская матричная полугруппа $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, где G — группа, I и Λ — множества, $P = \|p_{\lambda i}\|$ — $\Lambda \times I$-матрица с элементами $p_{\lambda i} \in G \cup \{0\}$, определяется как множество элементов вида $(g)_{i\lambda}$, а также элемента 0, где $g \in G$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, с умножением $(g)_{i\lambda} \cdot (h)_{j\mu} = (gp_{\lambda j}h)_{i\mu}$ при $p_{\lambda i} \neq 0$ и 0 при $p_{\lambda i} = 0$ (см. [3, глава 3]). Нетрудно проверить, что рисовская матричная полугруппа является регулярной в том и только том случае, если каждая строка и каждый столбец матрицы P имеют ненулевые элементы. Через $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ мы будем обозначать рисовскую матричную полугруппу без нуля.

Условием конечности называется любое условие, которое выполняется во всех алгебрах заданной сигнатуры. Хорошо известны такие условия конечности, как локальная конечность, конечная порождённость, финитная аппроксимируемость. Во многих разделах алгебры рассматривались *артиновость* – условие минимальности и *нётеровость* – условие максимальности. Их можно определять двумя принципиально различными способами. А именно, алгебра A называется

артиновой в смысле конгруэнций, если любая убывающая последовательность $\rho_1 \supset \rho_2 \supset \ldots$ её конгруэнций обрывается;

артиновой в смысле подалгебр, если любая убывающая последовательность $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ её подалгебр обрывается;

нётеровой в смысле конгруэнций, если любая возрастающая последовательность $\rho_1 \subset \rho_2 \subset \ldots$ её конгруэнций обрывается;

нётеровой в смысле подалгебр, если любая возрастающая последовательность $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ её подалгебр обрывается.

Приведём определения более слабых условий конечности. Алгебра A называется

хопфовой, если любой сюръективный эндоморфизм $A \to A$ является инъективным;

кохопфовой, если любой инъективный эндоморфизм $A \to A$ является сюръективным;

строго хопфовой, если для любого $\alpha \in \mathrm{End}A$ последовательность $\ker\alpha \subset \ker\alpha^2 \subset \ker\alpha^3 \subset \ldots$ обрывается;

строго кохопфовой, если для любого $\alpha \in \mathrm{End}A$ последовательность $\mathrm{im}\alpha \supset \mathrm{im}\alpha^2 \supset \mathrm{im}\alpha^3 \supset \ldots$ обрывается.

Хорошо известная теорема Кантора – Шрёдера – Бернштейна утверждает, что для любых множеств A и B, если существуют инъективные отображения $A \to B$ и $B \to A$, то существует взаимно однозначное отображение $A \to B$. Естественно спросить, будет ли это утверждение верным для универсальных алгебр, если вместо произвольных отображений рассматривать гомоморфизмы, т.е. верно ли, что если алгебры A и B изоморфно вкладываются друг в друга, то они изоморфны? В общем случае ответ отрицательный: скажем, свободные группы рангов 2 и 3 изоморфно вкладываются друг в друга, но не изоморфны. Однако, существуют классы алгебр, для которых ответ на поставленный вопрос положительный: например, конечно порождённые абелевы группы и линейные пространства над телом.

Назовём алгебру A *канторовой*, если для любой алгебры B той же сигнатуры наличие изоморфных вложений $A \to B$ и $B \to A$ влечёт изоморфизм алгебр A и B.

Двойственным образом определяются *коканторовы* алгебры, т.е. такие, что для любой алгебры B той же сигнатуры наличие сюръективных гомоморфизмов $A \to B$ и $B \to A$ влечёт изоморфизм алгебр A и B.

Из определений легко получаются следующие зависимости между рассматриваемыми условиями:

Нётеровость (конгр.) $\Rightarrow$ строг. хопф. $\Rightarrow$ хопфовость $\Rightarrow$ коканторовость

Артиновость (подалг.) $\Rightarrow$ строг. кохопф. $\Rightarrow$ кохопфовость $\Rightarrow$ канторовость

Артиновы и нётеровы полигоны над рисовской матричной полугруппой $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ и полигоны с нулём над регулярной рисовской матричной полугруппой с нулём $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ были охарактеризованы в [4]. В [5] было доказано, что конечно порождённый коммутативгный полигон (в частности, конечно пороглждённый полигон над коммутативной полугруппой) является хопфовым. Характеризация хопфовых и кохопфовых унитарных полигонов над группой была получена в [6], строго хопфовых в [7]. В [8] было доказано, что унитарный полигон над группой канторов. Впоследствии этот результат был обобщён, а именно, было доказано [9], что квазиунитарные полигоны над регулярными рисовскими матричными полугруппами являются канторовыми. Канторовы и коканторовы полигоны над тривиальной полугруппой (т.е. полугруппой из одного элемента) были описаны в [10].

Список литературы

[1] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, acts and categories. Berlin – New York: W. de Gruyter, 2000.

[2] Кожухов И.Б., Михалёв А.В., “Полигоны над полугруппами”, Фундамент. и прикл. матем., 23:3 (2020), 141–199.

[3] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: М., Мир, 1972, т. 1, 2, 286 + 432 pp.

[4] Колесникова К.А., “Артиновы и нётеровы полигоны над вполне 0-простыми полугруппами”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2024, № 5, 67–71.

[5] Карташов В.К., “Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр”, Дискрет. матем., 20:4 (2008), 79–84.

[6] Кожухов И.Б., Колесникова К.А., “О хопфовости и кохопфовости полигонов над группами”, Фундамент. и прикл. матем., 23:3 (2020), 131–139.

[7] 201. Kolesnikova K.A., Kozhukhov I.B. On the strongly hopfian acts over semigroups. Applied Mathematics, 2025, 16, pp. 183-189.

[8] Сотов А.С. Теорема Кантора – Бернштейна для полигонов над группами. Материалы VI Межд. конф. Соврем. информ. технологии в образов. и научн. иссл. 2019. ДонНТУ, Донецк, с. 120-123.

[9] Кожухов И.Б., Сотов А.С., “Канторовость квазиунитарных полигонов над вполне (0-)простыми полугруппами”, Дальневост. матем. журн., 23:1 (2023), 27–33.

[10] Кожухов И.Б., Сотов А.С., “Условия канторовости и коканторовости полигонов над тривиальной полугруппой”, Известия вузов. Математика, 2025, N 6.