О сложности решеток квазимногообразий алгебр Лукасевича

Луцак Светлана Михайловна,
Воронина Ольга Александровна

Северо-Казахстанский университет имени М. Козыбаева
Петропавловск, Казахстан

14-ая международная летняя школа-конференция
«Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры»,
посвященная 75-летию со дня рождения профессора Брюно Пуаза

Эрлагол, Алтай, Россия, 23-29 июня 2021 г.

Проблема Биркгофа-Мальцева

Проводимые исследования связаны с **фундаментальной проблемой Биркгофа-Мальцева**.

Поставлена в 1945 году Г. Биркгофом, и, независимо, в 1966 году А.И. Мальцевым. **Актуальна** в наши дни.

КАКИЕ РЕШЕТКИ ИЗОМОРФНЫ РЕШЕТКАМ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ?

Несмотря на то, что проблема была поставлена давно и изучение решеток квазимногообразий интенсивно производилось в течение нескольких десятилетий в ряде стран (Кыргызстан, Польша, Россия, США), эффективных подходов к ее решению до сих пор разработано не было.

Проблема Биркгофа-Мальцева

Более того, полученные к настоящему времени результаты демонстрируют **исключительную структурную и алгоритмическую сложность решеток квазимногообразий**. Таким образом, нахождение решения проблемы Биркгофа-Мальцева в самой общей ее постановке представляется исключительно **сложной задачей**.

Изучение проблемы Биркгофа-Мальцева в конкретных классах алгебраических структур (систем) представляет **несомненный интерес и заслуживает внимания**.
Продвижение в вопросе изучения свойств таких решеток является весьма **актуальным**.

Классы

Все классы мы считаем **абстрактными**, то есть замкнутыми относительно изоморфизмов.
Пусть $\mathbf{K}(\sigma)$ — класс **всех** алгебраических структур (систем) сигнатуры σ.
Следуя [1], для класса $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ через $\mathbf{Q}(\mathbf{K})$ обозначим **наименьшее квазимногообразие**, содержащее класс $\mathbf{K}$.

$$\mathbf{Q}(\mathbf{K}) = \mathbf{SPP_u}(\mathbf{K}),$$

где $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P_u}$ — операторы взятия **подструктур (подситем), прямых произведений и ультрапроизведений** соответственно.

Определение решетки K-квазимногообразий

Пусть $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ — подклассы класса $\mathbf{K}(\sigma)$.

Определение

$\mathbf{K}'$ называется **K-квазимногообразием**, если $\mathbf{K}' = \mathbf{Q}(\mathbf{K}') \cap \mathbf{K}$, где $\mathbf{Q}(\mathbf{K}')$ — наименьшее квазимногообразие, содержащее класс $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$.

Определение

Множество всех **K**-квазимногообразий, упорядоченное по включению, образует полную решетку, которая называется **решеткой K-квазимногообразий** или **решеткой квазимногообразий для класса K** (или просто **решеткой относительных квазимногообразий**) и обозначается $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$. Если **K** — **квазимногообразие**, то решетка $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ называется **решеткой квазимногообразий**.

Меры сложности строения решеток квазимногообразий

1. Q-универсальность.
2. Свойство (N).
3. Наличие в решетках квазимногообразий континуума элементов, не имеющих покрытий.

Q-универсальность

Определение (М.В. Сапир)

Квазимногообразие $\mathbf{K}$ называется Q-**универсальным**, если для любого квазимногообразия $\mathbf{K}'$ конечной сигнатуры решетка $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}')$ является гомоморфным образом некоторой подрешетки решетки $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$. В этом случае решетка квазимногообразий $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ также называется Q-**универсальной**.

Факт (М. Адамс, В. Дзебяк). Q-универсальные решетки квазимногообразий не удовлетворяют никакому нетривиальному решеточному тождеству.

К настоящему моменту известно целое множество различных Q-универсальных классов и число таких примеров постоянно растет. Например, в работе [4] А.М. Нуракунов доказал Q-универсальность квазимногообразия точечных абелевых групп (абелевых групп с одной константой).

Свойство (N)

Первые примеры классов со свойством (N) были построены А.М. Нуракуновым [5].

Теорема (А.М. Нуракунов)

Пусть сигнатура σ содержит хотя бы одну по крайней мере унарную операцию. Тогда существует квазимногообразие $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$, которое имеет свойство (N).

В работе [4] А.М. Нуракунов доказал аналогичный результат для квазимногообразия точечных абелевых групп (абелевых групп с одной константой).

