Novosibirsk State Technical University

Algebra and model theory *14*

Collection of papers
edited by A. G. Pinus, E. N. Poroshenko,
and S. V. Sudoplatov

Novosibirsk
2023

Algebra and model theory

UDC 512(06) **ISSN 2619-0486**
A 35 **2023**

Учредитель

ФГБОУ “Новосибирский государственный технический университет”

Редакционная коллегия

M. Amaglobeli (Tbilisi, Georgia)
B. Baizhanov (Almaty, Kazakhstan)
I. Chajda (Olomouc, Czech Republic)
A. Iwanow (Gliwice, Poland)
R. Halas (Olomouc, Czech Republic)
V. Kopytov (Novosibirsk, Russia)
B. Kulpeshov (Almaty, Kazakhstan)
A. Myasnikov (New York, USA)
N. Peryazev (St. Petersburg, Russia)
A. Pinus (Novosibirsk, Russia)
E. Poroshenko (Novosibirsk, Russia)
B. Poizat (Lyon, France)
M. Shahryari (Tabriz, Iran; Muscat, Oman)
P. Stefaneas (Athens, Greece)
S. Sudoplatov (Novosibirsk, Russia)
E. Timoshenko (Novosibirsk, Russia)
J. Truss (Leeds, United Kingdom)
D. Tussupov (Astana, Kazakhstan)
E. Vasilyev (Corner Brook, Canada)

Адрес редакции, издателя: 630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, НГТУ,
Тел. (383) 346-11-66
E-mail: algebra@nstu.ru

UDC 512(06)

© Composite authors, 2023
© Novosibirsk State Technical University, 2023

Introduction

Algebra and model theory 14

The 15th International Summer School-Conference "Problems Allied to Model Theory and Universal Algebra" was held on 21–29 of June 2023 at Novosibirsk State Technical University NETI and at the camping center "Erlagol" in Altai mountains. The School was organized by Algebra and Mathematical Logic Department of Novosibirsk State Technical University (NSTU NETI) and Sobolev Institute of Mathematics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (IM SB RAS) . The School was supported by Grant of NSTU (C23-2) and by Grant of International Mathematical Center in Akademgorodok. This was the first time when the school-conference included both online and offline parts. For this reason there were participants from rather many countries. At the school-conference, there were participants from Russia, Kazakhstan, Uzbekistan, Canada, China, Greece, Hungary, Italy, Oman, Poland. They made 41 talks. Within the school-conference, the discussions on actual problems on Algebra, Model Theory and related subjects were held. Information about the conference is posted on the conference website `https://erlagol.ru`.

The Organizing Committee
of the School-Conference

Валерий Матвеевич Копытов

За время, прошедшее с 14-й летней школы-конференции “Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры”, в ноябре 2022 года, ушел из жизни член оргкомитета и один из старейших и активнейших участников “Эрлагольских конференций”, известный советский и российский алгебраист, специалист по упорядоченным группам, Валерий Матвеевич Копытов. В работе “Эрлагольских конференций” Валерий Матвеевич играл очень заметную роль, привлекая в качестве ее участников большое число своих учеников и коллег как из России (Новосибирск, Барнаул, Томск), так и из Чехии, Великобритании и других стран. Неизменным интересом участников пользовались и доклады самого Валерия Матвеевича. XII школа-конференция в 2017 году была посвящена 75-летию Валерия Матвеевича.

С нами остается память о Валерии Матвеевиче как о искреннем, прекрасном человеке, крупном ученом и талантливом педагоге.

Оргкомитет 15-й летней школы-конференции
“Пограничные вопросы теории моделей
и универсальной алгебры”

Programme of
the 15th International Summer School-Conference
“Problems Allied to Model Theory and Universal Algebra”

June 21, Wednesday (online)

7:55am–8:00am **Opening Ceremony**

Chairperson S. Sudoplatov

8:00am–8:50am E. Vassiliev (Corner Brook, Canada), “On dense/co-dense expansions of geometric theories”

9:30am–10:20am D. Fazio (Teramo, Italy), S. Odintsov (Novosibirsk, Russia), “On algebraic semantics of connective logics”

10:30am–11:20am A. Stukachev (Novosibirsk, Russia), “Algorithmic aspects of intensional logic”

11:30am–12:20pm V. Rybakov (Krasnoyarsk, Russia), “Unification and Admissibility Problems in Modal Logics via Projective Formulas”

Chairperson N. Kasymov

2:00pm–2:30pm A. Iwanow, M. Drzewicka, B. Mokry (Gliwice, Poland), “Generics in invariant subsets of highly transitive permutation groups”

2:30pm–3:00pm M. Shahryari (Muscat, Oman), “On the geometric equivalence of some classes of algebras with their filtered products”

3:00pm–3:30pm I. Kozhukhov, D. Manilov, A. Reshetnikov (Moscow, Russia), “Definability of relations by semigroups of isotone transformations”

3:30pm–4:00pm V. Molchanov, R. Farakhutdinov (Saratov, Russia), “On the problem of axiomatization of some classes of universal graph semiautomats”

5:00pm–5:30pm	A. Basheeva (Astana, Kazakhstan), S. Lutsak (Petropavlovsk, Kazakhstan), “On the basability of quasivarieties generated by certain finite modular lattices”
5:30pm–6:00pm	R. Sklinos (Beijing, China), O. Kharlampovich (New York, USA), “Randomness in Model Theory”
6:00pm–6:30pm	G. Czédli (Szeged, Hungary), “Generating quasiorder lattices and some other lattices by few elements”

June 22, Thursday (online)

Chairperson V. Gubarev

9:00am–9:50am	B. Baizhanov (Almaty, Kazakhstan), “Some questions of expansion of models of complete theories”
10:00am–10:30am	S. Kabanikhin, Sh. Lu (Novosibirsk, Russia), “Neural network regularization methods”
11:30am–Noon	V. Zhelyabin, P. Kolesnikov (Novosibirsk, Russia), “Dual coalgebras of n-Lie Jacobian algebras of polynomial rings”
Noon–12:30pm	A. Zakharov (Novosibirsk, Russia), “On simple Novikov—Poisson algebras
12:30pm–1:00pm	I. Pavlyuk (Pavlodar, Kazakhstan), In. Pavlyuk (Novosibirsk, Russia), “On the solution of congruences with respect to the commutativity relation in groups”

Chairperson A. Iwanow

2:00pm–2:30pm	A. Litavrin, T. Moiseenkova (Krasnoyarsk, Russia), “On some groupoids associated with compositions of multilayer neural networks with direct signal propagation
2:30pm–3:00pm	D. Solomatin (Omsk, Russia), “Investigation of the planarity property of Cayley graphs with respect to free semigroups”

3:00pm–3:30pm N. Markhabatov (Astana, Kazakhstan), “On types of approximation of acyclic graph theories”

3:30pm–4:00pm G. Suleimanova (Abakan, Russia), “Commutative subalgebras of the highest dimension of Chevalley algebras over a field”

June 24, Saturday (offline)

Chairperson S. Sudoplatov

10:00am–10:50am A. Mironov (Novosibirsk, Russia), “On commutative subalgebras in the first Weyl algebra”

11:00am–11:50am B. Kulpeshov (Almaty, Kazakhstan), “The countable spectrum of weakly o-minimal theories of finite convexity rank”

Chairperson B. Kulpeshov

3:00pm–3:30pm A. Pinus (Novosibirsk, Russia), “Definability of universal algebras by semigroups of their transformations”

3:30pm–4:00pm E. Efremov, A. Stepanova, S. Chekanov (Vladivostok, Russia), “On the pseudofiniteness of polygons”

4:00pm–4:30pm D. Churikov (Novosibirsk, Russia), “Size of the minimal generating set of a primitive 3/2-transitive group”

4:30pm–5:00pm E. Shaporina (Novosibirsk, Russia), “On a subgroup of the outer automorphism group of a generalized cyclic extension of a free group of rank 3”

June 25, Sunday (offline)

Chairperson A. Stepanova

10:00am–10:50am P. Kolesnikov (Novosibirsk, Russia), “Derived varieties, Novikov—Poisson algebras, and conformal algebras”

11:00am–11:50am V. Verbovskiy (Almaty, Kazakhstan), “On symmetric functions in Hrushovski’s strongly minimal examples”

Noon–12:50pm S. Sudoplatov (Novosibirsk, Russia), "Variations of rigidity"

Chairperson F. Dudkin

3:00pm–3:30pm K. Tulenbaev (Almaty, Kazakhstan), "Structural properties of Chaudhary algebras"

3:30pm–4:00pm N. Polyakov, D. Savel'ev (Moscow, Russia), "On ultraextensions of some algebraic constructions and their combinatorial applications"

4:00pm–4:30pm A. Chekhonadskikh (Novosibirsk, Russia), "Algebraic approach to the stabilization of non-classical dynamical systems"

4:30pm–5:00pm D. Emelyanov (Novosibirsk, Russia), "Algebras of binary isolating formulas for operations on theories"

5:00pm–5:30pm In. Pavlyuk (Novosibirsk, Russia), "On algebraic and definable closures for abelian group theories"

June 26, Monday

Tour day

June 27, Tuesday (offline)

Chairperson V. Verbovskiy

10:00am–10:50am A. Pozhidaev (Novosibirsk, Russia), "Simple pre-Lie algebras: Endomorphs, Burde and Mizuhara algebras"

11:00am–11:50am F. Dudkin (Novosibirsk, Russia), "Elements of finite order in groups of outer automorphisms for generalized Baumslag—Solitaire groups"

Noon–12:50pm V. Gubarev (Novosibirsk, Russia), Bourdet series of prime prelie algebras

Chairman A. Pozhidaev

3:00pm–3:30pm	A. Panasenko (Novosibirsk, Russia), "Radicals of Novikov algebras"
3:30pm–4:00pm	O. Bryukhanov, A. Ivleva (Popova) (Novosibirsk, Russia), "Calculation of the conjugation matrix of automorphisms of integer group rings"
4:00pm–4:30pm	I. Uktamaliev (Novosibirsk, Russia; Namangan, Uzbekistan) "Models of theories of commutative monoids and semigroups"
4:30pm–5:00pm	S. Malyshev (Novosibirsk, Russia), "Closure operators in cubic and acyclic theories"
5:00pm	**Closing Ceremony**

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К СТАБИЛИЗАЦИИ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ РЕГУЛЯТОРОМ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА

А. В. Чехонадских

Новосибирский государственный технический университет
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: chekhonadskikh@corp.nstu.ru

1 Введение и общие понятия

Система автоматичекого управления (САУ) предполагает заданный объект управления — техническую конструкцию или агрегат; происходящие в нём процессы в нормальных условиях описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) относительно характеристик $x(t)$ — переменных состояния, или вектора состояний, среди которых выделяются или из которых формируются переменные $y(t)$, называющиеся выходом объекта. В дальнейшем мы рассматриваем только линейные стационарные системы. Поэтому однородная системы ОДУ принимает вид $\dot{x} = Ax(t)$ с квадратной числовой матрицей A, а её решение соответствует установившемуся режиму разомкнутой системы, т.е. работы объекта, не подвергающейся внешним воздействиям; выход объекта $y(t) = Cx(t)$ также формализуется с помощью числовой матрицы C, как правило, прямоугольной.

На практике в протекающие процессы вмешиваются внешние воздействия $v(t)$ различной природы — от непредсказуемых возмущений $w(t)$, в том числе шума, до контролирующего воздействия (или вектора управления) $u(t)$. Вместе они именуются входом объекта; с учётом этого приходится рассматривать неоднородную систему ОДУ $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + Dw(t)$. Действие возмущений распространяется и на выход объекта, формализуемый с помощью матрицы D_2: $y(t) = Cx(t) + D_2w(t)$.

Обычно известен (в частности, доступен измерению и имеет преобладающее значение) именно выход, на основании которого строится контролирующее воздействие $u = u(y(t))$ [1].

Целью управляющего воздействия является восстановление установившегося режима; оно создаётся регулятором — специальным устройством, которое превращает отклонение выхода от установившегося значения (произошедшее в результате действия возмущения) в вектор управления $u(t)$. Регулятор также описывается ОДУ, а воздействие $u(t)$ обеспечивает отрицательную обратную связь для отклонения $\delta y(t)$. Соединение объекта и регулятора в контуре отрицательной обратной связи по выходу называют замкнутой системой.

Везде далее будем считать уравнения и объекта управления, и регулятора линейными стационарными, благодаря чему показатели установившегося режима можно считать тождественно нулевыми и придать уравнениям матрично-полиномиальную форму с помощью преобразования Лапласа.

Для объекта (plant) возникает соотношение

$$y(s) = G(s)u(s) = D_{pl}^{-1} N_{pl} u(s),$$

для регулятора, соответственно,

$$u(s) = C(s)y(s) = N_{co} D_{co}^{-1} y(s),$$

а в целом для системы с отрицательной обратной связью —

$$y = (I + G(s)C(s))^{-1} G(s)C(s)u,$$

где I — единичная матрица.

Матрица $(I + G(s)C(s))^{-1}G(s)C(s)$ с полиномиальными элементами называется передаточной матрицей системы.

Если контролируемая величина одна и регулятор производит скалярное управляющее воздействие, система называется одноканальной, полиномиальные матричные уравнения превращаются в дробно-рациональные, а в формуле передаточной матрицы все величины скалярны и $I = 1$.

Важнейшие свойства системы — такие, как устойчивость, колебательность, быстродействие и др. — численно определяются значениями полюсов замкнутой системы, т.е. корнями характеристического полинома — знаменателя передаточной функции:

$$\chi(s) = D_{sys} = D_{pl} D_{co} + N_{pl} N_{co}$$

.

В его коэффициенты входят и настраиваемые коэффициенты регулятора $\bar{p}$, которые влияют на значения полюсов. Ввиду того, что коэффициенты характеристического многочлена действительны, комплексные полюса образуют сопряжённые пары одинаковой кратности; степень многочлена, определённая передаточными функциями объекта и регулятора, задаёт их число (считая с кратностями). В САУ полного порядка достижимо любое корректно заданное расположение полюсов; в этой связи естественно следующее определение.

Определение 1. Будем называть порядок регулятора *пониженным*, если число его настраиваемых параметров или способ их вхождения в коэффициенты характеристического полинома не позволяют достигать произвольно заданного расположения полюсов. Стабилизируемую таким регулятором САУ также будем называть системой пониженного порядка.

Синтез САУ пониженного порядка обычно сводится к достижению удовлетворительного по тем или иным показателям расположения полюсов $z_1, \ldots, z_n$. В разбираемых ниже работах автор ставит задачу оптимального расположения полюсов за счёт выбора значений параметров регулятора. Целевой функцией, дающей численное выражение оптимальности, служит максимизируемая степень устойчивости замкнутой системы $\alpha = -\max \Re(z_1, \ldots, z_n)$ или, с несколько большей общностью, противоположная ей гурвицева функция:

$$H(\bar{p}) = \max \mathrm{Re}(z_1, \ldots, z_n).$$

Техника оптимизации допускает и другие алгебраические целевые функции, называемые R-градуировками [2] и зависящие от самых “неудобных” полюсов. Хотя минимизация таких функций общими методами затрудняется невыпуклостью, многоэкстремальностью, недифференцируемостью, сопряжённой с овражным рельефом и неограниченным субдифференциалом, их критические точки, как правило, достигаются в тех случаях, когда на правой границе расположения всех корней в комплексной плоскости (для гурвицевой функции это просто вертикальная прямая) скапливается максимально возможное количество полюсов, считая с их кратностями. Наибольшая численность граничных полюсов и всевозможные варианты их взаимного расположения в общем случае определяются размерностью пространства настраиваемых параметров $\bar{p}$ [2]. Схемы расположения граничных полюсов представляются критическими корневыми диаграммами [3, 4]. В работах [2]–[5] приводится несколько примеров применения критических корневых диаграмм и корневых многочленов к поиску оптимальных по степени устойчивости значений регуляторов для классических линейных стационарных САУ с характеристическими многочленами степеней 9–11. В этом обзоре мы рассмотрим неклассические примеры.

2 Гироскопическая стабилизация многомерных вибрационных конструкций

Минимизация гурвицевой функции для конструкции из трёх массивных тел с упругими связями, взятой в качестве управляемого объекта с регулятором пониженного порядка, рассматривалась в работах [4, 5]. Её уравнения совпадают с уравнениями вибрационной системы для $n = 3$ и могут быть записаны в операторной форме как $L(s)X = (Is^2+(D+G)s+K)X = (0)$ с квадратными матрицами порядка n, причём матрица потерь $D = D^T$ неопределённая, матрица инерции и жёсткости $K = K^T$ положительно определена, а кососимметрическая матрица G характеризует управляющее воздействие.

Следуя Т. Дамму [6], назовём матрицу $G = -G^T$ *гироскопическим стабилизатором* вибрационной системы, если решение X уравнения $\ddot{X}+(D+G)\dot{X}+KX = (0)$ (в операторной форме $(Is^2+(D+G)s+K)X = (0)$) асимптотически устойчиво. В этом случае назовём систему *гироскопически стабилизируемой.*

Необходимое условие гироскопической стабилизации хорошо известно: оба следа матриц D и $K^{-1}D$ должны быть положительны; короткое доказательство приведено в [6]. Эти условия являются также и достаточными; для $n = 2$ это доказано в работе [7], а для $n = 3, 4$ в [6]; при $n > 4$ гипотеза достаточности проверена на обширном множестве примеров.

Автор рассматривал вопрос достижения максимальной степени устойчивости (или, что то же самое, глобального минимума гурвицевой функции $H(\bar{p}) = H(G) = \max \mathrm{Re}(z_1, \ldots, z_{2n})$) за счёт выбора гироскопического стабилизатора G. Это задача оказывается синтезом САУ пониженного порядка при любом порядке системы и числе свободных параметров стабилизатора (т.е. размерности вектора $\bar{p}$), поскольку два старших и два младших коэффициента характеристического многочлена не содержат элементов матрицы G. Предельное значение глобального минимума $H(G)$ определяется из следующего предложения.

Proposition 1. *$z_1 + \cdots + z_{2n} = -\mathrm{tr}\, D$.*

Поэтому $\min H(G) \geq -\operatorname{tr} D/(2n)$, что можно рассматривать в качестве “теоретического” минимума.

Автор рассматривал примеры порядков 3–5 [8], без ограничения общности считая, что матрица D приведена к диагональной форме. Вот один из них.

Пример 2. Пусть пятимерная вибрационная система задаётся такими матрицами D и K:

$$D = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 2 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Необходимые условия стабилизации выполнены: $\operatorname{tr} D = 1, \operatorname{tr} K^{-1}D \approx 1.0707$.

Чтобы достигалась теоретически максимальная степень устойчивости, достаточно требовать попадания на вертикальную прямую $\operatorname{Re}(z) = -\operatorname{tr} D/10 = -0.1$ четырёх комплексносопряжённых пар полюсов, тогда пятая необходимо окажется на ней же. Допустим, что одна из пар кратная; тогда характеристический многочлен $\chi(s) = |Is^2 + (D+G)s + K|$ должен содержать такую группу сомножителей:

$$r(s) = (s^2+0.2s+y_1)^2(s^2+0.2s+y_2)(s^2+0.2s+y_3), \quad y_k = 0.01+\operatorname{Im}^2 z_{2k-1,2k}$$

(в [2] $r(s)$ именуется корневым многочленом). Приравнивая к нулю остаток от деления $rem(s)$ характеристического многочлена $\chi(s)$ на корневой $r(s)$, мы получим восемь полиномиальных уравнений, которых достаточно для нахождения неизвестных $y_{1,2,3}$ и пяти элементов стабилизатора:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & k & l \\ 0 & 0 & -k & 0 & m \\ -d & -g & -l & -m & 0 \end{pmatrix}.$$

Стандартная вычислительная процедура даёт решение $d \approx -0.9817, g \approx 0.8544, k \approx 1.4066, l \approx 0.6231, m \approx 1.2527$, а полюса оказываются такими:

$z_{1-4} \approx -0.1000 \pm 1.5335i$ (кратная пара), $z_{5,6} \approx -0.1000 \pm 0.5633i$, $z_{7,8} \approx -0.1000 \pm 0.8699i$; и пятая пара $z_{9,10} \approx -0.1000 \pm 2.6034i$.

Как показано в [8], в общем случае такое решение оказывается точкой шестимерного многообразия M в пространстве параметров гироскопического стабилизатора, в каждой точке которого гурвицева функция сохраняет своё минимальное значение $H(M) = \min H(G) = -\operatorname{tr} D/(2n)$. И хотя с ростом размерности вибрационной системы вычислительные трудности нахождения оптимального гироскопического регулятора быстро растут, не видно теоретических причин, которые привели бы к невозможности достижения максимального показателя степени устойчивости гироскопически стабилизируемой системы.

3 Оптимальный регулятор пониженного порядка для дескрипторной (ДАУ) системы

Дескрипторные САУ включают в себя объекты, описывающиеся системами дифференциальных и алгебраических уравнений (ДАУ). Среди технических примеров обычны случаи, когда использование алгебраических соотношений для понижения размерности системы неудобно или невозможно [9]–[11]. Это предопределяется наличием в решениях систем ДАУ импульсных компонент, существенно отличных от решений ОДУ. Для линейных стационарных систем возникают схожие с вышеприведёнными уравнения с вырожденной матрицей E:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);$$
$$y(t) = Cx(t).$$

По-прежнему возможно применение преобразования Лапласа и переход к полиномиально-матричной форме системы ДАУ:

$$Y(s) = C(sE - A)^{-1}BU(s),$$

матрица которой $G(s) = C(sE - A)^{-1}B$ называется передаточной матрицей системы.

Алгебраическую форму принимают и важнейшие понятия, связанные с ДАУ. Для существования и единственности решения, как правило, требуется выполнения условия регулярности матричной пары (E, A):

$$|\alpha E - A| \neq 0;$$

помимо регулярности, для нормальной работы замкнутой системы необходимы

- устойчивость: отрицательность действительных частей всех полюсов, т.е. $\{z | \det(zE - A) = 0\} \subset C^-$;

- безымпульсность: $\deg\det(sE - A) = \mathrm{rank} E$.

Система называется *допустимой*, если она регулярна, устойчива и безымпульсна.

В силу сказанного использование алгебраических средств для расчёта регулятора кажется вполне естественным, что отмечено в [12, 13]. Однако численное решение ДАУ и синтез управления для них осуществляется почти без исключений в пространстве состояний. Отчасти это связано с тем, что в отличие от ОДУ передаточная матрица дескрипторной системы оказывается неправильной, т.е. суммой целой и строго правильной частей: $G(s) = G_{int}(s) + G_{prop}(s)$; это, в свою очередь, предопределяет заметные отличия в поиске стабилизирующего замкнутую систему регулятора.

Для метода критических корневых диаграмм и корневых многочленов разница заметна только в деталях [14]. Рассмотрим следующий пример.

Пример 3. Пусть передаточная функция объекта такова:

$$G_{pl}(s) = \frac{N_{pl}}{D_{pl}} = \frac{s^6 + 3s^5 + 12s^4 + 17s^3 + 28s^2 + 12s + 8}{s^4 - 2s^3 + 6s^2 - 8s + 8} =$$
$$= s^2 + 5s + 16 + \frac{27s^3 - 36s^2 + 100s - 120}{s^4 - 2s^3 + 6s^2 - 8s + 8}.$$

Знаменатель объекта $D_{pl} = s^4 - 2s^3 + 6s^2 - 8s + 8 = (s^2 - 2s + 2)(s^2 + 4)$ имеет два неустойчивых полюса $z_{1,2} = 1 \pm i$ и два полюса $z_{3,4} = \pm 2i$ на границе устойчивости; задаваемая их мнимыми частями колебательность также достаточно велика.

ПИ3-регулятор с передаточной функцией

$$Co(s) = \frac{N_{co}}{D_{co}} = (as^3 + bs^2 + cs + d)/s^3$$

задаёт передаточную функцию замкнутой системы

$$W(s) = \frac{G_{pl}(s)Co(s)}{1 + G_{pl}(s)Co(s)} = \frac{N_{pl}N_{co}}{N_{pl}N_{co} + D_{pl}D_{co}}$$

и её характеристический многочлен

$$\chi(s) = N_{pl}N_{co} + D_{pl}D_{co} = as^9 + (3a + b)s^8 + \ldots + (8c + 12d)s + 8d.$$

Замкнутая система стабилизируема; например, при числителе $N_{co} = s^3 + 2s^2 + 14s + 18$ степень устойчивости системы равняется 0,176, т.к.

крайние правые полюса здесь $p_{1,2} \approx -0,176 \pm 0,615i$, а остальные характеристические корни $z_{3,\ldots,9}$ расположены левее (самые правые полюса мы переобозначили, а нумерацию сохранили). Стоит отметить, что это оказывается возможным за счёт неправильности передаточной функции и устойчивости числителя объекта N_{pl}: и его степень, и численный вклад в коэффициенты характеристического многочлена $\chi(s)$ выше, чем знаменателя D_{pl}. Поиск локальных и глобального экстремумов четырёхпараметрической функции $H(a,b,c,d)$ с помощью критических корневых расположений требует рассмотрения 13 корневых диаграмм и 10 различных корневых многочленов [3, 14], (последних меньше, т.к. некоторым диаграммам соответствует один и тот же корневой многочлен). Вместо графического изображения корневых диаграмм мы будем использовать их коды.

1) Случай пяти простых комплексно-сопряжённых пар с одинаковой действительной частью на правой границе при отсутствии на ней действительных корней здесь невозможен, т.к. он требует многочлена как минимум 10-й степени; его код был бы $\langle 011111 \rangle$ — левое число 0 здесь относится к граничному действительному корню, а простые комплексные пары на границе обозначены единицами в порядке возрастания модулей мнимых частей.

Теоретически допустимый случай $\langle 11111 \rangle$, требующий простоты всех полюсов системы — от простого действительного корня p_0 до четырёх комплексных пар $p_{2k-1,2k} = p_0 \pm y_k i,\ k = 1,2,3,4$, расположенных на одной вертикали $\operatorname{Re} p_{2k-1,2k} = p_0$, — здесь не реализуется на при каких значениях a, b, c, d.

2) Простейший вариант критического корневого расположения для четырёх свободных параметров включает пятикратный действительный корень $p_{0,\ldots,4}$, который должен оказаться правее остальных. Код критической диаграммы $\langle 5 \rangle$, корневой многочлен принимает форму $r(s) = (s-x)^5$. При делении характеристического многочлена $\chi(s)$ на корневой $r(s)$ получается остаток степени 4. Поскольку реализация корневого расположения требует деления нацело, коэффиенты остатка при степенях s нужно приравнять к нулю:

$$\begin{aligned} eq_0 = &(70x^9 + 105x^8 + 180x^7 + 85x^6 + 28x^5)a + \\ &+(35x^8 + 45x^7 + 60x^6 + 17x^5 + 85x^4)b + \\ &+(15x^7 + 15x^6 + 12x^5)c + (5x^6 + 3x^5 + 8)d + \\ &+15x^7 - 10x^6 + 6x^5 = 0; \end{aligned}$$

$$\ldots$$

$$\begin{aligned} eq_4 =&(126x^5+210x^4=420x^3+255x^2+140x+12)a+\\ &+(70x^4+105x^3+180x^2+85x+28)b+\\ &+(35x^3+45x^2+60x+17)c+(15x^2+15x+12)d+\\ &+35x^3-30x^2+30x-8=0. \end{aligned}$$

Стандартная численная процедура решения полиномиальной системы уравнений приводит к неустойчивому значению $x \approx 0,2697$.

Однако из уравнений $eq_{3,4}=0$ можно выразить параметры c и d, подставить их выражения в остальные и получить систему трёх уравнений, после чего появляется решение $x \approx -2,8517$, допускающее устойчивость. Соответствующий характеристический многочлен таков:

$$\chi(s) \approx s^9+15,4939s^8+104,1621s^7+408,9562s^6+1073,7682s^5+$$

$$+2006,5316s^4+2604,8637s^3+2132,5753s^2+1045,3718s+371,6528.$$

Его корни включают две комплексные пары, в том числе $p_{1,2} \approx -0,1921 \pm 0,6368i$ а также близкую к пятикратному корню группу

$z_{5,6} \approx -2,7859 \pm 0,0471i$; $z_{7,8} \approx -2,8761 \pm 0,0784i$; $z_9 \approx -2,9345$.

Разброс корней не должен казаться чрезмерным из-за достаточно высокой степени и больших коэффициентов характеристического уравнения.

Степень устойчивости здесь немного больше, чем для приведённого выше случая, но критическое корневое расположение не возникает (можно назвать его зеркальным отражением критического): “почти пятикратный” корень оказывается не справа, а слева от остальных. Это позволяет смещать правую комплексную пару влево, уменьшая значение функции $H(a,b,c,d)$ за счёт лучшего выбора параметров регулятора.

3) Критическая корневая диаграмма реализуется для случай трёхкратной комплексной пары; её код $\langle 0\ 3\rangle$, а корневой многочлен $r(s) = (s^2-2xs+x^2+y^2)^3$. Решение системы полиномиальных уравнений приводит к локальному минимуму гурвицевой функции $H(\bar{p}) \approx \operatorname{Re} p_{1,\dots,6} \approx -0,299)$, достигающемся при почти трёхкратной комплексной паре $p_{1,2} \approx -0,2990 \pm 1,0270i$, $p_{3,4} \approx -0,2996 \pm 1,0260i$, $p_{5,6} \approx -0,3002 \pm 1,0270i$. Тройка остальных корней расположена левее.

4) Немного улучшить полученное значение позволяет корневой многочлен $r(s) = (s-x)^2(s^2-2xs+x^2+y^2)^2$ соответствующий критической корневой диаграмме с кодом $\langle 2\ 2\rangle$, предполагающей расположение двукратных действительного корня и комплексной пары на одной вертикали. Хотя в этом случае $H(\bar{p}) \approx -0,3974$, сама критическая корневая диаграмма не реализуется: близкое к заданному расположение полюсов на одной вертикали оказывается левее при $-0,6653 \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant -0,6658$.

5) Наилучший результат найден при таком расположении: крайними правыми полюсами должны быть простой действительный корень, двукратная комплексная и простая комплексная пары с одинаковой действительной частью; код критической корневой диаграммы $\langle 1\ 2\ 1\rangle$; корневой многочлен

$$r(s) = (s-x)(s^2-2xs+x^2+y^2)^2(s^2-2xs+x^2+z^2).$$

Остаток от деления характеристического многочлена на корневой имеет 6-ю степень, и система полиномиальных уравнений приводит к значению $x \approx -0,4428$. Характеристический многочлен получается таким:

$$\chi(s) \approx s^9 + 5,8725s^8 + 22,7308s^7 + 55,4948s^6 + 99,9727s^5 + \\ + 118,9505s^4 + 96,4126s^3 + 50,7152s^2 + 16,4251s + 2,4783.$$

Множество правых корней с высокой точностью реализует критическую корневую диаграмму:

$$\begin{aligned} p_0 &\approx -0,44282, \\ p_{1,2} &\approx -0,44281 \pm 0,54371i, \\ p_{3,4} &\approx -0,44283 \pm 0,54379i, \\ p_{5,6} &\approx -0,44282 \pm 2,16780i. \end{aligned}$$

Здесь, по всей видимости, достигается глобальный минимум гурвицевой функции. Как и в случае 3), попытки градиентного спуска из найденных точек не выходили из окрестности найденных значений. Численное моделирование переходных процессов подавления возмущения — квадратного импульса $w = \mathrm{Heviside}(t) - \mathrm{Heviside}(t-1)$ — подтвердило устойчивость и безымпульсность замкнутой системы [14].

4 Алгебраическая аппроксимация и стабилизация систем с запаздыванием

В заключение продемонстрируем применение критических корневых диаграмм и корневых многочленов для получения результатов другого рода: как свидетельство невозможности удовлетворительного управления системой с помощью регулятора слишком бедной структуры. Обратимся к известной модели атомно-силового микроскопа [15]. Как указывают авторы, управляющая кантилевером сканирующего острия пьезосистема “стабилизируется после плохо затухающих колебаний”; за счёт этих колебаний возникает важная особенность модели: запаздывание отклика системы на управляющее воздействие. Их коррекция осуществляется с помощью ПИ-регулятора, настраиваемого вручную. Системы управления с запаздыванием привлекают свою долю внимания в научной литературе; во многих учебниках по теории автоматического управления системам с запаздыванием отведена глава или параграф. Однако полные и подробные изложения этой проблематики почти не встречаются, и большая книга [16] представляет собой одно из немногих исключений. Применение алгебраических методов к исследованию систем с запаздыванием затрудняется наличием в передаточной функции замкнутой системы множителя $\exp(-\tau s)$, где τ — характерное время задержки в поступлении данных о контролируемой величине или в ответе на контролирующее воздействие:

$$y = (I + G(s)C(s))^{-1}G(s)C(s)\exp(-\tau s)u.$$

И хотя для экспоненты существуют различные способы полиномиальной аппроксимации (от формулы Тэйлора до рациональных дробей Паде), введение аппроксимирующих множителей в передаточную функцию повышает порядок её числителя и знаменателя в соответствии с выбранной точностью, усугубляя сложности в отыскании стабилизирующего управления, в том числе регуляторов пониженного порядка.

Пример 4. Передаточная функция кантилевера микроскопа, определённая экспериментальным подбором звеньев второго порядка, имеет вид

$$G(s) = \\ = \frac{k(w_2w_3w_5)^2(s^2+2C_1w_1s+w_1^2)(s^2+2C_4w_4s+w_4^2)e^{-\tau s}}{(w_1w_4)^2(s^2+2C_2w_2s+w_2^2)(s^2+2C_3w_3s+w_3^2)*(s^2+2C_5w_5s+w_5^2)}.$$

В качестве единицы времени возьмём 10^{-4} сек., подставим указанные в [15] числовые параметры объекта и аппроксимационную формулу Паде для экспоненты $E_{1,2} = \dfrac{-2s+6}{s^2+4s+6}$. Замыкание контура обратной связи ПИ-регулятором $Co = (as+b)/s$ приводит к такому характеристическому многочлену:

$$\begin{aligned}\chi(s) \approx\ & s^9 + 4,815s^8 + 62,952s^7 + (244,517 - 1881,196a)s^6 + \\ & + (5296,083a - 1881,196b + 1128,852)s^5 + \\ & + (5296,083b - 9935,283a + 3081,942)s^4 + \\ & + (31925,471a - 9935,283b + 6178,419)s^3 +\end{aligned}$$

$$+ (31925,471b - 12175,353a + 6702,038)s^2 +$$
$$+ (45597,368a - 12175,353b + 9119,473)s + 45597,368b.$$

Поскольку параметры регулятора не входят в коэффициенты при 8-й степени, изменить среднее арифметическое значений полюсов и заметно повлиять на степень устойчивости системы ПИ-регулятор не может. В самом деле, лучший из найденных результатов получился для критической корневой диаграммы $\langle 1\ 1\ 1\rangle$ — действительного корня на одной вертикали с двумя простыми комплексными парами; соответствующий корневой многочлен $r(s) = (s-x)(s^2-2xs+y_1)(s^2-2xs+y_2)$. Степень устойчивости $\alpha \approx 0,047$ при значениях параметров $a \approx -0,0082$, $b \approx 0,0086$ доставляет минимум гурвицевой функции; она задаётся пятёркой корней $p_0 \approx -0,04707$, $p_{1,2} \approx -0,04707 \pm 1,6339i$, $p_{3,4} \approx -0,04707 \pm 3,779i$. При этом степень устойчивости разомкнутой (нерегулируемой) системы незначительно лучше: она задаётся простой комплексной парой $p_{1,2} \approx -0,04900 \pm 1,6329i$, что вполне естественно для таких малых значений параметров управления, особенно в сравнении с коэффициентами характеристического многочлена. Этот результат подтверждает известный эффект снижения показателей устойчивости при введении интегрального регулирования (т.к. дополнительной задачей регулятора оказывается смещение влево полюса $z = 0$, возникающего при введении интегратора).

Таким образом, единственным “достижением” ПИ-регулятора в данном случае оказывается реализация критической корневой диаграммы, а естественный вывод заключается в использовании регулятора более богатой структуры. А поскольку проблемой является гашение медленно затухающих колебаний, в качестве целевой стоит взять коническую или гиперболическую функции [2], что является предметом отдельного исследования.

5 Заключение

Сделаем некоторые выводы из рассмотренных примеров.

Главный из них — подтверждение хорошо известного свойства алгебраического подхода: высокой общности. Развитая для классических САУ в частотной области техника критических корневых диаграмм оказалась с небольшими изменениями применима к ОДУ системам, в пространстве состояний существенно отличающимся от классических, и ДАУ системам. Ещё один аргумент в пользу сказанного дают работы С. А. Гайворонского и его сотрудников, в последние годы применивших технику критических корневых диаграмм к интервальных системам и технически сложным объектам [17, 18].

Хорошо известны и постоянно дают о себе знать и теневые стороны алгебраического подхода. С одной стороны, это недостаточная разработанность численных методов решения систем полиномиальных уравнений, что проявляется в трудности обнаружения множественности решений стандартными процедурами, в расходимости вычислительного процесса в случаях, когда решение удаётся обнаружить после некоторых преобразований, и др. С другой стороны, это невозможность уловить в расположениях полюсов и корневых показателях качества особенности переходных процессов и специфику моделей, не говоря уже о деталях практического синтеза САУ и функционирования реальных объектов.

Всё же за счёт применения корневых диаграмм и многочленов в ряде примеров удалось решить главные задачи: выяснить возможность стабилизации САУ регулятором пониженного порядка и определить его оптимальные или субоптимальные настройки, причём осуществлено это для систем с объектами достаточно высокого порядка, труднодоступных для исследования другими методами. Алгебраические инструменты в нескольких типичных случаях позволили преодолеть сочетание невыпуклости, недифференцируемости, многоэкстремальности и овражного рельефа R-градуировок, к оптимизации которых приводит поиск управления пониженного порядка. Частично представленная в разделе работа [14] оказывается едва ли не первой, где синтез регулятора осуществляется чисто алгебраическими средствами. Нельзя не согласиться с авторами книги [1], которые пишут, что "в целом проблема синтеза стабилизирующих регуляторов заданной структуры весьма сложна; сказать заранее, можно ли данный объект сделать устойчивым с помощью регулятора низкого порядка, не удаётся" (с. 125). Тем не менее, вышеприведённые примеры, как и несколько других, оставшихся за рамками обзора, дают основания для некоторого оптимизма.

Автор считает приятным долгом поблагодарить проф. А. А. Воеводу и доц. А. Н. Корюкина — своих коллег, многолетнее сотрудничество с которыми дало возможность развить технику R-градуировок и критических корневых диаграмм в синтезе САУ, а также проф. Т. Дамма (Технический университет Кайзерслаутерна) и проф. Шт. Тренна (Университет Гронингена), обративших внимание автора на возможность применения алгебраического подхода к неклассическим динамическим системам и познакомившими его с проблемами и методами в этих областях.

Список литературы

[1] B. T. Polyak, M. V. Khlebnikov, L. B. Rapoport, Mathematical theory of automatic control, [Matematicheskaja teorija avtomaticheskogo upravlenija], Moscow : URSS, 2019. (Russian)

[2] A. V. Chekhonadskikh, Root coordinates in the design of SISO control systems, Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing, **51**, 5 (2015), 485–495.

[3] A. V. Chekhonadskikh, Some classical number sequences in control system design, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 620–628.

[4] A. V. Chekhonadskikh, Extremal pole placement in control systems with a low order controller, Automation and Remote Control, **75**, 10 (2014), 1717–1731.

[5] A. N. Koryukin, A. V. Chekhonadskih, Extreme root locations of real polynomials and stabilization of 3-mass control system, Algebra and model theory 8, coll. of papers, Novosibirsk : NSTU publ., 2011, 19–39.

[6] T. Damm, J. Homeyer, Gyroscopic Stabilization of 2^{nd}-Order-Systems with Indefinite Damping, Proc. Appl. Math. Mech. **11** (2011), 811–812.

[7] W. Kliem, C. Pommer, Indefinite damping in mechanical systems and gyroscopic stabilization, Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Physik, **60**, 4 (2009), 785–795.

[8] A. V. Chekhonadskikh, Optimal gyroscopic stabilizer of a multidimensional vibration system [Optimal'nyj giroskopicheskij stabilizator mnogomernoj vibracionnoj sistemy], Analysis and data processing systems, [Sistemy analiza i obrabotki dannyh], **2(86)** (2022), 81–94. (Russian)

[9] A. A. Belov, A. P. Kurdyukov, Descriptor Systems and Control Problems [Deskriptornye sistemy i zadachi upravlenija], Moscow : Fizmatlit, 2015. (Russian)

[10] Th. Berger, T. Reis, S. Trenn, Observability of linear differential-algebraic systems: A survey, Surveys in Differential-Algebraic Equations IV, Ed. by A. Ilchmann and T. Reis, Springer, Cham, 2017, 161–219.

[11] Yu. Feng, M. Yagoubi, Linear time-invariant descriptor systems, Robust Control of Linear Descriptor Systems, Springer, Singapore, 2017, 7–22.

[12] R. Altmann, J. Heiland, Simulation of multibody systems with servo constraints through optimal control, Multibody Syst. Dyn., **60** (2017), 75–98.

[13] S. Otto, R. Seifried, Open-loop control of underactuated mechanical systems using servo-constraints: Analysis and some examples, Applications of Differential-Algebraic Equations: Examples and Benchmarks, Ed. by S. Campbell, A. Ilchmann, V. Mehrmann, T. Reis. Springer, Cham, 2019, 81–122.

