Алгебры распределений бинарных изолирующих формул

Д.Ю. Емельянов

Эрлагол
27 июня 2021 г.

Введение

Алгебры распределений бинарных изолирующих и полуизолирующих формул являются производными структурами для данной элементарной теории. Эти алгебры отражают бинарные связи между реализациями 1-типов, определяемые формулами исходной теории. Алгебры бинарных формул возникли из потребностей теории моделей и связаны с построением классификации счетных моделей полных теорий.

Введение

При построении счетных моделей элементарных теорий ключевую роль играют бинарные формульно определимые связи между реализациями полных типов. При описании получаемых бинарных структур естественно возникают подходящие алгебры.

Введение

Описание таких алгебр играет существенную роль при определении распределений счетных моделей данной теории и подсчете числа таких моделей, а именно, почти простых и предельных моделей.

Изоморфизм почти простых моделей над типами достигается наличием симметричных связей изолирующими формулами, а изоморфизм предельных моделей — отождествлениями цепей почти простых моделей посредством симметричных изолирующих формульных связей.[1]

Алгебры бинарных формул тесно связаны с разделами алгебраической логики, с реляционными алгебрами, с мультиалгебрами, с полугруппами и моноидами.

[1] Судоплатов С.В. Классификация счетных моделей полных теорий. Часть 1. – Новосибирск: Издательство НГТУ, 2018. – 376 с.

В работе рассматриваются алгебры бинарных изолирующих формул, т.е. алгебры, определенные на множествах классов эквивалентности изолирующих формул относительно операции суперпозиции.

Описаны алгебры бинарных изолирующих формул для ряда естественных классов теорий и операций над теориями:

- теории отношений эквивалентности,
- теории унаров,
- счетно категоричные слабо o-минимальные теории,
- вполне o-минимальные теории с немаксимальным числом счетных моделей,
- теории правильных многогранников, симплексов и архимедовых тел,
- некоторые полигонометрические теории,
- композиции теорий,
- произведения теорий.

При рассмотрении множества 1-типов R с меточной функцией ν, задающей метки для классов эквивалентности формул, алгебра бинарных изолирующих формул обозначается через $\mathfrak{P}_{\nu(R)}$. Если $R = \{p\}$, то эта алгебра обозначается через $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$.[2]

[2] I.V. Shulepov, S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2014. Vol. 11. P. 380–407.

Алгебры распределений бинарных изолирующих формул теории одноместных предикатов с унарной функцией

Теорема 1

Если T — теория унара f с одноместными предикатами, $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ — алгебра распределений бинарных изолирующих формул для типа $p \in S^1(\varnothing)$, то алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ задается ровно одной из следующих алгебр: группой $\mathbb{Z}$, группой $\mathbb{Z}_n$, алгеброй $\mathfrak{A}_{n,\lambda}$, алгеброй $\mathfrak{A}_{\mathrm{fr},\lambda}$, алгеброй $\langle \omega^*; + \rangle$, $\mathfrak{B}_{n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}$, $\mathfrak{B}_{\omega,(\lambda_i)_{i\in\omega}}$.

Слабо о-минимальные структуры[3]

Определение

Слабо о-минимальной структурой называется линейно упорядоченная структура $\mathcal{M} = \langle M; =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры $\mathcal{M}$ является объединением конечного числа выпуклых множеств в $\mathcal{M}$.

Напомним, что такая структура $\mathcal{M}$ называется *о-минимальной*, если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры $\mathcal{M}$ является объединением конечного числа интервалов и точек в $\mathcal{M}$.

[3] H.D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), pp. 5435–5483.

Алгебры формул для неалгебраических 1-типов[4]

Теорема 2

Пусть T — счетно категоричная слабо o-минимальная теория. Тогда для любого типа $r \in S^1(\emptyset)$ и натурального числа n следующие условия эквивалентны:

(1) алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(r)}$ является $(P, \aleph_0, n)$-wom-моноидом;

(2) $RC_{bin}(r) = n$.

[4] Д.Ю. Емельянов, Б.Ш. Кулпешов, С.В. Судоплатов, Алгебры распределений бинарных формул в счетно категоричных слабо о-минимальных структурах // Алгебра и логика, 2017. Т. 56, N 1. С. 20-54.

