

Аннотация. Один из методов изучения и классификации упорядоченных структур – теория сечений. Пусть $\langle L \leq, \dots \rangle$ л.у. множество (группа, поле, теория,...), пара непустых его подмножеств $A, B \subset L$ называется **сечением**, если $A < B$ и $A \cup B = L$. Существуют различные классификации сечений, позволяющие сделать геометрически наглядными алгебраические свойства структуры. **Вид сечения является инвариантом при изоморфизме л.у. структур.**

Книги [1, 2, 3], обзорная статья [4] Ходра Шамседдина и др. (Shamseddine K., факультет физики и астрономии, Университет Манитобы, Виннипег, Канада, khodr.shamseddine@umanitoba.ca Веб-сайт: www2.physics.umanitoba.ca/u/khodr) показывают сложившиеся подходы к исследованию л.у. множеств, групп, колец, тел, полей возникшие в работах Дедекин-да (Dedekind, 1831-1916), Макнейла ([15] латлинеалы, MacNeille, 1907-1973), Хаусдорфа (Hausdorff 1868-1942), Артина (Artin 1898-1962) и Шрайера (Schreier 1901-1929), Бэра (Baire 1874-1932), Капланского (I. Kaplansky, 1917-2006) и др. и получившие своё развитие вместе с нестандартным анализом Робинсона, анализом на неархимедовых нормированных полях и теорией моделей.

Теория сечений восходит к работам Дедекин-да и к настоящему времени получила значительное развитие, как отмечает в своей обзорной статье Франц-Виктор Кульман [5] (Franz-Viktor Kuhlmann, Professor, Institute of Mathematics, University of Szczecin, Poland, Email: fvk [at] usz.edu.pl. Страничка: <https://fvkuhlmann.de/Fvkpaper.html>)

В НГУ тематика связанная с упорядоченными (правоупорядоченными) группами велась под руководством Валерия Матвеевича Капытова (1941-1922) [6]. В Томске с 80-х годов тематика упорядоченных структур велась под руководством Германа Гавриловича Пестова (1932-2015) [7].

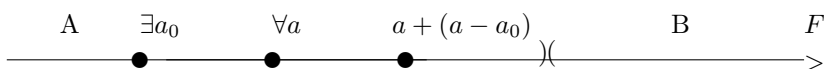
Будем говорить, что сечение л.у. множества F собственное (иррациональное - Байжанов Б. С., Вербовский В.В. [8], дедекиндово - Шелах [9](Saharon Shelah родился 3 июля 1945 года, профессор математики в Еврейском университете в Иерусалиме и Раттерском университете в Нью-Джерси), если оно не порождается никаким элементом поля F .

Отметим еще давно принятую классификацию сечений л.у. множеств по конфинальности и коинициальности, для упорядоченных структур эти понятия использовал Хаусдорф. Говорят, что множество $A \subseteq F$ конфинально (коинициально) F , если $\forall x \in F \exists a \in A \quad x \leq a \quad (x \geq a)$. Наименьшая мощность множеств конфинальных (коинициальных) данному л.у. множеству F называется его **конфинальностью** $cf(F)$ (**соответственно коинициальностью** $coi(F)$). Про сечение (A, B) говорят, что оно имеет **конфинальность или тип** $(cf(A), coi(B))$. Если $cf(A) = coi(B)$, то сечение называется **симметричным (по Шелаху)**.

Далее рассмотрим подробней классификацию сечений л.у. полей (заметим, что для л.у. групп можно рассматривать формально аналогичные определения, но там могут быть свои особенности [10]). Как было доказано Капланским каждое л.у. поле вкладывается с сохранением порядка в некоторое поле формальных степенных рядов, построенное по линейно упорядоченной группе, при этом сечения группы порождают сечения поля. Известны также конструкции, позволяющие по л.у. множеству с данными свойствами построить группу, а затем и поле с подобными свойствами, с наследованием конфинальных типов сечений. Различного рода замыкания л.у. полей (вещественное, непрерывное=топологическое, архимедово, симметрическое) характеризуются в терминах сечений, и простых расширений того или иного типа. При этом среди простых расширений выделяются расширения, удовлетворяющие дополнительным ограничениям, которые принято называть заполнением сечения [7, 9, 12, 11].

Заполнение симметричных (по Шелаху) сечений даёт симметричное замыкание л.у. поля, т.е. минимальное упорядоченное расширение, в котором нет собственных сечений с равной конфинальностью берегов.

Пусть (A, B) – сечение л.у. поля F . Множество A называется **коротким берегом** [7], если существует $a_0 \in A$ такое, что для всех $a \in A, a_0 \leq a$, выполняется $a + (a - a_0) \in A$, при этом, элемент a_0 называется **близким к B** . Если берег не является коротким, то он называется **длинным**. Если оба берега сечения л.у. поля длинные, то сечение называется **симметричным (по Пестову)**. Если один берег короткий, а другой длинный, то сечение называется **несимметричным**.