[14] A. V. Chekhonadskikh, Polynomial Design of Low-Order Controllers for SISO DAE Systems, Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing, **59**, 3 (2023), 372–381.

[15] K. J. Astrom, R. M. Murray, Feedback Systems, 2$^{\text{nd}}$ ed., Princeton: Princeton University Press, 2020

[16] W. Michiels, S.-I. Niculescu, Stability and Stabilization of Time-Delay Systems: An Eigenvalue-Based Approach, Philadelphia : SIAM, 2007.

[17] S. A. Gayvoronskiy, T. A. Ezangna, A. V. Sobol, Control systems synthesis of maximum robust stability degree based on vertex critical root diagrams [Sintez sistem upravlenija maksimal'noj robastnoj stepeni ustojchivosti na osnove vershinnyh kriticheskih kornevyh diagramm], Mechatronics, automation, control [Mehatronika, avtomatizacija, upravlenie], **24**, 10 (2023), 519–525. (Russian)

[18] S. A. Gayvoronskiy, A. V. Sobol, Maximizing the robust stability degree of system with interval characteristic polynomial [Maksimizacija robastnoj stepeni ustojchivosti sistemy s interval'nym harakteristicheskim polinomom], Proceedings of Tomsk Polytechnic University. Industrial cybernetics [Izvestija Tomskogo politehnicheskogo universiteta. Promyshlennaja kibernetika], **1**, 1 (2023), 39–43. (Russian)

GENERATING THE DIRECT POWERS OF A BOOLEAN LATTICE WITH AN EXTRA 0

G. Czédli*

University of Szeged, Bolyai Institute
Szeged, Aradi vértanúk tere 1, Hungary, 6720
e-mail: czedli@math.u-szeged.hu

1 Introduction

In this paper, the author gives an account on the progress after his online talk at the 15th International Summer-School Conference "Problems Allied to Universal Algebra and Model Theory", Novosibirsk–Erlagol, June 21, 2023. The content of this talk is covered by [4] together with its references and, at the time of writing, the slides of the talk are available from the author's website. Furthermore, we present some new results; see Theorem 2.3 and Corollary 2.4, exemplified by (21) and (22).

For a natural number $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}^+ \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$, let $B_n = (B_n; \vee, \wedge)$ denote the 2^n-element Boolean lattice. As we make no difference between two isomorphic algebraic structures, we often think of B_n as the powerset lattice $\mathsf{P}([n]) = (\mathsf{P}([n]); \cup, \cap)$ of the set $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ or as the direct power B_1^n. A subset X of a finite lattice L *generates* L if each element of L can be obtained by applying a lattice term (built from joins and meets) to appropriate elements of X.

$$\text{Let } \gamma(L) \text{ denote the least number } n \in \mathbb{N}_0 \text{ such that there is an } n\text{-element subset of } L \text{ that generates } L. \tag{1}$$

In [3] and [4], we have pointed out that large lattices L with many small generating subsets give rise to authentication and cryptographic protocols. If $\gamma(L)$ is small but L is large then L has many small generating subsets and it is a candidate to be the underlying lattice of the protocols described

*This research was supported by the National Research, Development and Innovation Fund of Hungary, under funding scheme K 138892.

in [3] and [4]; this constitutes one of our motivations. Another motivation is supplied by more than a dozen papers devoted to small generating sets of certain lattices; in addition to the survey parts of [3] and [4], here we mention only an early result by Gelfand, and Ponomarev [9] which was quoted by Zádori [16] when he proved an analogous result.

As usual, we refer to *partially ordered sets* by their widely spread synonym, *posets*. For posets $X_0 = (X_0; \leq_{X_0})$, $X = (X; \leq_X)$, and $Y = (Y; \leq) = (Y; \leq_Y)$ such that $X \subseteq Y$, $\leq_X$ is the intersection of X^2 with $\leq_Y$, and X is isomorphic to X_0, we are going to call X a *copy* of X_0 in Y. For $y_1, y_2 \in Y$, let $y_1 \parallel y_2$ stand for the conjunction of $y_1 \nleq y_2$ and $y_2 \nleq y_1$. If X and X' are copies of X_0 in Y such that $x \parallel x'$ for all $x \in X$ and $x' \in X'$, then X and X' are said to be *incomparable copies* or, in other words, *unrelated copies* of X_0 in Y. Note that Y is often a lattice in which, as usual, $y \leq y'$ means that $y = y \wedge y'$.

Denote by $\sigma(X_0, Y)$ the maximum number of pairwise incomparable copies of X_0 in Y. (2)

As B_0 is the singleton poset, Sperner's classical theorem asserts that, for $n \in \mathbb{N}_0$, $\sigma(B_0, B_n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$; see [15]. As for our notation, the lower number in the binomial coefficient is the *lower integer part* of $\frac{n}{2}$; note at this point that $\lceil x \rceil$ will stand for the *upper integer part* of x. Note also that γ and σ in (1) come (2) from $\underline{g}$enerating and $\underline{S}$perner, respectively. Results on $\sigma(X_0, Y)$ are called *Sperner theorems* (not to be confused with Sperner's theorem); see, e.g., Dove and Griggs [8], Griggs, Stahl, and Trotter [11], and Katona and Nagy [12] for examples, and see also [5] and [6], which came to existence after the afore-mentioned conference talk.

In [4] and the conference talk, we proved that $\gamma(B_k)$ is the smallest $n \in \mathbb{N}_0$ such that $k \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. In other words, $\gamma(B_1^k) = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : k \leq \sigma(B_0, B_n)\}$. Hence, we can easily determine $\gamma(B_n)$ for, say, $n = 10^{3000}$ while the trivial algorithm that lists all subsets and checks which of them are generating ones would not be feasible even for $n = 20$.

For a finite lattice D, $J(D)$ stands for a *poset of join-irreducible elements* of D; an element is *join-irreducible* if it covers exactly one element, and the order (relation) of $J(D)$ is the restriction of the order of D to $J(D)$. The main result of [5] extends the second formulation of the just-mentioned result on Boolean lattices to all finite distributive lattices as follows.

For any finite distributive lattice D and $k \in \mathbb{N}^+$, $\gamma(D^k)$ is the least $n \in \mathbb{N}^+$ such that $k \leq \sigma(J(D), B_n)$. (3)

The "conference talk result" on $\gamma(B_k)$" is a consequence (3) and Sperner's theorem. For any finite poset X, Dove and Griggs [8] and, independently, Katona and Nagy [12] determined $\sigma(X, B_n)$ asymptotically as $n \to \infty$. Katona and Nagy [12] and, recently, [5] have determined $\sigma(X, B_n)$ for some particular posets X while, for some other particular posets X, [5] and [6] have supplied estimates for $\sigma(X, B_n)$ that are reasonable even when n is small. For $n \in \mathbb{N}_0$,

let $B_{n,0}$ denote the (2^n+1)-element lattice that we obtain by adding a new least element to B_n. (4)

So $B_n = B_{n,0} \setminus \{0\}$ is a 2^n-element sublattice (in fact, a filter) of $B_{n,0}$. For $J(B_{1,0})$, which is the 2-element chain, Griggs, Stahl, and Trotter [11, Theorem 2] (valid for all finite chains) applies; so we know that $\sigma(B_{1,0}, B_n) = \binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$ for $i \in \{0, 1\}$. For the value of $\sigma(J(B_{2,0}), B_n)$, Katona and Nagy [12] give a conjecture, which we are going to recall later. Only estimates are proved for $\sigma(J(B_{3,0}), B_n)$ in [5] but, for many k's,

even these estimates are sufficient to obtain $\gamma(B_{3,0}^k)$ exatly; (5)

for example, if $k = 3 \cdot 10^{606}$, then $\gamma(B_{3,0}^k) = 2023$. In the next section, letting r be any positive integer larger than 1, we give estimates that are sufficient to obtain information on $\gamma(B_{r,0}^k)$ and, if $r \le 4$, to determine it in many cases.

2 Results

Definition 2.1. If X is a finite poset and f and g are $\mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}_0$ functions such that $f(n) \le \sigma(X, B_n) \le g(n)$ for all $n \in \mathbb{N}^+$, then (f, g) is a *pair of estimates* of the function $\sigma(X, B_n)$. If, in addition, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ and $g(n) \le f(n+1)$ for all $n \in \mathbb{N}^+ \setminus [n_0]$ then we say that (f, g) is a *pair of reasonable estimates* of $\sigma(X, B_n)$ on $\mathbb{N}^+ \setminus [n_0]$. If $n_0 = 0$ then we drop it. The case when the common domain of f, g, and $\sigma(X, B_n)$ is of the form $\{r, r+1, r+2, \dots\}$ is analogous.

The following fact is trivial, it was used (in a more involved terminology) in [5] and [6], and it will be exemplified later in the proof of Corollary 2.4.

Fact 2.2. *Assume that D is a finite distributive lattice and (f, g) is a pair of reasonable estimates of $\sigma(J(D), B_n)$. Then for any $2 \le k \in \mathbb{N}^+$, if $n = n_k$ denotes the smallest integer such that $k \le f(n)$ then $\gamma(D^k) \in \{n-1, n\}$.*

Next, to ease the notation in what follows,

for $r \in \mathbb{N}^+$, let $F^{(r)} := J(B_{r,0})$; it consits of a smallest element z and r maximal elements, $u_1, \dots, u_r$.

Before defining some functions below, let us emphasize that, by convention, $\binom{x}{y} = \dfrac{x!}{y!(x-y)!)} \in \mathbb{N}^+$ if $x, y \in N_0$ such that $x \le y$ but

$$\binom{x}{y} := 0 \quad \text{in any other case like } y < 0 \text{ or } x < y. \tag{6}$$

In addition to $r \in \mathbb{N}^+$, let p be an integer parameter. For $n \in \mathbb{N}^+$, we define

$$\begin{aligned} f_r^{(p)}(n) := \sum_{i=0}^{\lfloor n/r\rfloor -1} \sum_{\substack{(w_2,\dots,w_r)\in\{0,\dots,i\}^{r-1}\\ w_2+\dots+w_r=i}} \frac{i!}{w_2!\dots w_r!} \times \\ \times \binom{n-(i+1)r}{1-p+\lfloor (n-r)/2\rfloor - 2w_2 - 3w_3 - \dots - rw_r} \cdot \prod_{\beta=2}^{r} \binom{r}{\beta}^{w_\beta} \end{aligned} \tag{7}$$

$$\text{and} \qquad f_r(n) := \max\{f_r^{(p)}(n) : p \in \{-r, -r+1, \dots, r\}\}. \tag{8}$$

We define the counterpart $g_r(n)$ of $f_r(n)$ only for $r \in \{2,3,4\}$; note that only $g_4(n)$ is new since $g_2(n)$ and $g_3(n)$ are taken from [5]. So let

$$\begin{aligned} g_2(n) &:= \left\lfloor \left(1 + \frac{2n-3\lfloor n/2\rfloor - 1}{2n - \lfloor n/2\rfloor - 1}\right) \cdot \binom{n-2}{\lfloor (n-2)/2\rfloor} \right\rfloor, \\ g_3(n) &:= \left\lfloor \frac{n}{3n-2-2\lfloor n/2\rfloor} \cdot \binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2\rfloor} \right\rfloor, \text{ and} \\ g_4(n) &:= \left\lfloor \frac{\lceil n/2\rceil}{4n-3\lfloor n/2\rfloor - 3} \cdot \binom{n}{n/2} \right\rfloor. \end{aligned} \tag{9}$$

Note that $f_r(n)$ is defined in a simpler way in [5] than here. For $r \in \{2,3\}$, all the three parts of the theorem below have been proved in [5]. Further comments on the relation of this theorem to earlier results and methods will be enlightened in the last paragraph of Section 4.

Theorem 2.3. *Let $r, n \in \mathbb{N}^+$ such that $2 \le r \le n$.*

(A) *$f_r(n) \le \sigma(F^{(r)}, B_n)$.*

(B) *Keeping r fixed, $f_r(n)$ is asymptotically $\sigma(F^{(r)}, B_n)$, that is, we have $\lim_{n\to\infty} \sigma(F^{(r)}, B_n)/f_r(n) = 1$.*

(C) *For $r \in \{2,3\}$ and $n \in \mathbb{N}^+ \setminus [r]$, and also for $r = 4$ and $n \in \mathbb{N}^+ \setminus [6]$, (f_r, g_r) is a reasonable pair of estimates of $\sigma(F^{(r)}, B_n)$ in the sense of Definition* 2.1 *and, furthermore, $g_r(n)$, $f_r(n)$, and $\sigma(F^{(r)}, B_n)$ are asymptotically equal.*

To make the connection between this theorem and the title of the paper conspicuous we formulate the following corollary right here.

Corollary 2.4 ([5]). (A) *Let $r, k \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$. If n denotes the smallest natural number such that $k < f_r(n)$ then $\gamma(B^k_{r,0}) \le n$; in particular, the direct power $B^k_{r,0}$ has an n-element generating set.*

(B) *Let $r \in \{2, 3, 4\}$ and $6 \le k \in \mathbb{N}^+$. Again, let n be the smallest natural number such that $k < f_r(n)$. Then either $g_r(n-1) < k$ and $\gamma(B^k_{r,0}) = n$, or $k \le g_r(n-1)$ and $\gamma(B^k_{r,0}) \in \{n-1, n\}$.*

3 Proofs

Proof of Theorem 2.3. Let A be an n-element set and denote $\lfloor n/r \rfloor$ by q. Split A into (pairwise disjoint) r-element subsets $A_0, \dots, A_{q-1}$ and an $(n - r\lfloor n/r \rfloor)$-element remainder set A_q. (If r divides r, then $A_q = \emptyset$ and the partition is $\{A_0, \dots, A_{q-1}\}$.) The elements of A_i will be denoted by $u^{(i)}_1, \dots, u^{(i)}_r$. For a given $i \in \{0, \dots, q-1\}$ and $(w_2, \dots, w_r) \in \{0, \dots, i\}^{r-1}$ such that $w_2 + \dots + w_r = i$ pick a vector $\vec{s} := (s_0, \dots, s_{i-1}) \in \{2, \dots, r\}^i$ such that w_2 many components of $\vec{s}$ equal 2, w_3 many equal 3, ..., $|\{\iota : s_\iota = r\}| = w_r$. There are $\dfrac{i!}{w_2! \dots w_r!}$ ways to pick such an $\vec{s}$, and this is why $\dfrac{i!}{w_2! \dots w_r!}$ occurs in (7). For $\alpha \in \{0, \dots, i-1\}$, pick an s_α-element subset B_α of A_α; this can be done in $\dbinom{r}{s_\alpha}$ many ways. Observe that $\prod_{\alpha=0}^{i-1} \binom{r}{s_\alpha}$ is the same as $\prod_{\beta=2}^{r} \binom{r}{\beta}^{w_\beta}$ in (7), whence the latter shows how many ways $(B_0, \dots, B_{i-1})$ can be chosen. Letting $z := 1 - p + \lfloor (n-r)/2 \rfloor$ we also pick a $(z - 2w_2 - 3w_3 - \dots - rw_r)$-element subset B_i of $A_{i+1} \cup \dots \cup A_q$. Note that

$$|B_i| = z - 2w_2 - 3w_3 - \dots - rw_r = z - s_0 - s_1 - \dots - s_{i-1}. \tag{10}$$

Since $A_{i+1} \cup \dots \cup A_q = A \setminus (A_0 \cup \dots A_i)$ consists of $n - (i+1)r$ elements, the first binomial coefficient in (7) shows how many ways we can choose B_i. (As (6) shows, "no way" is possible but it does not disturb our argument.) Now let $\vec{B} := (B_0, \dots, B_i)$. We call any vector obtained in this way an *eligible set vector*. For a given $\vec{s}$, the second line of (7) shows how many ways we can pick $\vec{B}$ while its first line shows how many ways i and $(w_2, \dots, w_r)$ can be chosen. Furthermore, $\vec{B}$ determines $\vec{s} = (|B_0|, \dots, |B_{i-1}|)$, $(w_2, \dots, w_r)$, and i, whereby it follows that (7), that is $f^{(p)}_r(n)$, is the number of eligible set vectors.

For an eligible set vector $\vec{B}$, let $Z_{\vec{B}}$ be the union of the components of $\vec{B}$. Then

$$\begin{gathered} B_0 = Z_{\vec{B}} \cap A_0, \dots, B_{i-1} = Z_{\vec{B}} \cap A_{i-1},\ B_i = Z_{\vec{B}} \cap (A_{i+1} \cup \dots \cup A_q), \\ \text{so the sets } B_0, \dots, B_i \text{ are pairwise disjoint and their union is } Z_{\vec{B}}. \end{gathered} \tag{11}$$

Since $\vec{B}$ determines i (the number of its components minus 1), we can write that $i = i(\vec{B})$. With $i = i(\vec{B})$, we define, for $\rho \in [r]$,

$$U_{\vec{B}}^{(\rho)} := Z_{\vec{B}} \cup \{u_\rho^{(i)}\}. \text{ Let } F_{\vec{B}}^{(r)} := \{Z_{\vec{B}}, U_{\vec{B}}^{(1)}, \dots, U_{\vec{B}}^{(r)}\}.$$

It follows from (11) that for any $\rho \in [r]$,

the sets $B_0, \dots, B_i$, and $\{u_\rho^{(i)}\}$ are pairwise disjoint and their union is $U_{\vec{B}}^{(\rho)}$.

It is clear by (10) and (11) that[1]

$$|Z_{\vec{B}}| = z, \text{ so it does not depend on } \vec{B}. \tag{12}$$

Since $Z_{\vec{B}} \cap A_i = \emptyset$, $F_{\vec{B}}^{(r)}$ is copy of $F^{(r)}$. Thus, in order to show that $f_r^{(p)}(n)$ is a lower bound of $\sigma(F^{(r)}, B_n)$ it suffices to show that whenever $\vec{C}$ is an eligible set vector different from $\vec{B}$ then $F_{\vec{B}}^{(r)}$ and $F_{\vec{C}}^{(r)}$ are unrelated. To do so, let $j := i(\vec{C})$, the number of components of $\vec{C}$ minus 1; then we can write that $\vec{C} = (C_0, \dots, C_j)$. Assume that $X \in F_{\vec{B}}^{(r)}$ and $Y \in F_{\vec{C}}^{(r)}$. Our task it to show that $X \parallel Y$. Depending on i and j, there are two cases to consider: either $i = j$ or, by symmetry, $i < j$.

Case 1 (where $i = j$). As $\vec{B} \neq \vec{C}$, there is an $\alpha \in \{0, \dots, i\}$ such that $B_\alpha \neq C_\alpha$. If $B_\alpha \parallel C_\alpha$ then $X \cap A_\alpha = B_\alpha \parallel C_\alpha = Y \cap A_\alpha$ implies that $X \parallel Y$ provided that $\alpha < i$. Changing "$\cap A_\alpha$" to "$\cap (A_{i+1} \cup \dots \cup A_q)$", we draw the same conclusion if $\alpha = i$. Hence, we can assume that B_α and C_α are comparable, say, $B_\alpha \subset C_\alpha$. Then $|B_\alpha| < |C_\alpha|$ which together with $|B_0| + \dots + |B_i| = |Z_{\vec{B}}| = z = |Z_{\vec{C}}| = |C_0| + \dots + |C_i|$ yield a subscript $\beta \in \{0, \dots, i\} \setminus \{\alpha\}$ such that $|C_\beta| < |B_\beta|$. Now $X \subseteq Y$ would lead to $B_\beta = X \cap A_\beta \subseteq Y \cap A_\beta = C_\beta$ contradicting the inequality $|C_\beta| < |B_\beta|$ while $Y \subseteq X$ would similarly violate that $|B_\alpha| < |C_\alpha|$. Thus, $X \parallel Y$ and $F_{\vec{B}}^{(r)}$ is unrelated to $F_{\vec{C}}^{(r)}$, completing Case 1.

Case 2 (where $i < j$]) As $Y \cap A_i = C_i$ has at least two elements but $X \cap A_i$ is either the empty set or it is a singleton set of the form $\{u_\rho^{(i)}\}$, we have that $Y \not\subseteq X$. For the sake of contradiction, suppose that $X \subset Y$. As $Z_{\vec{B}} \subseteq X$, we also have that $Z_{\vec{B}} \subset Y$. Let $Z_{\vec{B}}^{\rm up} = Z_{\vec{B}} \cap (A_{i+1} \cup \dots \cup A_q) = B_i$, $Z_{\vec{B}}^{\rm mid} = Z_{\vec{B}} \cap A_i$, and $Z_{\vec{B}}^{\rm dn} = Z_{\vec{B}} \cap (A_0 \cup \dots \cup A_{i-1})$. Using i again rather than j, let $Y^{\rm up} = Y \cap (A_{i+1} \cup \dots \cup A_q)$, $Y^{\rm mid} = Y \cap A_i$, $Y^{\rm dn} = Y \cap (A_0 \cup \dots \cup A_{i-1})$. Clearly,

[1]In addition to the fact that we do not use iteration and our construction is simpler, this is where our proof differs from that in Dove and Griggs where several "layers" are populated.

$Z^{\rm up}_{\vec{B}} \subseteq Y^{\rm up}$, $Z^{\rm mid}_{\vec{B}} \subseteq Y^{\rm mid}$, and $Z^{\rm dn}_{\vec{B}} \subseteq Y^{\rm dn}$. These inequalities together with the equalities $Z_{\vec{B}} = Z^{\rm up}_{\vec{B}} \cup Z^{\rm mid}_{\vec{B}} \cup Z^{\rm up}_{\vec{B}}$ and $Y = Y^{\rm up} \cup Y^{\rm mid} \cup Y^{\rm dn}$ imply that $Y \setminus Z_{\vec{B}} \supseteq Y^{\rm mid} \setminus Z^{\rm mid}_{\vec{B}} = C_i \setminus \emptyset = C_i$. Hence, $|Y| - |Z_{\vec{B}}| = |Y \setminus Z_{\vec{B}}| \geq |C_i| \geq 2$. This contradicts (12) since $|Y|$ differs from $|Z_{\vec{C}}|$ (and thus from $|Z_{\vec{B}}|$) by at most 1. The contradiction we have obtained shows that $X \parallel Y$, completing Case 2.

Having just seen that $F^{(r)}_{\vec{B}}$ and $F^{(r)}_{\vec{C}}$ are unrelated, we have proved that, for every meaningful p, $f^{(p)}_r(n)$ is a lower bound of $\sigma(F^{(r)}, B_n)$. So is the maximum $f_r(n)$ of these $f^{(p)}_r(n)$'s, proving part (A) of Theorem 2.3.

The proof of part (B) uses the previous notation $z := 1 - p + \lfloor (n - r)/2 \rfloor$ and the folkloric fact[2] that for any integers α and β, $\binom{n-\alpha}{\lfloor (n-\alpha)/2\rfloor - \beta}$ is asymptotically $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot 2^{-\alpha}$. So for every fixed $i \in \mathbb{N}^+$ and each small positive real number ϵ,

$$
\begin{aligned}
(1-\epsilon)\binom{n-(i'+1)r}{z-2w_2-3w_3-\cdots-rw_r} &< \\
2^{-(i'+1)r}\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} &< \qquad\qquad \text{for } i' \in \{0,1,\ldots,i\} \\
(1+\epsilon)\binom{n-(i'+1)r}{z-2w_2-3w_3-\cdots-rw_r} &
\end{aligned}
\tag{13}
$$

holds for all but finitely many n. Letting

$$
\kappa(n) := \sum_{i=0}^{\lfloor n/r \rfloor - 1} \sum_{\substack{(w_2,\ldots,w_r)\in\{0,\ldots,i\}^{r-1} \\ w_2+\cdots+w_r = i}} \frac{i!}{w_2! \ldots w_r!} 2^{-(i+1)r} \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \prod_{\beta=2}^{r} \binom{r}{\beta}^{w_\beta}
$$

and applying (13) to the inner summation in (7), we obtain

$$
(1-\epsilon) f^{(r)}_p(n) \leq \kappa(n) \leq (1+\epsilon) f^{(r)}_p(n). \tag{14}
$$

[2]This folkloric fact was used by, say, Dove and Griggs [8], Katona and Nagy [12], and [5, 6]

Using the multinomial theorem and $\sum_{\beta=0}^{r}\binom{r}{\beta}=2^r$, we get

$$\begin{aligned}\kappa(n)&=\frac{1}{2^r}\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\sum_{i=0}^{\lfloor n/r\rfloor-1}\frac{1}{2^{ir}}\sum_{\substack{(w_2,\dots,w_r)\in\{0,\dots,i\}^{r-1}\\ w_2+\dots+w_r=i}}\frac{i!}{w_2!\dots w_r!}\prod_{\beta=2}^{r}\binom{r}{\beta}^{w_\beta}\\ &=\frac{1}{2^r}\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\sum_{i=0}^{\lfloor n/r\rfloor-1}\frac{1}{2^{ir}}\Bigl(\sum_{\beta=2}^{r}\binom{r}{\beta}\Bigr)^i\\ &=\frac{1}{2^r}\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\sum_{i=0}^{\lfloor n/r\rfloor-1}\frac{1}{2^{ir}}(2^r-r-1)^i=\frac{1}{2^r}\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\sum_{i=0}^{\lfloor n/r\rfloor-1}\Bigl(\frac{2^r-r-1}{2^{ir}}\Bigr)^i.\end{aligned}$$

Adding to this calculation that $\sum_{i=0}^{\infty}\Bigl(\frac{2^r-r-1}{2^r}\Bigr)^i=\sum_{i=0}^{\infty}\Bigl(1-\frac{r+1}{2^r}\Bigr)^i=\frac{2^r}{r+1}$, we obtain

$$(1-\epsilon)\kappa(n)\le\frac{1}{2^r}\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\frac{2^r}{r+1}\le(1+\epsilon)\kappa(n). \tag{15}$$

Combining (14) with (15), we have

$$(1-\epsilon)^2f_r^{(p)}(n)\le\frac{1}{r+1}\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\le(1+\epsilon)^2f_r^{(p)}(n) \tag{16}$$

for all but finitely many n. Letting ϵ tend to 0, (16) implies that $f_r^{(p)}(n)$ is asymptotically $\frac{1}{r+1}\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$. Applying Katona and Nagy [12, Theorem 1.1] or Dove and Griggs [8, Theorem 1.4] to our poset $F^{(r)}$, we know that $\sigma(F^{(r)},B_n)$ is asymptotically $\frac{1}{r+1}\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$, too. Hence, part (B) of the theorem follows by transitivity.

Next, we turn our attention to the upper bounds. As the case $r\in\{2,3\}$ has been settled in [5], we restrict ourselves to the case $r=4$. For $4\le n\in\mathbb{N}^+$, let our base set $A:=[n]=\{1,2,\dots,n\}$ and let $k:=\sigma(F^{(4)},B_n)$. As it happened first in Lubell [13] and then in Griggs, Stahl, and Trotter [11], [5], and [6], and with some terminological change, in Bollobás [2], Dove and Griggs [8], and Katona and Nagy [12], we also define a set of permutations of $[n]$ as follows. For $X\subseteq A$,

let $\Psi(X)$ consist of all those permutations $\vec{\pi}=(\pi_1,\dots,\pi_n)$ that satisfy $\{\pi_1,\dots,\pi_{|X|}\}=X$. (17)

All the just listed papers use the obvious fact that for $X\parallel Y\in\mathsf{P}([n])$ we have $\Psi(X)\cap\Psi(Y)=\emptyset$. However, our situation needs some preparation. Let $W\subseteq\mathsf{P}([n])$ be a copy of $F^{(4)}$ and pick an order isomorphism $\varphi\colon F^{(4)}\to W$. (There are $4!=24$ such isomorphisms but no matter which one we take.) We call W a *cover-preserving copy* of $F^{(4)}$ if for all $x, y \in F^{(4)}$, if y covers x (in notation, $x \prec y$) then $\varphi(x) \prec \varphi(y)$. While this definition reflects generality, note that W_i is a cover-preserving copy of $F^{(4)}$ if and only if it is of the form

$$W_i = \{Z_i, Z_i \cup \{u_1^{(i)}\}, Z_i \cup \{u_2^{(i)}\}, Z_i \cup \{u_3^{(i)}\}, Z_i \cup \{u_4^{(i)}\}\} \tag{18}$$

where none of the elements $u_1^{(i)}$, $u_2^{(i)}$, $u_3^{(i)}$, and $u_4^{(i)}$ is in the set $Z_i \in \mathsf{P}(A)$ and these four elements are pairwise distinct. The key of our argument is the following statement, for the sake of which we interrupt the proof of Theorem 2.3.

Lemma 3.1. *If there are m pairwise unrelated copies of $F^{(4)}$ in B_n then there are m pairwise unrelated cover-preserving copies of $F^{(4)}$ in B_n, too.*

Note here that this lemma fails for $F^{(r)}$ if $r \geq 5$. (For $r = 5$, this is witnessed by a 5-element antichain in B_4 together with the bottom element.) This is why Part (C) of Theorem 2.3 is restricted to $r \leq 4$.

Proof of Lemma 3.1. As the first step in the argument, recall that the *convex hull* of an $X \subseteq \mathsf{P}(A)$ is $\mathrm{Cnv}(X) := \{R \in \mathsf{P}(A) : \exists S, T \in X$ such that $S \subseteq R \subseteq T\}$. Clearly, if X and Y are unrelated members of $\mathsf{P}(A)$, then $\mathrm{Cnv}(X)$ and $\mathrm{Cnv}(Y)$ are also unrelated; this fact was heavily used in Dove and Griggs [8] and in Katona and Nagy [12]. Assume that $W_1, \dots, W_m$ are pairwise unrelated copies of $F^{(4)}$ in $\mathsf{P}(A)$. If each of them is of the form (18) then there is nothing to prove. So, assume that W_i is not of this form for some $i \in [m]$. Then $W_i = \{Z_i, Z_i \cup U_1^{(i)}, Z_i \cup U_2^{(i)}, Z_i \cup U_3^{(i)}, Z_i \cup U_4^{(i)}\}$ for some sets $U_1^{(i)}, \dots, U_4^{(i)} \in \mathsf{P}(A)$ that are disjoint from Z_i and form an antichain. Letting $U := U_1^{(i)} \cup U_2^{(i)} \cup U_3^{(i)} \cup U_4^{(i)}$, the sets $U_1^{(i)}, \dots, U_4^{(i)} \in \mathsf{P}(A)$ are also in $\mathsf{P}(U)$ and they are pairwise unrelated. Hence, it follows from Sperner's theorem, see the sentence right after (2), that $|U| \geq 4$. Hence, we can simply take four distinct elements $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)}, u_4^{(i)} \in U$ and then

$$W_i' := \{Z_i, Z_i \cup \{u_1^{(i)}\}, Z_i \cup \{u_2^{(i)}\}, Z_i \cup \{u_3^{(i)}\}, Z_i \cup \{u_4^{(i)}\}\}$$

is such a copy of $F^{(4)}$ that is included in $\mathrm{Cnv}(W_i)$. Thus, we can change W_i to W_i' and we can do so for the rest of subscripts, one by one, until all the m copies of $F^{(4)}$ become cover-preserving. These copies remain pairwise unrelated, completing the proof of Lemma 3.1. □

Resuming the proof of Theorem 2.3, Lemma 3.1 allows us to assume that all W_i are cover-preserving copies, that is, (18) holds for all $i \in [k]$. For $i \in [k]$, based on (17), we let $\Phi_i := \bigcup_{X \in W_i} \Psi(X)$. For $i \neq j \in [k]$, $X \in W_i$, and $Y \in W_j$, we have that $\Psi(X) \cap \Psi(Y) = \emptyset$ by the fact mentioned right after (17). Hence, $\Phi_i \cap \Phi_j = \emptyset$. Letting $x_i := |Z_i|$, we know (either from

Lubell [13] or by a trivial argument) that $|\Psi(Z_i)| = x_i!(n-x_i)!$. Similarly, $|\Psi(Z_i \cup \{u_j^{(i)}\})| = (x_i+1)!(n-x_i-1)!$ for $j \in [4]$. A permutation $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ belongs to both $\Psi(Z_i)$ and $\Psi(Z_i \cup \{u_j^{(i)}\})$ if and only if $(\pi_1, \dots, \pi_{x_i})$ is a permutation of Z_i, this can happen in $x_i!$ many ways, $\pi_{x_i+1} = u_j^{(i)}$, and $(\pi_{x_i+2}, \dots, \pi_n)$ is a permutation of $[n] \setminus (Z_i \cup \{u_j^{(i)}\})$, which can happen in $(n-x_i-1)!$ ways. Hence, $|\Psi(Z_i) \cap \Psi(Z_i \cup \{u_j^{(i)}\})| = x_i!(n-x_i-1)!$ for every $j \in [4]$. That is all we have to know in order to apply the inclusion-exclusion principle to obtain $|\Phi_i|$ since whenever $T \subseteq W_i$ is not a chain the sentence following (17) yields that $|\bigcap_{X\in T} \Psi(X)| = 0$. Thus, we obtain

$$\begin{aligned} |\Phi_i| &= x_i!(n-x_i)! + 4(x_i+1)!(n-x_i-1) - 4x_i!(n-x_i-1)! \\ &= (n+3x_i)x_i!(n-x_i-1)! =: h_1(x_i) \end{aligned} \tag{19}$$

for every $i \in [k]$. We consider h_1 given in (19) an $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ function. Straightforward computation shows that $h_1(x+1) - h_1(x) = h_2(x)x!(n-x-2)!$ with $h_2(x) = 6x^2 + (9-n)x + (3+2n-n^2)$ provided that $0 \le x \le n-2$. The nonnegative root of h_2 is

$$x_0 = \frac{n - 9 + \sqrt{25n^2 - 66n + 9}}{12}.$$

As $(5n-7)^2 - (25n^2 - 66n + 9) = 40 - 4n < 0$ if $n \ge 11$, we have that $5n-7 < \sqrt{25n^2 - 66n + 9}$ for $n \ge 11$. Similarly, $(5n-6)^2 - (25n^2 - 66n + 9) = 6n + 27 > 0$ gives that $\sqrt{25n^2 - 66n + 9} < 5n - 6$ for $n \ge 2$. Using these two inequalities, we obtain that $(6n-16)/12 < x_0 < (6n-15)/12$ for $n \ge 11$. This implies that $x_0 < \lceil x_0 \rceil = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$. Since h_2 is a quadratic function of x and so its graph is well known, the smallest $m \in \mathbb{N}_0$ for which $h_2(m)$ is positive, that is, $h_1(m+1) - h_1(m) > 0$, is $m = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$. Therefore, the minimum value of $|\Phi_i| = h_1(x_i)$ is $h_1(\lfloor (n-1)/2 \rfloor)$ provided that $n \ge 11$. The same holds for $n \in \{4, \dots, 10\}$; this follows by listing $h_1(0), \dots, h_1(n-1)$ for these small n's.

Since the Φ_i's for $i \in [k]$ are pairwise disjoint subsets of the $n!$-element set of all permutations of $[n]$ and the minimum of $|\Phi_i|$ is $h_1(\lfloor (n-1)/2 \rfloor)$, it follows that

$$\begin{aligned} \sigma(F^{(4)}, B_n) &= k = \left\lfloor \frac{k \cdot h_1(\lfloor (n-1)/2 \rfloor)}{h_1(\lfloor (n-1)/2 \rfloor)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^k h_1(\lfloor (n-1)/2 \rfloor)}{h_1(\lfloor (n-1)/2 \rfloor)} \right\rfloor \\ &\le \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^k |\Phi_i|}{h_1(\lfloor (n-1)/2 \rfloor)} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{n!}{h_1(\lfloor (n-1)/2 \rfloor)} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\lfloor n/2 \rfloor!(n - \lfloor n/2 \rfloor)!}{h_1(\lfloor (n-1)/2 \rfloor)} \right\rfloor . \end{aligned} \tag{20}$$

Let us focus on the last (complicated) fraction in (20). For $n = 2n$ even, (19) and (20) allow us to compute it as follows:

$$\begin{aligned}\frac{m!m!}{h_1(m-1)} &= \frac{m!m!}{(2m+3(m-1))(m-1)!m!}\\ &= \frac{m(m-1)!m!}{(5m-3)(m-1)!m!} = \frac{m}{5m-3} = \frac{\lceil n/2\rceil}{4n-3\lfloor n/2\rfloor-3},\end{aligned}$$

as (9) requires. Similarly, for $n = 2m + 1$ odd,

$$\frac{m!(m+1)!}{h_1(m)} = \frac{m!(m+1)!}{(2m+1+3m)m!m!} = \frac{m+1}{5m+1} = \frac{\lceil n/2\rceil}{4n-3\lfloor n/2\rfloor-3},$$

as required. We have shown that $g_4(n)$ is an upper bound of $\sigma(F^{(4)}, B_n)$.

We have seen that, for $r \in \{2, 3, 4\}$, (f_r, g_r) is a pair of estimates of $\sigma(F^{(r)}, B_n)$. For $r \in \{2, 3\}$, [5] proves that this pair is reasonable. The very tedious details of showing exactly that (f_4, g_4) is a *reasonable* pair of estimates of the function $n \mapsto \sigma(F^{(4)}, B_n)$ would hardly be appetizing for the reader. Hence, we only outline the idea; asymptotic equalities will be denoted $\sim$. We have already shown that $f_4(n) \sim \sigma(F^{(4)}, B_n) \sim \frac{1}{r+1}\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} = \frac{1}{5}\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$. Clearly, $g_4(n) \sim \frac{1}{5}\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$. Combining these asymptotic equalities with the folkloric fact mentioned in Footnote 2, we obtain that $f_4(n+1)/2 \sim g_4(n)$. Parsing the proofs of the asymptotic equalities involved, we can find an $n_0 \in \mathbb{N}^+$ such that the required inequality $g_4(n) \le f_4(n+1)$ holds for all $n \ge n_0$. By our computer-generated data, see Section 4, it also holds for $n \in \{7, 8, \ldots, n_0 - 1\}$.

Modulo the previous paragraph, we have proved Theorem 2.3. □

Proof of Corollary 2.4. It is clear that the proof given in [5] works for any pair of reasonable estimates; see also Fact 2.2. Hence, no proof is necessary here. However, we enlighten the (trivial) idea by two examples, namely, by the direct powers $B_{4,0}^{2023}$ and $B_{4,0}^{2500}$. As Table 1 shows, $\sigma(F^{(4)}, B_{15}) \le g_4(15) = 1430$ while $2448 = f_4(16) \le \sigma(F^{(4)}, B_{16})$. Hence, the smallest n for which $2023 \le \sigma(F^{(4)}, B_n)$ is $n = 16$. Applying (3) and taking $F^{(4)} \cong J(B_{4,0})$ into account, we obtain that $\gamma(B_{4,0}^{2023}) = 16$.

In case of 2500, we obtain from Table 1 only that $\sigma(F^{(4)}, B_{15}) \le g_4(15) = 1430 < 2500$ and $2500 \le 4696 = f_4(17) \le \sigma(F^{(4)}, B_{17})$. Hence, the smallest n for which $2500 \le \sigma(F^{(4)}, B_n)$ is either 16 or 17. Therefore, $\gamma(B_{4,0}^{2500}) \in \{16, 17\}$. □

4 Odds and ends

To obtain the data of this section, we used a computer algebraic program, namely, Maple V Release 5 Version 5.00 (November 27, 1997) of Waterloo Maple Inc. and a desktop computer with AMD Ryzen 7 2700X Eight-Core Processor 3.70 GHz. Our program that Maple executed is given in the (Appendix) Section 5.

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f_4(n)$	1	1	2	3	12	20	36	66	159	315	558	1113
$g_4(n)$	1	2	5	8	16	30	57	106	205	387	750	1430

n	16	17	18	19	20	21	22
$f_4(n)$	2 448	4 696	8 926	17 310	36 560	69 410	136 710
$g_4(n)$	2 782	5 336	10 418	20 082	39 309	76 076	149 226

n	23	24	25	26	27
$f_4(n)$	262 250	542 000	1 031 500	2 062 036	3 949 288
$g_4(n)$	289 731	569 296	1 108 260	2 180 770	4 254 790

n	28	29	30
$f_4(n)$	8 070 468	15 625 260	31 038 651
$g_4(n)$	8 382 573	16 385 653	32 316 150
$g_4(n)/f_4(n) \approx$	1.038 672 478	1.048 664 342	1.041 158 329

Table 1: Some values of $f_4(n)$ and $g_4(n)$.

Corollary 2.4 together with Table 4 yield that, say,

$$\gamma(B_{4,0}^{10^{299}}) = 1001 \tag{21}$$

(there is no misrpint here, the exponent of the 5-element lattice $B_{4,0}$ consists of 300 decimals). However, even Table 1 is sufficient for anything related to our motivation, cryptography and authentication. Indeed, this table and Corollary 2.4 gives that, say,

$$\gamma(B_{4,0}^{30\,000\,000}) = 30. \tag{22}$$

This is a $5^{30\,000\,000}$-element lattice generated only by 30 elements; this lattice is (more than) large enough to provide crpytographic security.

