Логика мультиопераций

Перязев Николай Алексеевич

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет (ЛЭТИ)

Международная летняя школа-конференция
"Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры"
Новосибирск, 23-28 июня 2021 г.

Предикаты, операции и мультиоперации

A — множество, $B(A)$ — множество всех подмножеств A

- $p : A^n \to \{0, 1\}$ — n-местный предикат;
- $f : A^n \to A$ — n-местная операция;
- $g : A^n \to B(A)$ — n-местная мультиоперация.

Алгебраические структуры

- Модель (реляционная система)
  $\mathfrak{M} =< A, P >$
- Алгебра (универсальная алгебра)
  $\mathfrak{A} =< A, O >$
- Мультиалгебра
  $\mathfrak{R} =< A, M >$

Формальные языки

- Язык предикатов
  Сигнатура — множество предикатных символов.
- Язык операций
  Сигнатура — множество функциональных символов.
  В алфавит входит символ $=$.
  Атомарные формулы — равенство термов: $t_1 = t_2$.
- Язык мультиопераций
  Сигнатура — множество функциональных символов.
  В алфавит входит символ $\subseteq$.
  Атомарные формулы — включение термов: $t_1 \subseteq t_2$.

Мультиинтерпретация сигнатуры

- Сигнатура F – множество функциональных символов, с зафиксированной размерностью (местностью).
- Выделенные нольместные символами в сигнатуре F будут: o, c_i.
- $\Re = \langle A, M \rangle$ — мультиалгебра с универсумом (носителем) A и множеством мультиопераций M, однотипных с F.

Мультиинтерпретация сигнатуры F в мультиалгебру $\Re$

$\gamma : F \to M$ — отображение, сохраняющее местность функционального символа и мультиоперации.
Выделенные символы интерпретируются так: $\gamma(o) = \varnothing$, $\gamma(c_i)$ – одноэлементные множества.

Если мультиинтерпретация в конечную алгебру, то говорим конечная мультиинтерпретация.

Синтаксис базового языка мультиопераций

Алфавит языка мультиопераций

- F – сигнатура, содержащая нольместные символы o, c_i;
- x_i — переменные;
- $\&, \vee, \neg, \forall, \exists$ — логические символы;
- $\subseteq$ — внелогический символ;
- $(,)$ — технические символы.

Отметим,что в качестве выделенных функциональных символом, кроме o, c_i можно ввести и другие, например, $\cap, \cup$.

Базовый язык мультиопераций

Определение терма

- любой нольместный символ сигнатуры F является термом;
- $f^n(t_1, ..., t_n)$ — терм, где $f^n \in F$ и $t_1, ..., t_n$ термы.

Заметим, что понятие терма можно обобщить.

Определение формулы

- $(t_1 \subseteq t_2)$ — формула, где t_1, t_2 термы;
- $(\Phi \& \Psi), (\Phi \vee \Psi), \neg\Phi$ — формулы, где Φ, Ψ формулы;
- $\forall x_i \Phi(x_i), \exists x_i \Phi(x_i)$ — формулы, где $\Phi(f^0)$ формула такая, что $f^0 \in F$ и в $\Phi(f^0)$ не входит x_i.

Внешние скобки в формулах часто будем опускать.

Семантика базового языка мультиопераций

Значение терма t при мультиинтерпретации γ

- если $t \equiv f^0$, то $\gamma[t] = \gamma(f^0)$;
- если $t \equiv f^n(t_1, ..., t_n)$, то
$$\gamma[t] = \bigcup_{a_i \in \gamma[t_i]} \{a \mid a \in \gamma(f^n)(a_1, ..., a_n)\}.$$

Двузначная семантика языка мультиинтерпретаций

- если $\Phi \equiv t_1 \subseteq t_2$, то
$$\delta[\Phi] = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } \gamma[t_1] \subseteq \gamma[t_2].$$

Вероятностная семантика языка мультиопераций

В дальнейшем ограничимся конечными мультиинтерпретациями.

Истинностное значение формулы Φ при мультиинтерпретации γ

- если $\Phi \equiv t_1 \subseteq t_2$, то $\delta[\Phi] = \dfrac{|\gamma[t_1] \cap \gamma[t_2]|}{|\gamma[t_1]|}$, при $|\gamma[t_1]| > 0$,

  $\delta[\Phi] = 1$, при $|\gamma[t_1]| = 0$;

- если $\Phi \equiv \Psi_1 \vee \Psi_2$, то $\delta[\Phi] = \max\{\delta[\Psi_1], \delta[\Psi_2]\}$;
- если $\Phi \equiv \Psi_1 \,\&\, \Psi_2$, то $\delta[\Phi] = \min\{\delta[\Psi_1], \delta[\Psi_2]\}$;
- если $\Phi \equiv \neg\Psi$, то $\delta[\Phi] = 1 - \delta[\Psi]$;

- если $\Phi = \exists x \Psi(x)$, то $\delta[\Phi] = \sup\{\delta[\Psi(c_i)] \mid \gamma(c_i) \in A\}$;
- если $\Phi = \forall x \Psi(x)$, то $\delta[\Phi] = \inf\{\delta[\Psi(c_i)] \mid \gamma(c_i) \in A\}$.

