О некоторых нетрадиционных структурах на совокупностях функциональных клонах на множествах

А. Г. Пинус

Кафедра алгебры и математической логики
Новосибирский государственный технический университет

Понятие функционального клона — одно из тех понятий которые связывают различные области дискретной математики с универсальной алгеброй. Прежде всего напомним, что функциональный клон на множестве A — это произвольная совокупность функций на A, замкнутая относительно суперпозиций и включающая в себя все селекторные функции $e_n^i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ (для $n \in \omega$, $i \leqslant n$).
Упомянутая выше связь состоит в том, что для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ с основным множеством A совокупность $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ всех термальных функций алгебры $\mathfrak{A}$ является функциональным клоном на A, а с другой стороны, для любого функционального клона F на множестве A существуют алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ такие, что $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}) = F$ (в частности, таковой будет алгебра $\mathfrak{A}_F = \langle A; F \rangle$, где в ее сигнатуру включены все функции из клона F).

Совокупность F_A всех функциональных клонов на множестве A частично упорядочена отношением теоретико-множественного включения $\subseteq$. Более того, она является полной решеткой относительно этого порядка, обозначаемой далее как L_A. Традиционно эта решетка L_A и представляла собой основную структуру при изучении совокупности F_A всех функциональных клонов на A. В ряде работ автора предложен ряд иных естественных структур на совокупности F_A, представляющих интерес для алгебро-логических исследований: топология и абстрактные отношения на F_A.

Напомним основные фундаментальные факты относительно решеток L_A. Прежде всего отметим результат Е. Поста.

Теорема (1)

[1]. *Для двухэлементного множества A решетка L_A счетна.*

Более того, получено исчерпывающее описание этой решетки и всех клонов ее образующих, включая нахождение базисов этих клонов. Ситуация резко меняется для не менее чем трехэлементных A. Ю. Яновым и А. Мучником доказана

Теорема (2)

[2]. *Для любого не менее чем трехэлементного множества A решетка L_A не менее чем континуальна.*

О сложности строения решеток L_A при $|A| \geqslant 3$ говорит и доказанный ими же факт.

Теорема (3)

[2] *При $|A| \geqslant 3$ в L_A существуют клоны, не имеющие никаких базисов.*

Сложность и нерегулярность строения решеток L_A при больших A подчеркивают и следующие результаты А. Булатова

Теорема (4)

[3] *При условии $|A| \geqslant 3$ на решетке L_A не выполнено ни одно решеточное тождество.*

Теорема (5)

[4] *При условии $|A| \geqslant 4$ в решетку L_A вложима свободная счетно порожденная решетка и, в частности, в L_A вложима любая конечная решетка, а сама L_A, в этом случае, не является локально конечной.*

В этой ситуации представляет интерес нахождение решеток в том или ином смысле “аппроксимирующих” те или иные свойства решеток L_A, но устроенных, в некотором смысле, более просто чем L_A при больших A.

Один из подобных путей основан на понятии ограниченно порожденного клона, введенном в работе автора [5]. Клон F называется *ограниченно порожденным*, если он порождается некоторым множеством входящих в него функций ограниченной в совокупности арности. Для конечных множеств A ограниченная порожденность клона на A равносильна его конечной порожденности, а для произвольного A любой конечно порожденный клон является ограниченно порожденным.

При этом совокупность L_A^{rg} ограниченно порожденных клонов на A является подрешеткой решетки L_A.

Ключом же к изучению строения решеток L_A^{rg} служит понятие фрагмента клона, введенное в работе [5]. Для любого клона F и любого натурального n через F^n обозначим *n-фрагмент клона* F, т.е. совокупность функций из F, арность которых не превышает n. Совокупность n-фрагментов всех клонов из L_A образует решетку L_A^n относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$. При этом для $n < m$ решетка L_A^n является ретрактом решетки L_A^m и имеет место

Теорема (6)

[5]. *Решетка L_A является обратным пределом ретрактивного спектра решеток L_A^n $(n \in \omega)$, а решетка L_A^{rg} — прямым пределом этого спектра. При этом и сама L_A^{rg} является ретрактом решетки L_A.*

Из этого результата и результатов А. Булатова [3, 4] вытекает ряд следствий.

Следствие (1)

[5]. *Если* $|A| \geqslant 3$, *то на решетке* L_A^{rg} *не выполнено никакое решеточное тождество.*

Следствие (2)

[5]. *Для любого множества* A *решетки* L_A^{rg} *и* L_A $\forall\exists$*-эквивалентны.*

Однако, в отличии от решеток L_A имеет место

Следствие (3)

[5]. *Для любого конечного* A *решетка* L_A^{rg} *локально конечна.*

Дальнейшие исследования решеток L_A были сосредоточены на описании их экстремальных элементов, каких-либо интервалов этих решеток и тому подобное.
Так в работах [7, 8] И. Розенбергом описаны атомы и коатомы решеток L_A в терминах функций сохраняющих те или иные отношения на A.
Естественным представляется вопрос описания для традиционно рассматриваемых в теории решеток так называемых специальных элементов: дистрибутивных, кодистрибутивных, модулярных и иных.
Описание ряда интервалов в решетках L_A получено А. Крохиным [9].