The computation for Table 1 took only one second while that for Table 4 needed 215 minutes. A trivial algorithm based on excluding all the 29-element subsets and listing some 30-element subsets until a generating one

n	100	200	300
$f_4(n) \approx$	$2.022\,665 \cdot 10^{28}$	$1.813\,143 \cdot 10^{58}$	$1.876\,694 \cdot 10^{88}$
$g_4(n) \approx$	$2.042\,335 \cdot 10^{28}$	$1.821\,902 \cdot 10^{58}$	$1.882\,725 \cdot 10^{88}$
$\frac{g_4(n)}{f_4(n)} \approx$	1.009724683	1.004830944	1.003 213 720
n	400	500	600
$f_4(n) \approx$	$2.060\,285 \cdot 10^{118}$	$2.336\,007 \cdot 10^{148}$	$2.703\,240 \cdot 10^{178}$
$g_4(n) \approx$	$2.065\,246 \cdot 10^{118}$	$2.340\,504 \cdot 10^{148}$	$2.707\,574 \cdot 10^{178}$
$\frac{g_4(n)}{f_4(n)} \approx$	1.002 407 708	1.001 924 929	1.001 603 422
n	700	800	900
$f_4(n) \approx$	$3.172\,574 \cdot 10^{208}$	$3.761\,977 \cdot 10^{238}$	$4.496\,142 \cdot 10^{268}$
$g_4(n) \approx$	$3.176\,932 \cdot 10^{208}$	$3.766\,499 \cdot 10^{238}$	$4.500\,945 \cdot 10^{268}$
$\frac{g_4(n)}{f_4(n)} \approx$	1.001 373 942	1.001 201 923	1.001 068 186
n	1000	1001	1002
$f_4(n) \approx$	$5.407\,062 \cdot 10^{298}$	$1.080\,764 \cdot 10^{299}$	$2.160\,665 \cdot 10^{299}$
$g_4(n) \approx$	$5.412\,260 \cdot 10^{298}$	$1.081\,801 \cdot 10^{299}$	$2.162\,738 \cdot 10^{299}$
$\frac{g_4(n)}{f_4(n)} \approx$	1.000 961 231	1.000 960 076	1.000 959 310

Table 2: Some approximate values of $f_4(n)$ and $g_4(n)$.

is found could not prove that $\gamma(B_{4,0}^{30\,000\,000}) = 30$, which is now a simple consequence of the "one second table" (Table 1) and Corollary 2.4.

Next, we comment on the parameter p in (8). Experiencing with computer, we conjecture that for $r = 4$ and $n \geq 29$ the maximum is achieved at $p = 0$ if n is even and at $p = -1$ if n is odd. This has been verified for many values of n, the largest two being 1000 and 1001. (For $n \in \{1000, 1001\}$, the computer checked each p in $\{-10, -9, \ldots, 5\}$; this took 233 minutes.) For small n's (and still $r = 4$), the situation shows not much regularity; for example, $p = 1$ gives the maximum for $n \in \{4, 5, \ldots, 8\}$ while $p = 0$ for $n \in \{16, 17, \ldots, 24\}$. Even if this conjecture fails for some (very large) n, we obtain a good (and asymptotically optimal) lower bound going after it.

We also guess that, for $r \in \{2, 3, 4\}$, $\sigma(F^{(r)}, B_n)$ is closer to $f_r(n)$ than to $g_4(n)$. For $r = 2$, as we have mentioned after (4), Katona and Nagy [12] conjectured that $\sigma(F^{(2)}, B_n) = f_2(n)$.

Calculating with (small) concrete numbers appears to be more difficult than doing it asymptotically. For example, while the folkloric fact mentioned in Footnote 2 provided a substantial simplification when proving the asymptotic part of our theorem, see around (13), we have no similar tool when n does *not* tend to ∞. In addition to (5), this is our excuse that, opposed to the asymptotic equalities proved in Dove and Griggs [8] and Katona and Nagy [12], the present paper deals only with estimates. On the other hand, let us emphasize that our proof contains many ideas taken from these two papers; we mentioned some of them while proving Theorem 2.3. Here we add that, like in the present paper, both [8] and [12] partition $A = [n]$ into r-element subsets, embed a poset (playing the role of $F^{(r)}$) into the powerset of one of these subsets, and modify these initial embeddings according to their strategies. However, there are differences, Footnote [1)] mentions some of them. Computation shows that for a small n, our $f_r(n)$ is better (that is, larger) than what could be extracted from [12].

5 Appendix

We conclude the paper by presenting the Maple program that computed Tables 1 and 4; the limits (now 4 and 30) of the last "for" loop can be modified, of course. As our comment on the parameter p in the previous section indicates, the limit of the "for" loop with p could be "from -1 to 1" without changing the output of the program.

```
> restart; with(combinat, multinomial):
> time0:=time();
> fp4:=proc(n,p) local s,i,w2,w3,w4,z,r;
>  r:=4; z:=1-p+floor((n-r)/2); s:=0;
>  for i from 0 to floor(n/r)-1 do
>   for w2 from 0 to i do
>    for w3 from 0 to i-w2 do
>     w4:=i-w2-w3;
>     s:=s + multinomial(i,w2,w3,w4)*
>      binomial(n-(i+1)*r,z-2*w2-3*w3-4*w4)*
>      binomial(r,2)^w2*binomial(r,3)^w3*binomial(r,4)^w4;
>    od; #end of w3 loop
>   od; #end of w2 loop
>  od; #end of i loop
>  s:=s;
> end: #end of procedure fp4
>
> f4:=proc(n) local p,p0,b0,b,pfrom,pto; p0:=-1; b0:=0;
>  if n<50 then pfrom:=-10; pto:=10
>  else pfrom:=-4; pto:=2
>  fi;
>  for p from pfrom to pto do
>   b:=fp4(n,p);
>   if b>=b0 then b0:=b; p0:=p
```

```
>   fi;
>  od; #end of p cycle
>  # print(‘n=‘,n,‘ p=‘,p0,‘ f4(n)=‘,b0);
>     #print is invalidated after a test period
>  b:=b0;
> end: #end of procedure f4
>
> g4:=proc(n) local h; h:=floor(n/2);
>  floor( (ceil(n/2)/(4*n-3*h-3))*binomial(n,h) )
> end: #end of procedure g4
> #for n from 4 to 100 do f4(n): od:
> #for n from 4 to 100 do b:=f4(n) ;count:=0;
> # for p from -4 to 4 do if fp4(n,p)=b then count:=count+1 fi od;
> #  print(‘n=‘,n,‘         count=‘,count);
> # od:
>
> for n from 4 to 30 do lower:=f4(n): upper:= g4(n):
>  if lower>0 then ratio:=evalf(upper/lower)
>  else ratio:=undefined
>  fi :
>  print(‘n=‘, n, ‘ f4(n)=‘ ,lower, ‘ g4(n)=‘,
>      upper, ‘ ratio=‘, ratio);
>  if lower>10^6 then
>    print(‘lg(lower)=‘,evalf(log[10](lower)),
>      ‘lg(upper)=‘,evalf(log[10](upper)));
>  fi ;
> od:
> time1:=time();
> print(‘The total computation needed ‘, time1-time0,‘ seconds.‘);
```

References

[1] I. Anderson, Combinatorics of Finite Sets, Dover Publications Inc., Mineola, New York, 2002.

[2] B. Bollobás, Sperner systems consisting of pairs of complementary subsets, Journal of Combinatorial Theory (A), **15** (1973), 363-366.

[3] G. Czédli, Four-generated direct powers of partition lattices and authentication, Publicationes Mathematicae (Debrecen), **99** (2021), 447–472.

[4] G. Czédli, Generating Boolean lattices by few elements and a protocol

for authentication and cryptography based on an NP-complete problem, https://arxiv.org/abs/2303.10790 (extended version).

[5] G. Czédli, Sperner theorems for unrelated copies of some partially ordered sets in a powerset lattice and minimum generating sets of powers of distributive lattices. https://arxiv.org/abs/2308.15625.

[6] G. Czédli, Minimum-sized generating sets of the direct powers of the free distributive lattice on three generators and a Sperner theorem, https://arxiv.org/abs/2309.13783.

[7] R. P. Dilworth, A decomposition theorem for partially ordered sets, Ann. of Math. **51** (1951), 161–166.

[8] A. P. Dove, J. R. Griggs, Packing posets in the Boolean lattice Order **32**, (2015), 429–438.

[9] I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev, Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite dimensional vector space, Hilbert Space Operators, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 5, Tihany, 1970.

[10] G. Grätzer, Lattice Theory: Foundation, Birkhäuser, Basel: (2011)

[11] J. R. Griggs, J. Stahl, W. T. Trotter Jr., A Sperner theorem on unrelated chains of subsets. J. Combinatorial Theory, ser. A, **36** (1984), 124–127.

[12] Katona and Nagy, Incomparable copies of a poset in the Boolean lattice, Order, **32** (2015), 419–427.

[13] D. Lubell, A short proof of Sperner's lemma, J. Combinatorial Theory, **1** (1966), 299.

[14] R. N. McKenzie, G. F. McNulty, W. F. Taylor, Algebras, Lattices, Varieties, Vol. 1, Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, California, 1987.

[15] E. Sperner, Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge. Math. Z., **27** (1928), 544–548, https://doi.org/10.1007/BF01171114.

[16] L. Zádori, Subspace lattices of finite vector spaces are 5-generated, Acta Sci. Math. (Szeged)[3] 74 (2008), 493–499

[3]At the time of writing, this paper and many other papers are freely available from the **old** site of the journal: http://www.acta.hu/,

АЛГЕБРЫ БИНАРНЫХ ИЗОЛИРУЮЩИХ ФОРМУЛ ДЛЯ ГРАФОВ С СИМПЛЕКСАМИ

Д. Ю. Емельянов*

Новосибирский государственный технический университет
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: dima-pavlyk@mail.ru

В работе показаны примеры поглощения алгебрами для теорий графов с симплексами, алгебр для теорий, полученных при различных произведениях графов. Более детально каждое произведение рассмотрено в монографии [1].

Определение 1. *Симплекс* или *n-мерный тетраэдр* (от лат. simplex простой) — геометрическая фигура, являющаяся n-мерным обобщением треугольника.

Для симплексов с диаметром, равным 1, обозначим через $\mathfrak{S}_1$ алгебру $\langle S_1; * \rangle$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1\}$ и задаваемую следующей таблицей:

$\cdot$	0	1
0	$\{0\}$	$\{1\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 1\}$

Для симплексов с диаметром, равным n, алгебра $\langle S_n; * \rangle$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ задается следующей таблицей:

$\cdot$	0	1	2	3	$\dots$	k	$\dots$	n
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\dots$	$\{k\}$	$\dots$	$\{n\}$
1	$\{1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\dots$	$\{0,1,\dots,m+1\}$	$\dots$	$\{0,1,\dots,n\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\dots$	$\{0,1,\dots,m+2\}$	$\dots$	$\{0,1,\dots,n\}$
3	$\{3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5,6\}$	$\dots$	$\{0,1,\dots,m+2\}$	$\dots$	$\{0,1,\dots,n\}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	$\{m\}$	$\{0,1,\dots,m+1\}$	$\{0,1,\dots,m+2\}$	$\{0,1,\dots,m+3\}$	$\dots$	$\{0,1,\dots,m+k\}$	$\dots$	$\{0,1,\dots,n\}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	$\{n\}$	$\{0,1,\dots,n\}$	$\{0,1,\dots,n\}$	$\{0,1,\dots,n\}$	$\dots$	$\{0,1,\dots,n\}$	$\dots$	$\{0,1,\dots,n\}$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-21-00044.

и обозначается через $\mathfrak{S}_n$.

Заметим, что $(m+k)$ не может превышать значения n. Позже в статье мы будем ссылать на это таблицу говоря, что алгебра будет изоморфна алгебре симплексов.

Определение 2. *Сильное произведение* $G \boxtimes H$ графов G и H — это граф, такой, что множество вершин $G \boxtimes H$ есть декартово произведение $V(G) \times V(H)$; а отдельные вершины (u, u') и (v, v') являются смежными в $G \boxtimes H$ тогда и только тогда, когда

$u = v$ и u' является смежной с v', или $u' = v'$ и u смежна к v, или u смежна с v и u' смежна с v'.

Для примера возьмем сильное произведением графа семиугольника и тройного ребра $Hp \boxtimes HHH$ получаем две одинаковые алгебры с набором меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, которая задается следующей таблицей следующей таблице:

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$
1	$\{1\}$	$\{1, 2\}$	$\{0, 1, 2, 3\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
2	$\{2\}$	$\{0, 1, 2, 3\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
3	$\{3\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
4	$\{4\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
5	$\{5\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Как видно из таблицы она будет изоморфна алегбре $\mathfrak{S}_4$.

Теорема 3. *Если сильное произведение для n-гона и цепи содержит симплекс и имеет диаметр d, то алгебра бинарных формул изоляции для этого произведения будет совпадать с алгеброй бинарных изолирующих формул для симплексов* $\mathfrak{S}_{\mathfrak{d}}$.

Определение 4. *Корневое произведение* графа G и корневого графа H определяется следующим образом: возьмём $|V(G)|$ копий графа H и для каждой вершины v_i графа G, отождествляем v_i с корневой вершиной i-ой копии H.

Для корневых произведение мы получаем два случая: первый, когда у нас в результате корневого произведения получается хотя бы один сиплекс в графе, и второй, когда сиплексов нет. Нас будет интересовать первый случай.

Для корневого произведения $N \circ H$ девятиугольника N и ребра H обозначим через $\mathfrak{N}\mathfrak{H}$ алгебру $\langle \mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}); *\rangle$, заданную следующей таблицей, она будет изоморфна алгебре $\mathfrak{S}_6$.:

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
1	$\{1\}$	$\{0,2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{1,2,3,$ $4,5,6\}$
2	$\{2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$
3	$\{3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$
4	$\{4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$
5	$\{5\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$
6	$\{6\}$	$\{1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,5,6\}$

Теорема 5. *Если в результате корневого умножении алгебр бинарных изолирующих для n-угольников получается хотя бы один симплекс, то алгебра для результата будет изоморфна алгебре симплексов.*

Определение 6. Регулярный граф — граф, степени всех вершин которого равны, то есть каждая вершина имеет одинаковое количество соседей.

Определение 7. Степень графа — количество рёбер графа G, инцидентных вершине x. При подсчёте степени ребро-петля учитывается дважды.

В случае с регулярными графами с максимальными степенями вершин, в них по построению всегда будут присутствовать симплексы в графе, следовательно будет и поглощение алгебр.

Теорема 8. *Если в любой теории T регулярных графов с максимальными степенями вершин, существует хотя бы один симплекс, то алгебра для результата будет изоморфна алгебре симплексов.*

Как видно из примеров, алгебра для симплексов поглощает другие алгебры, в частности, алгебры для сильного и корневого произведения, так же поглощение замечено для регулярных графов и в зиг-заг произведениях. Это наблюдение открывает поле для изучения более общего поглощения симплексами алгебр над графами.

Предположение. Если в любой теории T для графов, существует хотя бы один симплекс, то алгебра для результата будет изоморфна алгебре симплексов.

Список литературы

[1] D. Yu. Emelyanov, B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, Algebras of binary formulas, Novosibirsk : Izd-vo NSTU, 2023. 330 с., doi: 10.17212/978-5-7782-5028-4.

ИЗОМОРФИЗМЫ ПОЛУГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

И. Б. Кожухов, Д. Ю. Манилов, А. В. Решетников*

НИУ МИЭТ, МГУ им. Ломоносова
пл. Шокина, 1, Москва, 124498, Россия
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru, thdi@ro.ru, a_reshetnikov@hush.com

1 Введение

Полугруппы преобразований множества, т.е. отображений $X \to X$ с операцией композиции (последовательного выполнения отображений) постоянно привлекали внимание алгебраистов. Хорошо известная теорема Кэли утверждает, что всякая группа изоморфно вкладывается в группу подстановок (т.е. взаимно однозначных преобразований множества). Аналогом этой теоремы для полугрупп является утверждение о том, что всякая полугруппа вкладывается в полугруппу преобразований некоторого множества. В этом смысле всякая полугруппа может рассматриваться как полугруппа преобразований (возможно, не всех) подходящего множества. Наряду с обычными преобразованиями $X \to X$ можно рассматривать частичные преобразования (т.е. определённые, возможно, не на всём множестве X, а на каком-либо его подмножестве), а также многозначные, инъективные, сюръективные преобразования $X \to X$ и т.д. Каждое из перечисленных множеств преобразований является полугруппой. Возникает вопрос: насколько однозначно полугруппой преобразований множества X определяется само это множество? Иными словами, если полугруппы преобразований $U(X)$ и $U(Y)$ множеств X и Y изоморфны друг другу, верно ли, что этот изоморфизм индуцирован некоторым взаимно однозначным соответствием между множествами X и Y? Положительный ответ на поставленный вопрос был получен для многих полугрупп преобразований ещё в 50-х–80-х годах прошлого столетия. Имеется много различных доказательств этого утверждения. Часть из них основана на получении абстрактной характеризации рассматриваемой полугруппы преобразований.

Цель данной работы — предложить общий подход к доказательству этих утверждений, основанный на простом замечании о том, что если какое-либо подмножество A полугруппы (или другой алгебраической системы) S выделяется в S совокупностью формул логики первого порядка, то при изоморфизме $\Phi : S \to T$ алгебраических систем A переходит в аналогичное подмножество

*Работа поддержана грантом РНФ №22-11-00052.

B алгебраической системы T (а при автоморфизме A переходит в себя). В связи с этим мы приводим как доказательства известных утверждений, так и соответствующих утверждений для полугруппы полных бинарных отношений.

Пусть X — непустое множество. Через $T(X)$ мы будем обозначать полугруппу всех отображений $\alpha : X \to X$ с умножением, осуществляемом *слева направо*, т.е. $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ при $x \in X$, $\alpha, \beta \in T(X)$. Очевидно, $T(X)$ — полугруппа с единицей, которой является *тождественное отображение* $1_X : X \to X$, $x \mapsto x$ для всех $x \in X$. Будем называть элементы полугруппы $T(X)$ *полными преобразованиями*.

Обозначим через $P(X)$ множество всех *частичных преобразований* множества X, т.е. отображений $\alpha : X_1 \to X$, где $X_1 \subseteq X$. Множество X_1 называется *областью определения* отображения α и обозначается $\operatorname{dom}\alpha$. *Образ* частичного преобразования α — это множество $\operatorname{im}\alpha = \{x\alpha | x \in \operatorname{dom}\alpha\}$. Умножение в $P(X)$ определяется обычным образом:

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta, \text{ если } x \in \operatorname{dom}\alpha \text{ и } x\alpha \in \operatorname{dom}\beta.$$

Очевидно, $P(X)$ — полугруппа с единицей 1_X и нулём 0, которым является пустое отображение: $\operatorname{dom} 0 = \emptyset$.

Через $B(X)$ будем обозначать множество всех бинарных отношений на множестве X, т.е. подмножеств $\alpha \subseteq X \times X$ с умножением

$$\alpha\beta = \{(x, y) | \exists t \in X \ (x, t) \in \alpha \wedge (t, y) \in \beta\}.$$

Нетрудно проверить, что $B(X)$ — полугруппа. Единицей этой полугруппы является $\Delta_X = \{(x, x) | x \in X\}$ (*отношение равенства*), а нулём — пустое отношение. Введём также *универсальное отношение* $\nabla_X = X \times X$. Мы будем часто опускать индекс X и писать Δ, ∇ вместо Δ_X, ∇_X, соответственно. Для отношения $\alpha \in X \times X$ полагаем $\alpha^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in \alpha\}$.

Бинарное отношение α можно рассматривать как многозначное отображение (в широком смысле), т.е. как отображение $X \to 2^X$, где 2^X обозначает множество всех подмножеств множества X. Считаем, что $x \mapsto y$, если $(x, y) \in \alpha$. Для $\alpha \in B(X)$ обозначаем:

$$\operatorname{dom}\alpha = \{x \in X | \exists y \in X \ (x, y) \in \alpha\}, \quad \operatorname{im}\alpha = \{y \in X | \exists x \in X \ (x, y) \in \alpha\}.$$

Если $\alpha \in B(X)$ и $Y \subseteq X$, то полагаем $\alpha|_Y = \alpha \cap (Y \times X)$. Нетрудно проверить, что $T(X) \subseteq P(X) \subseteq B(X)$, причём каждая предыдущая из этих полугрупп является подполугруппой следующей. При $|X| \geqslant 2$ оба включения строгие. Отношение равенства Δ_X (оно же 1_X) является единицей всех трёх полугрупп.

Введём обозначения некоторых специальных элементов и подмножеств полугруппы $B(X)$. Пусть $G(X)$ обозначает множество взаимно однозначных отображений $X \to X$. Очевидно, $G(X)$ — подгруппа полугрупп $T(X)$, $P(X)$,

$B(X)$ с единицей Δ. Далее, пусть $j_{xy} = \{(x, y)\}$ (*элементарное отношение*), $i_x = \{(x, x)\}$ (*элементарный идемпотент*), $c_x = X \times \{x\}$ (*константное отображение*), $I(X) = \{i_x | x \in X\}$, $J(X) = \{j_{xy} | x, y \in X\}$, $C(X) = \{c_x | x \in X\}$.

Отношение $\alpha \in B(X)$ назовём *полным* (или всюду определённым), если $\operatorname{dom} \alpha = X$. Множество $B'(X)$ всех полных отношений является подполугруппой полугруппы $B(X)$, при этом $B'(X) \cap P(X) = T(X)$. Элементы полугруппы $B'(X)$ можно рассматривать как многозначные отображения, т.е. отображения $X \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$.

Бинарное отношение можно понимать также в более широком смысле, а именно, называть бинарным отношением подмножество $\sigma \subseteq X \times Y$, где X и Y — произвольные множества (см. [1]). Очевидным образом для $\alpha \in X \times Y$ и $\beta \in Y \times Z$ определяется произведение $\alpha\beta \in X \times Z$.

Авторы придерживаются определений и обозначений из теории полугрупп, содержащихся в монографии [2]. Формулы логики первого порядка будут задаваться в сигнатуре $(\,\cdot\,, =)$ с одним символом бинарной операции и одним символом двуместного предиката, причём первое будет интерпретироваться как умножение в полугруппе, а второе как отношение равенства (совпадение элементов друг с другом). Сведения из математической логики и терминологию можно найти в [3, 4].

2 Изоморфизмы полугрупп преобразований

Теорема 9. [5, 6, 7],[8, глава VII, п. 6.15]. *Пусть $\Phi : T(X) \to T(Y)$ — изоморфизм полугрупп. Тогда существует взаимно однозначное отображение $\varphi : X \to Y$ такое, что $\Phi(\alpha) = \varphi^{-1}\alpha\varphi$ для всех $\alpha \in T(X)$.*

Доказательство. Легко проверить, что правые нули в полугруппе $T(X)$ — это в точности константные отображения:

$$C(X) = \{\alpha \in T(X) | \forall \beta \ \beta\alpha = \alpha\}.$$

Таким образом, множество $C(X)$ выделяется в полугруппе $T(X)$ формулой логики первого порядка. Следовательно, Φ взаимно однозначно отображает $C(X)$ на $C(Y)$. Это означает, что для $x \in X$ существует единственное $y \in Y$ такое, что $\Phi(c_x) = c_y$, и наоборот. Таким образом, мы имеем взаимно однозначное отображение $\varphi : X \to Y$, для которого выполняется равенство $\Phi(c_x) = c_{x\varphi}$ при всех $x \in X$.

Пусть α — произвольный элемент из $T(X)$, а x — произвольный элемент из X. Положим $\beta = \Phi(\alpha)$. Нетрудно видеть, что $c_x\alpha = c_{x\alpha}$. Так как Φ — изоморфизм, $\Phi(c_x)\Phi(\alpha) = \Phi(c_{x\alpha})$. Отсюда $c_{x\varphi\beta} = c_{x\alpha\varphi}$, т.е. $x\varphi\beta = x\alpha\varphi$. Ввиду произвольности элемента $x \in X$ получаем: $\varphi\beta = \alpha\varphi$, т.е. $\beta = \varphi^{-1}\alpha\varphi$. Таким образом, $\Phi(\alpha) = \varphi^{-1}\alpha\varphi$. □

Теорема 10. [7, 9, 11]. *Пусть $\Phi : P(X) \to P(Y)$ — изоморфизм полугрупп. Тогда существует взаимно однозначное отображение $\varphi : X \to Y$ такое, что $\Phi(\alpha) = \varphi^{-1}\alpha\varphi$ для всех $\alpha \in P(X)$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{r}(\alpha) = \{\beta|\alpha\beta = 0\}$, $\mathrm{l}(\alpha) = \{\beta|\beta\alpha = 0\}$ (правый и лдевый аннуляторы элемента $\alpha \in P(X)$), $\mathcal{R} = \{\mathrm{r}(\alpha)|\alpha \neq 0\}$, $\mathcal{L} = \{\mathrm{l}(\alpha)|\alpha \neq 0\}$. Включение $\mathrm{r}(\alpha_1) \subseteq \mathrm{r}(\alpha_2)$ выражается формулой логики первого порядка, так как

$$\mathrm{r}(\alpha_1) \subseteq \mathrm{r}(\alpha_2) \Leftrightarrow \forall\beta\ (\alpha_1\beta = 0 \to \alpha_2\beta = 0).$$

Далее, если правый аннулятор какого-либо ненулевого элемента α из $P(X)$ максимален в $\mathcal{R}$ или, соответственно, в $\mathcal{L}$, то это также может быть выражено логическими формулами, так как

$$\mathrm{r}(\alpha) \text{ максимален в } \mathcal{R} \Leftrightarrow \forall\beta \neq 0\ (\mathrm{r}(\alpha) \subseteq \mathrm{r}(\beta) \to \mathrm{r}(\beta) \subseteq \mathrm{r}(\alpha)),$$

$$\mathrm{l}(\alpha) \text{ максимален в } \mathcal{L} \Leftrightarrow \forall\beta \neq 0\ (\mathrm{l}(\alpha) \subseteq \mathrm{l}(\beta) \to \mathrm{l}(\beta) \subseteq \mathrm{l}(\alpha)).$$

Нетрудно видеть, что элементы $\alpha \in J(X)$ и только они обладают тем свойством, что $\mathrm{r}(\alpha)$ максимален в $\mathcal{R}$, а $\mathrm{l}(\alpha)$ максимален в $\mathcal{L}$. Следовательно, множество $J(X)$ выделяется в полугруппе $P(X)$ формулами логики первого порядка. Так как $I(X) = \{\alpha \in J(X)|\alpha^2 = \alpha\}$, то множество $I(X)$ также выделяется. Следовательно, Φ взаимно однозначно отображает $I(X)$ на $I(Y)$. Поэтому существует взаимно однозначное отображение $\varphi : X \to Y$ такое, что $\Phi(i_x) = i_{x\varphi}$ при всех $x \in X$. Докажем, что

$$\Phi(j_{xy}) = j_{x\varphi,y\varphi} \tag{1}$$

при любых $x, y \in X$. Действительно, так как $\Phi(J(X)) = J(Y)$, получаем $\Phi(j_{xy}) = j_{uv}$ при некоторых $u, v \in Y$. Из $j_{xy} = i_x j_{xy} i_y$ следует $j_{uv} = \Phi(j_{xy}) = \Phi(i_x)\Phi(j_{xy})\Phi(i_y) = i_{x\varphi} j_{uv} i_{y\varphi}$, а значит, $u = x\varphi$ и $v = y\varphi$. Таким образом, равенство (1) доказано.

Пусть $\alpha \in P(X)$ и $\beta = \Phi(\alpha)$. Возьмём любой элемент $x \in X$. Если $x \in \operatorname{dom}\alpha$, то $i_x\alpha i_{x\alpha} = j_{x,x\alpha}$. Отсюда $\Phi(i_x)\Phi(\alpha)\Phi(i_{x\alpha}) = \Phi(j_{x\alpha})$, что ввиду (1) нам даёт $i_{x\varphi}\beta i_{x\alpha\varphi} = j_{x\varphi,x\alpha\varphi}$. Следовательно, $x\varphi\beta = x\alpha\varphi$. Если $x \notin \operatorname{dom}\alpha$, то $i_x\alpha = 0$, поэтому с учётом равенства $\Phi(0) = 0$, получаем $i_{x\varphi}\beta = 0$, т.е. $x\varphi \notin \operatorname{dom}\beta$. И наоборот, если $x\varphi \notin \operatorname{dom}\beta$, то $x \notin \operatorname{dom}\alpha$. Таким образом, $\varphi\beta = \alpha\varphi$, а значит, $\beta = \varphi^{-1}\alpha\varphi$, т.е. $\Phi(\alpha) = \varphi^{-1}\alpha\varphi$. □

Теорема 11. [7, 9, 10]. *Пусть $\Phi : B(X) \to B(Y)$ — изоморфизм полугрупп. Тогда существует взаимно однозначное отображение $\varphi : X \to Y$ такое, что $\Phi(\alpha) = \varphi^{-1}\alpha\varphi$ для всех $\alpha \in B(X)$.*

Доказательство. Полугруппа $B(X)$ имеет нуль — пустое отношение. Нулевой элемент ($\alpha = 0$) любой полугруппы определяется логической формулой:

$$\forall\beta\ \alpha\beta = \beta\alpha = \beta.$$

Как и в Теореме 10, введём правый и левый аннуляторы элемента $\alpha \in B(X)$:

$$\mathrm{r}(\alpha) = \{\beta | \alpha\beta = 0\}, \quad \mathrm{l}(\alpha) = \{\beta | \beta\alpha = 0\}.$$

Включение $\mathrm{r}(\alpha_1) \subseteq \mathrm{r}(\alpha_2)$ выражается формулой

$$\forall\beta\ \alpha_1\beta = 0 \to \alpha_2\beta = 0,$$

аналогичным образом выражается включение $\mathrm{l}(\alpha_1) \subseteq \mathrm{l}(\alpha_2)$. Пусть

$$\mathcal{R} = \{\mathrm{r}(\alpha) | \alpha \neq 0\}, \quad \mathcal{L} = \{\mathrm{l}(\alpha) | \alpha \neq 0\}.$$

Очевидно, чем меньше область определения элемента из $B(X)$, тем больше его левый аннулятор, и чем меньше образ элемента, тем больше его правый аннулятор:

$$\operatorname{dom}\alpha \subset \operatorname{dom}\beta \Rightarrow \mathrm{l}(\alpha) \supset \mathrm{l}(\beta),$$
$$\operatorname{im}\alpha \subset \operatorname{im}\beta \Rightarrow \mathrm{r}(\alpha) \supset \mathrm{r}(\beta).$$

Поэтому элементарные отношения j_{xy} — это в точности такие ненулевые элементы $\alpha \in B(X)$, у которых $\mathrm{r}(\alpha)$ максимален в $\mathcal{R}$, а $\mathrm{l}(\alpha)$ максимален в $\mathcal{L}$. Максимальность правого аннулятора элемента α в $\mathcal{R}$ выражается формулой

$$\forall\beta \neq 0\ \ (\mathrm{r}(\alpha) \subseteq \mathrm{r}(\beta) \to \mathrm{r}(\beta) \subseteq \mathrm{r}(\alpha)),$$

а максимальность левого аннулятора в $\mathcal{L}$ — формулой

$$\forall\beta \neq 0\ \ (\mathrm{l}(\alpha) \subseteq \mathrm{l}(\beta) \to \mathrm{l}(\beta) \subseteq \mathrm{l}(\alpha)).$$

Следовательно, множество $J(X)$ выделяется в полугруппе $B(X)$ формулой логики первого порядка. Таким образом, Φ взаимно однозначно отображает $J(X)$ на $J(Y)$. Множество $I(X)$ также выделяется формулой, так как $\alpha \in I(X) \Leftrightarrow \alpha \in J(X) \wedge \alpha^2 = \alpha$. Следовательно, Φ взаимно однозначно отображает $I(X)$ на $I(Y)$. Поэтому существует взаимно однозначное отображение $\varphi : X \to Y$ такое, что $\Phi(i_x) = i_{x\varphi}$ для всех $x \in X$. Так же, как в Теореме 10, доказывается равенство (1), т.е. $\Phi(j_{xy}) = j_{x\varphi,y\varphi}$ при любых $x, y \in X$. Наконец, если α — произвольный элемент из $B(X)$, а x, y — произвольные элементы из X, то $(x, y) \in \alpha \Leftrightarrow i_x\alpha i_y = j_{xy} \Leftrightarrow \Phi(i_x)\Phi(\alpha)\Phi(i_y) = \Phi(j_{xy}) \Leftrightarrow i_{x\varphi}\beta i_{y\varphi} = j_{x\varphi,y\varphi}$ $\Leftrightarrow (x\varphi, y\varphi) \in \beta$. Это означает, что $\beta = \varphi^{-1}\alpha\varphi$. □

Перейдём теперь к полугруппе $B'(X)$ полных бинарных отношений. Для доказательства теоремы, аналогичной Теоремам 1–3, нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 12. *Элемент $\alpha \in B'(X)$ является левым делителем единицы (т.е. $\alpha\beta = \Delta$ при некотором $\beta \in B'(X)$) в том и только том случае, если*

$$\forall x, y, z \in X\ \ (((x, z) \in \alpha \wedge (y, z) \in \alpha) \to x = y). \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\alpha\beta = \Delta$ и $(x, z), (y, z) \in \alpha$. Так как $\operatorname{dom} \alpha = X$, то существует такое $u \in X$, что $(z, u) \in \beta$. Это влечёт, что $(x, u), (y, u) \in \Delta$, а значит, $x = y$.

Достаточность. Пусть выполнено условие (2). Зафиксируем какой-либо элемент $x_0 \in X$ и положим $\beta = \alpha^{-1} \cup ((X \setminus \operatorname{im} \alpha) \times \{x_0\})$. Проверим, что $\alpha\beta = \Delta$. Пусть $(x, y) \in \alpha\beta$. Тогда $(x, t) \in \alpha$, $(t, y) \in \beta$ при некотором $t \in X$. Если $(t, y) \in \alpha^{-1}$, то $(y, t) \in \alpha$, откуда ввиду (2) получаем, что $x = y$, а значит, $(x, y) \in \Delta$. Если $(t, y) \in (X \setminus \operatorname{im}\alpha) \times \{x_0\})$, то $t \notin \operatorname{im} \alpha$, а это противоречит соотношению $(x, t) \in \alpha$. Наоборот, пусть $(x, y) \in \Delta$. Тогда $y = x$. Так как $\operatorname{dom}\, \alpha = X$, получаем $(x, u) \in \alpha$ при некотором u, а значит, $(u, x) \in \alpha^{-1}$, откуда $(x, y) = (x, x) \in \alpha\alpha^{-1} \subseteq \alpha\beta$. □

Лемма 13. *Элемент $\alpha \in B'(X)$ является правым делителем единицы (т.е. $\beta\alpha = \Delta$) при некотором $\beta \in B'(X)$) в том и только том случае, если существует подмножество $Y \subseteq X$ такое, что $\alpha|_Y$ – сюръективное отображение Y на X.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\beta\alpha = \Delta$. Тогда по Лемме 12 для β выполняется следующее:

$$\forall x, y, z \in X \ \ ((x \,\beta\, z \wedge y \,\beta\, z) \to x = y). \tag{3}$$

Пусть $Y = \operatorname{im} \beta$. Для $x \in X$ положим $A_x = \{y | (x, y) \in \beta\}$. Так как $\operatorname{dom} \beta = X$, то $A_x \neq \emptyset$ для каждого $x \in X$. Из (3) следует, что $A_{x_1} \cap A_{x_2} = \emptyset$ при $x_1 \neq x_2$. Очевидно, $Y = \cup\{A_x | x \in X\}$ и $\beta = \{(x, y) | x \in X,\ y \in A_x\}$. Возьмём любое $x \in X$, а затем любое $y \in A_x$. Так как $\operatorname{dom} \alpha = X$, то $(y, z) \in \alpha$ при некотором $z \in X$. Так как $(x, y) \in \beta$ и $(y, z) \in \alpha$, $(x, z) \in \beta\alpha$, а так как $\beta\alpha = \Delta$, $z = x$. Таким образом, $\alpha|_Y$ является сюръективным отображением Y на X.

Достаточность. Пусть $Y \subseteq X$ и $\alpha|_Y$ — сюръективное отображение Y на X. Пусть $\theta = \ker(\alpha|Y)$. Для $x \in X$ пусть $A_x = \{y | (y, x) \in \alpha\}$. Очевидно, множества A_x — это в точности классы отношения эквивалентности θ. Возьмём $\beta = \{(x, y) | x \in X,\ y \in A_x\}$. Докажем, что $\beta\alpha = \Delta$. Возьмём любое $x \in X$, а затем любое $y \in A_x$. Имеем: $(x, y) \in \beta$ и $(y, x) \in \alpha$, поэтому $(x, x) \in \beta\alpha$. Таким образом, доказано, что $\Delta \subseteq \beta\alpha$. Пусть $(x, y) \in \beta\alpha$. Тогда $(x, u) \in \beta$ и $(u, y) \in \alpha$ при некотором $u \in X$. Очевидно, $u \in A_x$. Так как $(u, y) \in \alpha$ и $u \in A_x$, получаем $y = x$, поэтому $(x, y) = (x, x) \in \Delta$. Таким образом, доказано, что $\beta\alpha \subseteq \Delta$. Вместе с ранее доказанным включением $\Delta \subseteq \beta\alpha$ получаем: $\beta\alpha = \Delta$. □

Замечание. Формулы (2) и (3) не являются формулами логики первого порядка в сигнатуре $(\,\cdot\,, =)$.

Лемма 14. *Группа $G(X)$ выделяется в $B'(X)$ формулами логики первого порядка.*

Доказательство. Элемент Δ является единицей полугруппы $B'(X)$, т.е.

$$\alpha = \Delta \Leftrightarrow \forall\beta\ (\alpha\beta = \beta \wedge \beta\alpha = \beta). \tag{4}$$

Это означает, что Δ выделяется в $B'(X)$ формулой логики первого порядка в сигнатуре $(\,\cdot\,, =)$ — формулой, стоящей в правой части эквивалентности (4). Докажем, что элементы группы $G(X)$ — это в точности элементы из $B'(X)$, которые одновременно являются правыми и левыми делителями единицы Δ. Действительно, если $\alpha \in G(X)$, то $\alpha\beta = \beta\alpha = \Delta$ при $\beta = \alpha^{-1}$. Наоборот, если α таково, что $\alpha\beta_1 = \beta_2\alpha = \Delta$ при некоторых $\beta_1, \beta_2 \in B'(X)$, то по Лемме 13 существует $Y \subseteq X$ такое, что $\alpha|_Y : Y \to X$ — сюръективное отображение. Отсюда по Лемме 12 с учётом того, что $\operatorname{dom}\beta = X$, получаем, что $Y = X$, а значит, α — сюръективное отображение $X \to X$. Так как $\alpha\beta_1 = \Delta$, то оно инъективно. Следовательно, $\alpha \in G(X)$. Таким образом,

$$\alpha \in G(X) \Leftrightarrow (\exists\beta_1\ \beta_1\alpha = \Delta \wedge \exists\beta_2\ \alpha\beta_2 = \Delta),$$

следовательно, $G(X)$ выделяется формулой логики первого порядка. $\square$

Сделаем теперь ряд замечаний. Множество всех правых нулей любой полугруппы является её идеалом. Обозначим через $RZ(X)$ множество всех правых нулей полугруппы $B'(X)$. Это множество выделяется в полугруппе $B'(X)$ логической формулой, так как

$$\alpha \in RZ(X) \Leftrightarrow \forall\beta\ \ \alpha\beta = \alpha.$$

Нетрудно видеть, что правыми нулями в полугруппе $B'(X)$ являются отношения $c_A = X \times A$, где A — непустое подмножество множества X, и только они: $RZ(X) = \{c_A | A \subseteq X, A \neq \emptyset\}$. Для $x \in X$ вместо $c_{\{x\}}$ будем писать c_x, что соответствует ранее принятому обозначению.

Для любого $\alpha \in B'(X)$ положим $q(\alpha) = \{\beta | \alpha\beta = \nabla\}$ (аналог правого аннулятора). Для $A \subseteq X$ и $\alpha \in B'(X)$ положим $A\alpha = \{x \in X | \exists a \in A\ \ (a, x) \in \alpha\}$.

Лемма 15. *Для любых непустых* $A, B \subseteq X$

$$q(c_A) \subseteq q(c_B) \Leftrightarrow A \subseteq B \tag{5}$$

и

$$q(c_A) \subset q(c_B) \Leftrightarrow A \subset B. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $q(c_A) \subseteq q(c_B)$. Тогда $c_A\beta = \nabla \Rightarrow c_B\beta = \nabla$ для всех $\beta \in B'(X)$. То есть $A\beta = X \Rightarrow B\beta = X$ для всех $\beta \in B'(X)$. Предположим, что $A \nsubseteq B$. Тогда существует элемент $a \in A \setminus B$. Возьмём $\beta = (\{a\} \times X) \cup \Delta_X$. Тогда $A\beta = X$, но $B\beta = B \neq X$, что противоречит предположению. Таким образом, $A \subseteq B$.

Наоборот, пусть теперь известно, что $A \subseteq B$. Надо доказать, что $q(c_A) \subset q(c_B)$. Пусть $\beta \in q(c_A)$. Тогда $A\beta = \nabla$. Отсюда $B\beta \supseteq A\beta \supseteq \nabla$, поэтому $B\beta = \nabla$, а значит, $\beta \in q(c_B)$.

Нами доказано (5). Докажем (6). Для этого достаточно доказать, что $q(c_A) = q(c_B) \Leftrightarrow A = B$. Импликация $\Leftarrow$ очевидна. Докажем импликацию $\Rightarrow$. Пусть $q(c_A) = q(c_B)$. Тогда $q(c_A) \subseteq (c_B)$ и $q(c_B) \subseteq q(c_A)$. Ввиду (5) мы получаем: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Следовательно, $A = B$. □

Лемма 16. *В полугруппе $B'(X)$ формулами логики первого порядка выделяются следующие объекты:* (i) элемент ∇; (ii) подполугруппа $C(X)$; (iii) подполугруппа $T(X)$.