Связь между свойством (N) и Q-универсальностью

Теорема (М.В. Швидефски, А. Замойска-Дженио)

Класс **K** *всех* систем сигнатуры σ является Q-универсальным тогда и только тогда, когда он содержит подкласс, обладающий свойством (N).

Проблема (М.В. Швидефски, А. Замойска-Дженио)

1. Верно ли, что любой Q-универсальный класс систем **K** фиксированной сигнатуры содержит подкласс, обладающий свойством (N)?
2. Существует ли класс **K**, не являющийся Q-универсальным, но обладающий свойсвом (N)?

Связь между свойством (N) и Q-универсальностью

М.В. Швидефски был дан положительный ответ на первый вопрос почти для всех известных к настоящему времени Q-универсальных квазимногообразий [7].

С.М. Луцак установлено, что для различных сигнатур существует континуум классов **K**, обладающих свойством (N), но не являющихся Q-универсальными [8].

Связь между свойством (N) и Q-универсальностью

- **Достаточные условия** для Q-универсальности квазимногообразий были найдены в работе М. Адамса и В. Дзебяка [9].
- Эти условия получили некоторое **обобщение** в работе М.В. Швидефски (AD-класс) [7], где было доказано, что их выполнение влечет наличие в таком квазимногообразии $\mathbf{K}$ континуума подклассов $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}$ со свойством (N).

Теорема (М.В. Швидефски)

Пусть квазимногообразие $\mathbf{K}$ конечной сигнатруры содержит AD-класс, тогда $\mathbf{K}$ — Q-универсально и существует континуум подклассов $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}$, имеющих свойство (N).

Связь между свойством (N) и Q-универсальностью

Теорема (С.М. Луцак)

Пусть класс $\mathbf{K}$ алгебраических структур конечной сигнатуры содержит AD-класс. Тогда существует континуум подклассов $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}$, обладающих свойством (N), и не являющихся Q-универсальными.

Теорема имеет широкий спектр применимости. Она может быть применима почти ко всем известным к настоящему времени Q-универсальным квазимногообразиям, поскольку в соответствующих работах доказано, что они содержат AD-класс.

Достаточные условия для существования в квазимногообразии $\mathbf{K}$ континуума подквазимногообразий, не имеющих покрытий в решетке $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$

В работе А.В. Кравченко, А.М. Нуракунова, М.В. Швидефски 2019 года [10] были найдены достаточные условия (наличие B-класса) для существования в квазимногообразии $\mathbf{K}$ континуума подквазимногообразий, не имеющих покрытий в решетке $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$.

Теорема (А.В. Кравченко, А.М. Нуракунов, М.В. Швидефски)

Пусть квазимногообразие $\mathbf{K}$ конечной сигнатуры содержит B-класс, тогда существует континуум подквазимногообразий $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}$, которые не имеют покрытий в решетке $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$.

Достаточные условия для существования в квазимногообразии $\mathbf{K}$ континуума подквазимногообразий, не имеющих покрытий в решетке $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$

Эти условия оказались сильнее условий из [9]: доказано, что любой B-класс относительно $\mathbf{K}$ является AD-классом, из чего следует Q-универсальность квазимногообразия $\mathbf{K}$.

Теорема (А.В. Кравченко, А.М. Нуракунов, М.В. Швидефски)

Пусть квазимногообразие $\mathbf{K}$ конечной сигнатуры содержит B-класс, тогда $\mathbf{K}$ — Q-универсально и существует континуум подклассов $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}$, имеющих свойство (N).

Достаточные условия для существования в квазимногообразии $\mathbf{K}$ континуума подквазимногообразий, не имеющих покрытий в решетке $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$

Теорема (А.В. Кравченко, А.М. Нуракунов, М.В. Швидефски)

Пусть квазимногообразие $\mathbf{K}$ конечной сигнатуры содержит B-класс (AD-класс), тогда существует континуум подквазимногообразий $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}$, которые содержат B-класс (AD-класс).

Таким образом, Q-универсальное квазимногообразие $\mathbf{K}$ содержит континуум Q-универсальных подквазимногообразий $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}$.

Определение конечного B-класса

Пусть $\mathcal{P}_{fin}(\omega)$ — множество всех конечных подмножеств множества ω натуральных чисел.