С понятием фрагментов клонов связано понятие размерности клона F [10], наименьшего натурального n такого, что клон F однозначно определим своим фрагментом F^n (если таковое n существует). Это же понятие лежит в определении некоторой естественной топологии на F_A. Так как для любого клона F имеют место равенства $F = \bigcup_{n\in\omega} F^n$ и включения $F^n \subseteq F^m$ для $n \leqslant m$, то возможно введение на F_A следующей *метрики* ρ: для $F, F' \in F_A$ положим

$$\rho(F,F') = \begin{cases} (\min\{n \in \omega' \mid F^n \neq (F')^n\})^{-1}, & \text{если } F \neq F' \\ 0, & \text{в случае когда } F = F' \end{cases}.$$

(здесь $\omega' = \omega \setminus \{0\}$). С помощью этой метрики и определяем *топологию* τ на F_A. Изолированными точками пространства $J_A = \langle F_A; \tau \rangle$ являются клоны конечной размерности на множестве A и только они, а операции $\wedge, \vee$ из определения решетки L_A являются непрерывными на пространстве J_A.

Имеет место также

Теорема (7)

[5]. *Все пространства J_A полны. Для любого неодноэлементного A в пространстве J_A есть предельные точки (клоны бесконечной размености). В случае $|A| = 2$ таких точек в J_A восемь для $|A| \geqslant 3$ таковых точек в J_A бесконечно много.*

Свойства пространства J_A во многом характеризуют само множество A. К примеру в работах автора доказаны

Теорема (8)

[10, 11]. *Пространство J_A компактно тогда и только тогда, когда A конечно.*

Теорема (9)

[10]. *Для решетки L_A существует подрешетка образующая совершенное подмножество в пространстве J_A тогда и только тогда, когда $|A| \geqslant 3$.*

Естественным представляется вопрос о том как расположены в пространствах J_A изолированные точки. В частности, не будет ли совокупность подобных точек всюду плотной в J_A. Другими словами, верно ли утверждение, что для любого клона F из F_A и любого $n \in \omega$ найдется клон F' такой, что $F^n = (F')^n$ и клон F' однозначно определим некоторым своим фрагментом. Ответ на этот вопрос остается открытым. В работе [12] автора получен лишь частичный ответ на этот вопрос. Напомним, что клон на множестве A называется дискриминаторным, если он включает в себя дискриминаторную функцию на A. Имеет место.

Теорема (10)

[12]. *Для любого множества A в любой окрестности любого дискриминаторного клона на A лежит некоторый клон однозначно определимый некоторым своим фрагментом (т.е. изолированная точка пространства J_A).*

Указанная в начале работы возможность трактовать функциональные клоны на множестве A как совокупности $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ термальных функций универсальных алгебр с основным множеством A приводит к рассмотрению на F_A ряда отношений индуцированных такими отношениями между универсальными алгебрами как “рациональная эквивалентность”, “быть обогащением (обеднением) алгебры”, “алгебраическая, логическая эквивалентности алгебр”.

Прежде всего напомним, что понятие "рациональной эквивалентности" алгебр $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma_2 \rangle$ введено А. Мальцевым [14] и сводится к сопряжению функциональных клонов $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ и $\mathrm{Tr}(\mathfrak{B})$ какой-либо биекцией множества A на B. Под "абстрактной эквивалентностью" $\sim$ клонов F_1 и F_2 из F_A будем понимать рациональную эквивалентность алгебр $\mathfrak{A}_{F_1} = \langle A; F_1 \rangle$ и $\mathfrak{A}_{F_2} = \langle A; F_2 \rangle$, т.е. $F_1 \sim F_2$ тогда и только тогда, когда существует перестановка π на A, сопрягающая совокупности функций, входящих, соответственно, в F_1 и F_2. На F_A определим так же отношение $\leqslant$, являющееся производным от отношения между универсальными алгебрами, когда одна алгебра есть "обогащение" другой. Для $F_1, F_2 \in F_A$ положим $F_1 \leqslant F_2$ тогда и только тогда, когда существует перестановка π на A такая, что $\pi(F_1)\pi^{-1} \subseteq F_2$. Очевидно, что отношение $\leqslant$ является отношением квазипорядка на F_A и через $\approx$ обозначим отношение эквивалентности на F_A, порожденное этим квазипорядком. Очевидно, что эквивалентность $\approx$ больше чем эквивалентность $\sim$.

Имеет место

Теорема (11)

[15, 16]. *Отношения $\sim$ и $\approx$ совпадают на F_A тогда и только тогда, когда A конечно.*

Отметим одно из следствий этой теоремы.

Следствие (4)

[16]. *Для бесконечных A существуют клоны F на A такие, что класс $F/{\approx}$ содержит континуум попарно не $\sim$-эквивалентных клонов на A.*

Отметим так же еще один результат связанный с отношением $\sim$ на F_A.