Моноиды для вполне о-минимальных теорий с малым числом счетных моделей

Теорема 3 (с Б.Ш.Кулпешовым и С.В.Судоплатовым)

Пусть T — вполне о-минимальная теория с малым числом счетных моделей, $p \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраический тип. Тогда существует $n < \omega$ такой, что
(1) если p — изолированный тип, то алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ является $(P, \aleph_0, n)$-wom-моноидом, состоящим из $2n+1$ метки;
(2) если p квазирациональный вправо (влево), то алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ является (P, QR, n)-wom-моноидом
((P, QL, n)-wom-моноидом), состоящим из $2n$ меток;
(3) если p иррациональный, то алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ является (P, I, n)-wom-моноидом, состоящим из $2n-1$ метки.

Квазирациональному вправо типу p соответствует алгебра $\mathfrak{A}_n^{QR}$ изолирующих формул, состоящая из $2n$ меток, перемножение которых задается следующей таблицей:

$\cdot$	0	1	2	3	4	$\ldots$	$2n-3$	$2n-2$	-1
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$	$\{-1\}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$	$\{-1\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$	$\{-1\}$
3	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{0,1,$ $,2,3,4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$	$\{-1\}$
4	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{0,1,$ $,2,3,4\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$	$\{-1\}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\{-1\}$
$2n-3$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{0,1,\ldots$ $2n-2\}$	$\{-1\}$
$2n-2$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\ldots$	$\{0,1,\ldots,$ $2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{-1\}$
-1	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\ldots$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$

Заменив в структуре M' и в формулах θ знак $<$ на $>$, получаем задаваемую той же самой таблицей алгебру $\mathfrak{A}_n^{QL}$ для квазирационального влево типа
$p(x) := \{x < d_k \wedge \neg E_{n-1}(d_k, x) \mid k \in \omega\}$.

Если p — иррациональный тип, то ему соответствует алгебра $\mathfrak{A}_n^I$ изолирующих формул, состоящая из $2n-1$ меток, перемножение которых задается следующей таблицей:

$\cdot$	0	1	2	3	4	$\ldots$	$2n-3$	$2n-2$
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$
3	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$
4	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$2n-3$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{0,1,\ldots,$ $2n-2\}$
$2n-2$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\ldots$	$\{0,1,\ldots,$ $2n-2\}$	$\{2n-2\}$

Изоморфизм алгебр

Следствие (с Б.Ш.Кулпешовым и С.В.Судоплатовым)

Пусть T — вполне o-минимальная теория с малым числом счетных моделей, $p, q \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические типы. Тогда алгебры $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ и $\mathfrak{P}_{\nu(q)}$ изоморфны, если и только если $RC(p) = RC(q)$ и типы p и q одновременно являются изолированными, либо квазирациональными, либо иррациональными.

Алгебры формул для семейств 1-типов

Определение

Говорят, что алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(\{p,q\})}$ является *обобщенно коммутативной*, если существует взаимно однозначное отображение $\pi : \rho_{\nu(p)} \to \rho_{\nu(q)}$, свидетельствующее о том, что алгебры $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ и $\mathfrak{P}_{\nu(q)}$ изоморфны (т.е. когда их задающие таблицы совпадают с точностью до π), и для любых $l \in \rho_{\nu(p,q)}$, $m \in \rho_{\nu(q,p)}$ имеет место $\pi(l \cdot m) = m \cdot l$.

Алгебры формул для семейств 1-типов счетно категоричных слабо о-минимальных теорий

Теорема 4 (с Б.Ш.Кулпешовым и С.В.Судоплатовым)

Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория, $p, q \in S^1(\emptyset)$. Тогда следующие условия эквивалентны:
(1) алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(\{p,q\})}$ — обобщенно коммутативный моноид;
(2) $RC_{bin}(p) = RC_{bin}(q)$.

Алгебры формул для семейств 1-типов вполне о-минимальных теорий с малым числом счетных моделей

Теорема 5 (с Б.Ш.Кулпешовым и С.В.Судоплатовым)

Пусть T — вполне о-минимальная теория с малым числом счетных моделей, $p, q \in S^1(\emptyset)$, $p \not\perp^w q$. Тогда алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(\{p,q\})}$ является обобщенно коммутативным моноидом.