Отмеченные формулы: $\Phi \leq \alpha$, $\Phi < \alpha$, $\Phi \geq \alpha$, $\Phi > \alpha$,
где α — действительное число от 0 до 1.

Пусть:
$\lesssim$ общее обозначение для $\leq$ и $<$;
$\gtrsim$ общее обозначение для $\geq$ и $>$.

Правила построения таблицы

$$(\neg\gtrsim)\ \frac{\neg\Phi \gtrsim \alpha}{\Phi \lesssim 1-\alpha} \qquad (\neg\lesssim)\ \frac{\neg\Phi \lesssim \alpha}{\Phi \gtrsim 1-\alpha}$$

$$(\&\gtrsim)\ \frac{\Phi\ \&\ \Psi \gtrsim \alpha}{\begin{array}{c}\Phi \gtrsim \alpha\\ \Psi \gtrsim \alpha\end{array}} \qquad (\&\lesssim)\ \frac{\Phi\ \&\ \Psi \lesssim \alpha}{\Phi \lesssim \alpha \mid \Psi \lesssim \alpha}$$

$$(\vee\gtrsim)\ \frac{\Phi \vee \Psi \gtrsim \alpha}{\Phi \gtrsim \alpha \mid \Psi \gtrsim \alpha} \qquad (\vee\lesssim)\ \frac{\Phi \vee \Psi \lesssim \alpha}{\begin{array}{c}\Phi \lesssim \alpha\\ \Psi \lesssim \alpha\end{array}}$$

$$(\exists\gtrsim)\ \frac{\exists x\Phi(x) \gtrsim \alpha}{\Phi(c_i) \gtrsim \alpha} \qquad (\exists\lesssim)\ \frac{\exists x\Phi(x) \lesssim \alpha}{\Phi(t) \lesssim \alpha}$$

$$(\forall\gtrsim)\ \frac{\forall x\Phi(x) \gtrsim \alpha}{\Phi(t) \gtrsim \alpha} \qquad (\forall\lesssim)\ \frac{\forall x\Phi(x) \lesssim \alpha}{\Phi(c_i) \lesssim \alpha}$$

Правила построения таблицы

$$(\gtrsim)\ \frac{t_1 \subseteq t_2 \gtrsim \alpha}{t_1 \subseteq t_2 > \beta} \quad \text{при } \alpha > \beta \qquad\qquad (\lesssim)\ \frac{t_1 \subseteq t_2 \lesssim \alpha}{t_1 \subseteq t_2 < \beta} \quad \text{при } \alpha < \beta$$

$$(>0)\ \frac{t_1 \subseteq t_2 > 0}{t_2 \subseteq t_1 > 0} \qquad\qquad (\leq 0)\ \frac{t_1 \subseteq t_2 \leq 0}{t_2 \subseteq t_1 \leq 0}$$

$$(\subseteq\gtrsim)\ \frac{\begin{array}{c} t_i \subseteq s_i \geq 1 \\ t \subseteq f(t_1, ..., t_i, ..., t_n) \gtrsim \alpha \end{array}}{t \subseteq f(t_1, ..., s_i, ..., t_n) \gtrsim \alpha} \qquad (\subseteq\lesssim)\ \frac{\begin{array}{c} s_i \subseteq t_i \geq 1 \\ t \subseteq f(t_1, ..., t_i, ..., t_n) \lesssim \alpha \end{array}}{t \subseteq f(t_1, ..., s_i, ..., t_n) \lesssim \alpha}$$

Разобьем все введенные правила на пять групп:

1) $(\gtrsim)$, $(\lesssim)$;
2) $(\vee\gtrsim)$, $(\&\lesssim)$;
3) $(\exists\gtrsim)$, $(\forall\lesssim)$;
4) $(\forall\gtrsim)$, $(\exists\lesssim)$;
5) все остальные правила.