Определение (А.В. Кравченко, А.М. Нуракунов, М.В. Швидефски)

Пусть $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ — квазимногообразие конечной сигнатуры σ. Класс $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_X \mid X \in \mathcal{P}_{fin}(\omega)\} \subseteq \mathbf{K}$ конечных структур (систем) называется **конечным B-классом** относительно $\mathbf{K}$, если $\mathbf{A}$ удовлетворяет следующим условиям:

(B_0) $\mathcal{A}_\varnothing$ — тривиальная структура;

(B_1) если $X = Y \cup Z$ в $\mathcal{P}_{fin}(\omega)$, то $\mathcal{A}_X \in \mathbf{Q}(\mathcal{A}_Y, \mathcal{A}_Z)$;

(B_2) если $\varnothing \neq X \in \mathcal{P}_{fin}(\omega)$ и $\mathcal{A}_X \in \mathbf{Q}(\mathcal{A}_Y)$, то $X = Y$;

(B_3) для каждого $F \in \mathcal{P}_{fin}(\omega)$ и для каждого $i \in \omega$, если $f \in Hom(\mathcal{A}_F, \mathcal{A}_{\{i\}})$ тогда $f(\mathcal{A}_F) \cong \mathcal{A}_\varnothing$ или $i \in F$;

(B_4) для каждого $F \in \mathcal{P}_{fin}(\omega)$, $\mathbf{H}(\mathcal{A}_F) \cap \mathbf{K} \subseteq \mathbf{A}$.

Основной результат

Пусть $\mathcal{L}_p = \langle\{0, \frac{1}{p}, \ldots, \frac{p-1}{p}, 1\}; \to, \neg\rangle$, $p \geq 1$ — алгебра Лукасевича (операции определены следующим образом: для всех x,y $x \to y = \min\{1, 1 - x + y\}$ и $\neg x = 1 - x$).

Теорема

Многообразие $\mathbf{M}$ всех алгебр Лукасевича содержит конечный B-класс.

Примечание. Многообразие — квазимногообразие, замкнутое относительно гомоморфных образов.

Следствия

Следствие (1)

Многообразие $\mathbf{M}$ всех алгебр Лукасевича содержит AD-класс.

Следствие (2)

Многообразие $\mathbf{M}$ всех алгебр Лукасевича Q-универсально.

Следствие (3)

Многообразие $\mathbf{M}$ всех алгебр Лукасевича содержит континуум Q-универсальных подквазимногообразий $\mathbf{M}' \subseteq \mathbf{M}$.

Следствия

Следствие (4)

Многообразие $\mathbf{M}$ всех алгебр Лукасевича содержит континуум подквазимногообразий $\mathbf{M}' \subseteq \mathbf{M}$, не имеющих покрытий в решетке $\mathrm{Lq}(\mathbf{M})$.

Следствие (5)

Многообразие $\mathbf{M}$ всех алгебр Лукасевича содержит континуум подклассов $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{M}$, обладающих свойством (N).

Следствие (6)

Многообразие $\mathbf{M}$ всех алгебр Лукасевича содержит континуум подклассов $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{M}$, обладающих свойством (N), но не являющихся Q-универсальными.

Основная литература

1 Горбунов В.А. Алгебраическая теория квазимногообразий, Новосибирск, Научная книга, 1999.

2 Мальцев А.И. Алгебраические системы, Москва, Наука, 1970.

3 Sapir M.V. The lattice of quasivarieties of semigroups // Algebra Univers. – 1985. – Vol. 21, № 2/3. – P. 172-180.

4 Нуракунов А.М. Решетки квазимногообразий точечных абелевых групп // Алгебра и логика. – 2014. – Том 53, № 3. – С. 372-400.

5 Nurakunov A.M. Unreasonable lattices of quasivarieties // Internat. J. Algebra Comput. – 2012. – Vol. 22, № 3. – 17 p.

Основная литература

6 Schwidefsky M.V., Zamojska-Dzienio A. Lattices of subclasses. II // Internat. J. Algebra Comput. – 2014. – Vol. 24, № 8. – P. 1099-1126.

7 Schwidefsky M.V. On the complexity of quasivariety lattices // Algebra and Logic. – 2015. – Vol. 54, № 3. – P. 381-398.

8 Луцак С.М. О сложности решеток квазимногообразий // Сибирские электронные математические известия. – 2017. – Том 14. – С. 92-97.

9 Adams M.E., Dziobiak W. Q-universal quasivarieties of algebras // Proc. Amer. Math. Soc. – 1994. – Vol. 120, № 4 – P. 1053-1059.

10 Kravchenko A.V., Nurakunov A.M., Schwidefsky M.V. Structure of quasivariety lattices. I. Independent axiomatizability // Algebra and Logic. – 2019. – Vol. 57, № 6. – P. 445-462.

Спасибо за внимание