Доказательство. (i) Очевидно, $\nabla = c_X \in RZ(X)$. Докажем, что

$$\alpha = \nabla \Leftrightarrow \alpha \in RZ(X) \wedge \forall\beta \ (\beta \in G(X) \to \alpha\beta = \alpha). \tag{7}$$

Пусть $\alpha = \nabla$. Если $\beta \in G(X)$, то $\alpha\beta = c_X\beta = c_{X\beta} = c_X = \alpha$. Наоборот, пусть $\alpha \in RZ(X)$ и $\alpha\beta = \alpha$ при всех $\beta \in G)(X)$. Тогда $\alpha = c_A$ для некоторого $A \subseteq X$ и $c_A = \alpha = \alpha\beta = c_A\beta = c_{A\beta}$. Следовательно, $A\beta = A$ для всех $\beta \in G(X)$, откуда $A = X$, а значит, $\alpha = \nabla$. Мы доказали утверждение (7). По Лемме 14 $G(X)$ выделяется логической формулой, идеал $RZ(X)$ также выделяется, и (7) нам показывает, что и элемент ∇ выделяется логической формулой.

(ii) В пункте (i) было доказано, что элемент ∇ выделяется в полугруппе $B'(X)$ формулой логики первого порядка. А так как

$$q(\alpha) \subseteq q(\beta) \Leftrightarrow \forall\gamma \ (\alpha\gamma = \nabla \to \beta\gamma = \nabla),$$

то предикат “$q(\alpha) \subseteq q(\beta)$” также выразим логической формулой. Далее, предикат

$$P(\alpha) \equiv \text{“}q(\alpha) \text{ минимально”}$$

также выразим, так как

$$q(\alpha) \text{ минимально } \Leftrightarrow \forall\gamma \ (q(\gamma) \subseteq q(\alpha) \to q(\alpha) \subseteq q(\gamma)).$$

Из Леммы 15 следует, что элементы c_x — это в точности такие элементы $\alpha \in RZ(X)$, у которых $q(\alpha)$ минимально. Следовательно, множество $C(X)$ выделяется в полугруппе $B'(X)$ логической формулой.

(iii) Ввиду (ii) нам будет достаточно доказать, что

$$T(X) = \{\alpha | \forall\beta \ (\beta \in C(X) \to \beta\alpha \in C(X)).$$

Пусть $\alpha \in T(X)$ и $\beta \in C(X)$. Тогда $\beta = c_x$ при некотором $x \in X$. Отсюда $\beta\alpha = c_x\alpha = c_{x\alpha} \in C(X)$.

Наоборот, пусть α таково, что $\beta \in C(X)$ влечёт $\beta\alpha \in C(X)$. Так как $\alpha \in B'(X)$, то $\operatorname{dom} \alpha = X$, поэтому нам достаточно доказать, что α не содержит одновременно две пары (x,y), (x,z) такие, что $y \neq z$. Пусть $(x,y),(x,z) \in \alpha$ и $y \neq z$. Возьмём $\beta = c_x$. Тогда $(x,y),(x,z) \in \beta\alpha$, откуда $|\mathrm{im}\ (\beta\alpha)| \geqslant 2$, а значит, $\beta\alpha \notin C(X)$, что противоречит предположению. □

Теорема 17. $\Phi : B'(X) \to B'(Y)$ — *изоморфизм полугрупп. Тогда существует взаимно однозначное отображение* $\varphi : X \to Y$ *такое, что* $\Phi(\alpha) = \varphi^{-1}\alpha\varphi$ *для всех* $\alpha \in B'(X)$.

Доказательство. Согласно Лемме 16 подполугруппа $T(X)$ выделяется в $B'(X)$ формулой логики первого порядка, следовательно, $\Phi|_{T(X)}$ — изоморфизм полугрупп $T(X)$ и $T(Y)$. По Теореме 9 существует взаимно однозначное отображение $\varphi : X \to Y$ такое, что $\Phi(\alpha) = \varphi^{-1}\alpha\varphi$ для всех $\alpha \in T(X)$. Требуется доказать, что это равенство выполняется также для всех $\alpha \in B'(X)$.

Пусть $\alpha \in B'(X)$ и $\beta = \Phi(\alpha)$.

Так как $C(X) \subseteq T(X)$, то $\Phi(c_x) = c_{x\varphi}$ для всех $x \in X$. Докажем, что для любого непустого $A \subseteq X$

$$\Phi(c_A) = c_{A\varphi}. \qquad (8)$$

Действительно, так как Φ переводит $RZ(X)$ в $RZ(Y)$, то $\Phi(c_A) = c_B$ для некоторого $B \subseteq Y$. Так как Φ — изоморфизм и $\Phi(\nabla_X) = \nabla_Y$ (по Лемме 16), то $\Phi(q(\alpha)) = q(\Phi(\alpha))$ для всех $\alpha \in B'(X)$. Отсюда, пользуясь Леммой 15, выводим следующее: $x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A \Leftrightarrow q(c_x) \subseteq q(c_A) \Leftrightarrow \Phi(q(c_x)) \subseteq \Phi(q(c_A)) \Leftrightarrow q(\Phi(c_x)) \subseteq q(\Phi(c_A)) \Leftrightarrow q(c_{x\varphi}) \subseteq q(c_B) \Leftrightarrow x\varphi \in B$. Следовательно, $B = A\varphi$, т.е. выполнено (8).

Теперь докажем, что

$$\forall u \in X \ \ u\alpha\varphi = u\varphi\beta. \qquad (9)$$

Действительно, так как $c_u\alpha = c_{u\alpha}$, то $\Phi(c_u)\Phi(\alpha) = \Phi(c_{u\alpha})$, следовательно, ввиду (8) получаем: $c_{u\varphi}\beta = c_{u\alpha\varphi}$, а значит, $c_{u\varphi\beta} = c_{u\alpha\varphi}$, т.е. выполнено (9).

Пусть u, v — любые элементы из X. Тогда, используя (9), получим:

$$(u,v) \in \alpha \Leftrightarrow v \in u\alpha \Leftrightarrow v\varphi \in u\alpha\varphi \Leftrightarrow v\varphi \in u\varphi\beta \Leftrightarrow (u\varphi, v\varphi) \in \beta.$$

Это означает, что $\Phi(\alpha) = \varphi^{-1}\alpha\varphi$. □

Отметим, что, так как группа $G(X)$ содержится в каждой из полугрупп $T(X)$, $P(X)$, $B(X)$, $B'(X)$, из Теорем 9–11, 17 следует, что все автоморфизмы этих полугрупп внутренние (достаточно взять в этих теоремах $Y = X$).

Назовём бинарное отношение $\alpha \in B(X)$ *кополным*, если $\mathrm{im}\,\alpha = X$. Очевидно, множество $\tilde{B}(X)$ всех кополных бинарных отношений является подполугруппой полугруппы $B(X)$. Для этой полугруппы верна теорема, аналогичная доказанным, а именно, если $\Phi : \tilde{B}(X) \to \tilde{B}(Y)$ — изоморфизм полугрупп, то существует взаимно однозначное отображение $\varphi : X \to Y$ такое, что $\Phi(\alpha) = \varphi^{-1}\alpha\varphi$ для всех $\alpha \in \tilde{B}(X)$. Доказательство не представляет труда: достаточно заметить, что полугруппы $B'(Z)$ и $\tilde{B}(Z)$ при любом Z антиизоморфны друг другу, и применить Теорему 9.

Список литературы

[1] V. V. Vagner, The theory of relations and algebra of partial mappings, In coll. Theory of semigroups and its applications, Saratov State Univ., 3–178. (Russian)

[2] A. H. Clifford, G. B. Preston, The algebraic theory of semigroups, Vol. 1 and Vol. 2, Providence, American mathematical Society, 1961 and 1967 (Mathematical Surveys, 7).

[3] Yu. L. Ershov, E. A. Palyutin, Mathematical logic, Revised English translation by Shokurov Vladimir of the preceding, Mir Publishers : Moscow, 1984, 303 p., Vol. 51 Issue 3, Elliott Mendelson.

[4] B. I. Plotkin. Groups of automorphisms of algebraic systems. Wolters Noordhoff Publishing, First Edition (January 1, 1972).

[5] J. Schreier. Über Abbildungen einer abstrakten Menge auf ihre Teilmengen, Fund. Math., **28** (1937), 261–264.

[6] A. I. Mal'tsev, Symmetric groupoids, Mat. Sb. (N.S.), **31(73)**, 1 (1952), 136-–151. (Russian)

[7] R. P. Sullivan, Automorphisms of transformation semigroups, J. Austral. Math. Soc., **20**, (1975), Ser. A, 77–84.

[8] E. S. Ljapin (Lyapin), Semigroups, American Mathematical Society, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 3, Providence, R. I, (First Edition, 1963), (Second Edition, with a new chapter added, 1968), (Third Edition, with another chapter added, 1974).

[9] L. M. Gluskin, Ideals of semigroups of transformations, Mat. Sb. (N.S.), **47(89)**, 1 (1959), 111-–130.

[10] K. D. Jr. Magill, Automorphisms of the semigroup of all relations on a set, Canad. Math. Bull., **9**, 21 (1966), 73–77.

[11] K. D. Jr. Magill, Semigroup structures for families of functions, I, Some Homomorphism Theorems. J. Austral. Math. Soc., **7** (1967), 81–107.

СВОЙСТВА ОТДЕЛИМОСТИ ДЛЯ ГИПЕРГРАФОВ МОДЕЛЕЙ ВПОЛНЕ O-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

Б. Ш. Кулпешов, С. В. Судоплатов*

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия;
Институт математики и математического моделирования,
ул. Шевченко, 28, Алма-Ата, 050010, Казахстан;
Казахстанско-Британский технический университет,
ул. Толе би, 59, Алма-Ата, 050000, Казахстан;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz, sudoplat@math.nsc.ru

1 Предварительные сведения

Гиперграфы моделей теории относятся к производным объектам, относительно данных теорий и их моделей, позволяющим получать существенную структурную информацию как о самих теориях, так и о сопутствующих семантических объектах, включая графовые [1, 2, 3, 4, 5].

В настоящей работе исследуются свойства понятий отделимости для гиперграфов моделей вполне -минимальной теории. Установлены характеризации T_0-отделимости и хаусдорфовой отделимости: Теорема 2.1, Следствие 2.2, Предложение 2.4. Приведен пример, показывающий существенность вполне o-минимальности для этой характеризации: Пример 2.3.

Напомним, что *гиперграфом* называется любая пара множеств (X, Y), где Y — некоторое подмножество булеана $\mathcal{P}(X)$ множества X.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант AP19674850), а также в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева, проект № FWNF–2022–0012.

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая модель полной теории T. Следуя [4], обозначим через $H(\mathcal{M})$ совокупность всех подмножеств N носителя M системы $\mathcal{M}$, которые являются носителями элементарных подмоделей $\mathcal{N}$ модели $\mathcal{M}$: $H(\mathcal{M}) = \{N \mid \mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{M}\}$. Пара $(M, H(\mathcal{M}))$ называется *гиперграфом элементарных подмоделей* модели $\mathcal{M}$ и обозначается через $\mathcal{H}(\mathcal{M})$.

Определение 1.1. [4] Пусть (X, Y) — гиперграф, x_1, x_2 — различные элементы из X. Будем говорить, что элемент x_1 *отделяется*, или *отделим* от элемента x_2, или T_0*-отделим*, если существует $y \in Y$ такой, что $x_1 \in y$ и $x_2 \notin y$. Элементы x_1 и x_2 называются *отделимыми*, T_2*-отделимыми*, или *хаусдорфово отделимыми*, если существуют дизъюнктные $y_1, y_2 \in Y$ такие, что $x_1 \in y_1$ и $x_2 \in y_2$.

Теорема 1.2. [4] *Пусть $\mathcal{M}$ — ω-насыщенная модель счетной полной теории T, $a, b \in \mathcal{M}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *элемент a отделим от элемента b в $H(\mathcal{M})$;*

(2) $b \notin \operatorname{acl}(a)$.

Теорема 1.3. [4] *Пусть $\mathcal{M}$ — ω-насыщенная модель счетной полной теории T, $a, b \in \mathcal{M}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *элементы a и b отделимы в $H(\mathcal{M})$;*

(2) $\operatorname{acl}(a) \cap \operatorname{acl}(b) = \varnothing$.

Определение 1.4. [4] Пусть (X, Y) — гиперграф, X_1, X_2 — непересекающиеся подмножества множества X. Будем говорить, что множество X_1 *отделяется* или *отделимо* от множества X_2, или T_0*-отделимо*, если существует $y \in Y$ такой, что $X_1 \subseteq y$ и $X_2 \cap y = \varnothing$. Множества X_1 и X_2 называются *отделимыми*, T_2*-отделимыми*, или *хаусдорфово отделимыми*, если существуют дизъюнктные $y_1, y_2 \in Y$ такие, что $X_1 \subseteq y_1$ и $X_2 \subseteq y_2$.

Вспомним, что подмножество A линейно упорядоченной структуры $\mathcal{M}$ называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо o-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $\mathcal{M} = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры $\mathcal{M}$ является объединением конечного числа выпуклых множеств в $\mathcal{M}$.

Определение 1.5. Пусть $\mathcal{M}$ — слабо o-минимальная структура, $A \subseteq M$, $\mathcal{M}$ $|A|^+$-насыщенна, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы. Будем говорить что тип p не является *слабо ортогональным* типу q ($p \not\perp^w q$), если существуют L_A-формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(\mathcal{M})$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(\mathcal{M})$ такие, что $\beta_1 \in H(\mathcal{M}, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(\mathcal{M}, \alpha)$.

Иными словами, тип p является *слабо ортогональным* типу q ($p \perp^w q$), если $p(x) \cup q(y)$ имеет единственное расширение до полного 2-типа над A.

Лемма 1.6. [8] *Пусть T — слабо о-минимальная теория, $\mathcal{M} \models T$, $A \subseteq M$. Тогда отношение не слабой ортогональности $\not\perp^w$ является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.*

Определение 1.7. [9] Пусть $\mathcal{M}$ — слабо o-минимальная структура, $A \subseteq M$, $\mathcal{M}$ $|A|^+$-насыщенна, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы. Будем говорить что тип p не является *вполне ортогональным* типу q ($p \not\perp^q q$), если существует A-определимая биекция $f : p(\mathcal{M}) \to q(\mathcal{M})$. Будем говорить что слабо o-минимальная теория является *вполне о-минимальной*, если понятия слабой и вполне ортогональности 1-типов совпадают.

Отметим, что поскольку отделимость множеств A и B в гиперграфах $H(\mathcal{M})$ возможна лишь при $\mathrm{acl}(A) \cap \mathrm{acl}(B) = \varnothing$, такая отделимость никогда не имеет места при $\mathrm{acl}(\emptyset) \neq \emptyset$. Таким образом, естественно рассматривать следующие понятия относительной отделимости.

Определение 1.8. [5] Пусть (X, Y) — гиперграф, x_1, x_2 — различные элементы из X, $Z \subset X$, $x_2 \notin Z$. Будем говорить, что элемент x_1 *Z-отделяется* или *Z-отделим* от элемента x_2, или *(T_0, Z)-отделим*, если существует $y \in Y$ такой, что $x_1 \in y \cup Z$ и $x_2 \notin y$. При этом множество y называется *Z-отделяющим* x_1 от x_2. При дополнительном условии $x_1 \notin Z$ элементы x_1 и x_2 называются *Z-отделимыми*, *(T_2, Z)-отделимыми* или *хаусдорфово Z-отделимыми*, если существуют $y_1, y_2 \in Y$ такие, что $(y_1 \cap y_2) \setminus Z = \varnothing$, $x_1 \in y_1$ и $x_2 \in y_2$.

Пусть X_1, X_2 — подмножества множества X, $(X_1 \cap X_2) \setminus Z = \emptyset$, $X_2 \not\subseteq Z$. Будем говорить, что множество X_1 *Z-отделяется*, или *Z-отделимо* от множества X_2, или *(T_0, Z)-отделимо*, если существует $y \in Y$ такой, что $X_1 \subseteq y \cup Z$ и $(X_2 \cap y) \setminus Z = \varnothing$. При дополнительном условии $X_1 \not\subseteq Z$ множества X_1 и X_2 называются *Z-отделимыми*, *(T_2, Z)-отделимыми* или *хаусдорфово Z-отделимыми*, если существуют $y_1, y_2 \in Y$ такие, что $(y_1 \cap y_2) \setminus Z = \varnothing$ $X_1 \subseteq y_1$ и $X_2 \subseteq y_2$.

Теорема 1.9. [5] *Пусть $\mathcal{M}$ — ω-насыщенная модель счетной полной теории T, Z — алгебраическое замыкание некоторого конечного множества в $\mathcal{M}$, a и b — элементы из $\mathcal{M}$, $b \notin Z$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *элемент a Z-отделим от элемента b в $H(\mathcal{M})$ посредством некоторого множества y из $H(\mathcal{M})$, содержащего Z;*

(2) *элемент a Z-отделим от элемента b $H_{\omega_1}(\mathcal{M})$ посредством некоторого множества y из $H_{\omega_1}(\mathcal{M})$, содержащего Z;*

(3) *$b \notin \mathrm{acl}(aZ)$.*

Теорема 1.10. [5] *Пусть $\mathcal{M}$ — ω-насыщенная модель счетной полной теории T, Z — алгебраическое замыкание некоторого конечного множества в $\mathcal{M}$, a и b — элементы из $\mathcal{M}$, $a, b \notin Z$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *элементы a и b Z-отделимы в $H(\mathcal{M})$ посредством некоторых множеств y и z из $H(\mathcal{M})$, содержащих Z;*

(2) *элементы a и b Z-отделимы в $H_{\omega_1}(\mathcal{M})$ посредством некоторых множеств y и z из $H_{\omega_1}(\mathcal{M})$, содержащих Z;*

(3) $(\mathrm{acl}(aZ) \cap \mathrm{acl}(bZ)) \setminus Z = \varnothing$.

2 Об отделимости в гиперграфах моделей упорядоченных теорий

Теорема 2.1. *Пусть T — вполне o-минимальная теория с немаксимальным числом счетных моделей, $\mathcal{M}$ — счетная насыщенная модель теории T, Z — алгебраическое замыкание некоторого конечного множества в $\mathcal{M}$, $a, b \in M \setminus Z$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *a Z-отделим от b в $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ посредством некоторого множества y из $H(\mathcal{M})$, содержащего Z;*

(2) *b Z-отделим от a в $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ посредством некоторого множества y из $H(\mathcal{M})$, содержащего Z;*

(3) *элементы a и b Z-отделимы в $H(\mathcal{M})$ посредством некоторых множеств y и z из $H(\mathcal{M})$, содержащих Z;*

(4) $a \notin \mathrm{dcl}(\{bZ\})$;

(5) $b \notin \mathrm{dcl}(\{aZ\})$.

(6) $(\mathrm{dcl}(aZ) \cap \mathrm{dcl}(bZ)) \setminus Z = \varnothing$.

Доказательство. В силу предложения 3.1 [6] имеет место принцип замены для алгебраического замыкания. В силу линейной упорядоченности модели $\mathcal{M}$ имеет место $\mathrm{dcl}(A) = \mathrm{acl}(A)$ для любого $A \subseteq M$. Тогда эквивалентность условий (1)–(6) следует из теорем 1.9 и 1.10. □

Из теоремы 2.1 непосредственно вытекает:

Следствие 2.2. *Пусть TЁ — вполне o-минимальная теория с немаксимальным числом счетных моделей, $\mathcal{M}$ — счетная насыщенная модель теории T, $a, b \in M \setminus \mathrm{dcl}(\varnothing)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *a отделим от b в $\mathcal{H}(\mathcal{M})$;*

(2) *b отделим от a в $\mathcal{H}(\mathcal{M})$;*

(3) $a \notin \mathrm{dcl}(\{b\})$;

(4) $b \notin \mathrm{dcl}(\{a\})$.

Пример 2.3. [7] Пусть $\mathcal{M} = \langle M; <, P_1^1, P_2^1, f^1 \rangle$ — линейно упорядоченная структура такая, что M есть не пересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(\mathcal{M}) < P_2(\mathcal{M})$. Мы отождествляем интерпретацию P_2 с множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$, упорядоченном как обычно, а P_1 с $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, упорядоченном лексикографически. Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $\mathrm{Dom}(f) = P_1(\mathcal{M})$

и $\mathrm{Range}(f) = P_2(\mathcal{M})$ и определяется равенством $f((n,m)) = n$ для всех $(n,m) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Известно, что $\mathcal{M}$ — счетно категоричная слабо o-минимальная структура, при этом теория $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ не является вполне o-минимальной. Возьмем произвольные $a \in P_1(\mathcal{M}), b \in P_2(\mathcal{M})$ такие, что $f(a) = b$. Тогда получаем, что a отделим от b в $\mathcal{H}(\mathcal{M})$, но b не отделим от a в $\mathcal{H}(\mathcal{M})$.

Предложение 2.4. *Пусть T — вполне о-минимальная теория с немаксимальным числом счетных моделей, $\mathcal{M} \models T$, $A, B \subseteq M$ — конечные множества. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *A и B отделимы друг от друга в $\mathcal{H}(\mathcal{M})$;*

(2) $\mathrm{dcl}(A) \cap \mathrm{dcl}(B) = \emptyset$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Пусть множество A отделимо от B в $\mathcal{H}(\mathcal{M})$. Это означает, что существует $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}$ такая, что $A \subseteq M_1$ и $B \cap M_1 = \emptyset$. Тогда имеем: $\mathrm{dcl}(A) \subseteq M_1$, откуда получаем, что $dcl(A) \cap B = \emptyset$. Аналогично, из условия отделимости B от A в $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ может быть установлено, что $\mathrm{dcl}(B) \cap A = \emptyset$.

Допустим противное: $\mathrm{dcl}(A) \cap \mathrm{dcl}(B) \neq \emptyset$. Следовательно, существует $c \in M$ такой, что $c \in \mathrm{dcl}(A)$ и $c \in \mathrm{dcl}(B)$. Но тогда в силу бинарности теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ существуют $a \in A$ и $b \in B$ такие, что $c \in \mathrm{dcl}(\{a\})$ и $c \in \mathrm{dcl}(\{b\})$. На основании выполнимости принципа замены для алгебраического замыкания мы получаем, что $b \in \mathrm{dcl}(\{a\})$. Последнее противоречит тому, что $\mathrm{dcl}(A) \cap B = \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (1) В этом случае утверждаем что $M_1 := M \setminus \mathrm{dcl}(A)$ и $M_2 := M \setminus \mathrm{dcl}(B)$ являются носителями элементарных подмоделей модели $\mathcal{M}$. $\square$

Список литературы

[1] S. V. Sudoplatov, Classification of countable models of complete theories, Novosibirsk : Edition of NSTU, 2018.

[2] S. V. Sudoplatov, On acyclic hypergraphs of minimal prime models, Siberian Mathematical Journal, **42**, 6 (2001), 1170–1172.

[3] S. V. Sudoplatov, Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories, Journal of Mathematical Sciences, **169**, 5 (2010), 680–695.

[4] S. V. Sudoplatov, On the separability of elements and sets in hypergraphs of models of a theory, Bulletin of Karaganda University, Mathematics, **82**, 2 (2016), 113–120.

[5] B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, On relative separability in hypergraphs of models of theories, Eurasian Mathematical Journal, **9**, 4 (2018), 68–78.

[6] B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, Vaught's conjecture for quite *o*-minimal theories, Annals of Pure and Applied Logic, **168**, 1 (2017), 129–149.

[7] H. D. Macpherson, D. Marker, C. Steinhorn, Weakly *o*-minimal structures and real closed fields, Transactions of The American Mathematical Society, **352** (2000), 5435–5483.

[8] B. S. Baizhanov, Expansion of a model of a weakly *o*-minimal theory by a family of unary predicates, The Journal of Symbolic Logic, **66** (2001), 1382–1414.

[9] B. Sh. Kulpeshov, Rank of convexity and orthogonality in week *o*-minimal theories, Izvestia of NAS of RK, series of phisics and mathematics, **227** (2003), 26–31. (Russian)

ОПЕРАТОРЫ ЗАМЫКАНИЯ В КУБИЧЕСКИХ И АЦИКЛИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ

С. Б. Малышев*

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: sergei2-mal1@yandex.ru

1 Введение

Структурная классификация алгебраических систем предполагает описание видов их геометрий. Исследование основных видов предгеометрий и геометрий проводилось для классов сильно минимальных и ω-стабильных структур. Важные исследования в этой области были проведены в 1980-х годах, включая работы Б. И. Зильбера [16, 17, 18, 19] и Г. Черлина, Л. Харрингтона, А. Лахлана [4].

Например, Г. Черлин, Л. Харрингтон и А. Лахлан в своей совместной работе классифицируют строго минимальные $\aleph_0$-категоричные структуры, обладающих некоторыми незначительными дополнительными свойствами. И рассматривают как классические геометрии (аффинные, проективные или вырожденные) бесконечной размерности над конечным полем.

Так же классификация ω-категоричных строго минимальных множеств является фундаментальным результатом, достигнутым Г. Черлиным и Б. И. Зильбером. Эти объекты оказались либо (бесконечномерными) аффинными или проективными пространствами над конечными полями, либо (бесконечными) неразличимыми множествами. Б. И. Зильбер представил ряд результатов и сформулировал гипотезы о несчетно категоричных теориях, среди которых ключевой была гипотеза о возможности классификации таких теорий с точностью до биинтерпретируемости.

Современные исследователи продолжают изучать разнообразные виды предгеометрий и геометрий, включая описание геометрий различных объектов [1, 2, 3]. Примером может служить исследование матроидов Вамоса [10]. Эти исследования порождают естественные вопросы о классификации предгеометрий и геометрий для различных значимых классов структур и их теорий.

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-21-00044.

В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия для видов предгеометрий кубических и ациклических теорий с оператором алгебраического замыкания. Определения предгеометрий и её типов взяты из работы [11], а кубической теории из [12, 13]. Также в работе было замечено, что для предгеометрий кубических и ациклических теорий нарушается свойство замены. Учитывая это, введены новые понятия, не опирающиеся на данное свойство: c-предгеометрия и a-предгеометрия, а также c-размерность и a-размерность. С помощью c-размерности и a-размерности были введены новые определения c-модулярность и a-модулярность — аналог модулярности для c-предгеометрий и a-предгеометрий. Для кубических теорий были установлены зависимости вырожденности, c-модулярности, c-проективности и c-локально конечности c-предгеометрии от количества кубов различной размерности в кубических моделях. Весь результат для кубических теорий был опубликован в журнале “Известия иркутского государственного университета” [8]. Для ациклических теорий были установлены зависимости a-модулярности и a-локально конечности a-предгеометрии от числа неизоморфных деревьев и специальных точек. Также установлены достаточные условия зависимости для a-локально конечной a-предгеометрии от вершин a-типа.

2 Предгеометрии

Определение 2.1. *Предгеометрией* называется множество S вместе с определённой операцией замыкания $\mathrm{cl} : P(S) \to P(S)$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) для любого $X \subseteq S$ выполняется $X \subseteq \mathrm{cl}(X)$;

2) для любого $X \subseteq S$ выполняется $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$;

3) для любого $X \subseteq S$ и любых $a, b \in S$, если $a \in \mathrm{cl}(X \cup \{b\}) - \mathrm{cl}(X)$, то $b \in \mathrm{cl}(X \cup \{a\})$;

4) для любого $X \subseteq S$ если $a \in \mathrm{cl}(X)$, то $a \in \mathrm{cl}(Y)$ для некоторого конечного $Y \subseteq X$.

При наличии предгеометрии $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ каждое подмножество $X \subseteq S$ имеет минимальное множество $X' \subseteq X$ такое, что $\mathrm{cl}(X) = \mathrm{cl}(X')$. Это минимальное множество X' называется *базисом* множества X. При этом все базисы равномощны и эта мощность называется *размерностью* множества X в предгеометрии $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$, обозначается $\dim(X)$.

По определению имеем $\dim(X) = \dim(\mathrm{cl}(X))$, т.е. размерность сохраняется при переходе к замыканию множества X в предгеометрии $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$.

Если $\dim(X) \in \omega$, то множество X называется *конечномерным.*

Определение 2.2. Множество $X \subseteq S$ называется замкнутым, если $X = \mathrm{cl}(X)$.

Определение 2.3. Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется *тривиальной* или *вырожденной*, если для любого $X \subseteq S$, $\mathrm{cl}(X) = \bigcup\{\mathrm{cl}(\{a\}) \mid a \in X\}$.

Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется *модулярной*, если для любых замкнутых множеств $X_0, Y_0 \subseteq S$, X_0 независимо от Y_0 относительно $X_0 \cap Y_0$, т.е. для любых конечномерных замкнутых множеств $X \subseteq X_0$, $Y \subseteq Y_0$ верно

$$\dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y) = \dim(X \cup Y).$$

Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется *локальной модулярной*, если для любого $a \in S$, предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}_{\{a\}}\rangle$ модулярна, где $\mathrm{cl}_{\{}a\}(X) = \mathrm{cl}(X \cup \{a\})$.

Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется *проективной*, если она модулярная и не тривиальная, и *локально проективной*, если она локально модулярная и не тривиальная.

Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется *локально конечной*, если для любого конечного подмножества $A \subseteq S$, множество $\mathrm{cl}(A)$ конечно.

Определение 2.4. Пусть S — модель теории T. Тогда оператором *алгебраического замыкания* для модели M называется оператор $\mathrm{acl} : P(M) \to P(M)$ такой, что для любого подмножества $X \subseteq S$, $\mathrm{acl}(X) = \{a \in S \mid$ для некоторой формулы $\varphi(x, \bar{y})$ и $\bar{b} \in X$ верно $S \models \exists^{<\omega} x\varphi(x, \bar{b}) \wedge \varphi(a, \bar{b})\ \}$.

В дальнейшем будут рассматриваться предгеометрии вида $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$.

3 Типы предгеометрий кубических теорий

Определение 3.1. Назовём *n-мерным кубом*, или *n-кубом*, всякий граф, изоморфный графу с носителем $\{0,1\}^n$, в котором две вершины $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ и $(\delta'_1, \ldots, \delta'_n)$ смежны тогда и только тогда, когда они различаются ровно одной координатой. При этом описанный граф Q_n с носителем $\{0,1\}^n$ называется *каноническим представителем* класса *n-кубов.*

Определение 3.2. Пусть λ — некоторый бесконечный кардинал. Назовём *λ-мерным кубом*, или *λ-кубом*, всякий граф, изоморфный графу $\mathrm{Q} = \langle X; R\rangle$, удовлетворяющему следующим условиям:

1) носитель $X \subseteq \{0,1\}^\lambda$ порожден из произвольной функции $f \in X$ оператором $\langle f\rangle$, который к множеству $\{f\}$ присоединяет результат замены любого конечного набора значений $(f(i_1), \ldots, f(i_m))$ на набор значений $(1 - f(i_1), \ldots, 1 - f(i_m))$;

2) отношение R состоит из рёбер, связывающих функции, различающиеся ровно одной координатой.

Определение 3.3. *Кубической системой* называется граф $\Gamma = \langle X; R\rangle$, у которого каждая компонента связности является кубом. Теория T графовой сигнатуры $\{R^{(2)}\}$ называется *кубической*, если $T = \mathrm{Th}(M)$ для некоторой кубической системы M. При этом система M называется *кубической моделью* теории T.

Определение 3.4. *Инвариантом* кубической теории T называется функция

$$\mathrm{Inv}_T : \omega \cup \{\infty\} \to \omega \cup \{\infty\},$$

удовлетворяющая следующим условиям:

1) каждому натуральному числу n ставится в соответствие число $\mathrm{Inv}_T(n)$ компонент связности всякой модели теории T, являющихся n-кубами, если это число конечно, и символ ∞, если это число бесконечно;

2) символу ∞ ставится в соответствие значение 0, если в моделях теории T нет бесконечномерных кубов (или, что то же самое, размерности кубов ограничены в совокупности), и значение 1 — в противном случае.

Определение 3.5. *Диаметром* $d(T)$ кубической теории T называется максимальное расстояние между элементами моделей теории T, если эти расстояния ограничены, и полагается $d(T) \rightleftharpoons \infty$ в противном случае. *Носителем* (соответственно ∞-*носителем*) $\mathrm{Supp}(T)$ ($\mathrm{Supp}_\infty(T)$) теории T называется множество $\{n \in \omega \cup \{\infty\} \mid \mathrm{Inv}_T(n) \neq 0\}$ ($\{n \in \omega \cup \{\infty\} \mid \mathrm{Inv}_T(n) = \infty\}$).

Замечание 3.6. Для систем $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ в кубических теориях T выполняется свойство замены тогда и только тогда, когда модели S теории T не содержат бесконечных кубов, в частности, когда нет конечных кубов неограниченной размерности.

Действительно, для конечных кубов имеем вырожденную предгеометрию, для которой замена элемента алгебраического замыкания на любой другой элемент из этого замыкания будет означать либо замену элемента из $\mathrm{acl}(\emptyset)$ на другой элемент из этого множества, либо замену одного элемента конечного куба C на другой с захватом всех элементов из C. А если рассмотреть три различных элемента a, b, c некоторого бесконечного куба C', для которых $d(b, c) > 1$ и a принадлежит некоторому кратчайшему (b, c)-маршруту, то $a \in \mathrm{acl}(\{c, b\}) \setminus \mathrm{acl}(\{c\})$, но $b \notin \mathrm{acl}(\{c, a\})$.

В силу замечания для систем $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ в качестве размерности следует рассматривать размерность кубов и говорить о c-модулярности предгеометрий, т.е. о связи размерностей кубов, не опираясь на свойство замены. При этом кубические системы $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$, удовлетворяющие условиям 1), 2), 4) определения предгеометрии будут называться *c-предгеометриями.*

Определение 3.7. Для кубических теорий T в качестве *c-размерности* $\dim_c(A)$, где $A \subseteq M \models T$, рассматривается значение $\mu_A + \sum\limits_{C'} \nu_{A\cap C'}$, где μ_A — число конечных кубов $C \subseteq M$ с условием $C \cap A \neq \emptyset$, а $\nu_{A\cap C'}$ — размерности наименьших подкубов K бесконечных кубов $C' \subseteq M$ с условием $(A \cap C') \subseteq K$.

Определение 3.8. c-Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется *c-модулярной*, если для любых acl-замкнутых множеств $X_0, Y_0 \subseteq S$, X_0 независимо от Y_0 относительно $X_0 \cap Y_0$, т.е. для любых конечномерных acl-замкнутых множеств $X \subseteq X_0$, $Y \subseteq Y_0$ верно:

1) если существует бесконечномерный куб C, для которого $X \cap Y \cap C = \emptyset$, $X \cap C \neq \emptyset$, $Y \cap C \neq \emptyset$, то выполняется равенство:

$$\begin{aligned} \dim_c(X \cap C) + \dim_c(Y \cap C) + \rho(X \cap C, Y \cap C) = \\ = \dim_c((X \cup Y) \cap C), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\rho(X \cap C, Y \cap C)$ — кратчайшее расстояние между вершинами $x \in X \cap C$ и $y \in Y \cap C$;

2) в остальных случаях для компонент связности C выполняется равенство:

$$\dim_c(X \cap C) + \dim_c(Y \cap C) - \dim_c(X \cap Y \cap C) = \dim_c((X \cup Y) \cap C). \tag{2}$$

Замечание 3.9. Согласно определениям c-размерности и c-модулярности при суммировании соотношений (1) и (2) по всем связным компонентам C получается некоторый обобщенный аналог формулы модулярности в предгеометриях для c-предгеометрий:

$$\begin{aligned} \sum_C \dim_c(X \cap C) + \sum_C \dim_c(Y \cap C) - \sum_C \dim_c(X \cap Y \cap C) + \\ + \sum_C \rho(X \cap C, Y \cap C) = \sum_C \dim_c((X \cup Y) \cap C). \end{aligned} \tag{3}$$

При этом за исключением первого случая в определении c-модулярности выполняется равенство:

$$\dim_c(X) + \dim_c(Y) - \dim_c(X \cap Y) = \dim_c(X \cup Y). \tag{4}$$

Заметим, что в соответствии с определением c-размерности формулу (3) можно переписать в следующем виде:

$$\mu_X + \mu_Y - \mu_{X \cap Y} = \mu_{X \cup Y},$$

$$\sum_C \nu_{X \cap C} + \sum_C \nu_{Y \cap C} - \sum_C \nu_{X \cap Y \cap C} + \sum_C \rho(X \cap C, Y \cap C) = \sum_C \nu_{(X \cap C) \cup (Y \cap C)}.$$

Действительно, пусть существует бесконечномерный куб C: $X \cap Y \cap C = \emptyset$, $X \cap C \neq \emptyset$, $Y \cap C \neq \emptyset$. В данном случае $\nu_{X \cap Y} = 0$, а $\nu_{(X \cap C) \cup (Y \cap C)}$ равно размерности двух кубов $X \cap C$, $Y \cap C$ и размерности куба между ними, та в свою очередь совпадает с кратчайшим расстоянием между вершинами $x \in X \cap C$ и $y \in Y \cap C - \rho(X, Y)$. Если множества X и Y пересекаются в бесконечномерном кубе C, то есть $X \cap Y \cap C \neq \emptyset$, то $\rho(X, Y) = 0$ и выполняется равенство

$$\nu_{X \cap C} + \nu_{Y \cap C} - \nu_{X \cap Y \cap C} = \nu_{(X \cap C) \cup (Y \cap C)}.$$

Теорема 3.10. *Пусть T — кубическая теория. Тогда для любой модели $M = \langle S, R\rangle$ теории T верны два утверждения:*

1) c-предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ вырожденная тогда и только тогда, когда все компоненты связности модели M конечны.

2) c-предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ является c-модулярной.

Доказательство. 1. Докажем, что c-предгеометрия, удовлетворяющая условиям пункта 1, вырождена.

При взятии алгебраического замыкания будем рассматривать формулы $\exists^{<\omega} x\varphi_n(x, \bar{b})$, где φ_n — формулы, не зависящие от $\bar{b}$ и принимающие значение истины, если вершина x инцидентна n рёбрам и таких вершин конечное число, $n \in \mathbb{N}$.

$$\exists^{<\omega} x \exists_{i=1}^{n} a_i \forall_{p\neq a_i} p\big(\bigwedge_{i=1}^{n} R(x, a_i) \bigwedge \neg R(x, p)\big)$$

В этом случае решения формул $\varphi_n(x, \bar{b})$ будут состоять из n-кубов, если количество кубов размерности n конечно. А так же множество таких решений будет совпадать с множеством $\mathrm{acl}(\emptyset)$.

Если имеется бесконечно много вершин степени n, тогда при взятии алгебраического замыкания будем рассматривать формулы $\exists^{<\omega} x\varphi_n(x, \bar{b})$, где φ_n — формулы, зависящие от $\bar{b}$ и принимающие значение истины, если вершина x инцидентна n рёбрам и содержится в той же компоненте связности, что и элементы из кортежа $\bar{b}$. В данном случае решением формул $\varphi_n(x, \bar{b})$ будут вершины n-кубов, в которых содержатся элементы кортежа $\bar{b}$.

Получается для любого $X \subseteq S$, $\mathrm{acl}(X) = \bigcup\{\mathrm{acl}(\{a\}) \mid a \in X\}$. Значит по определению предгеометрия вырожденная.

Предположим, что модель M содержит бесконечную компоненту связности. Докажем, что в этом случае предгеометрия не вырождена. Замыкание любого множества из двух и более вершин этой компоненты связности является наименьшим подкубом, содержащим все вершины из данного множества. А замыкание любого одноэлементного множества $\{a\}$, для любого $a \in S$, переводит его в себя. Следовательно, по определению предгеометрия не вырождена.

2. В силу того, что любое не пустое пересечение кубов в модели кубической теории снова является кубом, замечаем, что за исключением первого случая в определении c-модулярности в условиях второго пункта теоремы выполняется равенство (4), задающее c-модулярность.

В силу замечания, выполняются равенства:

$$\mu_X + \mu_Y - \mu_{X\cap Y} = \mu_{X\cup Y},$$

$$\nu_{X\cap C} + \nu_{Y\cap C} - \nu_{X\cap Y\cap C} + \rho(X \cap C, Y \cap C) = \nu_{(X\cap C)\cup(Y\cap C)}.$$

Таким образом, c-предгеометрия является c-модулярной. □

Определение 3.11. c-Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется *c-проективной*, если она c-модулярная и не тривиальная.

Теорема 3.12. *Пусть T — кубическая теория, а модель $M = \langle S, R\rangle$ теории T имеет бесконечную компоненту связности, которая является λ-кубом для некоторого кардинала λ. Тогда c-предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ является c-проективной.*

Определение 3.13. c-Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется *c-локально конечной*, если для любого конечного подмножества $A \subseteq S$, множество $\mathrm{cl}(A)$ конечно.

Теорема 3.14. *Пусть T — кубическая теория. Тогда для любой модели $M = \langle S, R\rangle$ теории T c-предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ не является локально конечной тогда и только тогда, когда имеется бесконечное количество натуральных чисел n, для которых $0 < \mathrm{Inv}_T(n) < \infty$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим доказательство справа налево. Пусть имеется бесконечное количество натуральных чисел n, для которых $0 < \mathrm{Inv}_T(n) < \infty$.