Еще Хан ввел понятие архимедовской эквивалентности элементов линейно упорядоченной группы и тела. Гансу Хану часто приписывают создание современной теории упорядоченных алгебраических систем после публикации его статьи "О неархимедовых системах величин"(Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Wien, Mathematisch ,Naturwissenschaftliche Klasse 116 (Abteilung IIa), 1907, стр. 601-655). Среди полученных в ней результатов – теорема Хана о вложении, которая, как правило, считается самым глубоким результатом в теории упорядоченных абелевых групп.

Элементы $x, y \in F \setminus \{0\}$ называются **архимедовски эквивалентными**, если $\exists n \in \mathbb{N} \quad (|x| \leq n|y| \wedge |y| \leq n|x|)$.

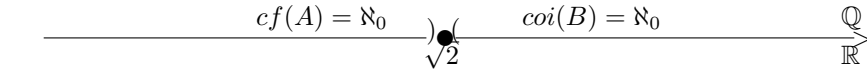


Фактор-группа G_F мультипликативной группы $\langle F \setminus \{0\}, \cdot, \leq \rangle$ по отношению архимедовской эквивалентности называется **группой архимедовых классов** поля F [1, 4].

В терминах заполнения симметричных (по Пестову) сечений получим архимедово замыкание л.у. поля, т.е. максимальное упорядоченное расширение не меняющее группу архимедовых классов поля.

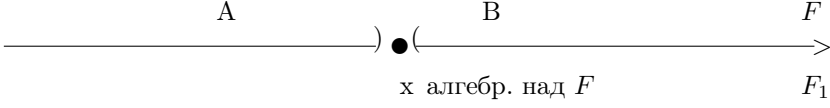
Сечение (A, B) называется **фундаментальным** [3, 9, 7], если $\forall \varepsilon \in F^+ \exists x \in A, y \in B$ такие, что $y - x < \varepsilon$. Определения фундаментального и нефундаментального сечений характеризуют сечение по его ширине - равна ли она нулю, либо больше

нуля.



Заполнение собственных фундаментальных сечений даёт непрерывное(топологическое) замыкание л.у. поля, т.е. минимальное упорядоченное расширение без собственных фундаментальных сечений= максимальное упорядоченное расширение в котором поле плотно.

Пусть F_1 – упорядоченное расширение поля F , $F \subseteq F_1$. Будем говорить, что элемент $x \in F_1$ порождает сечение (A, B) в упорядоченном поле F (сечение (A, B) порождается элементом x), если $\forall a \in A \forall b \in B \quad a \leq x \leq b$. Сечение (A, B) называется алгебраическим [9, 7, 12], если существует упорядоченное расширение F_1 поля F , и существует алгебраический над F элемент $x \in F_1 \setminus F$, порождающий данное сечение.



Неалгебраическое сечение также называется трансцендентным [7].

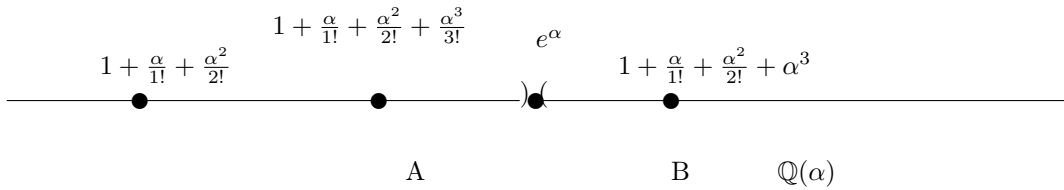
Заполнение алгебраических сечений даёт вещественное замыкание л.у. поля, т.е. минимальное упорядоченное расширение поля, где все сечение трансцендентны= максимальное упорядоченное алгебраическое расширение.

Исследование поведения многочленов на симметричных и несимметричных сечениях дает возможность сформулировать и доказать теорему об изоморфизме упорядоченных полей, родственную, в некотором смысле, теореме Эрдаша-Гиллмана-Хенриксена, но имеющую более широкую сферу применения [7].

Поскольку заполнение сечений происходит через простые расширения, исследование сечений простых трансцендентных расширений представляет интерес. Рассмотрим классификацию сечений в простых трансцендентных расширениях неархимедовых полей.