Построение таблицы для множества формул

Для множество отмеченных формул Σ построение таблицы (дерева) определяется по индукции: 1) Φ_0 — корень дерева, где $\Phi_0 \in \Sigma$.
2) D — дерево, $\Phi_0, \dots, \Phi_i, \dots, \Phi_n$ — ветка дерева

- если Ψ_i из Σ, то к ветке добавляется одна последовательная вершина, нумерованная этой формулой;
- если к Φ_i применяется правило из первой группы, то к ветке добавляется одна последовательная вершина, нумерованные согласно примененному правилу, где β встречается в качестве отметки в формулах этой ветки;
- если к Φ_i применяется правило из пятой группы, то к ветке добавляется одна или две последовательные вершины, нумерованные согласно примененному правилу;
- если к Φ_i применяется правило из второй группы, то к ветке добавляется две вершины одного уровня, нумерованные согласно примененному правилу;
- если к Φ_i применяется правило из третьей группы, то к ветке добавляется одна вершина, нумерованные согласно примененному правилу, где символ c_i, такой, что не входит во все формулы этой ветки;
- если к Φ_i применяется правило из четвертой группы, то к ветке добавляется одна вершина, нумерованные согласно примененному правилу, где t любой терм, все нульместные функциональные символы которого принадлежат формулам этой ветки.

Исчисление табличного типа

- Ветка *замкнутая*, если содержит либо $\Phi \lesssim \alpha$ и $\Phi > \alpha$, либо $\Phi < \alpha$ и $\Phi \gtrsim \alpha$, либо $\Phi > 1$, либо $\Phi < 0$ хоть для одной формулы Φ, либо $t \subseteq t < 1$, либо $t \subseteq o > 0$ хоть для одного терма t.
- Применение правила является *избыточным*, если хоть в одной из полученных веток либо нет новых формул, либо при применении к $\Phi \gtrsim \alpha$ ($\Phi \lesssim \alpha$) правила второй группы получаем $\Phi(f^0) \gtrsim \alpha$ ($\Phi(f^0) \lesssim \alpha$), а в этой ветке уже есть формула $\Phi(t) \gtrsim \alpha$ ($\Phi(t) \lesssim \alpha$).
- Ветка *финальная*, если она либо замкнута, либо применение правил ко всем ее формулам избыточно.
- Если все ветки таблицы финальные, то таблица *финальная*, а если замкнутые, то таблица *замкнутая*.
- Множество отмеченных формул Σ является *опровержимым* в исчислении мультиопераций табличного типа, если существует замкнутая таблица для множества Σ.
- Отмеченная формула $\Phi \leq \alpha$ *выводима* из множества формул Σ в исчислении мультиопераций, если множество $\Sigma \cup \{\Phi > \alpha\}$ является опровержимым. Аналогично определяется выводимость для формул $\Phi < \alpha$, $\Phi \geq \alpha$, $\Phi > \alpha$.

База знаний

1. Некоторые студенты уважают всех профессоров.
2. Ни один из студентов не уважает администраторов.

Запрос

Может ли профессор быть администратором?

Интерпретация:
Универсум — множество людей;
$\gamma(f_1)$ — множество студентов;
$\gamma(f_2)$ — множество профессоров;
$\gamma(f_3)$ — множество администраторов;
$\gamma(f_4)$ — унарная мультиоперация такая, что $\gamma(f_4)(a)$ это множество людей, которых уважает a.

Обработка запроса

1. $(f_2 \subseteq f_3) > 0$ предположение по запросу
2. $\exists x((x \subseteq f_1)\&(f_2 \subseteq f_4(x))) \geq 1$ условие 1
3. $(c_1 \subseteq f_1)\&(f_2 \subseteq f_4(c_1)) \geq 1$ $(\exists \gtrsim) : 2$
4. $(c_1 \subseteq f_1) \geq 1$ $(\& \gtrsim) : 3$
5. $(f_2 \subseteq f_4(c_1)) \geq 1$
6. $(f_2 \subseteq f_4(f_1)) \geq 1$ $(\subseteq \gtrsim) : 4, 5$
7. $(f_3 \subseteq f_4(f_1)) \leq 0$ условие 2
8. $(f_3 \subseteq f_2) \leq 0$ $(\subseteq \lesssim) : 6, 7$
9. $\underline{\underline{(f_3 \subseteq f_2) > 0}}$ $(> 0) : 1$

8,9

Ответ: Нет, профессор администратором быть не может.

Демонстрационный пример №2

База знаний:

1. Не менее чем на 80% верно то, что любой человек симпатичный или он себя не считает умным.
2. Существует умный человек, который всех симпатичных людей представляет симпатичными, а всех умных считает умными.

Запросы:

1. Следует ли то, что существует человек, который представляет себя симпатичным, верно не менее чем на 75%?
2. Следует ли то, что существует человек, который представляет себя симпатичным, верно более чем на 80%?