Тогда можно взять алгебраическую формулу $\varphi_n(x, \bar{b})$, не зависящую от $\bar{b}$, и принимающую значение истины, когда x — элемент n-куба. Для чисел n, таких что $0 < \mathrm{Inv}_T(n) < \infty$, алгебраические формулы $\varphi_n(x, \bar{b})$ будут иметь конечное число решений, а значит все вершины таких n-кубов будут содержаться в замыкании любого множества. Так как количество подобных n бесконечно, то и замыкание любого (в том числе конечного) множества будет бесконечным. В частности, $|\mathrm{acl}(\emptyset)| \geq \omega$. Таким образом, если имеется бесконечное количество натуральных чисел n, для которых $0 < \mathrm{Inv}_T(n) < \infty$, то c-предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ не является c-локально конечной.

Приведём доказательство слево направо. Пусть c-предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ не является c-локально конечной, но не имеется бесконечное количество натуральных чисел n, для которых $0 < \mathrm{Inv}_T(n) < \infty$. Тогда рассматриваем:

1) Конечное количество натуральных чисел n, для которых $0 < \mathrm{Inv}_T(n) < \infty$;

2) n-кубы, для которых $\mathrm{Inv}_T(n) = \infty$;

3) λ-куб для некоторого кардинала λ.

В первом случае замыкание конечного множество будет конечным. Вовтором — любая формула будет давать бесконечное число решений, а значит они не будут содержатся в замыкании любого множества. Следовательно, наличие или отсутствие таких кубов не влияет на c-локально конечность. В третьем случае замыкание любого конечного множества A будет вершинами наименьшего куба, содержащего все элементы из A и лежащий в λ-кубе. Получается, замыкание будет конечно. Значит, c-предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ не является c-локально конечной только в одном случае: имеется бесконечное количество натуральных чисел n, для которых $0 < \mathrm{Inv}_T(n) < \infty$. $\square$

Теорема 3.15. *Пусть T — кубическая теория. Тогда для некоторой (любой) модели $M = \langle S, R\rangle$ теории T выполняется одно из следующих условий:*

1) c-Предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ является c-локально конечной;

2) алгебраическое замыкание любого множества $A \subseteq M$ бесконечно.

4 Типы предгеометрий ациклических теорий

Определение 4.1. *Ациклической системой* называется граф $\Gamma = \langle X; R\rangle$, у которого каждая компонента связности является деревом. Теория T графовой сигнатуры $\{R^{(2)}\}$ называется *ациклической*, если $T = \mathrm{Th}(M)$ для некоторой ациклической системы M. При этом система M называется *ациклической моделью* теории T.

Определение 4.2. Будем называть вершину a в графе *n-вершиной* (*∞-вершиной*), если она инцидентна n рёбрам (бесконечному числу рёбер).

Замечание 4.3. Для систем $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ в ациклических теориях T не всегда выполняется свойство замены. Например, когда модель содержит дерево состоящее только из ∞-вершин.

Действительно, пусть в модели содержится дерево, все вершины которого имеют бесконечную степень. Тогда любые три различных элемента, лежащие на одном пути, будут нарушать свойство замены.

В силу замечания, для систем $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ в качестве размерности следует рассматривать размерность деревьев и говорить об a-модулярности предгеометрий, т.е. о связи размерностей деревьев, не опираясь на свойство замены. При этом ациклические системы $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$, удовлетворяющие условиям 1),2),4) определения предгеометрии будут называться *a-предгеометриями.*

Определение 4.4. Для ациклических теорий T в качестве a-размерности $\dim_a(A)$, где $A \subseteq M \models T$, рассматривается значение $\mu_A + \sum_{D'} \nu_{A\cap D'}$, где μ_A — число конечных деревьев $D \subseteq M$ с условием $A \cap D \neq \emptyset$, а $\nu_{A\cap D'}$ — число вершин наименьших поддеревьев K бесконечных деревьев $D' \subseteq M$ с условием $A \cap D' \subseteq K$.

Определение 4.5. a-Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется *a-модулярной*, если для любых acl-замкнутых множеств $X_0, Y_0 \subseteq S$, X_0 независимо от Y_0 относительно $X_0 \cap Y_0$, т.е. для любых конечномерных acl-замкнутых множеств $X \subseteq X_0$, $Y \subseteq Y_0$ верно:

1) если существует бесконечное дерево D, для которого $X \cap Y \cap D = \emptyset$, $X \cap D \neq \emptyset$, $Y \cap D \neq \emptyset$, то выполняется равенство:

$$\begin{aligned} &\dim_a(X \cap D) + \dim_a(Y \cap D) + \rho(X \cap D, Y \cap D) = \\ &\qquad = \dim_a((X \cup Y) \cap D), \end{aligned} \tag{5}$$

где $\rho(X \cap D, Y \cap D)$ — число вершин кратчайшего пути между вершинами $x \in X \cap D$ и $y \in Y \cap D$ (не считая вершины этих множеств);

2) в остальных случаях для компонент связности D выполняется равенство:

$$\dim_a(X \cap D) + \dim_a(Y \cap D) - \dim_a(X \cap Y \cap D) = \dim_a((X \cup Y) \cap D). \quad (6)$$

Замечание 4.6. Согласно определениям a-размерности и a-модулярности, при суммировании соотношений (5) и (6) по всем связным компонентам D получается некоторый обобщенный аналог формулы модулярности в предгеометриях для a-предгеометрий:

$$\sum_D \dim_a(X \cap D) + \sum_D \dim_a(Y \cap D) - \sum_D \dim_a(X \cap Y \cap D) + \\ + \sum_D \rho(X \cap D, Y \cap D) = \sum_D \dim_a((X \cup Y) \cap D).$$

Теорема 4.7. *Пусть T — ациклическая теория с бесконечной насыщенной моделью $M = \langle S, R\rangle$. Тогда a-предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ a-модулярна.*

Доказательство. В силу того, что любое не пустое пересечение деревьев в модели ациклической теории снова является деревом, замечаем, что за исключением первого случая в определении c-модулярности в условиях второго пункта теоремы выполняется равенство (6), задающее модулярность.

Теперь рассмотрим первый случай. Пусть существует бесконечное дерево D: $X \cap Y \cap D = \emptyset$, $X \cap D \neq \emptyset$, $Y \cap D \neq \emptyset$. В данном случае $\nu_{X \cap Y} = 0$, а $\nu_{(X \cap D) \cup (Y \cap D)}$ равно количеству вершин наименьших поддеревьев, содержащих $X \cap C$, $Y \cap C$ и количеству вершин кратчайшего пути между множествами $X \cap C$ и $Y \cap D$ (не считая вершины этих множеств) — $\rho(X, Y)$. Если множества X и Y пересекаются в бесконечном дереве D, то есть $X \cap Y \cap D \neq \emptyset$, то $\rho(X, Y) = 0$ и выполняется равенство

$$\nu_{X \cap D} + \nu_{Y \cap D} - \nu_{X \cap Y \cap D} = \nu_{(X \cap D) \cup (Y \cap D)}.$$

Таким образом, a-предгеометрия является a-модулярной. □

Определение 4.8. Пусть G — группа подстановок на носителе модели S с условием $\forall g \in G\ \forall a, b \in S\ R(g(a), g(b)) = R(a, b)$. Тогда вершина a называется *специальной*, если её орбита $aG = \{g(a) | \forall g \in G\}$ конечна.

Определение 4.9. Пусть G_A — группа подстановок на носителе модели S, с неподвижным множеством $A \subseteq S$, то есть $\forall g \in G\ \forall a \in A\ g(a) = a$; и с условием $\forall g \in G\ \forall a, b \in S\ R(g(a), g(b)) = R(a, b)$. Тогда вершина a называется *A-специальной*, если её орбита $aG = \{g(a) | \forall g \in G\}$ конечна.

Теорема 4.10. *Пусть T — ациклическая теория. Тогда для насыщенной модели $M = \langle S, R \rangle$ теории T выполняются следующие условия:*

1) *если в модели не содержатся бесконечные компоненты связности, но имеется бесконечное число конечных компонент связности, то а-предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl} \rangle$ не является а-локально конечной тогда и только тогда, когда модель содержит бесконечное число деревьев, которые изоморфны конечному числу компонент связности.*

2) *если в модели имеется бесконечная компонента, то а-предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl} \rangle$ является а-локально конечной тогда и только тогда, когда модель не имеет бесконечного числа специальных и A-специальных вершин для любого конечного множества $A \subseteq S$.*

Доказательство. 1) Пусть модель состоит из бесконечного числа конечных компонент связности.

Заметим, что для любой вершины конечного дерева (обозначим её p) можно составить формулу, для которой данная вершина будет решением. Пусть H — множество вершин нашего дерева. Тогда формула составляется по следующему принципу:

а) Берём все ребра, концы которых содержат вершины нашего дерева $a, b \in H$. Обозначим множество всех таких рёбер E;

б) Формула для вершины p будет иметь вид

$$\exists a_1 \dots \exists a_n \exists b_1 \dots \exists b_m \big(\bigwedge_{i=1}^{n} R(p, a_i) \bigwedge_{j=1}^{k} e_j \big) \wedge \forall_{d \in H} d \forall_{q \notin H} q (\neg R(d, q)),$$

где a_i — вершины из H, смежные с p, b_i — вершины из H, не смежные с p и e_j — ребра из E, не инцидентные p.

Видно, что решением данных формул (обозначим его K) будет не только вершина p, но и все вершины, в которые переходит p под действием семейства автоморфизмов. Более того, не существует более точных формул, то есть формул, решение которых было бы собственным подмножеством множества K. Докажем от противного. Все формулы строятся из конъюнкций, дизъюнкций, отрицания, кванторов существования и всеобщности отношения R. Если из вышеописанных формул убрать конъюнкцию с отношениями, то расширится множество решений. Если же к формулам добавить конъюнкцию или дизъюнкцию с отношениями, то получим формулу для другого дерева, а эти формулы мы уже используем. В целом любые составленные формулы будут находить вершины изоморфных деревьев. Конъюнкт из отношений R — это дерево. Дизъюнкция таких конъюнктов будет находить вершины деревьев, за каждый из которых отвечает соответствующий конъюнкт.

Алгебраическое замыкание любого непустого подмножества $X \subseteq S$ будет состоять из $\mathrm{acl}(\emptyset)$ и вершин компонент связности D, которые содержат вершины множества X, то есть вершин из D таких, что $D \cap X \neq \emptyset$.

Значит будет ли замыкание конечного множества бесконечным, зависит только от размерности $\mathrm{acl}(\emptyset)$.

Тогда алгебраическое замыкание любого подмножества носителя, в частности пустое множество, будет бесконечным только в случае бесконечного числа деревьев, которые изоморфны конечному числу компонент связности. Следовательно, тогда и только тогда будет нарушаться a-локально конечность.

2)Теперь рассмотрим ещё и бесконечные деревья. Для вершин этих деревьев мы можем получить формулы аналогично предыдущему случаю, только убрав из формул конъюнкт $\wedge\forall_{d\in H}d\forall_{q\notin H}q(\neg R(d,q))$. Теперь решением формулы будут не только вершины изоморфных друг другу компонент связности, но и вершины поддеревьев. Заметим, что в a-предгеометрия с такими деревьями замыкание пустого множества может и не быть бесконечным, а замыкание конечного множества вершин, наоборот, нарушит a-локально конечность.

В силу этих формул, если, как и в предыдущий раз, у нас имеются бесконечное число конечных не изоморфных компонент связности, то замыкание пустого множества бесконечно.

Все алгебраические формулы, которые можно составить из отношения R и которые не зависят от констант, будут описывать вершины некоторых изоморфных друг другу деревьев. Более того, решением формулы (обозначим ее K) будут вершины, которые переходят друг в друга под действием семейства автоморфизмов всей модели, то есть решением будет орбита элемента $k \in K$ группы подстановок G с условием $\forall g \in G\ \forall a,b \in S\ R(g(a),g(b)) = R(a,b)$. Если таких вершин конечное число, то по определению они являются специальными. Они всегда будут содержаться в замыкании пустого множества. Получается, что если специальных вершин бесконечное число, то замыкание любого конечного множества будет бесконечным. Следовательно, нарушается a-локальная конечность.

Разберём ещё один случай. Пусть у нас есть бесконечная компонента связности, в которой есть вершины, переходящие в конечное число вершин, под действием семейства всех автоморфизмов над носителем этой компоненты. Если в модели имеется бесконечное число деревьев изоморфных этой компоненте, то формулы без констант из этих компонент, не будут иметь конечное число решений. Однако, если использовать вышеописанные формулы, зависимые от констант (множество таких вершин обозначим A) с этих множеств, то замыкание конечного множества вершин A этих деревьев будет состоять из A-специальных вершин. Замыкание такого множества будет бесконечным, что будет нарушать a-локальную конечность.

Таким образом, a-предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ является a-локально конечной тогда и только тогда, когда модель имеет не более чем конечное число специальных и A-специальных вершин для любого конечного множества $A \subseteq S$. $\square$

Определение 4.11. Назовём *n-окрестностью* вершины a множество вершин, соединённых с ней через n рёбер. Это множество обозначается через $N_n(a)$.

Определение 4.12. Последовательность целых чисел и символа ∞ будем называть *кодом* вершины a от вершины b, если i — элемент последовательности является степенью i вершины на пути от элемента b к элементу a.

Определение 4.13. Будем говорить, что вершины имеют один a-тип, если на каждой их окрестности имеется одно и тоже число вершин одинакового кода.

Теорема 4.14. *Пусть T — ациклическая теория. Тогда для некоторой (любой) модели $M = \langle S, R\rangle$ теории T выполняются следующие условия:*

1) *если в модели можно выделить бесконечное число конечных множеств с вершинами одного а-типа, то а-предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ не является а-локально конечной.*

2) *если в модели у вершины можно выделить бесконечную последовательность окрестностей, на каждой из которых содержится конечное множество вершин одного а-типа, то а-предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ не является а-локально конечной.*

Доказательство. Формула для нахождения вершин кода $k_0, \ldots, k_n$ на n-окрестности вершины p имеет вид:

$$\exists_1^{k_0-1} a_j^{(1)} \ldots \exists_1^{k_n-1} a_j^{(n)} \exists b^{(1)} \ldots \exists b^{(n-1)} (\bigwedge_{i=1}^{k_0-1} R(p, a_i^{(1)}) \bigwedge R(p, b^{(1)}) \bigwedge \cdots$$
$$\cdots \bigwedge_{i=1}^{k_n-1} R(b^{(n-1)}, a_i^{(n-1)}) \bigwedge R(b^{n-1}, x) \bigwedge_{i=1}^{k_n} R(x, a_i^{(n)}))$$

Значит, формула для a-типа вершины p записывается как конъюнкции формул нахождения вершин соответствующих кодов с заменой в них x на связанные переменные. Так же p заменяется на x.

1. Первое условие теоремы означает, что у бесконечного числа формул будет конечное число решений. А значит, замыкание $\mathrm{acl}(\emptyset)$ будет бесконечным. Следовательно, нарушается условие a-локально конечности.

2. Тут к уже готовым формулам a-типа нужно через конъюнкцию добавить ещё информацию о положение на окрестности — $\exists p \exists l_1 \ldots \exists l_{r-1} R(p, l_1) \wedge \cdots \wedge R(l-1, x)$ — вершина a-типа находится на r окрестности вершины p. Второе условие теоремы говорит, что есть бесконечное число наших формул, которые имеют конечное число решений. Значит, замыкание пустого множества или вершины p будет бесконечным. Следовательно, нарушается условие a-локально конечности. $\square$

5 Заключение и планы дальнейшей работы

Установлены зависимости видов c-предгеометрий и a-предгеометрий от оператора алгебраического замыкания и компонент связности кубической и ациклической модели, соответственно. Кроме того, получено условие выполнения свойства замены из определения предгеометрии с оператором алгебраического замыкания в кубических и ациклических теориях.

В дальнейшем планируется продолжить работу для вырожденных и a-локально модулярных a-предгеометрий, а также определить двухстороннюю зависимость a-локально конечных a-предгеометрий и a-типов.

Список литературы

[1] A. Berenstein, E. Vassiliev, On lovely pairs of geometric structures, Annals of Pure and Applied Logic, **161**, 7 (2010), 866–878.

[2] A. Berenstein, E. Vassiliev, Weakly one-based geometric theories, J. Symb. Logic, **77**, 2 (2012), 392–422.

[3] A. Berenstein, E. Vassiliev, Geometric structures with a dense independent subset, Selecta Math, **22**, 1 (2016), 191–225.

[4] G. L. Cherlin, L. Harrington, A. H. Lachlan, ω-categorical, ω-stable structures, Annals of Pure and Applied Logic, **28** (1986), 103–135.

[5] C. C. Chang, H. J. Keisler, Model theory, Third edition of XLI 697, Studies in logic and the foundations of mathematics, 1990, Vol. 73, 650 p.

[6] W. Hodges, Model theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 1994, Vol. 42, Cambridge University Press, 772 p.

[7] E. Hrushovski, A new strongly minimal set, Annals of Pure and Applied Logic, **62**, 1993, 147–166.

[8] S. B. Malyshev, Kinds of Pregeometries of Cubic Theories, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **41** (2022), 140–149. `https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.140`

[9] N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov, Topologies, ranks, and closures for families of theories I, Algebra and Logic, **59**, 6 (2021), 437–455.

[10] M. M. Mukhopadhyay, E. Vassiliev, On the Vamos matroid, homogeneous pregeometries and dense pairs, Australian Journal of Combinatorics, **75**, 1 (2019), 158–170.

[11] A. Pillay, Geometric Stability Theory, Oxford : Clarendon Press, 1996, 361 p.

[12] S. V. Sudoplatov, Polygonometry of groups, Novosibirsk : NSTU Press, 2013, 302 p. (Russian)

[13] S. V. Sudoplatov, Models of cubic theories, Bulletin of the Section of Logic, **43**, 1–2 (2014), 19–34.

[14] S. V. Sudoplatov, Closures and generating sets related to combinations of structures, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **16** (2016), 131–144.

[15] V. A. Emelichev, O. I. Melnikov, V. T. Sarvanov, R. I. Tyshkevich, Lectures on Graph Theory, Moscow : Nauka, 1990, 384 p. (Russian)

[16] B. I. Zilber, The structure of models of ω_1-categorical theories, Proceedings of International Congress of Mathematicians, **1** (1983), 359–368.

[17] B. I. Zilber, Uncountably categorical theories, AMS Translations of Mathematical Monographs, **117** (1993).

[18] B. I. Zilber, Strongly minimal countably categorical theories, Sibirsk Matematika Zhurnal, **21**, 2 (1980), 98–112.

[19] B. U. Zilber, Strongly minimal countably categorical theories II, Sibirsk Matematika Zhurnal, **25**, 3 (1984), 71–88.

ON THE PROBLEM OF AXIOMATIZATION OF SOME CLASSES OF UNIVERSAL GRAPHIC SEMIAUTOMATA

V. A. Molchanov
Saratov State University,
83 Astrakhanskaya St.,
Saratov, 410012, Russia
e-mail: v.molchanov@inbox.ru

R. A. Farakhutdinov
Saratov State University,
83 Astrakhanskaya St.,
Saratov, 410012, Russia
e-mail: renatfara@mail.ru

One of the directions of modern algebra is the study of automata in categories [1], that is, automata whose sets of states and output signals are equipped with mathematical structures from a certain category $\mathbf{K}$, and the transition and output functions are morphisms of this category. In this paper, we consider automata without output signals over graphs — graphic semiautomata. The study of such automata includes well-known works of such algebraists as L. M. Gluskin, E. S. Lyapin, Yu M. Vazhenin, and others. In the category of such semiautomata for any graph G, there is a universally attracting object [1] $\mathrm{Atm}(G)$ with a semigroup of input signals $\mathrm{End}\, G$, which is called universal graphic semiautomaton over the graph G.

The topicality of the characterization problem of mathematical objects with the help of their endomorphisms and automorphisms was outlined by S. Ulam [2]. Taking into account the results of B. Jonsson on the problem of abstract characterization of relation algebras [3], an interest arises in the following problem: under what conditions will an abstract semiautomaton be isomorphic to some universal graphic semiautomaton $\mathrm{Atm}(G)$ over a graph G from a class $\mathbf{K}$? The purpose of this work is to prove the impossibility of axiomatization of semiautomata classes $\mathrm{Atm}\, bK)$ for some classes of reflexive graphs $\mathbf{K}$ by means of the RPC (restricted predicate calculus) language.

1 Basic notions

We assume that the reader is familiar with the basic notions of automata theory [1], graph theory [4], and theory of algebraic systems [5]. Let us briefly unify the basic notations used in this work.

By a graph, we mean a reflexive directed graph $G = (X, \rho)$, where X is a non-empty set of vertices and $\rho \subset X \times X$ is a set of edges that satisfies the condition $(x, x) \in \rho$ for all $x \in X$. For the graph $G = (X, \rho)$ an edge $(x, y) \in \rho$ is called proper if $(y, x) \notin \rho$. A graph is called quasi-acyclic if all of its proper edges do not belong to any cycle. An example of quasi-acyclic graphs are acyclic graphs, quasi-order graphs, and many others.

The graphs $G_0(X) = (X, \Delta_X)$, $G_1(X) = (X, X^2)$ are called trivial reflexive graphs. Any transformation of the set X is an endomorphism of these graphs, and hence their endomorphism semigroup coincides with the set $T(X)$ of all transformations of the set X. Denote the class of trivial reflexive graphs by $\mathbf{K_{tr}}$.

A semigroup semiautomaton is a system $A = (X, S, \star)$ consisting of a set of states X, an input signal semigroup $(S, \cdot)$, a transition function $\star : X \times S \to X$, satisfying $x \star (s_1 \cdot s_2) = (x \star s_1) \star s_2$ for every $x \in X$, $s_1, s_2 \in S$.

A semigroup semiautomaton $A = (X, S, \star)$ is called graphic if its set of states X is equipped with a structure of a graph $G = (X, \rho)$ such that for every input signal $s \in S$ a transition function $\delta_s = x \star s$ $(x \in X)$ is an endomorphism of G. In this case, we denote the semiautomaton by $A = (G, S, \star)$.

A graphic semiautomaton $\mathrm{Atm}(G) = (G, \mathrm{End}\, G, \star)$ with the operation $x \star \varphi = \varphi(x)$ (where $x \in X$, $\varphi \in \mathrm{End}\, G$) is a universally attracted object in the category of graphic semiautomata [1], that is why it is called universal graphic semiautomaton and is denoted by $\mathrm{Atm}(G)$.

The cardinality of a graphic semiautomaton $A = (G, S, \star)$ over a graph $G = (X, \rho)$ is a cardinal $|A| = |X| + |S|$. A semiautomaton A is called finite, countable, or uncountable if its cardinality $|A|$ is a finite, countable, or uncountable cardinal, respectively. In particular, the universal graphic semiautomaton $A = \mathrm{Atm}(G)$ over trivial reflexive graph G with vertex set X has cardinality $|A| = |X| + |X^X|$, which is finite for finite set X and uncountable for infinite set X.

2 Abstract characterization problem

Denote by $\mathrm{Atm}(\mathbf{K})$ the class of all semiautomata isomorphic to universal graphic semiautomata over graphs from the graph class $\mathbf{K}$. Obviously, this brings up the problem of abstract characterization of semiautomata from the class $\mathrm{Atm}(\mathbf{K})$ for the class of graphs $\mathbf{K}$ [3]: under what conditions will an abstract semiautomaton be isomorphic to some semiautomaton from the class $\mathrm{Atm}(\mathbf{K})$? In the papers [6], [7] there are solutions to this problem for the class of quasi-order graphs $\mathbf{K_{qo}}$ and for the class of reflexive quasi-acyclic graphs $\mathbf{K_{rqa}}$. Both of these results, in addition to the axioms of the RPC language, use conditions formulated in the language of the higher-order predicate calculus. The purpose of this paper is to prove the impossibility of axiomatization by means of the RPC language of semiautomaton classes $\mathrm{Atm}(\mathbf{K})$ for classes of graphs $\mathbf{K_{qo}}$, $\mathbf{K_{rqa}}$ and some other important classes of reflexive graphs.

A graphic semiautomaton $A = (G, S, \star)$ with a state graph $G = (X, \rho)$, a semigroup of input signals $S = (S, \cdot)$ and a transition function $\star : X \times S \to X$ is considered as a multibase algebraic Ω-system $A = (X, S, \Omega)$ with two non-empty basic sets X, S and the signature $\Omega = \{P, \cdot, \star\}$. Here, X is the set of vertices of the graph G, P is the binary predicate symbol of the adjacency relation on the set X of vertices of the graph G, $\cdot$ is the binary function symbol of the composition of semigroup elements, $\star$ is the binary function symbol of the transition function.

The elementary theory of universal graphic semiautomata is defined in the style of Hilbert's axioms for plane geometry using the RPC language with two-class variables $\mathbf{L_A}$. The alphabet of that language includes the following:

1) a countable set of individual class I variables that represent the elements of the set of vertices of the semiautomaton's state graph;

2) a countable set of individual class II variables that represent the semiautomaton's input signals;

3) a binary predicate symbol P of type $(1, 1)$ that represents the adjacency relation on the set of vertices of the semiautomaton's state graph;

4) a binary function symbol $\cdot$ of type $(2, 2, 2)$ that represents the composition operation in the semigroup of input signals of semiautomaton A;

5) a binary function symbol $\star$ of type $(1, 2, 1)$ that represents the transition function of semiautomaton A;

6) a finite set of logical and technical symbols, such as

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \Longrightarrow,\ \Longleftrightarrow,\ \forall^1,\ \exists^1,\ \forall^2,\ \exists^2,\ =\ \text{and}\ (,\ ).$$

Two-class terms of the language $\mathbf{L_A}$ are obtained by a simple combination of the symbol $\cdot$ with two class II terms and by the combination of the symbol $\star$ with terms of classes I and II respectively; i.e., they are expressions of the form $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $t^{(2)} \cdot t_1^{(2)}$, $t^{(1)} \star t^{(2)}$, where $x^{(1)}$ and $t^{(1)}$ are a variable and a term of class I, $x^{(2)}$ and $t^{(2)}$, $t_1^{(2)}$ are a variable and terms of class II. As this takes place, terms $t^{(1)} \star t^{(2)}$ and $t^{(2)} \cdot t_1^{(2)}$ are terms of class I and class II, respectively.

Atomic formulas of the language $\mathbf{L_A}$ are obtained by a simple combination of the symbol $=$ with two terms of the same class and by a combination of symbol P with two class I terms; i.e., they are expressions of the form $t = t'$, $P(t_1^{(1)}, t_2^{(1)})$, where t, t' are terms of the same class, $t_i^{(1)}$ are terms of class I (where $i = 1, 2$). Formulas of the language $\mathbf{L_A}$ are determined inductively in the usual way (see, for example, [8]).

For a class of graphs $\mathbf{K}$, a class of graphic semiautomata $\mathrm{Atm}(\mathbf{K})$ is called elementary axiomatizable if there exists such a set of sentences Σ of the language $\mathbf{L_A}$ of graphic semiautomata, that the class $\mathrm{Atm}(\mathbf{K})$ consists of those and only those graphic semiautomata A on which all formulas from the set Σ are true.

A graphic semiautomaton $A = (G, S, \star)$ over a graph $G = (X, \rho)$ can be considered not only as a multibase algebraic system $A = (X, S, \Omega)$ of the signature $\Omega = \{P, \cdot, \star\}$, but also as an ordinary algebraic system $A_1 = (B, \Omega_1)$ with the base set $B = X \cup S$ and enriched signature $\Omega_1 = \{P, \cdot, \star, P_X, P_S\}$ with two additional unary predicate symbols P_X, P_S to denote the states and input signals of the semiautomaton A. Therefore, the axiomatization of classes of graphic semiautomata using the RPC language of the signature $\Omega = \{P, \cdot, \star\}$ with two-class variables $\mathbf{L_A}$ reduces to the axiomatization of classes of such semiautomata using the usual RPC language of the signature $\Omega_1 = \{P, \cdot, \star, P_X, P_S\}$. Therefore, the main results of the model theory from the well-known monograph [8] are valid for graphic semiautomata. In particular, the following Löwenheim—Skolem—Tarski theorem will be valid for graphic semiautomata.

Theorem 2 (Löwenheim-Skolem-Tarski). *If an axiomatizable class of graphic semiautomata* $\mathbf{K}$ *has semiautomata of some infinite cardinality, then this class* $\mathbf{K}$ *has semiautomata of arbitrary infinite cardinality.*

3 Main result

Let us introduce predicates of the language $\mathbf{L_A}$ for class I variables x, y, u, v:

$$\Pi(x, y, u, v) = (\exists^2 s)(x * s = u \wedge y * s = v \wedge (\forall^1 z)(z * s = u \vee z * s = v)),$$

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \Pi(x, y, x, y) \wedge \neg\Pi(x, y, y, x), \\ E(x, y, u, v) &= (x = u \wedge y = v \vee x = v \wedge y = u), \\ N(x, y, u, v) &= (x \neq u \wedge x \neq v \wedge y \neq u \wedge y \neq v), \\ Q_1(x, y) &= Q(x, y) \wedge (\forall^1 u, v)(Q(u, v) \Rightarrow E(x, y, u, v)). \end{aligned}$$

Taking into account Lemma 3 from the paper [7], it is easy to check the correctness of the next lemma.

Lemma 3. *For any universal graphic semiautomaton* $\mathrm{Atm}(G)$ *the following statements are true:*

1) *for the vertices* a, b, c, d *of the state graph* G*, the predicate* $\Pi(a, b, c, d)$ *is true if and only if the semiautomaton* $\mathrm{Atm}(G)$ *contains input signal* s *that defines the mapping* $\delta_s(x) = x \star s$ $(x \in X)$*, that satisfies the condition* $\delta_s(a) = c$*,* $\delta_s(b) = d$*, and* $\delta_s(X) = \{c, d\}$*;*

2) *for vertices* a, b *of the nontrivial state graph* G*, the predicate* $Q(a, b)$ *is true if and only if the vertices* a *and* b *in the graph* G *are connected by a proper edge that does not belong to any cycle;*

3) *for vertices* a, b, c, d *of the state graph* G *the predicate* $E(a, b, c, d)$ *true if and only if* $\{a, b\} = \{c, d\}$*;*

4) *for vertices* a, b, c, d *of the state graph* G *the predicate* $N(a, b, c, d)$ *true if and only if* $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$*;*

5) *for the vertices* a, b *of the state graph* G *the predicate* $Q_1(a, b)$ *is true if and only if the vertices* a, b *in the graph* G *are connected by a proper edge that does not belong to any cycle, and the graph* G *has no other proper edges that do not belong to any cycle.*

The following result shows the impossibility of the elementary axiomatization of classes of universal graphic semiautomata $\mathrm{Atm}(\mathbf{K})$ for some classes of reflexive graphs $\mathbf{K}$.

Theorem 4. *For the following classes of graphs* $\mathbf{K}$*, the classes of universal graphic semiautomata* $\mathrm{Atm}(\mathbf{K})$ *cannot be elementary axiomatizable:*

1) *the class* $\mathbf{K_{tr}}$ *of all trivial reflexive graphs;*

2) *the class* $\mathbf{K_r}$ *of all reflexive graphs;*

3) *the class* $\mathbf{K_{rs}}$ *of all reflexive symmetric graphs;*

4) *the class* $\mathbf{K_{qo}}$ *of all quasi-order graphs;*

5) *the class* $\mathbf{K_{ra}}$ *of all reflexive acyclic graphs;*

6) *the class* $\mathbf{K_{re}}$ *of all reflexive graphs, having an edge, that does not belong to any cycle;*

7) *the class* $\mathbf{K_{rqa}}$ *of all reflexive quasi-acyclic graphs;*

8) *the class* $\mathbf{K_{lo}}$ *of all linear order graphs.*

Proof. Since universal graphic semiautomata over trivial reflexive graphs have finite or uncountable cardinality, there are no countable semiautomata in the class $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{tr}})$ and, therefore, by Theorem 1 such class cannot be elementary axiomatizable.

From the item 1) of Lemma 1, it follows that the axiom

$$A_0 = (\forall^1 x, y, u, v)(x \neq y \Longrightarrow \Pi(x, y, u, v))$$

defines a subclass $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{tr}})$ in the classes $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_r})$, $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{rs}})$, and $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{qo}})$. Therefore, the classes $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_r})$, $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{rs}})$, and $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{qo}})$ cannot be elementary axiomatizable either.

Similarly, the axiom A_0 defines in the class $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{ra}})$ a subclass of semiautomata $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{tr0}})$ for the class $\mathbf{K_{tr0}}$ of trivial reflexive graphs with identical adjacency relation. Universal graphic semiautomata over such graphs have finite or uncountable cardinality. Consequently, there are no countable semiautomata in the class $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{tr0}})$, and by Theorem 1 such class cannot be elementary axiomatizable. Hence, the class $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{ra}})$ cannot be elementary axiomatizable either.

From the item 5) of Lemma 1 it follows that in the class $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{re}})$ the axiom

$$A_1 = (\exists^1 x, y)(Q_1(x, y) \wedge (\forall^1 u, v)(N(x, y, u, v) \Longrightarrow \Pi(x, y, u, v)))$$

defines a subclass $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{re1}})$ of universal graphic semiautomata over reflexive graphs $G = (X, \rho)$ with a single proper edge $(a, b) \in \rho$, which does not belong to any cycle, and all other vertices $x, y \in X$, which are different from the vertices a, b, are adjacent to each other. In such semiautomata, any mapping f of the set X into the set $X_1 = X \setminus \{a, b\}$ is an input signal of the universal graphic semiautomaton $A = \mathrm{Atm}(G)$ and, therefore, such semiautomaton has cardinality $|A| \geq |X| + |X_1^X|$. Obviously, for such finite semiautomata A the cardinality $|A|$ is finite, and for such infinite semiautomata A the cardinality $|A|$ is uncountable. Therefore, the class $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{re1}})$ does not contain countable semiautomata, and by Theorem 1 such class cannot be elementary axiomatizable. Hence, the class $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{re}})$ also cannot be elementary axiomatizable.

Similarly, the axiom A_1 defines the subclass $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{re1}})$ in the class $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{rqa}})$. It follows that the class $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{rqa}})$ cannot be elementary axiomatizable.

The class $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{lo}})$ consists of universal graphic semiautomata over linearly ordered sets $G = (X, \leq)$. Let us introduce additional predicates of the language $\mathbf{L_A}$ with class I variable x:

$$M(x) = (\forall^1 y)\ P(y, x),$$
$$m(x) = (\forall^1 y)\ P(x, y).$$

Obviously, for a vertex a of the state graph G, the predicate $M(a)$ is true if and only if the element a is the largest element in the linearly ordered set G, while the predicate $m(a)$ is true if and only if the element a is the smallest element in the linearly ordered set G.

In the class of graphs $\mathbf{K_{lo}}$ the axiom

$$\begin{aligned} A_2 =&(\exists^1 u, v)\ [m(u)\ \wedge\ M(v)\ \wedge\ (\forall^1 x)(x \neq v \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow (\exists^1 y)(y \neq x \wedge P(x, y) \wedge (\forall^1 z)(z \neq x \wedge P(x, z) \Longrightarrow P(y, z))))] \end{aligned}$$

defines a subclass $\mathbf{K_{lo1}}$ of linearly ordered sets $G = (X, \leq)$ that satisfy the conditions:

1) G has the smallest element u and the largest element v;

2) for any element $x \in X$, that is not the largest element, there exists one and only element y following it, which we denote by x'.

Obviously, the class $\mathbf{K_{lo1}}$ contains all finite linearly ordered sets and the linearly ordered set $\mathbb{N}^\infty$ of natural numbers $\mathbb{N}$ with the usual order $\leq$ and with the largest element ∞ attached externally.

For any infinite ordered set $G = (X, \leq)$ from the class $\mathbf{K_{lo1}}$, we define by induction an ordered subset $(Z, \leq)$ isomorphic to the ordered set $(\mathbb{N}, \leq)$:

1) the element $z_1 \in Z$ is the smallest element of the set G;

2) for already defined element $z_n \in Z$, the element $z_{n+1} \in Z$ is the element z'_n for the element z_n.

It is easy to see, in the graph G the set $Z = \{z_i : i \in \mathbb{N}\}$ defines a linearly ordered subset isomorphic to $(\mathbb{N}, \leq)$.

Let us show that for any infinite subset $Y \subset Z$ there exists an endomorphism $\varphi \in \operatorname{End} G$ such that $\varphi(X) \cap Z = Y$. It is clear that elements of the subset $Y \subset Z$ form strictly increasing sequence $y_1 < y_2 < \cdots < y_n < \ldots$, which is used to define the mapping $\varphi : X \to X$ by the rule (see figure 1):

$$\varphi(x) = \begin{cases} y_1, & \text{if } x \leq y_1, \\ y_i, & \text{if } y_i \leq x < y_{i+1}, \text{ for some } i, i \in \mathbb{N}, \\ v, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is clear that the mapping φ is an endomorphism of the graph G and $\varphi(X) \cap Z = Y$.

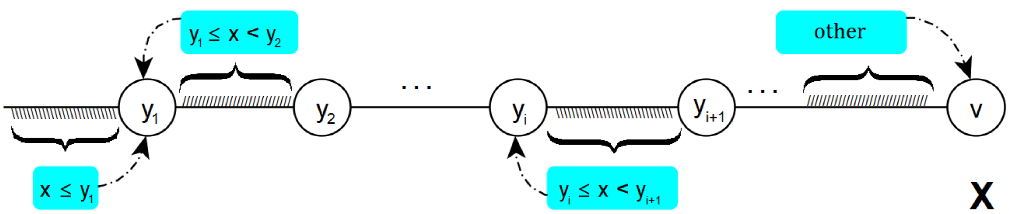


Fig 1: Schematic drawing of the mapping $\varphi : X \to X$ for infinite subset $Y \subset Z$.

Hence, the cardinality of the set $\operatorname{End} G$ is not less than the cardinality μ of the set of all infinite subsets of a countable set Z. Since the cardinality of the set of all subsets of the countable set Z is uncountable, and the cardinality of the set of all finite subsets of the countable set Z is countable [9], then the cardinality μ is also uncountable. Thus, the set $\operatorname{End} G$ and the semiautomaton $\operatorname{Atm}(G)$ are uncountable. It follows that there are no countable semiautomata in the class $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{lo1}})$, and by Theorem 1 such class cannot be elementary axiomatizable. Since this class is defined in the class $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{lo}})$ by axiom A_2 the class $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{lo}})$ cannot be elementary axiomatizable either. $\square$

References

[1] B. I. Plotkin, L. Ya. Gringlaz, and A. A. Gvaramiya, Elements of Albebraic Theory of Automata, Vysshaya Shkola, Moscow, 1994 (Russian).

[2] S. M. Ulam, A Collection of Mathematical Problems, Interscience, New York, 1960.

[3] B. Jonsson, Topics in Universal Algebras. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[4] F. Harary, Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.

[5] A. I. Malcev, Algebraic Systems, Nauka, Fizmatlit, Moscow, 1970 (Russian).

[6] S. A. Akimova, Abstract Characteristic of Semigroup of Endomorphisms of Ordered Set, Mathematics. Mechanics: Collection of Scientific Works, Izd. Sarat. Univ., Saratov, **6** (2004), 3–5 (Russian).

[7] R. A. Farakhutdinov, Relatively Elementary Definability of the Class of Universal Graphic Semiautomata in the Class of Semigroups, Russian Mathematics, Allerton Press, Inc., **66**, 1 (2022), 62–70.

[8] C. C. Chang, H. J. Keisler, Model Theory: Third Edition, Courier Corporation, 2013.

[9] K. Kuratowski, A. Mostowski, Set Theory, North-Holland, 1968.

О РЕШЕНИИ СРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ОТНОШЕНИЯ КОММУТАТИВНОСТИ В ГРУППАХ

Ин. И. Павлюк

Новосибирский государственный технический университет, пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия

e-mail: inessa7772@mail.ru

И. И. Павлюк

Торайгыров университет, ул. Ломова, 64, Павлодар, 140008, Казахстан

e-mail: ivan.pavlyuk@mail.ru

1 Введение

В каждой алгебраической системе отношение коммутативности связывает не больше элементов, чем их содержится в этой системе. Если учесть, что в алгебраической системе порядка n имеется n^2 пар, то число коммутирующих пар элементов не превосходит n^2. В частности, в группе преобразований правильного треугольника S_3 (не меняя ориентации плоскости) всего имеется 18 пар коммутирующих элементов. Поскольку $|S_3| = 6$, а шесть это совершенное число и 18 половина от $36 = n^2$, возникает вопрос: верно ли это утверждение для других групп с порядком совершенного числа (например, 28)? В работе мы даем конкретную формулу для вычисления числа коммутирующих элементов группы конечного порядка. Это множество напрямую связано с числом централизаторов элементов группы. Понятно, что такое число соотносится с множеством элементов группы непосредственно, т.е. взаимно однозначно. Но среди них есть и равные централизаторы элементов, например в группе S_3 имеет место $C(a) = C(a^2)$. Поэтому этот результат имеет фундаментальное значение для числа классов сопряженных элементов конечной группы, что в дальнейшем и подтверждается в виде следствия. Формула числа классов сопряженных элементов и ранее была получена в теории конечных групп, используя терминологию действия группы на множестве и понятие стабилизатора элемента [2]. Мы обошлись в получении этой замечательной формулы теории конечных групп только понятием коммутативности элементов группы. Развитие этого направления лежит в области теории сравнений в группах относительно отношения коммутативности.