Теорема. Пусть K – архимедово поле, $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{R}$, группа архимедовых классов $G_K = \{1\}$, $K(\alpha)$ простое трансцендентное расширение поля K , полученное заполнением сечения (A, B) , где $A = \{x \in K \mid x \leq 0\}$, $B = \{x \in K \mid x > 0\}$ бесконечно малой α . Тогда получим следующую классификацию сечений в поле $K(\alpha)$.

	fund.	sym.	alg.	example
1	1	1	1	$A = \{x \in K(\alpha) \mid x < \sqrt{1 + \alpha}\}$
2	1	1	0	$A = \{x \in K(\alpha) \mid x < e^\alpha\}$
3	1	0	1	нет для любого поля
4	1	0	0	$A = \{x \in K(\alpha) \mid x \leq \alpha\}$
5	0	1	1	$A = \{x \in K(\alpha) \mid x < x_0, x_0 \in \overline{K} \setminus K\}, \overline{K} \setminus K \neq \emptyset$
6	0	1	0	$A = \{x \in K(\alpha) \mid x < x_0, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \overline{K}\}, \mathbb{R} \setminus \overline{K} \neq \emptyset$
7	0	0	1	$A = \{x \in K(\alpha) \mid \exists n \in \mathbb{N} \ x < n\alpha\}$
8	0	0	0	Нет для поля $K(\alpha)$



Литература

- [1] *Фукс Л.* Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир. 1965.
- [2] *Бурбаки Н.* Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. Пер. с фр. М.: Мир. 1965.
- [3] *Dales H.J., Woodin H.* Super-real fields. Oxford: Clarendon Press. 1996.
- [4] *Comicheo A.B., Shamseddine K.* Summary on non-Archimedean valued fields // Contemporary Mathematics. V.704, 1-36 (2018). <http://dx.doi.org/10.1090/conm/704/14158>
- [5] *Kuhlmann F.-V.* Selected methods for the classification of cuts and their applications // Proceedings of the 5th Joint Conferences on Algebra, Logic and Number Theory, June 24-29, 2018, Bedlewo. Banach Center Publications V. 121 (2020), pp. 85-106. DOI: 10.4064/bc121-9
- [6] *A. I. Kokorin and V. M. Kopytov.* Fully ordered groups. – New York : J. Wiley, 1974.
- [7] *Пестов Г.Г.* К теории упорядоченных полей и групп: дис. - докт. физ.-мат. наук. Томск 2003.
- [8] *Байжанов Б.С., Вербовский В.В.* Упорядоченно стабильные теории // Алгебра и логика. 2011. Т. 50. № 3. С. 303-325.
- [9] *Shelah S.* Quite Complete Real Closed fields // Israel Journal of Mathematics, 2004, 142, 261-272
- [10] *KUHLMANN F.-V., NART E.* CUTS AND SMALL EXTENSIONS OF ABELIAN ORDERED GROUPS. *Journal of Pure and Applied Algebra* 226(11):107103 DOI: 10.1016/j.jpaa.2022.107103
- [11] *Галанова Н.Ю.* Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов и нестандартной вещественной прямой // Алгебра и логика. 2003. Т. 42. №1. С. 26-36.
- [12] *Галанова Н.Ю.* О симметричных сечениях одного вещественно замкнутого поля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 53. С. 5-15
- [13] *Галанова Н.Ю.* Сечения поля частных одного кольца формальных степенных рядов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 5-16. doi:10.17223/19988621/83/1.
- [14] *Подкорытов М. В.* О некоторых методах исследования линейно упорядоченных полей формальных степенных рядов: выпускная бакалаврская работа по направлению подготовки: 01.03.01 - Математика / Подкорытов, Максим Вадимович - Томск: [б.и.], 2024. URL: <https://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vital:21192>
- [15] *Захаров, В.К., Родионов, Т.В.* Характеризация дедекиндова и счётно-дедекиндова расширений решётчатого линейного пространства непрерывных ограниченных функций посредством порядковых границ // Чебышевский сборник, 2024, 25, вып. 3, с. 86-100.
[https://ru.wikipedia.org/wiki/Циклический порядок](https://ru.wikipedia.org/wiki/Циклический_порядок) Развёртки и разрезы V?t?zslav Nov?k. Cuts in cyclically ordered sets // Czechoslovak Mathematical Journal. 1984. Т. 34, вып. 2. С. 322-333. Beibut Sh. Kulpeshov, H. Dugald Macpherson. Minimality conditions on circularly ordered structures // Mathematical Logic Quarterly. 2005. Июль (т. 51, вып. 4). С. 377-399. doi:10.1002/malq.200410040.
 Norman Alling American mathematician (1930-2022)
 О неархимедовых системах величин Хана и истоках современной теории величин и чисел для их измерения. От Дедекинда до Гёделя: очерки о развитии основ математики, под редакцией Яакко Хинтики, Kluwer Academic Publishers, 1995, стр. 165-213. <http://www.ohio.edu/people/ehrllich/>
[https://en.wikipedia.org/wiki/Formal power series](https://en.wikipedia.org/wiki/Formal_power_series)