Почти детерминированные алгебры бинарных формул полигонометрических теорий

Теорема 6 (с С.В.Судоплатовым)

Алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ бинарных изолирующих формул полигонометрической теории $T(\mathrm{pm})$, где $\mathrm{pm} = \mathrm{pm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$, детерминирована тогда и только тогда, когда выполняется какое-либо из следующих условий:
(1) $|G_1| = 1$ и $c(\mathrm{pm}) \leq 2$;
(2) $1 < |G_1| < \omega$, $|G_2| = 1$ и $c(\mathrm{pm}) = 1$;
(3) $|G_1| \geq \omega$ и $|G_2| = 1$.
При этом в случае (1) алгебра $\mathfrak{P}'_{\nu(p)}$ изоморфна единичной группе или группе $\mathbb{Z}_2$, а в случаях (2) и (3) эта алгебра изоморфна группе G_1.

Теорема 7 (с С.В.Судоплатовым)

Алгебра бинарных изолирующих формул полигонометрической теории $T(\mathrm{pm})$ почти детерминирована тогда и только тогда, когда группа G_1 одноэлементна или группа G_2 конечна.

Поглощающие алгебры бинарных изолирующих формул политонометрических теорий

Теорема 8 (с С.В.Судоплатовым)

Для любой группы G_1 существует тригонометрия $\mathrm{trm} = \mathrm{trm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ такая, что теория $T(\mathrm{trm})$ обладает 2-поглощающей алгеброй бинарных изолирующих формул.

Напомним[5], что *композицией* $\Gamma_1[\Gamma_2]$ *графов* $\Gamma_1 = \langle X_1; R_1\rangle$ и $\Gamma_2 = \langle X_2; R_2\rangle$ называется граф $\langle X_1 \times X_2; R\rangle$, в котором $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in R$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:
1) $(a_1, a_2) \in R_1$;
2) $a_1 = a_2$ и $(b_1, b_2) \in R_2$.

[5] F. Harary, Graph Theory. — Reading, Massachusetts : Addison-Wesley, 1969.

Подобным образом определяется композиция моноидов:

Пусть $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ — моноиды, для которых 0 является единичным элементом, $S_1 \cap S_2 = \{0\}$. *Композицией* или *последовательно аннулирующей связкой* $\mathcal{S}_1[\mathcal{S}_2]$ *моноидов* $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ называется алгебра $\langle S_1 \cup S_2; \odot \rangle$, где $\langle S_1 \cup S_2; \odot \rangle \upharpoonright S_i = \mathcal{S}_i$ для $i = 1, 2$, и $u \odot v = v \odot u = u$ при $u \in S_1 \setminus \{0\}$ и $v \in S_2$.

Предложение (Ляпин Е.С. Полугруппы. — М. : Гос. изд-во физ.-мат.лит., 1962.)

Любая последовательно аннулирующая связка $\mathcal{S}_1[\mathcal{S}_2]$ является моноидом.

E-определимые композиции

Определение

Композиция $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ структур $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ называется *E-определимой*, если $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ имеет $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности E, у которого E-классы являются носителями копий структуры $\mathcal{N}$, образующих $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$.

Алгебры бинарных формул для E-определимых композиций

Теорема 9 (с Б.Ш.Кулпешовым и С.В.Судоплатовым)

Если композиция $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ является E-определимой, то алгебра $\mathfrak{P}_T$ бинарных изолирующих формул теории $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M}[\mathcal{N}])$ изоморфна композиции $\mathfrak{P}_{T_1}[\mathfrak{P}_{T_2}]$ алгебр $\mathfrak{P}_{T_1}$ и $\mathfrak{P}_{T_2}$ бинарных изолирующих формул теорий $T_1 = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ и $T_2 = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

Следствие (с Б.Ш.Кулпешовым и С.В.Судоплатовым)

Если композиция $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ является E-определимой, $T_1 = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$, $T_2 = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$, и T_1, T_2 — транзитивные теории с алгебрами $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ и $\mathfrak{P}_{\nu'(p')}$ соответственно, то теория $T_1[T_2]$ имеет алгебру $\mathfrak{P}_{\nu''(p'')}$ с единственным 1-типом p'', изоморфную композиции $\mathfrak{P}_{\nu(p)}[\mathfrak{P}_{\nu'(p')}]$.