Теорема (12)

[16]. *Конъюнкция отношений $F' \subseteq F''$ и $F' \sim F''$ для клонов F' и F'' из F_A влекут равенство этих клонов тогда и только тогда, когда множество A конечно.*

Помимо отношений $\sim, \approx, \leqslant$ на F_A естественным образом определяется еще целый ряд отношений, инспирированных различными "алгебраически значимыми" отношениями между универсальными алгебрами с основным множеством A. Укажем на некоторые из них (идущие от алгебраической, логической геометрий универсальных алгебр) и на ряд результатов с ними связанных.
Напомним, что алгебраическим множеством для алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ называется совокупность решений в $\mathfrak{A}$ некоторой системы (возможно бесконечной) термальных для $\mathfrak{A}$ уравнений. Через $\mathrm{Alg}\,\mathfrak{A}$ обозначим совокупность всех алгебраических множеств алгебры $\mathfrak{A}$. Алгебры $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1 \rangle$ и $\mathfrak{A}_2 = \langle A; \sigma_2 \rangle$ называются алгебраически эквивалентными, если имеет место равенство $\mathrm{Alg}\,\mathfrak{A}_1 = \mathrm{Alg}\,\mathfrak{A}_2$.

Клоны F_1, F_2 из F_A назовем алгебраически эквивалентными ($F_1 \sim_{alg} F_2$), если алгебраически эквивалентны алгебры $\mathfrak{A}_{F_1}$ и $\mathfrak{A}_{F_2}$, т.е. совпадают множества, определяемые как решения совокупностей уравнений между функциями из F_1 и F_2 соответственно. Аналогичным образом определяется отношение $\sim_{log_0}$ на F_A: клоны $F_1, F_2 \in F_A$ логически эквивалентны, если совпадают совокупности подмножеств множеств A^n, определимых бескванторными формулами логики первого порядка в алгебрах $\mathfrak{A}_{F_1}$ и $\mathfrak{A}_{F_2}$. В работе [12] автора получен ряд результатов, связанных с числом классов $\sim_{alg}$- и $\sim_{log_0}$-эквивалентностей на совокупности F_A и со строением этих классов для $\sim_{alg}$ и $\sim_{log_0}$ в терминах решетки L_A.

Наконец, остановимся на взаимосвязи структур на F_B и F_A для различных множеств B и A. Имеет место

Теорема (13)

[12]. *Для любых множеств $B \subseteq A$ решетка L_B является ретрактом решетки L_A, а пространство J_B — ретрактом пространства J_A.*

[1] E. L. Post, Introduction to a general theory of elementary proposition, Amer. J, Math., **56**, 3 (1921), 81–103; The two-valued iterative systems of math. Logic, Annals of Math. Studies, 5 (1941).

[2] Yu. I. Yanov, A. F. Muchnik, On the existence of k-valued closed classes that do no have a finite basis.—Sovjet Mathematics, Doklady, **127**, 1 (1954), 144–146. (Russian).

[3] A. A. Bulatov, Identities in the lattices of closed classes, Discrete Math. Appl, **3**, 6 (1993), 601–610.

[4] A. A. Bulatov. Finite sublattices in the lattices of clones, Algebra and Logic, **33**, 5 (1994), 265–286.

[5] A. G. Pinus, Fragments of functional clones.—Algebra and Logic, **56**, 4 (2017), 302–317.

[6] A. G. Pinus, On direct and inverse limits of retractive spectra once again, Journal of Math. Sciences, **253**, 3 (2021), 444–447.

[7] I. Rosenberg, Über die functional Vollstandikkeit in dem mehrvertigen Logiken von mehreren Verbandlichen auf endlichen Mengen, Rozpravy Ls. Akademie Ved. m Ser. Math. Nat. Sci., **80** (1973), 3–93.

[8] I. Rosenberg, Minimal clones I: The five types—Colloq, Math. Soc. J. Boleai, **43** (1981), 635–652.

[9] A. A. Krokhin, Monoid intervals in lattices of clones, Algebra and Logic, **34**, 3 (1995), 155–168.

[10] A. G. Pinus, Dimension of functional clones, metric on its collection, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 366–374 (Russian).

[11] A. G. Pinus. On the spaces of functional clones, Siberian Electronic Mathematical Reports, (to appear) (Russian).

[12] A. G. Pinus, Fragments of functional clones as the method of the study of the latter, Algebra and Model Theory. **11** (2017), Novosibirsk, NSTU-Publ., 112–117 (Russian).

[13] A. G. Pinus, Neigborhoods and isolated points in spaces of functional clones on sets, Algebra and Logic, **59**, 3 (2020), 230–236.

[14] A. I. Mal'tsev, The structural characteristic of some classes of algebras, Doklady. Akademii. Nauk SSSR, **120**, 1 (1958), 29–32.

[15] A. G. Pinus, Universal algebras and functional clones (on the scales of universal algebras of fixed power), Algebra and Model Theory **12** (2019), Novosibirsk, NSTU-Publ., 55–65 (Russian).

[16] A. G. Pinus. On abstract relations between functional clones, Algebra and Logic (to appear) (Russian)

Спасибо