Занятие 1.

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

Квадратная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n\times n}$$

называется *матрицей n-го порядка.* При этом говорят, что элемент a_{ij} матрицы A стоит на пересечении i-й строки и j-го столбца, где $1 \le i \le n$ и $1 \le j \le n$.

Каждой квадратной матрице A ставится в соответствие число, которое называется *определителем* матрицы и обозначается

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

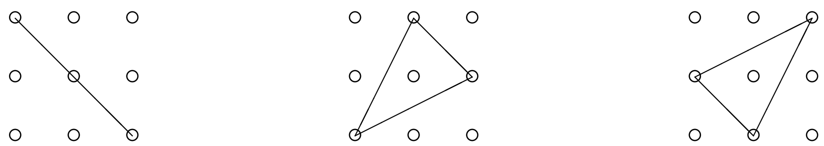
Для матриц первого, второго и третьего порядка определители вычисляются по формулам

1) $|a_{11}| = a_{11}$,

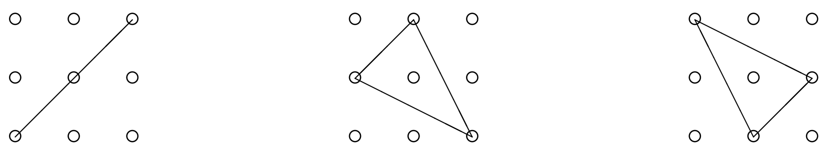
2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$

Определители 3-го порядка обычно вычисляются с использованием следующего п р а в и л а С а р р ю с а: одно из трех слагаемых, входящих в формулу со знаком плюс, есть произведение элементов *главной диагонали* матрицы, каждое из двух других — произведение элементов, лежащих на параллели к этой диагонали, и элемента из противоположного угла матрицы, а слагаемые, входящие в формулу со знаком минус, строятся таким же образом, но относительно второй (*побочной*) диагонали:



$(+)$



$(-)$

Задачи

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

2. Решить уравнения

а) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

3. Доказать следующие свойства определителя 3-го порядка, используя его определение:

а) если строки матрицы сделать столбцами с теми же номерами (т.е. *транспонировать* матрицу), то определитель не изменится;

б) если все элементы некоторой строки (столбца) умножить на одно и то же число λ, то определитель умножится на это число;

в) если переставить две строки (столбца) определителя, то он изменит знак; в частности, если две строки (столбца) определителя равны, то он равен нулю;

г) если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки (столбцы), кроме данной, прежние, а в данной строке (столбце) в первом определителе стоят первые, а во втором — вторые слагаемые;

д) если одна строка (столбец) A_i является линейной комбинацией остальных строк (столбцов) A_j и A_k: $A_i = \lambda_1 \cdot A_j + \lambda_2 \cdot A_k$, то определитель равен нулю.

4. Используя свойства определителя третьего порядка, перечисленные задаче 3, доказать тождество, не раскрывая определителей

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

5. Вычислить определитель, используя свойства из задачи 3

$$\begin{vmatrix} x+y & z & 1 \\ y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \end{vmatrix}.$$

Ответы. **1.** а) 18; б) 1; в) 0. **2.** а) $x_1 = -4$, $x_2 = -1$; б) $-4 \pm \sqrt{22}$. **5.** 0.

Вычисление определителей n-ного порядка

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется определитель матрицы, получаемой из A вычеркиванием i-той строки и j-того столбца, например, для матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ минор элемента a_{23} равен $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Сумма произведений элементов какой-нибудь строки или столбца на их алгебраические дополнения $(a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in})$ не зависит от выбора строки или столбца. Это число и называется *определителем* матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad 1 \le i \le n.$$

Пример. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = -3 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 - 5 = -17.$

Отметим, что все свойства, перечисленные в задаче 3, справедливы для определителей n-ного порядка. Таким образом, вычислять определитель можно не только разложением по любой строке, но и по любому столбцу: $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad 1 \le j \le n$. При этом, предпочтительно выбирать строку или столбец, содержащий наибольшее количество нулей, так как для нулевого элемента не нужно вычислять его алгебраическое дополнение.

Задачи

6. Вычислить определители разложением по подходящей строке или столбцу:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответы. **6.** а) 4; б) 0.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1.

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; б) в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

2. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0.$

3. Не раскрывая определителей, доказать тождество

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель с помощью свойств

$$\begin{vmatrix} (a+1)^2 & a^2+1 & a \\ (b+1)^2 & b^2+1 & b \\ (c+1)^2 & c^2+1 & c \end{vmatrix}.$$

5. Вычислить определитель разложением по подходящей строке или столбцу:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

Ответы. **1.** а) $4ab$; б) 0. **2.** $(-\infty, \ +\infty)$. **4.** 0. **5.** 48.