Алгебры бинарных формул для линейно упорядоченных предпорядков

Теорема 10 (с Б.Ш.Кулпешовым и С.В.Судоплатовым)

Для любого I-группоида $\mathfrak{P}$, состоящего из неотрицательных меток, существует теория T с типом $p \in S(T)$ и правильной меточной функцией $\nu(p)$ так, что $\mathfrak{P}_{\nu(p)} = \mathfrak{P}_0[\mathfrak{P}]$, где $\mathfrak{P}_0$ — алгебра бинарных изолирующих формул теории плотного линейного порядка без концевых элементов.

Теорема 11 (с Б.Ш.Кулпешовым и С.В.Судоплатовым)

Для любого I-группоида $\mathfrak{P}$, состоящего из неотрицательных меток, существует теория T с типом $p \in S(T)$ и правильной меточной функцией $\nu(p)$ так, что $\mathfrak{P}_{\nu(p)} = \widehat{\mathfrak{P}}_0[\mathfrak{P}]$, где $\widehat{\mathfrak{P}}_0$ — алгебра бинарных изолирующих формул неглавного 1-типа теории Эренфойхта.

Алгебры бинарных формул для линейно упорядоченных предпорядков

Теорема 12 (с Б.Ш.Кулпешовым и С.В.Судоплатовым)

Для любого I-группоида $\mathfrak{P}$, состоящего из неотрицательных меток, существует теория T с типом $p \in S(T)$ и правильной меточной функцией $\nu(p)$ так, что $\mathfrak{P}_{\nu(p)} = \mathfrak{P}_{\mathbb{Z}}[\mathfrak{P}]$.

Алгебры бинарных формул для циклически упорядоченных предпорядков

Теорема 13 (с Б.Ш.Кулпешовым и С.В.Судоплатовым)

Для любого натурального $n \geq 1$ существует $\aleph_0$-категоричная слабо циклически минимальная структура $\mathbb{Q}_n$ с примитивной группой автоморфизмов и такая, что соответствующая алгебра $\mathfrak{P}_{\mathbb{Q}_n}$ бинарных изолирующих формул имеет ровно $n+1$ метку.

Теорема 14 (с Б.Ш.Кулпешовым и С.В.Судоплатовым)

Алгебра $\mathfrak{P}_{\mathbb{Q}_n}$ бинарных изолирующих формул обладает следующими правилами умножения:
(1) для любой метки k с условием $0 \leq k \leq n$ выполняется
$0 \cdot k = k \cdot 0 = \{k\}$;
(2) для любых меток k_1, k_2 с условиями $1 \leq k_1, k_2 \leq n$ справедливо:
(2a) если $k_1 + k_2 \leq n$, то $k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1 = \{k_1 + k_2 - 1, k_1 + k_2\}$;
(2b) если $k_1 + k_2 - n = 1$, то $k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1 = \{0, 1, n\}$;
(2c) если $k_1 + k_2 - n = m$ для некоторого $m \geq 2$, то
$k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1 = \{m - 1, m\}$.

Алгебры бинарных формул для циклически упорядоченных предпорядков

Теорема 15 (с Б.Ш.Кулпешовым и С.В.Судоплатовым)

Для любого I-группоида $\mathfrak{P}$, состоящего из неотрицательных меток, существует теория T с типом $p \in S(T)$ и правильной меточной функцией $\nu(p)$ так, что $\mathfrak{P}_{\nu(p)} = \mathfrak{P}_{\rm dco}[\mathfrak{P}]$, где $\mathfrak{P}_{\rm dco}$ — алгебра бинарных изолирующих формул для плотного циклического порядка.

Теорема 16 (с Б.Ш.Кулпешовым и С.В.Судоплатовым)

Для любого I-группоида $\mathfrak{P}$, состоящего из неотрицательных меток, существует теория T с типом $p \in S(T)$ и правильной меточной функцией $\nu(p)$ так, что $\mathfrak{P}_{\nu(p)} = \mathfrak{P}_{\mathbb{Z}_n}[\mathfrak{P}]$.