Представление на языке мультиопераций

Интерпретация:
Универсум — множество людей;
$\gamma(f^0)$ — множество симпатичных людей;
$\gamma(g^0)$ — множество умных людей;
$\gamma(f)$ — унарная мультиоперация такая, что $\gamma(f)(a)$ это множество людей, которых a представляет симпатичными;
$\gamma(g)$ — унарная мультиоперация такая, что $\gamma(g)(a)$ это множество людей, которых a считает умными.

Обработка первого запроса

1. $\exists x(x \subseteq f(x)) < 0,75$ запрос, от противного
2. $\exists x((x \subseteq g^0)\&((f^0 \subseteq f(x))\&(g^0 \subseteq g(x)))) \geq 1$ условие 2
3. $(c_1 \subseteq g^0)\&((f^0 \subseteq f(c_1))\&(g^0 \subseteq g(c_1))) \geq 1$ $(\exists \gtrsim) : 2$
4. $c_1 \subseteq g^0 \geq 1$ $(\& \gtrsim) : 3$
5. $f^0 \subseteq f(c_1) \geq 1$
6. $g^0 \subseteq g(c_1) \geq 1$
7. $\forall x((x \subseteq f^0) \vee \neg(x \subseteq g(x))) \geq 0,8$ условие 1
8. $(c_1 \subseteq f^0) \vee \neg(c_1 \subseteq g(c_1)) \geq 0,8$ $(\forall \gtrsim) : 7$

9. $c_1 \subseteq f^0 \geq 0,8$	10. $\neg(c_1 \subseteq g(c_1)) \geq 0,8$ $(\vee \gtrsim) : 8$
11. $c_1 \subseteq f(c_1) \geq 0,8$ $(\subseteq\gtrsim) : 5,9$	14. $c_1 \subseteq g(c_1) \leq 0,2$ $(\neg \gtrsim) : 10$
12. $c_1 \subseteq f(c_1) < 0,75$ $(\exists \lesssim) : 1$	15. $c_1 \subseteq g^0 \leq 0,2$ $(\subseteq\lesssim) : 6,14$
13. $\underline{\underline{c_1 \subseteq f(c_1) < 0,8}}$ $(\lesssim) : 12$	16. $\underline{\underline{c_1 \subseteq g^0 < 1}}$ $(\lesssim) : 15$
12,13	4,16

Ответ: Да, следует.

Обработка второго запроса

1. $\exists x(x \subseteq f(x)) \leq 0,8$ запрос, от противного
2. $\exists x((x \subseteq g^0)\&((f^0 \subseteq f(x))\&(g^0 \subseteq g(x)))) \geq 1$ условие 2
3. $(c_1 \subseteq g^0)\&((f^0 \subseteq f(c_1))\&(g^0 \subseteq g(c_1))) \geq 1$ $(\exists \gtrsim) : 2$
4. $c_1 \subseteq g^0 \geq 1$ $(\& \gtrsim) : 3$
5. $f^0 \subseteq f(c_1) \geq 1$
6. $g^0 \subseteq g(c_1) \geq 1$
7. $\forall x((x \subseteq f^0) \vee \neg(x \subseteq g(x))) \geq 0,8$ условие 1
8. $(c_1 \subseteq f^0) \vee \neg(c_1 \subseteq g(c_1)) \geq 0,8$ $(\forall \gtrsim) : 7$

9. $c_1 \subseteq f^0 \geq 0,8$	10. $\neg(c_1 \subseteq g(c_1)) \geq 0,8$ $(\vee \gtrsim) : 8$
11. $c_1 \subseteq f(c_1) \geq 0,8$ $(\subseteq\gtrsim) : 5, 9$	
12. $c_1 \subseteq f(c_1) \leq 0,8$ $(\exists \lesssim) : 1$	
13. $c_1 \subseteq f(c_1) < 1$ $(\lesssim) : 12$	
14. $c_1 \subseteq g^0 > 0,8$ $(\gtrsim) : 4$	
15. $f^0 \subseteq f(c_1) > 0,8$ $(\gtrsim) : 5$	
16. $g^0 \subseteq g(c_1) > 0,8$ $(\gtrsim) : 6$	
. . . .	
открытая финальная ветка	**Ответ:** Нет, не следует.

Логика мультиопераций: комментарии

- Логики мультиопераций образуют обширный класс логик. Наибольший интерес эти логики представляют для приложений, так как естественным образом допускают различные семантики.
- Если ограничить интерпретации по мощности, то получаем разрешимый фрагмент логики, но в приложениях более важно уменьшить сложность разрешающего алгоритма.
- При определенных ограничениях некоторые логики мультиопераций их можно отнести к дескрипционным логикам (дескриптивные, логика описаний, логика концептов) или к вероятностным логикам или к многозначным логикам.
- Логики мультиопераций являются функциональными по форме и предикатными по содержанию.