В дальнейшем в работе используется терминология из книги [3].

2 Основная часть

Количество коммутирующих пар элементов группы S_3 равно 18. Возникает вопрос: почему именно 18, а не другое число? Всего пар элементов группы S_3 равно $36 = 6^2$ (декартов квадрат). Изложим теорию, дающую ответ на этот вопрос.

Лемма 1. *Мощность множества пар $\langle x, y\rangle$ элементов конечной группы G порядка n, удовлетворяющих бинарному сравнению $x\ {}_k{\equiv} y$, есть величина $|R(x\ {}_k \equiv y)| = r$, не зависящая от мощности класса $\left|\overset{c\equiv}{a}\right|$ сопряженных элементов группы G.*

Доказательство. Зафиксируем элемент $a \in \overset{c\equiv}{a}$. Рассмотрим сравнение $a\ {}_k \equiv g$. Здесь $g \in G$ есть произвольный элемент группы G. Он принимает все значения элементов группы G, удовлетворяющие сравнению $a\ {}_k \equiv g$. Поскольку решения $R_G(a\ {}_k \equiv g)$, то $ag = ga$ и $a^g = a$. Отсюда следует, что $g \in C_G(a)$ и $R_G(a\ {}_k \equiv g) = C_G(a)$. По определению множество $C(a)$ есть множество пар $\langle a, g\rangle$ элементов группы G таких, что элементы a и g коммутируют между собой, т.е. $ag = ga$. Обозначим через $i_a = |G : C(a)|$ индекс централизатора $C_G(a)$ элемента a в группе G. Тогда, применяя теорему Лагранжа [1], получим $|G| = |C_G(a)| \cdot i_a$. Отсюда $|C_G(a)| = \dfrac{n}{i_a}$. Так как $\left|\overset{c\equiv}{a}\right| = |G : C(a)| = i_a$, имеем $|R_G(a\ {}_k \equiv g)| = |C_G(a)| = \dfrac{n}{i_a}$ при фиксированном элементе $a \in G$. Далее, вместо элемента a в сравнение $a\ {}_k \equiv g$ будем последовательно вставлять различные элементы из класса $\left|\overset{c\equiv}{a}\right|$, пока не исчерпаем весь класс $\left|\overset{c\equiv}{a}\right|$. Так как мощность класса $\left|\overset{c\equiv}{a}\right| = i_a$, $(\forall a \in \overset{c\equiv}{a})(\forall g \in G)\left(|R_G(a^g\ {}_k \equiv g)| = \dfrac{n}{i_a} \cdot i_a\right)$ Таким образом, $|R(a^g\ {}_k \equiv g)| = n$. $\square$

Лемма 2. *Мощность $|R_G(x\ {}_k \equiv y)| = r$ множества пар решений бинарного сравнения $x\ {}_k \equiv y$ на элементах конечной группы G порядка $n = |G|$ равна порядку группы n, умноженному на число k классов сопряженных элементов группы G, т.е. $r = n \cdot k$.*

Доказательство вытекает из леммы 1, поскольку число $n = |G|$ остается постоянным для любого представителя класса сопряженных элементов группы G, а таких классов в группе G имеется k штук.

Теорема 3. *Мощность множества $R_G(x\ {}_k \equiv y)$ в группе G равна мощности суммы централизаторов элементов группы G, т.е.*

$$|R_G(x\ {}_k \equiv y)| = \sum_{g \in G} |C(g)|.$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что множество пар $\langle x, y\rangle$ группы G, элементы которых коммутируют между собой, складывается из элементов $a\ {}_{a}\equiv g$, когда элемент принимает поочередно значения элементов группы G, а элемент g всякий раз удовлетворяет сравнению ($a\ {}_{k}\equiv g$). Таким образом, $|R_G(x\ {}_{k}\equiv y)| = \sum\limits_{g\in G} |C_G(g)|$. Теорема доказана. □

Следствие 4. *Число классов k сопряженных элементов группы G равно сумме обратных величин индексов централизаторов элементов группы G, в группе G, т.е.* $k = \sum\limits_{g\in G} \frac{1}{|G:C(a)|} = \sum\limits_{g\in G} \frac{|C(g)|}{|G|}$.

Доказательство. В силу леммы 2 имеем $r = nk$. Для конечной группы G порядка n справедливо $nk = \sum\limits_{g\in G} |C(g)| = \sum\limits_{g\in G} \frac{n}{|G:C(g)|}$. Окончательно, для вычисления числа k классов сопряженных элементов конечной группы G получаем формулу $k = \sum\limits_{g\in G} \frac{1}{|G:C(a)|} = \sum\limits_{g\in G} \frac{|C(g)|}{|G|}$.

Следствие доказано. □

В частности, в симметрической группе S_3 число классов сопряженных элементов равно $k = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = 3$. Это $\overset{c\equiv}{e}, \overset{c\equiv}{a}, \overset{c\equiv}{b}$, где $\overset{c\equiv}{e} = \{e\}$, $\overset{c\equiv}{a} = \{a, a^2\}$, $\overset{c\equiv}{b} = \{b, ab, a^2b\}$, а число решений сравнения $x\ {}_{k}\equiv y$ в группе S_3 есть $\sum\limits_{g} |C_G(g)| = |C_G(e)| + |C_G(a)| + |C_G(a^2)| + |C_G(b)| + |C(ab)| + |C(a^2b)| = 6+3+3+2+2+2 = 18$. Все пары элементов представлены в нижеследующей таблице 1.

Таким образом, получен ответ на поставленный начале статьи вопрос.

Таблица 1 — Таблица коммутативности элементов группы S_3

${}_{k}=$	e	a	a^2	b	ab	a^2b
e	$\langle e, e\rangle$	$\langle e, a\rangle$	$\langle e, a^2\rangle$	$\langle e, b\rangle$	$\langle e, ab\rangle$	$\langle e, a^2b\rangle$
a	$\langle a, e\rangle$	$\langle a, a\rangle$	$\langle a, a^2\rangle$			
a^2	$\langle a^2, e\rangle$	$\langle a^2, a\rangle$	$\langle a^2, a^2\rangle$			
b	$\langle b, e\rangle$			$\langle b, b\rangle$		
ab	$\langle ab, e\rangle$				$\langle ab, ab\rangle$	
a^2b	$\langle, a^2b, e\rangle$					$\langle a^2b, a^2b\rangle$

Для иллюстрации приведем также таблицу коммутативности группы кватернионов:

Таблица 2 — Таблица коммутативности группы кватернионов

$_k =$	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
e	$\langle e, e\rangle$	$\langle e, a\rangle$	$\langle e, a^2\rangle$	$\langle e, a^3\rangle$	$\langle e, b\rangle$	$\langle e, ab\rangle$	$\langle e, a^2b\rangle$	$\langle e, a^3b\rangle$
a	$\langle a, e\rangle$	$\langle a, a\rangle$	$\langle a, a^2\rangle$	$\langle a, a^3\rangle$				
a^2	$\langle a^2, e\rangle$	$\langle a^2, a\rangle$	$\langle a^2, a^2\rangle$	$\langle a^2, a^3\rangle$	$\langle a^2, b\rangle$	$\langle a^2, ab\rangle$	$\langle a^2, a^2b\rangle$	$\langle a^3, a^3b\rangle$
a^3	$\langle a^3, e\rangle$	$\langle a^3, a\rangle$	$\langle a^3, a^2\rangle$	$\langle a^3, a^3\rangle$				
b	$\langle b, e\rangle$		$\langle b, a\rangle$		$\langle b, b\rangle$		$\langle b, a^2b\rangle$	
ab	$\langle ab, e\rangle$		$\langle ab, a^2\rangle$			$\langle ab, ab\rangle$		$\langle ab, a^3b\rangle$
a^2b	$\langle a^2b, e\rangle$		$\langle a^2b, a^2\rangle$		$\langle a^2b, b\rangle$		$\langle a^2b, a^2b\rangle$	
a^3b	$\langle a^3b, e\rangle$		$\langle a^3b, a^2\rangle$			$\langle a^3b, ab\rangle$		$\langle a^3b, a^3b\rangle$

3 Выводы

В работе получены следующие результаты:

Лемма 1. Мощность множества пар $\langle x, y\rangle$ элементов конечной группы G порядка n, удовлетворяющих бинарному сравнению $x\ {}_k{\equiv} y$, есть величина $|R(x\ {}_k \equiv y)| = r$, не зависящая от мощности класса $\overset{c\equiv}{a}$ сопряженных элементов группы G.

Лемма 2. Мощность $|R_G(x\ {}_k \equiv y)| = r$ множества пар решений бинарного сравнения $x\ {}_k \equiv y$ на элементах конечной группы G порядка $n = |G|$ равна порядку группы n, умноженному на число k классов сопряженных элементов группы G, т.е. $r = n \cdot k$.

Теорема 3. Мощность множества $R_G(x\ {}_k \equiv y)$ в группе G равна мощности суммы централизаторов элементов группы G, т.е.

$$|R_G(x\ {}_k \equiv y)| = \sum_{g \in G} |C(g)|.$$

Следствие 4. Число классов k сопряженных элементов группы G равно сумме обратных величин индексов централизаторов элементов группы G, в группе G, т.е. $k = \sum\limits_{g \in G} \frac{1}{|G:C(a)|} = \sum\limits_{g \in G} \frac{|C(g)|}{|G|}$.

Список литературы

[1] M. I. Kargapolov, J. I. Merzljakov, Fundamentals of Group Theory, Moscow : Nauka, 1978, 288 p. (Russian)

[2] A. I. Kostrikin, Introduction to Algebra: Manual, Moscow : Fizmatlit, 2001, 271 p. (Russian)

[3] In. I. Pavlyuk, Groups with comparability relations for subgroups and elements, Pavlodar : Kereku, 2013, 122 p. (Russian)

ON ALGEBRAIC AND DEFINABLE CLOSURES FOR FINITE STRUCTURES

In. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov*

Novosibirsk State Technical University,
20, K. Marx avenue, Novosibirsk, 630073, Russia;
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
1, Pirogova street, Novosibirsk, 630090, Russia

e-mail: pavlyuk@corp.nstu.ru, sudoplat@math.nsc.ru

We study possibilities for algebraic and definable closures [1, 2, 3, 4, 5] adapted for theories of finite structures. These possibilities are based on cardinalities of finite orbits with respect to automorphism groups [6, 7]. It applied for the description of degrees of algebraization for finite abelian groups using Euler function $\varphi(n)$, [10].

Throughout we consider complete first-order theories and their models.

1 Algebraic and definable closures. Degrees of algebraization

Definition. [1, 2, 4] 1. The tuple $\overline{b}$ is *defined* by the formula $\varphi(\overline{x},\overline{a})$ of T with parameters $\overline{a}$, if $\varphi(\overline{x},\overline{a})$ has unique solution $\overline{b}$.

The tuple $\overline{b}$ is *defined* by the type p if $\overline{b}$ is the unique tuple which realizes p. It is *definable* over a set A if $\mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ defines it.

2. For a set A of a theory T the union of sets of solutions of formulae $\varphi(x,\overline{a})$, $\overline{a}\in A$, such that $\models \exists^{=n}x\,\varphi(x,\overline{a})$ for some $n\in\omega$ (respectively $\models \exists^{=1}x\,\varphi(x,\overline{a})$) is said to be an *algebraic* (*definable* or *definitional*) *closure* of A. An algebraic closure of A is denoted by $\mathrm{acl}(A)$ and its definable (definitional) closure, by $\mathrm{dcl}(A)$.

In such a case we say that the formulae $\varphi(x,\overline{a})$ *witness* that algebraic definable (definitional) closure, and these formulae are called *algebraic* / *defining*.

*The work of the second author was carried out in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No. FWNF-2022-0012, and partially supported by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan, Grant No. AP19677451.

Any element $b \in \mathrm{acl}(A)$ (respectively, $b \in \mathrm{dcl}(A)$) is called *algebraic* (*definable* or *definitional*) over A. If the set A is fixed or empty, we just say that b is *algebraic*, (*definable*, or definitional).

3. If $\mathrm{dcl}(A) = \mathrm{acl}(A)$, $\mathrm{cl}_1(A)$ denotes their common value.

4. If $A = \mathrm{acl}(A)$ (respectively, $A = \mathrm{dcl}(A)$) then A is called *algebraically* (*definably*) closed.

5. The type p is *algebraic* (*defining*) if it is realized by finitely many tuples (unique one) only, i.e., it contains an algebraic (defining) formula φ. This formula φ can be chosen with the minimal number of solution, and in such a case φ isolates p. The number of these solutions is called the *degree* $\deg(p)$ of p.

6. The complete algebraic types $p(x) \in S(A)$ are exactly ones of the form $\mathrm{tp}(a/A)$, where a is algebraic over A. The *degree* of a over A, $\deg(a/A)$ is the degree of $\mathrm{tp}(a/A)$.

Remark 1.1. [1]. The pairs $\langle M, \mathrm{acl}\rangle$ and $\langle M, \mathrm{dcl}\rangle$ satisfy the following properties:

(i) the reflexivity: it is witnessed by the formula $x \approx y$;

(ii) the transitivity: if the formulae $\varphi_1(x_1, \overline{a}), \ldots, \varphi_n(x_n, \overline{a})$ witnessed that $b_1, \ldots, b_n \in \mathrm{acl}(A)$ (respectively, $b_1, \ldots, b_n \in \mathrm{dcl}(A)$) and the formula $\psi(x, b_1, \ldots, b_n)$ witnesses that $c \in \mathrm{acl}(\{b_1, \ldots, b_n\})$ (respectively, $c \in \mathrm{dcl}(\{b_1, \ldots, b_n\})$) then the formula

$$\exists x_1, \ldots, x_n \left(\psi(x, x_1, \ldots, x_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i, \overline{a})\right)$$

witnesses that $c \in \mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A))$ (respectively, $c \in \mathrm{dcl}(\mathrm{dcl}(A))$);

(iii) the finite character: if a formula $\varphi x, \overline{a}$ witnesses that $a \in \mathrm{acl}(A)$ (respectively, $a \in \mathrm{dcl}(A)$) then $a \in \mathrm{acl}(A_0)$ for the finite $A_0 \subseteq A$ consisting of coordinates in $\overline{a}$.

Definition. [5] 1. For $n \in \omega \setminus \{0\}$ and a set A an element b is called *n-algebraic* over A, if $a \in \mathrm{acl}(A)$ and it is witnessed by a formula $\varphi(x, \overline{a})$, for $\overline{a} \in A$, with at most n solutions.

2. The set of all n-algebraic elements over A is denoted by $\mathrm{acl}_n(A)$.

3. If $A = \mathrm{acl}_n(A)$ then A is called *n-algebraically* closed.

4. The type p is *n-algebraic* if it is realized by at most n tuples only, i.e., $\deg(p) \leq n$.

5. The complete n-algebraic types $p(x) \in S(A)$ are exactly ones of the form $\mathrm{tp}(a/A)$, where a is n-algebraic over A, i.e., with $\deg(a/A) \leq n$. Here $\deg(a/A) = k \leq n$ defines the *n-degree* $\deg_n(a/A)$ of $\mathrm{tp}(a/A)$ and of a over A.

6. If $\mathrm{acl}(A) = \mathrm{acl}_n(A)$ then minimal such n is called the *degree of algebraization* over the set A and it is denoted by $\deg_{\mathrm{acl}}(A)$. If that n does not exist then we put $\deg_{\mathrm{acl}}(A) = \infty$. The supremum of values $\deg_{\mathrm{acl}}(A)$ with respect to all sets A of given theory T is denoted by $\deg_{\mathrm{acl}}(T)$ and called the *degree of algebraization* of the theory T.

7. Following [8] theories T with $\deg_{\mathrm{acl}}(T) = 1$, i.e., with defined $\mathrm{cl}_1(A)$ for any set A of T, are called *quasi-Urbanik*, and the models $\mathcal{M}$ of T are *quasi-Urbanik*, too.

Notice that by the definition the closure operator acl_1 coincides with the closure operator dcl whereas the operators acl_n, for $n \geq 2$, may be or not be transitive depending on given theory [5].

2 Degrees of algebraization for finite structures and their theories

Let $\mathcal{M}$ be a structure, $A \subseteq M$. Recall that an *A-automorphism* of $\mathcal{M}$ is an automorphisms $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ fixing A pointwise. The set of all A-automorphisms for $\mathcal{M}$ is denoted by $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A)$.

For an element $a \in M$, the *orbit* $O(a/A)$ with respect to the automorphism group $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ is the set of all elements $b \in M$ connected with a by A-automorphisms $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A)$: $f(a) = b$ and $f(a') = a'$ for any $a' \in A$.

We write $O(a)$ instead of $O(a/\emptyset)$.

Below in this section we fix a finite structure $\mathcal{M}$ and its theory $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$.

Proposition 2.1 (Monotony)**.** *If $A_1 \subseteq A_2 \subseteq M$ then* $\deg_{\mathrm{acl}}(A_1) \geq \deg_{\mathrm{acl}}(A_2)$.

Proof. Since $\mathcal{M}$ is finite each orbit of an element in M with respect to the automorphism group $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ and to their subgroups $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A)$, where $A \subseteq M$, is finite, too. Moreover, each type $p = \mathrm{tp}(a/A)$, for $a \in M$, is algebraic, where $\deg(p)$ equals the cardinality of the orbit $O(a/A)$ of the element A with respect the automorphism group $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A)$.

Since $A_1 \subseteq A_2$,

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A_2) \leqslant \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A_1) \leqslant \mathrm{Aut}(\mathcal{M}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/\emptyset).$$

Thus each orbit $O(a/A_1)$ is represented as the disjoint union of orbits $O(a'/A_2)$, where $a' \in O(a/A_1)$. Since the cardinalities of orbits $O(a/A_1)$ can not increase for $O(a/A_2)$, $\deg(\mathrm{tp}(a/A_1)) \geq \deg(\mathrm{tp}(a/A_2))$. Since an element a is chosen arbitrarily we obtain $\deg_{\mathrm{acl}}(A_1) \geq \deg_{\mathrm{acl}}(A_2)$. □

We denote by $o(\mathcal{M})$ the maximal cardinality of orbits $O(a)$, i.e., the value $\deg_{\mathrm{acl}}(\emptyset)$. Since all models of T are pairwise isomorphic the value $o(\mathcal{M})$ does not depend on the choice of model of T and it is denoted by $o(T)$.

Proposition 2.1 immediately implies:

Corollary 2.2. $\deg_{\mathrm{acl}}(T) = \deg_{\mathrm{acl}}(\emptyset) = o(T)$.

Now we consider some estimations for degrees of algebraization based on Proposition 2.1 and Corollary 2.2.

Remark 2.3. 1. Clearly, $\deg_{\rm acl}(T) \leq |M|$ and $\deg_{\rm acl}(T) = |M|$ iff the theory T is transitive, i.e., $|S^1(\emptyset)| = 1$, i.e., the automorphism group $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ acts on M transitively.

Moreover, if $\mathcal{M}$ has k $\emptyset$-definable elements then

$$\deg_{\rm acl}(T) \leq \max\{|M| - k, 1\}.$$

In particular, if G is a finite group then, as the unit e is $\emptyset$-definable, $\deg_{\rm acl}(\mathrm{Th}(G)) \leq \max\{|G| - 1, 1\}$.

2. By the definition of degree of algebraization, for any complete theory T', with finite or infinite models, $\deg_{\rm acl}(T') \geq \deg_{\rm acl}(\emptyset)$. Thus, cardinalities of finite orbits in models of T' give lower estimates for $\deg_{\rm acl}(T')$.

Example 2.4. For the groups $\mathbb{Z}_p$ and their theories T_p, with prime p, $\deg_{\rm acl}(T_p) = o(T_p) = p - 1$. Besides, if a group $\mathcal{G}$ is represented as $\mathcal{G}' \oplus \mathbb{Z}_p$, then

$$\deg_{\rm acl}(\mathrm{Th}(\mathcal{G})) \geq p - 1. \qquad (1)$$

Remark 2.5. If a theory T has an infinite model then $\deg_{\rm acl}(T)$ does not correlate with $\deg_{\rm acl}(\emptyset)$. Indeed, considering theories T'_n of equivalence relations E_n with infinitely many E_n-classes, each of which contains exactly n-elements, $n \in \omega \setminus \{0\}$, we have $\deg_{\rm acl}(\emptyset) = \deg_{\rm acl}(T'_1) = 1$ whereas $\deg_{\rm acl}(T'_{n+1}) = n$ which is witnessed by any singleton $\{a\}$. It illustrates that Proposition 2.1 can fail for infinite structures.

3 Degrees of algebraization for unions of finite structures and their theories

Definition. [9]. The *disjoint union* $\bigsqcup\limits_{i<\lambda} \mathcal{M}_i$ of pairwise disjoint structures $\mathcal{M}_i$ for pairwise disjoint predicate languages Σ_i, $i < \lambda$, is the structure of language $\bigcup\limits_{i<\lambda} \Sigma_i \cup \{P_i^{(1)} \mid i < \lambda\}$ with the universe $\bigsqcup\limits_{i<\lambda} M_i$, $P_i = M_i$, and interpretations of predicate symbols in Σ_i coinciding with their interpretations in $\mathcal{M}_i$, $i < \lambda$. The *disjoint union of theories* T_i for pairwise disjoint languages Σ_i accordingly, $i \in \lambda$, is the theory

$$\bigsqcup_{i<\lambda} T_i \rightleftharpoons \mathrm{Th}\left(\bigsqcup_{i<\lambda} \mathcal{M}_i\right),$$

where $\mathcal{M}_i \models T_i$, $i < \lambda$.

Clearly, if the structures $\mathcal{M}_i$ are parts of their disjoint unions then the operators acl and acl_n act independently on $\mathcal{M}_i$ producing correspondent operators acl and acl_n on that disjoint union. Thus, the degree of algebraization for $\bigsqcup\limits_{i\in\lambda} \mathcal{M}_i$ is equals the maximal value among $\deg_{\rm acl}(\mathcal{M}_i)$. Since the theory $\bigsqcup\limits_{i<\lambda} T_i$ does not depend on the choice of models $\mathcal{M}_i \models T_i$ we obtain the following:

Proposition 3.1. *For any theories T_i of pairwise disjoint predicate languages Σ_i, $i < \lambda$,*

$$\deg_{\rm acl}\left(\bigsqcup_{i<\lambda} T_i\right) = \max_{i<\lambda} \deg_{\rm acl}(T_i).$$

In view of Corollary 2.2 and Proposition 3.1 we have the following:

Corollary 3.2. *For any theories T_i of pairwise disjoint predicate languages Σ_i, and of finite structures $\mathcal{M}_i$, $i < \lambda$,*

$$\deg_{\rm acl}\left(\bigsqcup_{i<\lambda} T_i\right) = \max_{i<\lambda} o(T_i).$$

Definition. The union $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ of disjoint predicate structures $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$ is called *regular*, if orbits of $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$ are preserved in $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, i.e., for any element $a \in M_i$, the orbit $O(a)$ in $\mathcal{M}_i$ equals the orbit $O(a)$ in the restriction of $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ to M_i, $i = 1, 2$.

Proposition 3.3. *For any finite regular union $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ and the theories T_1, T_2, T of structures $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, respectively,*

$$\max\{o(T_1), o(T_2)\} \leq \deg_{\rm acl}(T) \leq o(T_1) + o(T_2). \tag{2}$$

Proof. Since $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ is regular, i.e., the orbits for $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$ are preserved in $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ we have the inequality $\max\{o(T_1), o(T_2)\} \leq \deg_{\rm acl}(T)$ in view of Corollary 2.2. At the same time $\deg_{\rm acl}(T) \leq o(T_1) + o(T_2)$, using Corollary 2.2, since possible connection of elements $a \in M_1$ and $b \in M_2$ by some automorphism $f \in {\rm Aut}(\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2)$ implies that the common orbit for these elements consists of $O(a)$ in $\mathcal{M}_1$ and $O(b)$ in $\mathcal{M}_2$. $\square$

Remark 3.4. Notice that the double inequality (2) is not strict. Indeed, $\deg_{\rm acl}(T) = \max\{o(T_1), o(T_2)\}$ for $T = T_1 \sqcup T_2$, by Corollary 3.2, and $\deg_{\rm acl}(T) = o(T_1) + o(T_2)$ if the model $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ consists of disjoint unary predicates with $o(T_i)$ elements of same color, $i = 1, 2$.

4 Degrees of algebraization for finite abelian groups and their theories

Generalizing Example 2.4 for the groups $\mathbb{Z}_n$ and their theories T_n, for natural n, we observe that the value $\deg_{\rm acl}(T_n)$, i.e., the cardinality $o(T_n)$ of largest orbit, depends on the value of Euler function $\varphi(n)$ [10] such that $\varphi(n) = |\{m \in \mathbb{Z}_n \mid (m, n) = 1\}|$. If $\varphi(n) \geq \dfrac{n}{2}$, i.e., the orbit of the unit contains at least half of elements in $\mathbb{Z}_n$ then $o(T_n) = \varphi(n)$ implying

$$\deg_{\rm acl}(T_n) = \varphi(n). \tag{3}$$

The following illustrations show that the sufficient condition above is not necessary, but confirm the equality (3):

1) $\deg_{\rm acl}(T_4) = 2$ with $\varphi(4) = 2$ and one orbit $\{1, 3\}$ of the maximal cardinality 2;

2) $\deg_{\rm acl}(T_6) = 2$ with $\varphi(6) = 2$ and two orbits $\{1, 5\}$ and $\{2, 4\}$ of the maximal cardinality 2;

3) $\deg_{\rm acl}(T_8) = 4$ with $\varphi(8) = 4$ and one orbit $\{1, 3, 5, 7\}$ of the maximal cardinality 4;

4) $\deg_{\rm acl}(T_{10}) = 4$ with $\varphi(10) = 4$ and two orbits $\{1, 3, 7, 9\}$ and $\{2, 4, 6, 8\}$ of the maximal cardinality 4.

We argue to show that the equality (3) holds for every n.

Let $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ with pairwise distinct prime numbers $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Since distinct tuples $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ define distinct orbits for $\mathbb{Z}_n$, where $0 \le \beta_i \le \alpha_i$, $1 \le i \le k$ there are $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$ orbits for $\mathbb{Z}_n$. The orbit for $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ consists of elements $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k} r \in \mathbb{Z}_n$, where $0 < r < n$ and r is not divisible by $p_1, p_2, \ldots, p_k$, i.e., $(r, n) = 1$. Here $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} = 0$ with $O(0) = \{0\}$ and the tuple $(\beta_1, \ldots, \beta_k) = (0, 0, \ldots, 0)$ has the orbit $O(1)$ with $|O(1)| = o({\rm Th}(\mathbb{Z}_n)) = \varphi(n)$, and, in general, $O(m)$ for $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k} r$, is bijective with an initial segment of $O(1)$ by the bijection $r' \leftrightarrow p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k} r'$ with $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k} r' < n$. By the existence of injection $O(m) \to O(1)$ we have $|O(m)| \le \varphi(n)$.

Thus we obtain the following:

Theorem 4.1. *For any natural $n > 1$, $\deg_{\rm acl}({\rm Th}(\mathbb{Z}_n)) = \varphi(n)$.*

Now we consider a direct sum $\mathbb{Z}_n^{(s)}$ of s copies of $\mathbb{Z}_n$, and calculate the cardinality of its longest orbit O. Taking a tuple $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_s)$ in $\mathbb{Z}_n^{(s)}$ we observe that $\overline{a} \in O$ iff $\overline{a}$ contains a coordinate a_i witnessing the longest orbit for $\mathbb{Z}_n$. Therefore, in view of Theorem 4.1, there are $(n - \varphi(n))^s$-tuples $\overline{a}$ outside O. Since there are n^s-tuples forming $\mathbb{Z}_n^{(s)}$ we obtain $|O| = n^s - (n - \varphi(n))^s$. Applying Corollary 2.2 we have:

Corollary 4.2. *For any natural $n > 1$ and s copies of the group $\mathbb{Z}_n$, their direct sum $\mathbb{Z}_n^{(s)}$ satisfies the following equality:*

$$\deg_{\rm acl}({\rm Th}(\mathbb{Z}_n^{(s)})) = n^s - (n - \varphi(n))^s.$$

Taking a sum $\mathcal{S} = \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}}^{(s_1)} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}^{(s_k)}$, with prime $p_1, \ldots, p_k$ and some natural $n_1, \ldots, n_k$ we observe the longest orbit for this group corresponds the combination of the longest orbit for components $\mathbb{Z}_{p_i^{n_i}}^{(s_i)}$. It implies that

$$\deg_{\rm acl}({\rm Th}(\mathcal{S})) = (p_1^{s_1 n_1} - (p_1^{n_1} - \varphi(p_1^{n_1}))^{s_1}) \ldots (p_k^{s_k n_k} - (p_k^{n_k} - \varphi(p_k^{n_k}))^{s_k}). \quad (4)$$

Since any finite abelian group $\mathcal{S}$ is represented as a direct sum $\oplus_{p,n} \mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})}$ [6, Theorem 8.1.2] the formula (4) produce the following:

Theorem 4.3. *For any finite abelian group $\mathcal{S} = \oplus_{p,n}\mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})}$,*

$$\deg_{\mathrm{acl}}(\mathrm{Th}(\mathcal{S})) = \prod_{p,n}(p^{n\alpha_{p,n}} - (p^n - \varphi(p^n))^{\alpha_{p,n}}).$$

In view of Theorem 4.3, similarly the inequality in Example 2.4, we obtain the generalized inequality in the following:

Corollary 4.4. *If a group $\mathcal{G}$ is represented as $\mathcal{G}' \oplus \mathcal{S}$, where $\mathcal{S} = \oplus_{p,n}\mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})}$ is a finite abelian group, then*

$$\deg_{\mathrm{acl}}(\mathrm{Th}(\mathcal{G})) \geq \prod_{p,n}(p^{n\alpha_{p,n}} - (p^n - \varphi(p^n))^{\alpha_{p,n}}).$$

Theorem 4.3 also immediately implies:

Corollary 4.5. *A finite abelian group $\mathcal{G}$ is quasi-Urbanik iff $\mathcal{G}$ is either a singleton or isomorphic to $\mathbb{Z}_2$.*

Remark 4.6. The assertion of Corollary 4.5 for infinite abelian groups fails. For instance, the group $\mathbb{Z}$ is quasi-Urbanik, having $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2$.

In conclusion, we formulate the following problems on degrees of algebraization.

1. Describe degrees of algebraization for natural classes of theories, in particular, for theories of finite, non-abelian, and infinite groups.

2. Describe degrees of algebraization for results of natural operations with theories including Cartesian products, compositions, etc.

References

[1] S. Shelah, Classification theory and the number of non-isomorphic models, Amsterdam : North-Holland, 1990, 705 p.

[2] W. Hodges, Model theory, Cambridge : Cambridge University Press, 1993, 772 p.

[3] A. Pillay, Geometric Stability Theory, Oxford : Clarendon Press, 1996, 361 p.

[4] K. Tent, M. Ziegler, A Course in Model Theory (Lecture Notes in Logic. No. 40, Cambridge : Cambridge University Press, 2012, 258 p.

[5] S. V. Sudoplatov, Algebraic closures and their variations, `arXiv:2307.12536 [math.LO]`, 2023. 16 p.

[6] M. I. Kargapolov, J. I. Merzljakov, Fundamentals of the Theory of Groups. New York : Springer, 2011, 221 p.

[7] T. J. Laffey, D. MacHale, Automorphism orbits of finite groups, Austral. Math. Soc. (Series A), **40** (1986), 253–260.

[8] B. I. Zil'ber, Hereditarily transitive groups and quasi-Urbanik structures, Trudy Inst. Mat. Sib. Otd. AN SSSR, **8** (1988), 58–77 (Russian).

[9] R. E. Woodrow, Theories with a finite number of countable models and a small language, Ph. D. Thesis, Simon Fraser University, 1976, 99 p.

[10] I. M. Vinogradov, Elements of Number Theory, Mineola, New York : Dover Publications, Inc., 1954, 230 p.

ОПРЕДЕЛИМОСТЬ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР ПОЛУГРУППАМИ ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

А. Г. Пинус

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия

e-mail: ag.pinus@gmail.com

К традиционным методам исследования универсальных алгебр $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ относится исследование их свойств и строения с помощью производных структур этих алгебр $\mathfrak{A}$. К последним чаще всего относят их группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}$, полугруппы их эндоморфизмов $\mathrm{End}\,\mathfrak{A}$, решетки конгруэнций $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$ и решетки подалгебр $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$. Однако существенную роль в этих вопросах играют и полугруппы внутренних изоморфизмов $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}$ и внутренних гомоморфизмов $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}$ алгебр $\mathfrak{A}$. Напомним, что внутренним изоморфизмом (гомоморфизмом) универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ называется изоморфизм (гомоморфизм) между любыми ее подалгебрами (одной из подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$ на какую-либо ее подалгебру). При этом произведение отображений $\varphi, \psi \in \mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}(\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A})$ определяется стандартным образом как композиция частичных отображений основного множества A алгебры $\mathfrak{A}$ в себя с привлечением, при необходимости, пустого отображения.

При этом вопрос об определимости алгебр (алгебраических систем) $\mathfrak{A}$ некоторого класса $\mathcal{K}$ их производными структурами $S(\mathfrak{A})$ принимает вид: в каких ситуациях для алгебр (алгебраических систем) $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1 \in \mathcal{K}$ изоморфизм структур $S(\mathfrak{A}_0)$, $S(\mathfrak{A}_1)$ влечет ту или иную взаимосвязь (вплоть до изоморфизма) между самими этими алгебрами (алгебраическими системами) $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$. В таком понимании определимость производными структурами часто рассматривалась, к примеру, относительно класса упорядоченных множеств и решеток с помощью тех или иных полугрупп их преобразований (изотонных, направленных и др. отображениях на этих множествах, решетках) или групп с помощью решеток их подгрупп и для многих других конкретных классов алгебр (алгебраических систем).

Если же под классом $\mathcal{K}$ универсальных алгебр, для которого рассматривается вопрос определимости алгебр производными структурами, понимать класс всех универсальных алгебр (даже независимо от их сигнатур), то возникает некоторое естественное ограничение на эту определимость — определимость с точностью до “рациональной эквивалентности”.

Заметим, что хотя производные структуры универсальных алгебр определяются в терминах их сигнатурных функций, но, на самом деле, они могут быть переформулированы в терминах некоторой “консервативности” (замкнутости относительно… и коммутируемости с…) для более широкого чем сигнатурные класса функций на основном множестве алгебры $\mathfrak{A}$ — для совокупности $\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}$ термальных функций этой алгебры. Таким образом, вопрос с определимостью универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ при помощи ее производных структур в классе всех универсальных алгебр может быть решен лишь с точностью до рациональной эквивалентности универсальных алгебр в смысле А. И. Мальцева [1].

Напомним, что алгебры $\mathfrak{A}_0 = \langle A; \sigma_0 \rangle$, $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1 \rangle$ с одним и тем же основным множеством A называются (сильно) рационально эквивалентными, если совпадают совокупности их термальных функций $\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}_1$ (к примеру булева алгебра и соответствующее ей булево кольцо) или иначе, если существуют отображения $\varphi_0 : \sigma_0 \to \mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}_1$, $\varphi_1 : \sigma_1 \to \mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}_0$, сохраняющие арность функций и такие, что имеют место равенства:

1) $\mathfrak{A}_0 = \varphi_0(\mathfrak{A}_1) = \langle A; \varphi_0(\sigma_0) \rangle$ причем сигнатурные функции $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ последней алгебры определяются как соответствующие термальные $\varphi_0(f)$ функции алгебры $\mathfrak{A}_1$.

2) симметрическое условие: $\mathfrak{A}_1 = \varphi_1(\mathfrak{A}_0) = \langle A; \varphi_1(\sigma_1) \rangle$.

Уточним также, что условие коммутируемости функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

на основном множестве A алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ с частичным отображением $\varphi : A \to A$ означает следующее: для любых $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathrm{Dom}\,\varphi$ имеют место включение $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathrm{Dom}\,\varphi$ и равенство $\varphi(f(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots \varphi(a_n))$. В частности, коммутируемость функции $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ с внутренними гомоморфизмами (изоморфизмами) алгебры $\mathfrak{A}$ означает замкнутость подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$ относительно функции f (рассматривая в качестве φ тождественное отображение соответствующей подалгебры на себя).

В настоящей работе будет дан обзор результатов автора по проблеме определимости универсальных алгебр их полугруппами преобразований, т.е. о том, как должны быть связаны между собой универсальные алгебры $\mathfrak{A}_0 = \langle A; \sigma_0 \rangle$ и $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1 \rangle$ с одним и тем же основным множеством A в случае совпадения полугрупп тех или иных преобразований этих алгебр; и сформулирован ряд естественных в этом контексте открытых вопросов.

Мы не будем в дальнейшем приводить точные определения условно, позитивно-условно, элементарно-условно термальных и иных подобных функций для универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$, отсылая за этими определениями к первоисточникам. Отметим лишь, что все эти функции являются “кусочно термальными", т.е. совпадающими с теми или иными термальными функциями алгебры $\mathfrak{A}$ на каждом из "кусков термальности" разбиения соответствующей степени A^n основного множества A алгебры $\mathfrak{A}$, при определении понятия "куска термальности", как формульного в том или ином логическом языке подмножества множества A^n.

Начнем с полугрупп внутренних изоморфизмов алгебр.

Определение условно термальных функций алгебры $\mathfrak{A}$ см., к примеру, [2] и [3], в данном случае, их "куски термальности" определяются как совокупности решений конечных систем термальных уравнений и неравенств в алгебре $\mathfrak{A}$ и число таких "кусков термальности" тоже конечно. Через $\mathrm{CT}\,\mathfrak{A}$ обозначим совокупность всех условно термальных функций алгебры $\mathfrak{A}$.

Теорема 1. [2, 3] *Для любых конечных или равномерно локально конечных алгебр конечных сигнатур* $\mathfrak{A}_0 = \langle A; \sigma_0 \rangle$ *и* $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1 \rangle$ *равенство* $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}_1$ *равносильно условно рациональной эквивалентности этих алгебр (*$\mathrm{CT}\,\mathfrak{A}_0 = \mathrm{CT}\,\mathfrak{A}_1$*), т.е. тому, что сигнатурные функции алгебры* $\mathfrak{A}_i$ *являются условно-термальными для алгебры* $\mathfrak{A}_{1-i}$ *(при* $i \in \{0, 1\}$*).*

Напомним также, что алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ называется *равномерно локально конечной*, если существует функция $g : \omega \to \omega$ такая, что для любых $B \subseteq A$ и $n \in \omega$ таких, что $|B| \leqslant n$ имеет место неравенство $|\langle B \rangle_{\mathfrak{A}}| \leqslant g(n)$, здесь $\langle B \rangle_{\mathfrak{A}}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, порожденная множеством B.

В работе [4] дана оценка числа попарно условно рационально не эквивалентных n-элементных алгебр и представлен каталог подобных 2-х и 3-х элементных алгебр.

Аналогичные результаты имеют место и для полугрупп $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}$ внутренних гомоморфизмов алгебр.

Теорема 2. [5] *Для любых конечных или равномерно локально конечных алгебр конечных сигнатур* $\mathfrak{A}_0 = \langle A; \sigma_0 \rangle$ *и* $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1 \rangle$ *равенство* $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}_1$ *равносильно позитивной условно рациональной эквивалентности этих алгебр (равенству* $\mathrm{PCT}\,\mathfrak{A}_0 = \mathrm{PCT}\,\mathfrak{A}_1$*) т.е. тому, что сигнатурные функции алгебры* $\mathfrak{A}_i$ *являются позитивно условно термальными функциями алгебры* $\mathfrak{A}_{1-i}$ *(при* $i \in \{0, 1\}$*).*

Здесь $\mathrm{PCT}\,\mathfrak{A}$ — совокупность всех позитивно условно термальных функций алгебры $\mathfrak{A}$, а "кусками термальности" для позитивно условно термальных функций являются совокупности решений конечных систем термальных уравнений для этой алгебры, при этом число "кусков термальности" конечно.

Для элементарно условно термальных функций универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ их "куски термальности" суть формульные множества этой алгебры в языке логики первого порядка и число "кусков термальности" конечно. Совокупность всех элементарно условно термальных функций алгебры обозначим как $\mathrm{ECT}\,\mathfrak{A}$. Алгебры $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$ назовем *элементарно условно рационально эквивалентными* в случае истинности равенства $\mathrm{ECT}\,\mathfrak{A}_0 = \mathrm{ECT}\,\mathfrak{A}_1$. Имеет место следующий результат.

Теорема 3. [6] *Для любых конечных алгебр* $\mathfrak{A}_0$ *и* $\mathfrak{A}_1$ *равенства* $\mathrm{Aut}\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Aut}\mathfrak{A}_1$ *и* $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}_1$ *равносильны их элементарно условно рациональной эквивалентности, т.е. имеют место тогда и только тогда, когда сигнатурные функции алгебры* $\mathfrak{A}_i$ *являются элементарно условно термальными для алгебры* $\mathfrak{A}_{1-i}$ *(при* $i \in \{0, 1\}$*).*

В определении $\exists^+$-позитивно условно термальных функций "кусками термальности" служат множества определяемые позитивными $\exists$-формулами логики первого порядка и число "кусков термальности" конечно. Через $\exists^+\mathrm{CT}\,\mathfrak{A}$ обозначим совокупность всех $\exists^+$-позитивно условно термальных функций алгебры $\mathfrak{A}$. Алгебры $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$ назовем $\exists^+$-позитивно условно рационально эквивалентными в случае равенства $\exists^+\mathrm{CT}\,\mathfrak{A}_0 = \exists^+\mathrm{CT}\,\mathfrak{A}_1$.