О алгебрах бинарных изолирующий формул для корневых произведений графов

Определение

В теории графов корневое произведение графа G и корневого графа H определяется следующим образом: возьмём $|V(G)|$ копий графа H и для каждой вершины v_i графа G, отождествляем v_i с корневой вершиной i-ой копии H. Диаметр графа для произведения $G \circ H$ считается как $m + 2l$, где m — диаметр графа G, l — диаметр графа H. При $H_1 = H_2 = \ldots = H_k = H$ корневое произведение $H \circ H \circ \ldots \circ H$ называется k-й корневой степенью *графа H и обозначается через H^k.*

О алгебрах бинарных изолирующий формул для корневых произведений графов

Теорема 17

Если в результате корневого умножения алгебр бинарных изолирующих формул для n-угольников получается хотя бы один симплекс, то алгебра для результата будет изоморфна алгебре симплексов.

О алгебрах бинарных изолирующий формул для корневых произведений графов

Теорема 18

Если T — теория корневого произведения графов на ребро, $\mathfrak{B}$ — алгебра бинарных изолирующих формул теории T, то алгебра $\mathfrak{B}$ задается ровно одной из следующих алгебр: алгеброй $\mathfrak{H}^k$ и алгеброй $\mathfrak{AH}^k$.

О алгебрах бинарных изолирующий формул для тензорных произведений графов

Определение

Тензорное произведение $G \times H$ графов G и H это граф, множество вершин которого есть декартово произведение $V(G) \times V(H)$, причем различные вершины (u, u') и (v, v') смежных в $G \times H$ тогда, когда u смежна с v и u' смежна с v'. [a]

[a] Gena Hahn, Gert Sabidussi. Graph symmetry: algebraic methods and applications. — Springer, 1997. — vol. 497. — p. 116.

О алгебрах бинарных изолирующий формул для тензорных произведений графов

Теорема 19

Если T — теория тензорного произведения графа на ребро, $\mathfrak{B}$ — алгебра бинарных изолирующих формул теории T, то алгебра $\mathfrak{B}$ задается ровно одной из следующих алгебр: $\mathfrak{Tp}_e$, $\mathfrak{Tp}_o$.

Публикации

- Емельянов Д.Ю. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для вложенных отношений эквивалентности // Algebra and Model Theory 10: Collection of papers. Novosibirsk: NSTU Publisher, 2015. P. 59–70. (РИНЦ)
- Емельянов Д.Ю. Об алгебрах распределений бинарных формул теорий унаров // Известия Иркутского государственного университета. Серия "Математика", 2016, Т. 17, С. 23–36. (РИНЦ, Scopus, ВАК)
- Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры распределений бинарных формул в счетно категоричных слабо о-минимальных структурах // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, N 1. С. 20–54. (РИНЦ, WoS, Scopus, ВАК)
- Емельянов Д.Ю., Судоплатов С.В. О детерминированных и поглощающих алгебрах бинарных формул полигонометрических теорий // Известия Иркутского государственного университета. Серия "Математика". Известия Иркутского государственного университета. Серия "Математика". 2017. Т. 20. С. 32-44. (РИНЦ, Scopus, ВАК)
- Емельянов Д.Ю. Алгебры бинарных изолирующих формул для теорий симплексов // Algebra and Model Theory 11: Collection of papers. Novosibirsk: NSTU Publisher, 2017. P. 66–74. (РИНЦ)

Публикации

- Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для вполне o-минимальных теорий // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, N 6. С. 662–683. (РИНЦ, WoS, Scopus, ВАК)
- Емельянов Д.Ю. Алгебры распределений бинарных формул для теорий архимедовых тел // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2019. Т. 28. С. 36—52. (РИНЦ, WoS, Scopus, ВАК)
- Емельянов Д.Ю. Алгебры бинарных изолирующих формул для теорий симплексов // Algebra and Model Theory 12: Collection of papers. Novosibirsk: NSTU Publisher, 2019. P. 21–31. (РИНЦ)
- Емельянов Д.Ю., Судоплатов С.В. Структура алгебр бинарных формул полигонометрических теорий с условием симметрии // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020. Vol. 17. P. 1–20. (РИНЦ, WoS, Scopus)
- Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры бинарных формул для композиций теорий // Алгебра и логика. 2020. Т. 59, N 4. С. 432–457. (РИНЦ, WoS, Scopus, ВАК)

Спасибо за внимание!