Теорема 4. [7] *Для любых конечных алгебр* $\mathfrak{A}_0$ *и* $\mathfrak{A}_1$ *равенства* $\mathrm{End}\mathfrak{A}_0 = \mathrm{End}\,\mathfrak{A}_1$ *и* $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}_1$ *равносильны* $\exists^+$*-позитивно условной рациональной эквивалентности этих алгебр, т.е. тому, что сигнатурные функции алгебры* $\mathfrak{A}_i$ *являются* $\exists^+$*-позитивно условно термальными для алгебры* $\mathfrak{A}_{1-i}$ *(при* $i \in \{0, 1\}$*).*

Представляют интерес аналоги утверждений теорем 1–4 при снятии условий, связанных с конечностью и равномерной локальной конечностью рассматриваемых алгебр. Примеры, приведенные в указанных выше работах, показывают, что дословные формулировки этих теорем без условий, связанных с конечностью, неверны. Однако возможны вариации понятий условной термальности функций, позволяющие подобную характеризацию универсальных алгебр с одинаковыми полугруппами их преобразований и на случай не более чем счетных алгебр не более чем счетной сигнатуры. В основе этого лежат известная теорема Д. Скотта [8] об определимости подобных алгебр формулами языка $L_{\omega_1,\omega}$ и некоторый аналог теоремы Д. Скотта об определимости совокупности гомоморфных образов подобных алгебр позитивной $L_{\omega_1,\omega}$-формулой, доказанный в работе автора [9].

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на основном множестве универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ называется *$L_{\omega_1,\omega}$-условно термальной* (*позитивно $L_{\omega_1,\omega}$-условно термальной*), если ее "куски термальности" определимы $L_{\omega_1,\omega}$-формулами (позитивными $L_{\omega_1,\omega}$-формулами). Совокупность всех $L_{\omega_1,\omega}$-условно термальных (позитивно $L_{\omega_1,\omega}$-условно термальных) функций алгебры $\mathfrak{A}$ обозначим как $L_{\omega_1,\omega}$-$\mathrm{CT}\,\mathfrak{A}$ ($L_{\omega_1,\omega}$-$\mathrm{PCT}\,\mathfrak{A}$).

Имеют место следующие утверждения

Теорема 5. [10] *Для любых не более чем счетных не более чем счетной сигнатуры алгебр* $\mathfrak{A}_0 = \langle A; \sigma_0 \rangle$ *и* $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1 \rangle$ *условия* $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}_1$ *и* $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}_1$ *равносильны равенству* $L_{\omega_1,\omega}$-$\mathrm{CT}\,\mathfrak{A}_0 = L_{\omega_1,\omega}$-$\mathrm{CT}\,\mathfrak{A}_1$*, или иначе: сигнатурные функции алгебры* $\mathfrak{A}_i$ *являются* $L_{\omega_1,\omega}$*-условно термальными для алгебры* $\mathfrak{A}_{1-i}$ *(при* $i \in \{0, 1\}$*).*

Теорема 6. [10] *Для любых не более чем счетных не более чем счетной сигнатуры алгебр* $\mathfrak{A}_0 = \langle A; \sigma_0 \rangle$ *и* $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1 \rangle$ *условия* $\mathrm{End}\,\mathfrak{A}_0 = \mathrm{End}\,\mathfrak{A}_1$ *и* $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}_1$ *равносильны равенству* $L_{\omega_1,\omega}$-$\mathrm{PCT}\,\mathfrak{A}_0 = L_{\omega_1,\omega}$-$\mathrm{PCT}\,\mathfrak{A}_1$*, или иначе: сигнатурные функции алгебры* $\mathfrak{A}_i$ *являются* $L_{\omega_1,\omega}$*-позитивно условно термальными для алгебры* $\mathfrak{A}_{1-i}$ *(при* $i \in 0, 1$*).*

На основе теоремы В. Марека [11] об определимости, в теоретико-множественном предположении $V = L$, не более чем счетных моделей не более чем счетной сигнатуры формулой логики второго порядка, в работе [10] доказана

Теорема 7. [10] $(V = L)$ *Для любых не более чем счетных не более чем счетных сигнатур алгебр* $\mathfrak{A}_0 = \langle A; \sigma_0 \rangle$ *и* $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1 \rangle$ *условия* $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}_1$ *и* $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}_1$ *равносильны равенству* L_2-$\mathrm{CT}\,\mathfrak{A}_0 = L_2$-$\mathrm{CT}\,\mathfrak{A}_1$*, или иначе: функции алгебры* $\mathfrak{A}_i$ *являются* L_2*-условно термальными для алгебры* $\mathfrak{A}_{1-i}$ *(при* $i \in \{0, 1\}$*).*

Здесь функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на основном множестве алгебры $\mathfrak{A}$ является L_2-условно термальной для $\mathfrak{A}$, если ее "куски термальности" определимы в $\mathfrak{A}$ формулами логики второго порядка, а через L_2-$\mathrm{CT}\,\mathfrak{A}$ обозначена совокупность всех L_2-условно термальных функций алгебры $\mathfrak{A}$.

В указанных при этом работах показано, что условия на алгебры в формулировках теорем 5–7 существенны.

Наконец, приведем результат о взаимосвязи универсальных алгебр с общим основным множеством и идентичными группами автоморфизмов но уже без каких-либо ограничений на мощность этих алгебр.

По аналогии с теорией функций действительных переменных функцию

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

на основном множестве алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ назовем *алгебраической* для этой алгебры, если ее график

$$\mathrm{Gr}\, f = \{\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, f(a_1, a_2, \ldots, a_n)\rangle | a_i \in A\}$$

является объединением алгебраических для алгебры $\mathfrak{A}$ множеств. Напомним, что множество $B \subseteq A^m$ называется алгебраическим для алгебры $\mathfrak{A}$, если оно является совокупностью решений в алгебре $\mathfrak{A}$ некоторой системы (возможно бесконечной) термальных уравнений. Совокупность всех алгебраических функций для алгебры $\mathfrak{A}$ обозначим как $\mathrm{AlgF}\,\mathfrak{A}$. .

Имеет место

Теорема 8. [12] *Для произвольных универсальных алгебр* $\mathfrak{A}_0 = \langle A; \sigma_0 \rangle$ *и* $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1 \rangle$ *условие* $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}_1$ *равносильно равенству* $\mathrm{AlgF}\,\mathfrak{A}_0 = \mathrm{AlgF}\,\mathfrak{A}_1$*, то есть тому, что сигнатурные функции алгебры* $\mathfrak{A}_i$ *являются алгебраическими для алгебры* $\mathfrak{A}_{1-i}$ *(при* $i \in \{0, 1\}$*).*

Представляет интерес аналогичное, независимое от мощности алгебр, описание пар алгебр с общим основным множеством имеющих идентичные полугруппы их преобразований: полугруппы эндоморфизмов, внутренних изоморфизмов, группы автоморфизмов.

Отметим так же близкие к рассмотренным здесь вопросам работы автора [13, 14].

Список литературы

[1] A. I. Mal'cev, Structural characteristic some classes of algebras, DAN USSR, **120**, 1 (1958), 29–32.

[2] A. G. Pinus, Conditional identities calculus and conditional rational equivalence, Algebra and Logic, **37**, 4 (1998), 245–259.

[3] A. G. Pinus, Characterization of conditional termal functions, Siberian Mathematical Journal, **38**, 1 (1997), 136–139.

[4] A. G. Pinus, On the conditional rational equivalent algebras, Vychislitelnii systemy, **165** (1999), 3–29.

[5] A. G. Pinus, Inner homomorphisms and positive-conditional terms, Algebra and Logic, **40**, 2 (2001), 87–95.

[6] A. G. Pinus, N-elementary embeddability and n-conditional terms, Russian Mathematic, **43**, 1 (1999), 33–37.

[7] A. G. Pinus, On functions commuting with semigroups of transformations of algebras, Siberian Mathematical Journal, **41**, 6 (2000), 1166–1173.

[8] D. Scott, Logic with denumerable long formulas and finite strings of quantifiers, Theory of Models. Amsterdam. North Holland P. Comp., 1965, 329–341.

[9] A. G. Pinus, Definable functions on universal algebras and definable equivalence between algebras, Algebra and Logic, **53**, 2 (2014), 166–175.

[10] A. G. Pinus, Equivalences of universal algebras which are induced by its derived structures, Vestnik by Omsk Univer., **2** (2014), 27–33.

[11] W. Marek, Sur la constance d'une hypothese de Fraisse sur definisability dans un language du second order, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A–B, **273** (1973), 1147–1150, 1169–1172.

[12] A. G. Pinus, Algebraic functions and inner homomorphisms of universal algebras, Siberian Mathematical Journal, **61**, 3 (2020), 528–531.

[13] A. G. Pinus, Implicit equivalent universal algebras, Siberian Mathematical Journal, **53**, 5 (2012), 862–871.

[14] A. G. Pinus, Rational equivalence of algebras, its clone generalization and clone equivalence, Siberian Mathematical Journal, **54**, 3 (2013), 533–544.

ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ ИНФИНИТАРНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ УЛЬТРАФИЛЬТРОВ

Н. Л. Поляков

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”,
Покровский бульвар, 11, Москва, 109028, Российская Федерация

e-mail: npolyakov@hse.ru

Замкнутые классы дискретных функций являются классическим объектом исследований с первой половины 20 века. Подробную информацию можно найти в монографиях [1, 2, 3]. Центральным понятием современной теории дискретных функций является соответствие Галуа, введенное независимо в работах [4] и [5], а также его многочисленные модификации, см., напр., [6] и [7]. Замкнутые классы инфинитарных функций введены в работах [8] и [9]. Мы показываем, что многие конструкции и результаты теории замкнутых классов дискретных функций (в частности, теория соответствий Галуа) в той или иной степени распространяются на инфинитарный случай. Неожиданным эффектом этого распространения является новый универсально-алгебраический подход в теории ультрафильтров.

1 Основные определения и соответствия Галуа для классов бесконечноместных функций

Для каждого множества X и ординала α символом X^α обозначается множество последовательностей длины α элементов множества X (иначе говоря, множество функция $\boldsymbol{x} : \alpha \to X$). Для каждого ординала $\beta < \alpha$ β-ый член последовательности $\boldsymbol{x} \in X^\alpha$ (т.е. элемент $\boldsymbol{x}(\beta)$) обозначается $\boldsymbol{x}_\beta$. Для обозначения последовательностей $\boldsymbol{x} \in X^\alpha$ мы будем также использовать стандартные обозначения вида $\{\boldsymbol{x}_\beta\}_{\beta<\alpha}$, которые оказываются удобными при описании операций над последовательностями.

Каждая функция $f : X^\alpha \to X$ называется α-местной функцией на множестве X. Множество всех α-местных функций на множестве X обозначается символом $\mathcal{F}_\alpha(X)$. Символ $\mathcal{F}_{<\alpha}(X)$ обозначает множество $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{F}_\beta(X)$. Класс

$\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Ord}} \mathcal{F}_\alpha(X)$ всех *ординальноместных* функций на множестве X будем обозначать символом $\mathcal{F}(X)$. Для каждого класса $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}(X)$ и ординала α положим $\mathcal{G}_\alpha = \mathcal{G} \cap \mathcal{F}_\alpha(X)$ и $\mathcal{G}_{<\alpha} = \mathcal{G} \cap \mathcal{F}_{<\alpha}(X)$.

Для каждого положительного ординала α и ординала $\beta < \alpha$ функция $\pi_\beta \in \mathcal{F}_\alpha(X)$, которая определяется тождеством

$$\pi_\beta(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_\beta$$

для всех $\boldsymbol{x} \in X^\alpha$, называется β-ой (α-местной) *проекцией* (на множестве X). Функция $\pi \in \mathcal{F}_\alpha(X)$ называется (α-местной) *проекцией* (на множестве X), если она является β-ой проекцией для некоторого ординала $\beta < \alpha$. Класс всех ординальноместных проекций на множестве X обозначается символом $\Pi(X)$.

Для каждого множества X и ординалов α, β естественным образом определяется *операция композиции* $\mathrm{Comp} : \mathcal{F}_\alpha(X) \times (\mathcal{F}_\beta(X))^\alpha \to \mathcal{F}_\beta(X)$, которая каждой функции $f \in \mathcal{F}_\alpha(X)$ и последовательности $\boldsymbol{g} \in (\mathcal{F}_\beta(X))^\alpha$ ставит в соответствие функцию $f \circ \boldsymbol{g} \in \mathcal{F}_\beta(X)$, которая определяется тождеством

$$f \circ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = f(\{g_\gamma(\boldsymbol{x})\}_{\gamma<\alpha})$$

для всех $\boldsymbol{x} \in X^\beta$.

Для каждого непустого множества X и положительного ординала α любое множество $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_{<\alpha}(X)$ называется *α-клоном* (на множестве X), если оно содержит все проекции $\pi \in \Pi(X)_{<\alpha}$ и замкнуто относительно композиции. Последнее означает, что для любых ординалов $\beta, \gamma < \alpha$, функции $f \in \mathcal{G}_\alpha$ и последовательности $\boldsymbol{g} \in (\mathcal{G}_\beta)^\alpha$ функция $f \circ \boldsymbol{g}$ принадлежит множеству $\mathcal{G}$. Очевидно, в данной терминологии "обычные" клоны на множестве X являются ω-клонами.

Каждое множество $P \subseteq X^\alpha$ будем называть α-местным предикатом (на множестве X).[1] Множество всех α-местных предикатов на множестве X обозначается символом $\mathcal{P}_\alpha(X)$. Символ $\mathcal{P}_{<\alpha}(X)$ обозначает множество $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{P}_\beta(X)$. Класс $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Ord}} \mathcal{P}_\alpha(X)$ всех *ординальноместных* предикатов на множестве X будем обозначать символом $\mathcal{P}(X)$. Для каждого класса $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ и ординала α положим $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}_\alpha(X)$ и $\mathcal{R}_{<\alpha} = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}_{<\alpha}(X)$.

Функция $f \in \mathcal{F}_\alpha(X)$ *сохраняет* предикат $P \in \mathcal{P}_\beta(X)$ (а предикат P *сохраняется функцией* f), если для каждой последовательности $\boldsymbol{z} = \{\boldsymbol{z}_\iota\}_{\iota<\alpha} \in P^\alpha$ последовательность

$$\{f(\{(\boldsymbol{z}_\iota)_\upsilon\}_{\iota<\alpha})\}_{\upsilon<\beta}$$

принадлежит предикату P. Неформально это означает, что для любой матрицы размера $\alpha \times \beta$, строки которой принадлежат предикату P, строка значений

[1] В литературе под предикатами часто подразумевают характеристические функции таких множеств.

функции f на ее последовательных столбцах вновь принадлежит предикату P.

Для любого множества X и положительных ординалов α, β следующим образом определим функции $\mathrm{Inv}^X_{\alpha\beta} : \mathscr{P}(\mathcal{F}_{<\alpha}(X)) \to \mathscr{P}(\mathcal{P}_{<\beta}(X))$ и $\mathrm{Pol}^X_{\alpha\beta} : \mathscr{P}(\mathcal{P}_{<\beta}(X)) \to \mathscr{P}(\mathcal{F}_{<\alpha}(X))$: для каждого множества $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_{<\alpha}(X)$ и каждого множества $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_{<\beta}(X)$

$$\mathrm{Inv}^X_{\alpha\beta}(\mathcal{G}) = \{P \in \mathcal{P}_{<\beta}(X) : \ P \text{ сохраняется каждой функцией } f \in \mathcal{G}\},$$

$$\mathrm{Pol}^X_{\alpha\beta}(\mathcal{Q}) = \{f \in \mathcal{F}_{<\alpha}(X) : \ f \ \text{ сохраняет каждый предикат } \ P \in \mathcal{Q}\}.$$

Пару $(\mathrm{Inv}^X_{\alpha\beta}, \mathrm{Pol}^X_{\alpha\beta})$ будем обозначать символом $\mathfrak{G}^X_{\alpha\beta}$.

Напомним, что (антимонотонным) *соответствием Галуа* между частично упорядоченными множествами $(A, \leqslant_A)$ и $(B, \leqslant_B)$ называется пара φ, ψ функций $\varphi : A \to B$ и $\psi : B \to A$, удовлетворяющую условиям: для любых $a_0, a_1 \in A$ и $b_0, b_1 \in B$

1. $a_0 \leqslant_A a_1 \Rightarrow \varphi(a_1) \leqslant_B \varphi(a_0)$,
2. $b_0 \leqslant_B b_1 \Rightarrow \psi(b_1) \leqslant_A \psi(b_0)$,
3. $a_0 \leqslant_A \psi(\varphi(a_0))$,
4. $b_0 \leqslant_B \varphi(\psi(b_0))$.

Для данного соответствия Галуа $\mathfrak{G} = (\varphi, \psi)$ элемент $a \in A$ (элемент $b \in B$) называется $\mathfrak{G}$-*-замкнутым* (или просто *Галуа-замкнутым*), если $a = \psi(\varphi(a))$ (соответственно, $b = \varphi(\psi(b))$).

Как известно (см., напр., [4]) для случая $\alpha = \beta = \omega$ пара $\mathfrak{G}^X_{\alpha\beta}$ есть соответствие Галуа, и Галуа-замкнутые множества функций суть в точности клоны. Это утверждение допускает следующее обобщение.

Теорема 1. *Для любого множества X, $|X| \geqslant 2$,*[2] *и положительных ординалов α, β*

1. *пара $\mathfrak{G}^X_{\alpha\beta}$ есть антимонотонное соответствие Галуа между булевыми решетками $\mathscr{P}(\mathcal{F}_{<\alpha}(X))$ и $\mathscr{P}(\mathcal{P}_{<\beta}(X))$;*
2. *каждое $\mathfrak{G}^X_{\alpha\beta}$-замкнутое множество $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_{<\alpha}(X)$ есть α-клон на множестве X;*
3. *если $\beta > |X^\gamma|$ для всех $\gamma < \alpha$, то каждый α-клон на множестве X есть $\mathfrak{G}^X_{\alpha\beta}$-замкнутый элемент булевой решетки $\mathscr{P}(\mathcal{F}_{<\alpha}(X))$.*

[2]Случай $|X| = 1$ не рассматривается в силу тривиальности.

Схема доказательства. Пункты 1. и 2. доказываются несложной проверкой. Докажем пункт 3. Пусть $\beta > |X^\gamma|$ для всех $\gamma < \alpha$ и $\mathcal{G}$ есть α-клон на множестве X. Надо доказать равенство $\mathcal{G} = \mathrm{Pol}^X_{\alpha\beta}\left(\mathrm{Inv}^X_{\alpha\beta}(\mathcal{G})\right)$. Включение $\mathcal{G} \subseteq \mathrm{Pol}^X_{\alpha\beta}\left(\mathrm{Inv}^X_{\alpha\beta}(\mathcal{G})\right)$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $\gamma < \alpha$ и g есть γ-местная функция из $\mathrm{Pol}^X_{\alpha\beta}\left(\mathrm{Inv}^X_{\alpha\beta}(\mathcal{G})\right)$. Положим $\delta = |X^\gamma|$ и выберем какую-нибудь биекцию $\varphi : \delta \to X^\gamma$. Рассмотрим δ-местный предикат

$$P = \{\{f(\varphi(\iota))\}_{\iota<\delta} : f \in \mathcal{G}_\gamma\}.$$

Поскольку множество $\mathcal{G}$ замкнуто относительно композиции, каждая функция $h \in \mathcal{G}$ сохраняет предикат P, следовательно, предикат P принадлежит множеству $\mathrm{Inv}^X_{\alpha\beta}(\mathcal{G})$. Значит, функция g сохраняет предикат P. Множество $\mathcal{G}$ содержит все γ-местные проекции. Значит предикат P содержит последовательность

$$\{g(\{\pi_\upsilon(\varphi(\iota))\}_{\upsilon<\gamma})\}_{\iota<\delta},$$

а множество $\mathcal{G}$ содержит функцию $g \circ \{\pi_\upsilon\}_{\upsilon<\gamma} = g$. □

Как известно, для случая $\alpha = \beta = \omega$ Галуа-замкнутые множества предикатов также допускают явное описание, см. [4]. Мы можем распространить это описание на случай ординальноместных функций (к сожалению, это распространение имеет меньшую степень общности, чем Теорема 1). Множество $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_{<\alpha}(X)$ будем называть *p-замкнутым*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. множество $\mathcal{Q}$ содержит пустой предикат (который можно считать предикатом произвольной арности $\beta < \alpha$) и одноместный предикат X;[3]

2. для любых ординалов $\gamma, \beta < \alpha$, функции $\varphi : \beta \to \gamma$ и предиката $P \in \mathcal{Q}_\gamma$ предикаты
$$\{\{\boldsymbol{x}_{\varphi(\iota)}\}_{\iota<\beta} : \boldsymbol{x} \in P\}$$
и
$$\{\boldsymbol{x} \in X^\gamma : \{\boldsymbol{x}_{\varphi(\iota)}\}_{\iota<\beta} \in P\}$$
принадлежат множеству Q;

3. для любого ординала $\beta < \alpha$ и множества $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q}_\beta$ множество $\mathcal{Q}$ содержит предикат $\bigcap \mathcal{R}$.

Отметим, что из определения следует, что любое p-замкнутое множество $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_{<\alpha}(X)$ содержит каждый *тотальный* β-местный предикат X^β, $\beta < \alpha$, и каждую β-местную *диагональ* $\{\boldsymbol{x} \in X^\beta : \boldsymbol{x}_\delta = \boldsymbol{x}_\gamma\}$, $\delta < \gamma < \beta < \alpha$.

Теорема 2. *Для любого множества X, $|X| \geqslant 2$, и положительных ординалов α, β*

[3]Достаточно считать, что множество $\mathcal{Q}$ содержит нуль-местные предикаты $F = \emptyset$ и $T = \{\emptyset\}$, положив по определению, что любая функция $f \in \mathcal{F}(X)$ сохраняет эти предикаты.

1. *каждое* $\mathfrak{G}^X_{\alpha\beta}$*-замкнутое множество* $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_{<\beta}(X)$ *является p-замкнутым;*

2. *если* $|X^\gamma| < \beta$ *для всех* $\gamma < \beta$, *то каждое p-замкнутое множество* $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_{<\beta}(X)$ *является* $\mathfrak{G}^X_{\beta\beta}$*-замкнутым.*

Схема доказательства. Пункт 1. доказываются несложной проверкой. Докажем пункт 2. Пусть $|X^\gamma| < \beta$ для всех $\gamma < \beta$ и множество $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_{<\beta}(X)$ p-замкнуто. Надо доказать равенство $\mathcal{Q} = \mathrm{Inv}^X_{\beta\beta}\left(\mathrm{Pol}^X_{\beta\beta}(\mathcal{Q})\right)$. Включение $\mathcal{Q} \subseteq \mathrm{Inv}^X_{\beta\beta}\left(\mathrm{Pol}^X_{\beta\beta}(\mathcal{Q})\right)$ очевидно. Докажем обратное включение. Выберем произвольный ординал $\gamma < \beta$ и положим $\delta = |X^\gamma|$.

Легко показать, что существует такой предикат $P_0 \in \mathcal{P}_\delta(X)$ и последовательность $\boldsymbol{z} \in (P_0)^\gamma$, что:

1. $\{\{\boldsymbol{z}_\upsilon\} : \upsilon < \gamma\} = P_0$;

2. $\{\{(\boldsymbol{z}_\upsilon)_\iota\}_{\upsilon<\gamma} : \iota < \delta\} = X^\gamma$;

3. $\{(\boldsymbol{z}_\upsilon)_{\iota_0}\}_{\upsilon<\gamma} = \{(\boldsymbol{z}_\upsilon)_{\iota_1}\}_{\upsilon<\gamma} \Rightarrow \iota_0 = \iota_1$ для всех $\iota_0 < \iota_1 < \delta$.

Неформально говоря, этот предикат и эта последовательность строятся следующим образом. Запишем матрицу M размера $\gamma \times \delta$, столбцы которой представляют собой все последовательности $\boldsymbol{x} \in X^\gamma$, каждый по одному разу. Тогда в качестве последовательности $\boldsymbol{z}$ можно взять последовательность всех строк матрицы M, а в качестве предиката P_0 — множество всех ее строк.

Далее рассмотрим δ-местный предикат

$$P_1 = \{\{f(\{(\boldsymbol{z}_\upsilon)_\iota\}_{\upsilon<\gamma})\}_{\iota<\delta} : f \in \mathrm{Pol}^X_{\beta\beta}(\mathcal{Q}) \cap \mathcal{F}_\gamma(X)\}.$$

Неформально, предикат P_1 есть совокупность строк матрицы M', полученной из матрицы M добавлением всех строк значений всех γ-местных функций $f \in \mathrm{Pol}^X_{\beta\beta}(\mathcal{Q})$ на последовательных столбцах матрицы M.

Несложно заметить, что для любого ординала ε и последовательности $\boldsymbol{u} \in (X^\varepsilon)^\gamma$ существует такая функция $\varphi : \varepsilon \to \delta$, что

$$\boldsymbol{u} = \{\{(\boldsymbol{z}_\upsilon)_{\varphi(\iota)}\}_{\iota<\varepsilon}\}_{\upsilon<\gamma}.$$

Поэтому, в частности, для любого предиката $P \in \mathcal{P}_\varepsilon(X)$ мощности не более γ существует такая функция $\varphi : \varepsilon \to \delta$, что

$$P = \{\{\boldsymbol{x}_{\varphi(\iota)}\}_{\iota<\varepsilon} : \boldsymbol{x} \in P_0\}.$$

Если при этом предикат P принадлежит множеству $\mathrm{Inv}^X_{\beta\beta}\left(\mathrm{Pol}^X_{\beta\beta}(\mathcal{Q})\right)$, то утверждение остается верным, если предикат P_0 заменить на предикат P_1. Поэтому достаточно доказать, что предикат P_1 принадлежит множеству $\mathcal{Q}$. Для этого рассмотрим предикат

$$P_2 = \bigcap_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_\delta \\ P_1 \subseteq Q}} Q$$

и покажем, что $P_1 = P_2$. Включение $P_1 \subseteq P_2$ очевидно. Для доказательства обратного включения выберем произвольную последовательность $\boldsymbol{y} \in P_2$ и определим функцию $g : X^\gamma \to X$ следующим образом. Для каждой последовательности $\boldsymbol{x} \in X^\gamma$ существует единственный ординал $\iota < \delta$, для которого $\boldsymbol{x} = \{(\boldsymbol{z}_\upsilon)_\iota\}_{\upsilon<\gamma}$. Положим

$$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}_\iota.$$

Покажем, что функция g сохраняет любой предикат из множества $\mathcal{Q}$. Пусть $Q \in \mathcal{Q}_\varepsilon$ и $\boldsymbol{u} \in Q^\gamma$. Выберем такую функцию $\varphi : \varepsilon \to \delta$, что $\boldsymbol{u} = \{\{(\boldsymbol{z}_\upsilon)_{\varphi(\iota)}\}_{\iota<\varepsilon}\}_{\upsilon<\gamma}$. Множество $\mathcal{Q}$ содержит предикат

$$R = \{\boldsymbol{x} \in X^\delta : \{\boldsymbol{x}_{\varphi(\iota)}\}_{\iota<\varepsilon} \in Q\}.$$

Поскольку имеет место включение $P_2 \subseteq R$, последовательность $\boldsymbol{y}$ принадлежит предикату R, а последовательность $\{\boldsymbol{y}_{\varphi(\iota)}\}_{\iota<\varepsilon}$ принадлежит предикату Q. Значит, функция g сохраняет любой предикат из множества $\mathcal{Q}$.

Отсюда следует, что последовательность $\boldsymbol{y}$ принадлежит предикату P_1. Это окончательно доказывает теорему. $\square$

2 Булев случай и приложения к теории ультрафильтров

Далее мы будем рассматривать определенные выше конструкции для $X = \{0,1\}$. Этот случай мы будем называть булевым. Множество $\{0,1\}$ есть ординал 2, так мы и будем его обозначать для краткости.

Для каждого ординала α, последовательности $\boldsymbol{x} \in 2^\alpha$, множества $A \subseteq \alpha$, функции $f : 2^\alpha \to 2$ и множества $\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$ определены

1. множество $\mathrm{set}_{\boldsymbol{x}} = \{\iota < \alpha : \boldsymbol{x}_\iota = 1\}$,
2. последовательность $\chi_A = \{\boldsymbol{x} \in 2^\alpha : (\forall \iota < \alpha)\, \boldsymbol{x}_\iota = 1 \Leftrightarrow \iota \in A\}$,
3. множество $\mathrm{set}_{\boldsymbol{f}} = \{A \subseteq \alpha : f(\chi_A) = 1\}$,
4. функция $\chi_{\mathfrak{a}} : 2^\alpha \to 2$, заданная условиями $f(\boldsymbol{x}) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{set}_{\boldsymbol{x}} \in \mathfrak{a}$,

причем отображения $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{set}_{\boldsymbol{x}}$ и $A \mapsto \chi_A$, а также отображения $f \mapsto \mathrm{set}_f$ и $\mathfrak{a} \mapsto \chi_{\mathfrak{a}}$ взаимно обратны. Мы будем отождествлять последовательности $\boldsymbol{x} \in 2^\alpha$ с соответствующими множествами $A \subseteq \alpha$, а функции $f : 2^\alpha \to 2$ — с соответствующими множествами $\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$ и считать, что для всех положительных ординалов α, β определено понятия α-клона множеств $\mathfrak{a} \in \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathscr{P}\left(\mathscr{P}(\beta)\right)$ и соответствия Галуа $\mathfrak{G}^2_{\alpha\beta} = \left(\mathrm{Inv}^2_{\alpha\beta}, \mathrm{Pol}^2_{\alpha\beta}\right)$ между решетками $\mathscr{P}\left(\bigcup\limits_{\gamma<\alpha} \mathscr{P}\left(\mathscr{P}(\gamma)\right)\right)$ и $\mathscr{P}\left(\mathcal{P}_{<\beta}(2)\right)$. Верхний символ 2 в вышеприведенных записях будем опускать.

Ультрафильтром на множестве Y называется произвольное множество $\mathfrak{u} \subseteq \mathscr{P}(Y)$, удовлетворяющее следующим условиям: для любых множеств $B, C \subseteq Y$

1. если $B \in \mathfrak{u}$ и $C \subseteq B$, то $C \in \mathfrak{u}$,

2. если $B \in \mathfrak{u}$ и $C \in \mathfrak{u}$, то $B \cap C \in \mathfrak{u}$,

3. $B \in \mathfrak{u}$ тогда и только тогда, когда $Y \setminus B \notin \mathfrak{u}$.

Множество всех ультрафильтров на множестве Y мы будем обозначать символом ${}_{\boldsymbol{\beta}}Y$. Теория ультрафильтров — развитая современная область математики, имеющая приложения в теории Рамсея, комбинаторике, теории чисел, алгебре, топологической динамике, эргодической теории и др. Подробную информацию (включая историческую справку) можно найти в монографиях [10] и [11]. Оказывается, некоторые понятия теории ультрафильтров тесно связаны с теорией классов ординальноместных функций.

Теорема 3. *Пусть α есть положительный ординал. Тогда*

1. *множество $\mathfrak{u} \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$ есть ультрафильтр тогда и только тогда, когда $\mathfrak{u}$ сохраняет все двухместные (равносильно, все конечноместные; равносильно, все конечные) предикаты на множестве 2;*

2. *для любого ультрафильтра $\boldsymbol{\mathfrak{u}} \in {}_{\boldsymbol{\beta}}\alpha$ и положительного ординала γ множество $\mathrm{Inv}_{\alpha\gamma}(\{\mathfrak{u}\})$ замкнуто относительно конечных объединений, т.е. для любого ординала $\delta < \gamma$ и δ-местных предикатов P и Q из $\mathrm{Inv}_{\alpha\gamma}(\{\mathfrak{u}\})$ предикат $P \cup Q$ тоже принадлежит множеству $\mathrm{Inv}_{\alpha\gamma}(\{\mathfrak{u}\})$;*

3. *множество всех ультрафильтров на всех ординалах $\gamma < \alpha$ есть α-клон на множестве 2.*

Доказательство. Несложной проверкой. □

Начиная с 30-х годов 20 века классическим объектом исследований становится операция ультрарасширения унарных функций и связанный с ней предпорядок Рудин — Кейслера (см., напр., [10]) Для каждой функции $f : A \to B$ *ультрарасширение* $\widetilde{f}$ есть функция из множества ${}_{\boldsymbol{\beta}}A$ в множество ${}_{\boldsymbol{\beta}}B$, которая определяется следующим образом:

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}) = \{S \subseteq B : (\forall X \in \mathfrak{u})(\exists x \in X)\, f(x) \in S\}$$

для всех $\mathfrak{u} \in {}_{\boldsymbol{\beta}}A$.

Предпорядок Рудин — Кейслера есть бинарное отношение $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ на ${}_{\boldsymbol{\beta}}A$, которое определяется формулой

$$\mathfrak{u} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathfrak{v} \Leftrightarrow \widetilde{f}(\mathfrak{v}) = \mathfrak{u} \text{ для некоторой функции } f : A \to A.$$

Легко показать, что имеет место следующее утверждение.

Утверждение 4. *Для любого положительного ординала α, ультрафильтров $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in {}_{\boldsymbol{\beta}}\alpha$ и функции $f : \alpha \to \alpha$ следующие условия равносильны:*

1. $\mathfrak{u} = \widetilde{f}(\mathfrak{v})$,

2. $\chi_{\mathfrak{u}} = \chi_{\mathfrak{v}} \cdot \{\pi_{f(\iota)}\}_{\iota<\alpha}$.

Таким образом, неформально говоря, условие $\mathfrak{u} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathfrak{v}$ выполнено тогда и только тогда, когда характеристическая функция ультрафильтра $\mathfrak{u}$ получена из характеристической функции ультрафильтра $\mathfrak{v}$ путем перестановок и отождествлений переменных.

Ультрарасширения бинарных отображений, в особенности групповых и полугрупповых операций, рассматриваются с 60-х годов 20 века. Результаты, полученные в этой области, нашли многочисленные связанные с теорией Рамсея приложения в теории чисел, алгебре, топологической динамике и эргодической теории. Подробную информацию (включая историческую справку) можно найти в монографии [11].

Ультрарасширения функций произвольной конечной арности (и, шире, ультрарасширения моделей первого порядка) были независимо предложены в недавних работах Горанко [12] и Савельева [13, 14]. Более пространную информацию можно найти в работах [15]–[19].

Для каждой функции $f : A^n \to B$ ее ультрарасширение $\widetilde{f} : (\beta A)^n \to \beta B$ может быть определено рекурсией по n. Нуль-местная функция f отождествляется с константой $c_f \in B$. Для $n = 0$ функция $\widetilde{f}$ есть нуль-местная функция, которая отождествляется с константой, равной главному ультрафильтру, порожденному константой c_f, т.е. $\widetilde{f} = \{S \subseteq B : c_f \in S\}$. Для $n > 0$ положим:

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1}) = \{S \subseteq B : (\forall X \in \mathfrak{u}_0)(\exists x \in X)\, S \in \widetilde{f_x}(\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1})\},$$

где $f_x(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x, x_1, \ldots, x_{n-1})$ для всех $x, x_1, \ldots, x_{n-1} \in A$. Легко проверить, что при $n = 1$ мы получаем определение, которое эквивалентно вышеприведенному. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 5. *Для любого положительного ординала α, натурального числа n, функции $f : \alpha^n \to \alpha$ и ультрафильтров $\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1} \in {}_{\boldsymbol{\beta}}\alpha$ ультрафильтр $\widetilde{f}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1})$ принадлежит $(\alpha+1)$-клону ультрафильтров, порожденному множеством $\{\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1}\}$.*

Однако, если среди ультрафильтров $\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1} \in {}_{\boldsymbol{\beta}}\alpha$ есть хотя бы один неглавный, то порожденный ими $(\alpha+1)$-клон не исчерпывается ультрафильтрами вида $\widetilde{f}(\boldsymbol{u})$, где $\boldsymbol{u} \in \{\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1}\}^n$, $n < \omega$ и $f : \alpha^n \to \alpha$.[4]

Предпорядок Комфорта $\leqslant_C$ на множестве ${}_{\boldsymbol{\beta}}Y$ определяется следующим образом: $\mathfrak{u} \leqslant_C \mathfrak{v}$, если каждое $\mathfrak{v}$-компактное пространство есть $\mathfrak{u}$-компактное

[4] В [20, 21] введено понятие ультрарасширения непрерывной в Бэровской топологии функции $f : \omega^\omega \to \omega$. Можно показать, что множество всех ультрафильтров $\mathfrak{v} \in {}_{\boldsymbol{\beta}}\omega$ которые принадлежит $(\omega+1)$-клону, порожденному множеством $\mathfrak{U} \subseteq {}_{\boldsymbol{\beta}}\omega$, есть в точности множество всех ультрафильтров вида $\widetilde{f}(\boldsymbol{u})$, где $\boldsymbol{u} \in \mathfrak{U}^\omega$, а f — непрерывная в Бэровской топологии функция из ω^ω в ω.

пространство (детали см., напр., [11], стр. 284, и [22]). Оказывается, предпорядок Комфорта тоже можно определить в терминах клонов ординальноместных функций.

Теорема 6. *Для любого положительного ординала α и ультрафильтров $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in {}_{\boldsymbol{\beta}}\alpha$ следующие условия равносильны:*

1. $\mathfrak{u} \leqslant_C \mathfrak{v}$,
2. $\mathfrak{u}$ *принадлежит* $(\alpha+1)$*-клону, порожденному ультрафильтром* $\mathfrak{v}$.

Возвращаясь к соответствиям Галуа $\mathfrak{G}^X_{\alpha\beta}$, можно заметить, что в булевом случае (т.е. при $X = 2$) предикаты $P \in \mathcal{P}_\gamma(2)$ можно отождествить с множествами $\mathfrak{p} \subseteq \mathscr{P}(\gamma)$. А именно, для каждого ординала γ, предиката $P \in \mathcal{P}_\gamma(2)$ и множества $\mathfrak{p} \subseteq \mathscr{P}(\gamma)$ положим

$$\mathrm{set}_P = \{\mathrm{set}_{\boldsymbol{x}} : \boldsymbol{x} \in P\} \text{ и } \chi_{\mathfrak{p}} = \{\chi_A : A \in \mathfrak{p}\}.$$

Тогда отображения $P \mapsto \mathrm{set}_P$ и $\mathfrak{p} \mapsto \chi_{\mathfrak{p}}$ взаимно обратны. Используя это отождествление, мы можем считать, что соответствие $\mathfrak{G}_{\alpha\beta}$ есть соответствие Галуа между решетками $\mathscr{P}\left(\bigcup\limits_{\gamma<\alpha} \mathscr{P}\left(\mathscr{P}(\gamma)\right)\right)$ и $\mathscr{P}\left(\bigcup\limits_{\gamma<\beta} \mathscr{P}\left(\mathscr{P}(\gamma)\right)\right)$.

Для любых множеств X, Y и отображения $f : X \to Y$ определим функцию $\widehat{f} : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$ взятия полного прообраза: $\widehat{f}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$ для каждого множества $A \subseteq Y$.

Для любого ординала α множество $\mathbb{T} \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(\alpha))$ назовем *α-комплексом*, если

1. для каждого множества $U \in \mathbb{T}$ существует такой ординал $\gamma < \alpha$, что $U \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(\gamma))$,
2. для каждого ординала $\gamma < \alpha$ множество $\mathbb{T} \cap \mathscr{P}(\mathscr{P}(\gamma))$ есть замкнутая T_1-топология на множестве $\mathscr{P}(\gamma)$, т.е. содержит пустое множество, множество $\mathscr{P}(\gamma)$ и все синглетоны $\{A\}$, $A \subseteq \gamma$, а также замкнуто относительно любых пересечений и конечных объединений,
3. для каждых ординалов $\gamma, \delta < \alpha$ и функции $f : \gamma \to \delta$ функция $\widehat{f}$ замкнута, т.е. обладает следующим свойством: образ и полный прообраз замкнутого множества замкнут (относительно определенных выше топологий).

Теорема 7. *Пусть α и β — положительные ординалы. Тогда*

1. *для каждого α-клона ультрафильтров $\mathfrak{U}$ множество* $\mathrm{Inv}_{\alpha\beta}(\mathfrak{U})$ *есть β-комплекс;*
2. *если α есть недостижимый кардинал, то решетка всех α-клонов ультрафильтров антиизоморфна решетке всех α-комплексов.*

Доказательство. Следует из теорем 1, 2, 3. □

Дискуссия. Многие конструкции и результаты теории замкнутых классов дискретных функций могут быть распространены на инфинитарный случай (в частности, нет сомнений в том, что это касается теории Галуа для S-замкнутых функциональных классов из [6]). Автор надеется, что это распространение будет иметь многочисленные приложения в теории ультрафильтров. Основным препятствием на данный момент является отсутствие явного описания $\mathfrak{G}^X_{\alpha\beta}$-замкнутых множеств предикатов в более общих условиях, чем дает теорема 2.

Благодарность. Автор благодарит проф. А.Г. Пинуса за ряд важных замечаний, относящихся к основным определениям и постановке задачи.

Список литературы

[1] A. I. Mal'tsev, I. A. Mal'tsev, Iterative Post algebras, Moscow: NAUKA (2012) (Russian).

[2] R. Pöschel, L. A. Kalužnin, Funktionenund Relationenalgebren, Berlin: WEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (1979).

[3] D. Lau, Function Algebras on Finite Sets, A Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2006).

[4] V. G. Bodnarchuk, L. A. Kaluzhnin, V. N. Kotov. et al., Galois theory for Post algebras, I-–II, Cybern Syst Anal, 5 (1969), 243–252 and 531–539).

[5] D. Geiger, Closed systems of functions and predicates, Pacific journal of mathematics, **27 (1)** (1968), 95–100.

[6] N. G. Parvatov, Galois correspondence for closed classes of discrete functions, Prikl. Diskr. Mat., **2 (8)** (2010), 10–15 (Russian).

[7] N. L. Polyakov, M. V. Shamolin, On a generalization of Arrow's impossibility theorem, Dokl. Math., **89** (2014), 290–292.

[8] J. Słonimski, Theory of models with infnitary operations and relations, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Phys, **6** (1958), 449–456.

[9] J. Słonimski, The theory of abstract algebras with infnitary operations, Rozprawy Mat, 18 (1959).

[10] W. W. Comfort, S. Negrepontis, The theory of ultrafilters, Springer, Berlin (1974).

[11] N. Hindman, D. Strauss, Algebra in the Stone–Čech Compactification, 2nd ed., revised and expanded, W. de Gruyter, Berlin–N.Y., 2012.

[12] V. Goranko, Filter and ultrafilter extensions of structures: universal-algebraic aspects, Preprint, 2007.

[13] D. I. Saveliev, Ultrafilter extensions of models, Lecture Notes in AICS 6521, 2011, 162–177.

[14] D. I. Saveliev, On ultrafilter extensions of models, In: S. D. Friedman et al. (eds.), The Infinity Project Proc. CRM Documents 11, Barcelona, 2012, 599–616.

[15] D. I. Saveliev, On idempotents in compact left topological universal algebras, Topology Proc., **43** (2014), 37–46.

[16] N. L. Poliakov, D. I. Saveliev, On two concepts of ultrafilter extensions of first-order models and their generalizations, Logic, Language, Information, and Computation, Lecture Notes in Computer Science, 10388, eds. J. Kennedy, R. J. G. B. de Queiroz, Springer, Berlin, Heidelberg, 2017, 336–348.

[17] N. L. Poliakov, D. I. Saveliev On ultrafilter extensions of first-order models and ultrafilter interpretations. Arch. Math. Logic, **60** (2021), 625–681.

[18] D. I. Saveliev, S. Shelah, Ultrafilter extensions do not preserve elementary equivalence, Math. Log. Quart., **65** (2019), 511–516.

[19] N. L. Polyakov, On the Canonical Ramsey Theorem of Erdős and Rado and Ramsey Ultrafilters, Doklady Mathematics, to appear (2023).

[20] D. T. Saveliev (joint work with N. L. Polyakov), Between the Rudin—Keisler and Comfort preorders, Report at the conference Ultramath, Pisa (2022).

[21] N. L. Poliakov, D. I. Saveliev, Between the Rudin—Keisler and Comfort preorders, Report at the International Conference on Topology and its Applications, Nafpaktos (2023).

[22] S. García-Ferreira, Comfort types of ultrafilters, Proc. Amer. Math. Soc., **120** (1994), 1251–1260.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОПРЯГАЮЩЕЙ МАТРИЦЫ АВТОМОРФИЗМОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ

А. М. Попова, О. В. Брюханов

Новосибирский Государственный Технический Университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия

e-mail: AMPopovaIvleva@ya.ru, bryuolegvad@ya.ru

1 Введение

Пусть G — группа, R — кольцо с единицей. *Групповое кольцо* RG — это множество формальных сумм вида $\sum\limits_{g\in G} \alpha_g g$, где $\alpha_g \in R$, с естественно определенными операциями:

$$\Sigma\alpha_g g + \Sigma\beta_g g = \Sigma(\alpha_g + \beta_g)g,$$

$$(\Sigma\alpha_g g)(\Sigma\beta_g g) = \sum_{g\in G}\left(\sum_{\substack{f,h\in G\\ f\cdot h=g}} \alpha_f\beta_h\right)g,$$

$$\alpha(\Sigma\alpha_g g) = \Sigma\alpha\alpha_g g.$$

При этом если $R = \mathbb{Z}$, то говорят о *целочисленном* групповом кольце группы G. В случае, когда R — поле, говорят о *групповой алгебре* RG.

Пусть $h = \Sigma\alpha_g g \in \mathbb{Z}G$. Обозначим $\varepsilon(h) = \Sigma\alpha_g$. Автоморфизм $\theta \in \mathrm{Aut}\mathbb{Z}G$ называется *нормализованным*, если $\varepsilon(\theta(g)) = 1$, для любого $g \in G$. Нормализованные автоморфизмы составляют нормальную подгруппу в группе всех автоморфизмов целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}G$.

Цассенхаузом была выдвинута

Гипотеза. *(о факторизации автоморфизмов).* Для любого нормализованного автоморфизма $\theta \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{Z}G$ существует единица $s \in \mathbb{Q}G$ и групповой автоморфизм $\sigma \in \mathrm{Aut}\,G$ такие, что $\theta(g) = s^{-1}\sigma(g)s$, для любого $g \in G$.

Другими словами, определена *факторизация* нормализованного автоморфизма $\theta = \sigma \circ \varphi_s$, где $\sigma \in \mathrm{Aut}\,G$ и φ_s — сопряжение единицей s алгебры $\mathbb{Q}G$.

Как известно, гипотеза Цассенхауза о факторизации автоморфизмов целочисленных групповых колец не подтвердилась. Известны контрпримеры Хертвека [1], Роггенкампа [2].

2 Предварительные сведения

Нами в [3] предложена другая факторизация нормализованных автоморфизмов целочисленных групповых колец, основанная на теории представлений конечных групп.

Пусть $G = \{e, g_2, \ldots, g_n\}$ — конечная группа, $T_1(G), \ldots, T_s(G)$ — все ее неприводимые неэквивалентные представления степеней $n_1, \ldots, n_s$.

$$D(G) = \{\mathrm{diag}(T_1(g), \ldots, T_s(g)), g \in G\}$$

Очевидно, что $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}[D(G)]$. Условимся кольца $\mathbb{Z}[T_i(G)]$ называть *клетками* кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$. Рассмотрим отображения

$$\mu_{ij} : \sum \alpha_g T_i(g) \to \sum \alpha_g T_j(g), \alpha_g \in \mathbb{Z}$$

которые либо являются изоморфизмами, либо не являются. Если клетки $\mathbb{Z}[T_p(G)], \ldots, \mathbb{Z}[T_{p+k-1}(G)]$, $k \geq 2$, μ_{ij}-изоморфны, обозначим

$$D_p(G) = \{\mathrm{diag}(T_p(g), \ldots, T_{p+k-1}(g)), g \in G\}$$

$O_p = \mathbb{Z}[D_p(G)]$ назовем *блоком.* Таким образом, все кольцо $\mathbb{Z}[D(G)]$ разбивается на блоки, точнее $\mathbb{Z}[D(G)] \leq O_{p_1} \oplus \cdots \oplus O_{p_r}$, где $\mathbb{Q}$-алгебры $\mathbb{Q}[O_p]$ являются простыми. Если автоморфизм φ кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ все блоки оставляет на месте, назовем его *стабилизирующим*, в противном случае — *переставляющим.*

Заметим, что если $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\xi)$ — конечное алгебраическое расширение, то любой автоморфизм $\tau \in \mathrm{Aut}\mathbb{F}$ индуцирует изоморфизм $\hat{\tau}$ кольца матриц над $\mathbb{F}$:

$$\hat{\tau}((a_{ij})) = (a_{ij}^{\tau}).$$

Справедливо следующее утверждение, доказанное в [3].

Теорема. *Любой нормализованный автоморфизм кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ есть композиция $\varphi \circ \hat{\tau} \circ \varphi_s$, где φ — некоторый переставляющий автомофизм из выделенного конечного набора Φ, τ — автоморфизм поля представления группы G, φ_s — сопряжение единицей s алгебры $\mathbb{Q}[D(G)]$.*

Разбиение кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ на блоки определяется характерами χ_i представлений $T_i(G)$. Если χ_i — целочисленный, то блок состоит из одной клетки $\mathbb{Z}[T_i(G)]$. Если χ_i содержит алгебраические числа, то блок состоит из k клеток, где $k = |\mathrm{Aut}\mathbb{Q}(\chi_i)|$.

Пусть $\mathrm{Aut}\mathbb{Q}(\chi_i) = \{\tau_1 = \mathrm{id}, \tau_2, \ldots, \tau_k\}$. Тогда характерами клеток такого блока являются $\chi_i, \tau_2(\chi_i), \ldots, \tau_k(\chi_i)$. Соответственно, клетками блока являются клетки $\mathbb{Z}[T_i(G)], \mathbb{Z}[\hat{\tau}_2(T_i(G))], \ldots, \mathbb{Z}[\hat{\tau}_k(T_i(G))]$, то есть любая матрица блока определяется своей первой клеткой. Сужение любого стабилизирующего автоморфизма на таком блоке есть композиция $\hat{\tau}_j \circ \varphi_s$, где $j = 1, \ldots, k$.

Возникает естественный

Вопрос. Для любого ли автоморфизма $\tau_j \in \mathrm{Aut}\mathbb{Q}(\chi_i)$, где $j = 1, ..., k$, найдется единица s алгебры $\mathbb{Q}[T_i(G)]$ такая, что композиция $\hat{\tau}_j \circ \varphi_s$ является автоморфизмом блока?

По поводу этого вопроса заметим следующее. В таблице характеров группы Матье M_{11} есть алгебраические числа, но $\mathrm{Out}M_{11} = 1$. Значит, если автоморфизм поля характера "*продолжается*" до автоморфизма целочисленного группового кольца этой группы с помощью сопряжения, то она служит контрпримером к гипотезе Цассенхауза.

Дело в том, что по гипотезе Цассенхауза любой нормалиэованный автоморфизм целочисленного группового кольца есть композиция автоморфизма группы и сопряжения единицей групповой алгебры. Но автоморфизм, индуцированный автоморфизмом поля характера, переставляет классы сопряженных элементов группы. Значит, в случае $\mathrm{Out}G = 1$ не может реализоваться автоморфизмом группы.

3 Основные результаты

Цель нашей работы — описать алгоритм, отвечающий на вопрос, поставленный в предыдущем параграфе.

1. Считаем, что индекс Шура равен 1, то есть поле представления блока совпадает с полем характера. Пусть χ_i — характер первой клетки блока, $\mathbb{Q}(\chi_i)$ — поле характера, которое получается как присоединение к полю $\mathbb{Q}$ конечного набора целых алгебраических чисел. Если $|\mathbb{Q}(\chi_i) : \mathbb{Q}| = k$, то $\{\omega\} = \{1, \xi, \ldots, \xi^{k-1}\}$ — базис расширения $\mathbb{Q}(\chi_i) : \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}(\xi)$, где ξ — целое алгебраическое число. Тогда целочисленные линейные комбинации элементов $\{\omega\}$ есть некоторое подкольцо K кольца целых алгебраических чисел поля $\mathbb{Q}(\chi_p)$.

2. Пусть m — наименьшее натуральное число такое, что для всех матричных единиц $e_{lp}, 1 \leq l, p \leq n_i$, и чисел $\xi^q, q = 0, \ldots, k-1$, выполнено

$$m\xi^q e_{lp} \in \mathbb{Z}[T_i(G)].$$

Таким образом, $m\mathrm{Mat}_{n_i}(K) \leq \mathbb{Z}[T_i(G)]$.

3. Рассмотрим идеал

$$\mathcal{I}_m = \langle m\xi^q e_{lp}, 1 \leq l, p \leq n_i, q = 0, \ldots, k-1\rangle_{\mathbb{Z}} \lhd \mathbb{Z}[T_i(G)].$$

Нетрудно доказать, что для любого $\tau \in \mathrm{Aut}\mathbb{Q}(\chi_i)$ имеет место $\hat{\tau}(\mathcal{I}_m) = \mathcal{I}_m$.

4. Можно считать все элементы сопрягающей матрицы s — целые алгебраические числа из кольца K. При этом, сопрягающую матрицу s ищем в виде $s = s_1 + ms_2$, где коэффициенты элементов s_1 в разложении по базису $\{\omega\}$ принадлежат множеству $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ и $|s_1 + ms_2| \neq 0$.

Заметим, что в силу равенства $s\mathbb{Z}[T_i(G)] = \mathbb{Z}[\widehat{\tau}(T_i(G))]s$, матрица s_1 удовлетворяет системе сравнений

$$\begin{cases} x_1b_1s_1 + \cdots + x_tb_ts_1 \equiv s_1g_1 \mod \mathcal{I}_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1b_1s_1 + \cdots + y_tb_ts_1 \equiv s_1g_t \mod \mathcal{I}_m \\ \overline{x}_1s_1g_1 + \cdots + \overline{x}_ts_1g_t \equiv b_1s_1 \mod \mathcal{I}_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{y}_1s_1g_1 + \cdots + \overline{y}_ts_1g_t \equiv b_ts_1 \mod \mathcal{I}_m \end{cases}, \tag{1}$$

где $g_1, \ldots, g_t$ — аддитивный базис кольца $\mathbb{Z}[T_i(G)]$, $h_1, \ldots, h_t$ — аддитивный базис кольца $\mathbb{Z}[\hat{\tau}(T_i(G))]$, коэффициенты $x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_t$, $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_t, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_t \in \{0, \ldots, m-1\}$.

Матрица s_1, удовлетворяющая системе сравнений (1), вместе с соответствующими ей из данной системы коэффициентами $x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots,$ $y_t, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_t, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_t \in \{0, \ldots, m-1\}$ задают множество элементов $h_1, \ldots, h_t, \overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_t \in \mathcal{I}_m \subseteq \bigcap_{r=i}^{i+k-1} \mathbb{Z}[T_r(G)]$:

$$\begin{cases} x_1b_1s_1 + \cdots + x_tb_ts_1 - s_1g_1 = h_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1b_1s_1 + \cdots + y_tb_ts_1 - s_1g_t = h_t \\ \overline{x}_1s_1g_1 + \cdots + \overline{x}_ts_1g_t - b_1s_1 = \overline{h}_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{y}_1s_1g_1 + \cdots + \overline{y}_ts_1g_t - b_ts_1 = \overline{h}_t \end{cases} \tag{2}$$

Найденные матрицы $h_1, \ldots, h_t, \overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_t \in \mathcal{I}_m$ вместе с используемыми коэффициентами $x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_t, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_t, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_t \in \{0, \ldots, m-1\}$ задают систему матричных линейных уравнений для нахождения неизвестной матрицы s_2:

$$\begin{cases} -(x_1b_1 + \cdots + x_tb_t)ms_2 + ms_2g_1 = h_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -(y_1b_1 + \cdots + y_tb_t)ms_2 + ms_2g_t = h_t \\ -ms_2\overline{x}_1g_1 + \cdots + \overline{x}_tg_t) + b_1ms_2 = \overline{h}_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -ms_2(\overline{y}_1g_1 + \cdots + \overline{y}_tg_t) + b_tms_2 = \overline{h}_t \end{cases} \tag{3}$$

Для матрицы $s = s_1 + ms_2$ выполняется равенство

$$s\mathbb{Z}[T_i(G)] = \mathbb{Z}[\widehat{\tau}(T_i(G))]s.$$

Если $|s| \neq 0$, то $s = s_1 + ms_2$ — искомая сопрягающая матрица

$$\mathbb{Z}[T_i(G)] = s^{-1}\mathbb{Z}[\widehat{\tau}(T_i(G))]s.$$

5. **Алгоритм нахождения сопрягающей матрицы.**

1) Вычисляем аддитивные базисы колец $\mathbb{Z}[T_i(G)]$ и $\mathbb{Z}[\hat{\tau}(T_i(G))]$ (см. [3]).

2) Вычисляем m (см. [3]).

3) Для каждой матрицы s_1 из их конечного набора проверяем выполнимость системы сравнений (1).

4) Для найденной матрицы s_1, из системы (2) вычисляем матрицы

$$h_1, \ldots, h_t, \overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_t \in \mathcal{I}_m \subseteq \bigcap_{r=i}^{i+k-1} \mathbb{Z}[T_r(G)].$$

5) Для нахождения матрицы s_2, по найденным матрицам $h_1, \ldots, h_t$, $\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_t$ составляем и решаем систему линейных уравнений (3).

6) Если $|s_1 + ms_2| \neq 0$, то $s = s_1 + ms_2$ — **сопрягающая матрица**.

Список литературы

[1] M. Hertweek, Integral group ring automorphisms without Zassenhaus factorization, Illinois Jornal of Mathematics, **46**, 1 (2002), 233–245.

[2] K. W. Roggenkamp, L. Scott, On a conjecture of Zassenhaus for finite group rings: manuscript, November, 1988, 60 p.

[3] A. M. Ivleva, O. V. Bryukhanov, E. V. Grachev, Units of Integral Group Rings, Novosibirsk: NSTU Publisher, 2018, 190 p.(“NSTU Monographs” series) (Russian).

ПРОСТЫЕ ПРЕЛИЕВЫ АЛГЕБРЫ: ЭНДОМОРФЫ, АЛГЕБРЫ БУРДЭ И КОНСТРУКЦИЯ МИЦУХАРЫ

А. П. Пожидаев*

ИМ СО РАН,
пр. Ак. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: app@math.nsc.ru

1 Введение

Данная обзорная статья о простых прелиевых (правосимметрических) алгебрах является расширенным вариантом пленарного доклада, представленного на XV международной конференции Эрлагол-2023 "Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры".

Алгебра $\mathcal{A}$ над полем F называется левосимметрической (или прелиевой), если она удовлетворяет тождеству левосимметричности

$$(x, y, z) = (y, x, z).$$

Аналогично определяются правосимметрические алгебры, которые оказываются антиизоморфными левосимметрическим.

Левосимметрические алгебры естественно возникают в разных контекстах. По-видимому, эти алгебры впервые возникли в работе Кэли в 1857 году [1]. В 1961 году Кожуль применил их при изучении действий аффинных преобразований [2]. В 1963 году Винберг использовал левосимметрические алгебры при классификации выпуклых однородных конусов [3], а Герстенхабер — при изучении деформаций алгебр [4]. Левосимметрические алгебры также возникают при изучении уравнения Янга — Бакстера [5], в дифференциальной геометрии плоских многообразий [6] и в теории представлений групп Ли [7]. Для многообразия алгебр $\mathcal{V}$ общее понятие пре-$\mathcal{V}$-многообразия было определено в [8]. Легко видеть, что понятие левосимметрической алгебры совпадает с понятием прелиевой алгебры. Таким образом, в настоящее время левосимметрические алгебры известны как *алгебры Кожуля — Винберга, алгебры Винберга, алгебры Кожуля, прелиевы алгебры и алгебры Герстенхабера.*

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

Структурная теория левосимметрических алгебр в самом общем виде не имеет многих аналогов классических результатов. К примеру, левосимметрическая алгебра может быть не эластичной и даже не иметь ассоциативных степеней, теорема о разложении Веддерберна в общем виде не справедлива для этих алгебр. Но если такая алгебра имеет дополнительные условия, которые естественно возникают во многих областях математики, то можно получить хорошие структурные результаты.

Частными случаями левосимметрических алгебр являются так называемые ассосимметрические алгебры и алгебры Новикова.

Ассосимметрическая алгебра — это левосимметрическая алгебра, которая также является правосимметрической. Клейнфелд доказал ассоциативность первичных ассосимметрических алгебр характеристики не 2 и 3 [9].

Алгебра Новикова — это левосимметрическая алгебра, у которой операторы правого умножения взаимно коммутируют. Эти алгебры появились в 1979 году в статье Гельфанда и Дорфман в связи с гамильтоновыми операторами [10]. Балинский и Новиков в 1985 году нашли ту же самую алгебраическую структуру в связи со скобками Пуассона гидродинамического типа [11]. Абстрактное изучение алгебр Новикова было начато Зельмановым в [12], где он доказал, что конечномерная простая алгебра Новикова над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 является полем. В 1989 году Филиппов построил широкий класс простых неассоциативных алгебр Новикова характеристики $p > 0$ [13]. Осборн в [14, 15] и Ху [16] классифицировали конечномерные простые алгебры Новикова над алгебраически замкнутыми полями характеристики $p > 2$.

В отличие от вышеупомянутых алгебр класс простых (конечномерных) неассоциативных левосимметрических алгебр огромен. К примеру, как показано в [17], стартуя с произвольной (конечномерной) нетривиальной левосимметрической алгебры $\mathcal{A}$, можно построить простую (конечномерную) левосимметрическую алгебру, содержащую $\mathcal{A}$ как подалгебру. Интересный подкласс простых левосимметрических алгебр — полные левосимметрические алгебры, у которых биективны все операторы, являющиеся суммой тождественного оператора и оператора правого умножения. Это условие естественно возникает в контексте аффинных преобразований. Как оказалось, существует бесконечно много неизоморфных простых полных левосимметрических алгебр размерности $n \geq 5$. Классификация двумерных и трёхмерных комплексных простых левосимметрических алгебр получена в [18].

Многообразие левосимметрических алгебр Ли-допустимо, т.е. каждая левосимметрическая алгебра $\mathcal{A}$ относительно операции $[x, y] = xy - yx$ является алгеброй Ли. Эта алгебра Ли обозначается через $\mathcal{A}^{(-)}$ и называется присоединённой алгеброй Ли для алгебры $\mathcal{A}$. Хорошо известно, что присоединённая алгебра Ли для левосимметрической алгебры характеристики 0 не может быть полупростой [19], а если $\mathcal{A}$ является простой левосимметрической алгеброй, то её присоединённая алгебра Ли не может быть нильпотентной [18].

Примеры показывают, что существуют простые левосимметрические алгебры с разрешимой и редуктивной присоединёнными алгебрами Ли. Присоединённая алгебра Ли полной левосимметрической алгебры всегда разрешима [20].

Рассмотрим наиболее известные примеры левосимметрических алгебр.

Пример 1. Пусть $(A;\cdot)$ — коммутативная ассоциативная алгебра, а d — её дифференцирование. Тогда новое произведение $a \star b = a \cdot d(b)$ (для всех $a, b \in A$) превращает A в левосимметрическую алгебру.

Пример 2. Пусть A — ассоциативная алгебра, $\overline{A}$ — ее изоморфная копия. Определим на $A \oplus \overline{A}$ произведение

$$x\overline{y} = \overline{yx} + [x, y],\ \overline{x}y = \overline{xy}.$$

Тогда $A \oplus \overline{A}$ с данным произведением является неассоциативной левосимметрической алгеброй.

Пример 3. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{C}$ с обычным скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, и пусть $a \in V$ — фиксированный вектор. Тогда произведение $uv = (u, v)a + (u, a)v$ определяет левосимметрическую алгебру на V. Эта алгебра является простой.

Пример 4. Пусть A — ассоциативная алгебра Рота — Бакстера веса -1, т.е. на A определено линейное отображение R такое, что $R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y) - xy)$ для всех $x, y \in A$. Тогда произведение $x * y = R(x)y - yR(x) - xy$ задаёт левосимметрическую алгебру на A.

Пример 5. Пусть F — поле характеристики нуль и $F_n := F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — алгебра многочленов над F от неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть W_n — алгебра Ли всех дифференцирований F_n. Тогда множество элементов $u\partial_i$, где $u = x_1^{s_1} \ldots x_n^{s_n}$, $\partial_i = \partial/\partial x_i,\ s_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, образует базис W_n. Для $u = a\partial_i$ и $v = b\partial_j$ положим

$$u \circ v = ((a\partial_i)(b))\partial_j.$$

Продолжая эту операцию по дистрибутивности, получаем корректно определенную билинейную операцию на W_n. Обозначим полученную алгебру (с операцией $\circ$) через L_n. Легко проверить, что L_n является простой левосимметрической алгеброй, а её коммутаторная алгебра — это алгебра Витта W_n. Алгебра L_n называется *левосимметрической алгеброй Витта индекса* n или левосимметрической алгеброй всех дифференцирований F_n.

2 $(1,1)$-супералгебры

Напомним общее определение $\mathcal{V}$-супералгебры для данного многообразия алгебр $\mathcal{V}$. Пусть Φ — поле характеристики не 2, а $\Gamma = \Gamma_{\bar{0}} \oplus \Gamma_{\bar{1}}$ — алгебра

Грассмана над Φ. $\mathbb{Z}_2$-градуированная Φ-алгебра $A = A_{\bar 0} \oplus A_{\bar 1}$ называется $\mathcal{V}$-*супералгеброй*, если её Грассманова оболочка $\Gamma(A) := (A_{\bar 0} \otimes \Gamma_{\bar 0}) \oplus (A_{\bar 1} \otimes \Gamma_{\bar 1})$ является алгеброй из $\mathcal{V}$. Аналогично поступаем с кольцами, рассматривая их как $\mathbb{Z}$-алгебры.

Пусть $A = A_{\bar 0} \oplus A_{\bar 1}$ — супералгебра, $(-1)^{xy} := (-1)^{p(x)p(y)}$, где $p(x)$ — чётность x, т.е. $p(x) = i$, если $x \in A_{\bar i}$. В дальнейшем, если чётность элемента появляется в формуле, то этот элемент предполагается однородным.

Важным классом неэластичных моноассоциативных алгебр являются алгебры типа (γ, δ), возникшие при изучении классов алгебр, обладающих следующим структурным свойством: если I — идеал алгебры A, то I^2 — также идеал в A (см., например, [21]). Частным случаем (γ, δ)-колец являются $(1,1)$-кольца (см., например, [22]). Известно, что правосимметрические кольца с тождеством $(x, x, x) = 0$ являются $(1,1)$-кольцами, а потому правосимметрические суперкольца с линеаризованным супертождеством ассоциативности третьих степеней, т.е. суперкольца с супертождествами

$$(x, y, z) = (-1)^{yz}(x, z, y),$$

$$(x, y, z) + (-1)^{z(x+y)}(z, x, y) + (-1)^{x(y+z)}(y, z, x) = 0,$$

являются $(1,1)$-суперкольцами, и далее будем использовать для них этот термин.

В работе [23] получен супераналог результата Кокориса для $(1,1)$-колец [22].

Теорема 6. [23] *Пусть A — простое $(1,1)$-суперкольцо без 2-кручения и с нетривиальным идемпотентом. Тогда A ассоциативно.*

В качестве применения этого результата была показана ассоциативность простой конечномерной $(1,1)$-супералгебры с полупростой чётной частью над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Отметим, что вопрос о существовании простых неассоциативных $(1,1)$-супералгебр остаётся открытым.

Теорема 7. [23] *Пусть A — простая конечномерная $(1,1)$-супералгебра с полупростой чётной частью над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0. Тогда A ассоциативна.*

3 Эндоморфы

В работе [24] было введено понятие эндоморфа $E(A)$ (супер)алгебры A и доказано, что $E(A)$ является простой алгеброй, если A — это не алгебра скалярного умножения. Если A — правосимметрическая супералгебра, то и $E(A)$ — правосимметрическая супералгебра. Тем самым построен широкий класс простых (правосимметрических) (супер)алгебр, содержащих матричную подалгебру с общей единицей.

Пусть A — алгебра над полем F. Обозначим через R_a оператор правого умножения в A на элемент $a \in A$: $xR_a = xa$ для всех $x \in A$. Рассмотрим прямую сумму алгебр $E(A) := A \oplus End(A)$ и наделим её произведением по правилу

$$\mathbb{A}a = a\mathbb{A} + [\mathbb{A}, R_a]$$

для всех $a \in A$, $\mathbb{A} \in \mathrm{End}(A)$. Полученную алгебру назовём *эндоморфом* алгебры A. По определению A и $\mathrm{End}(A)$ являются подалгебрами в $E(A)$, а A — это правый модуль над $\mathrm{End}(A)$.

Пусть A — алгебра. Предположим, что для любого $a \in A$ существует $\lambda \in V^*$ такой, что $ab = \lambda(b)a$ (или $ab = \lambda(a)b$) для всех $a, b \in A$. В этом случае мы говорим, что A — это *алгебра скалярного умножения*.

Теорема 8. [24] *Пусть A не является алгеброй скалярного умножения. Тогда алгебра $E(A)$ проста.*

Положим $A_0 := A$, $A_k = E(A_{k-1})$ при $k \geq 1$. Тогда Теорема 8 дает критерий простоты алгебр A_1, и мы имеем

Следствие 9. [24] *Алгебра A_n проста для всех $n > 1$.*

В [24] была найдена алгебра дифференцирований эндоморфа унитальной алгебры A, а именно, была доказана

Теорема 10. *Пусть A — унитальная алгебра. Отображение $\mathcal{D}$ является дифференцированием $E(A)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}$ является прямой суммой $d \in \mathrm{Der}(A)$ и внутреннего дифференцирования $\mathrm{End}(A)$, определённого посредством d.*

Недавно автором эта теорема была усилена следующим образом [25].

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная алгебра. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}^\sharp$, полученную из $\mathcal{A}$ присоединением единицы 1. Очевидно, любое дифференцирование на $\mathcal{A}^\sharp$ имеет вид $D + \mu$, где $D \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$, $\mu \in \mathcal{A}^*$, продолженные на $\mathcal{A}^\sharp$ правилом $(D + \mu)(1) = 0$. Далее также будем использовать обозначение $I^a_\mu := a^D$ для данного отображения и будем обозначать через I_μ отображение из $\mathcal{A}$ в $\mathrm{End}(\mathcal{A})$ такое, что $I_\mu(a) = I^a_\mu$.

Определим *индуцированное* дифференцирование $\mathcal{D}$ эндоморфа $E(\mathcal{A})$ правилом $a\mathcal{D} = aD + a^D$, $\mathbb{A}\mathcal{D} = [\mathbb{A}, D]$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $\mathbb{A} \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$, при этом действие a^D определяется единственным образом из соотношения $xa^D = \mu(x)a$. Будем говорить, что дифференцирование $\mathcal{D}$ *индуцируется* дифференцированием $D + \mu$ алгебры $\mathcal{A}^\sharp$.

Теорема 11. [25] *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра над полем F. Отображение $\mathcal{D}$ является дифференцированием $E(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}$ индуцируется дифференцированием алгебры $\mathcal{A}^\sharp$.*

4 Об алгебрах умножений простых прелиевых алгебр

В работе [26] была доказана следующая важная структурная теорема для левосимметрических алгебр.

Теорема 12. [26] *Пусть $\mathcal{A}$ — простая конечномерная левосимметрическая алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики ноль. Тогда либо $\mathcal{A}$ ассоциативна, либо её алгебра правых умножений $\mathcal{R}$ совпадает с алгеброй умножений, которая изоморфна $M_n(F)$, где $n = dim_F\mathcal{A}$, и $\mathcal{A}$ является неприводимым $\mathcal{R}$-модулем.*

В качестве следствия получаем теорему Зельманова [12]

Следствие 13. [12] *Пусть $\mathcal{N}$ — простая конечномерная алгебра Новикова над полем характеристики ноль. Тогда $\mathcal{N}$ является полем.*

Также в [26] изучались свойства простых конечномерных Ли-метабелевых левосимметрических алгебр. В частности, было показано, что любая простая конечномерная Ли-метабелева левосимметрическая алгебра $\mathcal{A}$ с тождеством $[x,y]([z,t]u) = 0$ является $\mathbb{Z}_2$-градуированной и содержит ассоциативную коммутативную подалгебру с “хорошим” корневым действием. Также в [26] были даны необходимые и достаточные условия полноты алгебр $\mathcal{A}$. Используя эти результаты, получена классификация простых четырёхмерных алгебр $\mathcal{A}$ над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2, а также описание алгебр $\mathcal{A}$ в случаях, когда чётная часть $\mathcal{A}$ либо является простой, либо имеет нулевое произведение.

5 Конструкция Мицухары

Приведём конструкцию Мицухары [27] расширения алгебры $\mathcal{A}$ при помощи 2-нильпотента или идемпотента, т. е. такого элемента u, что $u^2 = \varepsilon u$, где $\varepsilon \in \{0,1\}$, $u \notin \mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра над полем F. Симметрическую билинейную форму $H(\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{A}$ со значениями в F будем называть *Гессианом*, если

$$H(xy,z) - H(x,yz) = H(xz,y) - H(x,zy)$$

для всех $x,y,z \in \mathcal{A}$.

Гессиан H и дифференцирование D на $\mathcal{A}$ назовём *ε-согласованными*, если

$$\varepsilon H(x,y) = H(D_x,y) + H(x,D_y)$$

для любых $x,y \in \mathcal{A}$ (при этом согласованные пары $(H,0)$ и $(0,D)$ назовём *тривиальными*). Рассмотрим одномерное расширение $\mathcal{A}$ при помощи $\langle u\rangle$ и *ε-согласованной* пары (H,D), на котором произведение определяется правилами

$$u \cdot u = \varepsilon u,\ u \cdot x = 0,\ x \cdot u = D_x,$$

$$x \cdot y = xy + H(x, y)u$$

для всех $x, y \in \mathcal{A}$. Обозначим полученную алгебру через $\mathcal{A}(H, D)$. Алгебру $\mathcal{A}(H, D)$ будем называть *ε-расширением Мицухары* алгебры $\mathcal{A}$. Как следует из [27], $\mathcal{A}(H, D)$ является правосимметрической алгеброй, если такова исходная алгебра.

Обозначим через $M^{\perp} := \{x \in \mathcal{A} : H(x, m) = 0$ для любого $m \in M\}$ *ортогональное дополнение* к множеству M в алгебре $\mathcal{A}$ относительно Гессиана H алгебры $\mathcal{A}$.

Лемма 14. [27] *Подпространство $I = Fu \oplus J$ является идеалом в $\mathcal{A}(H, D)$ тогда и только тогда, когда J — такой идеал в $\mathcal{A}$, что $D(\mathcal{A}) \subseteq J$. Подпространство J из $\mathcal{A}$ является идеалом в $\mathcal{A}(H, D)$ тогда и только тогда, когда J — такой идеал в $\mathcal{A}$, что $D(J) \subseteq J$ и $J \subseteq \mathcal{A}^{\perp}$.*

Зафиксируем $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Пусть $\mathcal{A}_i(H_i, D_i)$ — ε-расширения Мицухары алгебр $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$. Рассмотрим прямую сумму $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ (как идеалов). Обозначим через $\mathcal{D}$ (соответственно, H) дифференцирование (Гессиан) алгебры $\mathcal{A}$, определённые правилами:

$$\mathcal{D}_{|\mathcal{A}_i} = D_i, \ H_{|\mathcal{A}_i} = H_i, \ H(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0, \ i = 1, 2.$$

Как следует из [27], $(H, \mathcal{D})$ является согласованной парой на $\mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A}(H, D)$ называется прямым *расширением Мицухары* алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *разложимой*, если существуют нетривиальные алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ такие, что $\mathcal{A}$ является прямым расширением Мицухары алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. В противном случае $\mathcal{A}$ называется *неразложимой*. Важность ε-расширения Мицухары объясняет следующее

Предложение 15. [27] *Пусть $\mathcal{A}$ является прямым расширением Мицухары левосимметрических алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Если $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ просты, то и $\mathcal{A}$ является простой левосимметрической алгеброй.*

Алгебру $\mathcal{A}(H, D)$ назовём *почти простой*, если она либо проста, либо любой её собственный идеал не совпадает с $\mathcal{A}$, имеет коразмерность 1 и не содержит элемента u. Предложение 15 было усилено в [25] следующим образом.

Теорема 16. [25] *Пусть $\mathcal{A}_1(H_1, D_1)$ и $\mathcal{A}_2(H_2, D_2)$ — расширения Мицухары алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, и пусть $\mathcal{A}$ — прямое расширение Мицухары алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Алгебра $\mathcal{A}$ является простой тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}_1(H_1, D_1)$ проста, а $\mathcal{A}_2(H_2, D_2)$ почти проста.*

Расширения Мицухары алгебры $M_n(F)$, эндоморфов и алгебр Бурдэ были описаны в работах [28] и [25]. В случае алгебры $M_n(F)$ любая 1-согласованная пара на $M_n(F)$ тривиальна, а вот 0-расширения Мицухары алгебры $M_n(F)$ представляют интерес. Через Tr обозначим классическую функцию следа.

Теорема 17. *Любое* 0*-расширение Мицухары алгебры* $M_n(F)$ *является локальной почти простой алгеброй для любых ненулевых дифференцирования* D *и Гессиана* $H = \alpha\mathrm{Tr}$. *Её единственным собственным идеалом является простая неассоциативная неразложимая левосимметрическая алгебра*

$$M_n(F)_u = \langle A + \mathrm{Tr}(A)u : A \in M_n(F)\rangle.$$

Рассмотрим расширения Мицухары эндоморфов. Выделим некоторые "специфические" (почти тривиальные) алгебры.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное векторное пространство над полем F, $\mathcal{B}$ — подпространство в $\mathcal{A}$ коразмерности 1 и $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B}, a\rangle$ для некоторого $a \in \mathcal{A}$. Возьмём $D \in End(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\alpha \in F$, и определим на $\mathcal{A}$ произведение правилом

$$x \cdot a = \alpha x - xD, \quad x \cdot y = 0$$

для всех $x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{B}$. Обозначим полученную алгебру через $\mathcal{B}_{\alpha,D}$ и назовём *одномерным расширением абелевой алгебры* при помощи дифференцирования.

Пусть $(H, \mathcal{D})$ — нетривиальная 0-согласованная пара на эндоморфе $E(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — алгебра над полем F, $\mathcal{D} = D + [\,\cdot, D] + I_\mu$, $D \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$, $\mu \in \mathcal{A}^*$. Предположим, что существует невырожденный гомоморфизм правых $\mathrm{End}(\mathcal{A})$-модулей $\varphi : \mathcal{A} \mapsto \mathrm{End}(\mathcal{A})$ такой, что $I_\mu^a = Da^\varphi$, $R_a + a^\varphi + \alpha_a D = \gamma\alpha_a E$, $\alpha_a I_\mu^b = \gamma\alpha_a b^\varphi$ для любых $a, b \in \mathcal{A}$ и для некоторого ненулевого $\gamma \in F$, где $\alpha_a = H(a + a^\varphi, 1)$, $\alpha(aD) = 0$ для всех $a \in \mathcal{A}$. В этом случае $\mathcal{A}$ назовём *модульной алгеброй пары* $(H, \mathcal{D})$.

Теорема 18. *Пусть* $(H, \mathcal{D})$ *— нетривиальная* ε*-согласованная пара на эндоморфе* $E(\mathcal{A})$, *где* $\mathcal{A}$ *— алгебра над полем* F, *не являющаяся алгеброй скалярного умножения, одномерным расширением абелевой алгебры при помощи дифференцирования или модульной алгеброй пары* $(H, \mathcal{D})$. *Тогда расширение Мицухары алгебры* $E(\mathcal{A})$ *является почти простой неразложимой алгеброй, которая проста при* $\varepsilon = 1$ *и локальна при* $\varepsilon = 0$ *с единственным собственным идеалом* $I_u = \langle a + H(a, 1)u : a \in E(\mathcal{A})\rangle$ *коразмерности* 1. *При этом* I_u *— это простая неразложимая правосимметрическая алгебра.*

Рассмотрим конструкцию Мицухары для алгебр Бурдэ. В этом случае опять же интерес представляют только 0-расширения Мицухары.

Пусть $T_n(F)$ — ассоциативная алгебра верхнетреугольных матриц. Определим отображение $\tau : M_n(F) \mapsto T_n(F)$ правилом

$$\tau(e_{ij}) = \begin{cases} e_{ij}, & \text{если } i < j, \\ 0, & \text{при } i > j, \\ e_{ii}/2, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Тогда $T_n(F)$ становится левосимметрической алгеброй относительно нового произведения $x \circ y = xy + \tau(xy^\top + yx^\top)$, где $^\top$ означает транспонирование [18]. Алгебра $(T_n(F); \circ)$ не является простой, однако её идеал $I_n :=$

$\langle e_{1i},\ i = 1, \ldots, n\rangle >$ прост. Алгебры I_n называются *алгебрами Бурдэ*. Положим $J_n := \langle e_{12}, \ldots, e_{1n}\rangle$. Легко заметить, что любая алгебра Бурдэ является расширением Мицухары алгебры с нулевым умножением.

Теорема 19. *Любое* 0*-расширение Мицухары алгебры* I_n *является локальной алгеброй для любых ненулевых дифференцирования* D *и Гессиана* H*. Её единственный собственный идеал — это простая неассоциативная левосимметрическая алгебра*

$$I_u = \langle e_{11} + u\rangle \oplus J_n.$$

6 Обобщённая конструкция Мицухары, дубль Витта

В данном параграфе мы рассмотрим обобщение конструкции Мицухары и возникающий при этом простой дубль Витта.

Пусть A, B — левосимметрические алгебры и определены билинейное симметрическое отображение $\circ : A \times A \mapsto B$ $(x \circ y = y \circ x)$ и гомоморфизм алгебр Ли $D : B^{(-)} \mapsto Der(A)$ такие, что

$$D_b(x) \circ y + x \circ D_b(y) = b(x \circ y),$$
$$(xy) \circ z - x \circ (yz) = (yx) \circ z - y \circ (xz)$$

для любых $x, y, z \in A,\ b \in B$. Рассмотрим прямую сумму $A \oplus B$, где B является подалгеброй, а оставшиеся произведения определены правилами

$$b \cdot x = D_b(x), \quad x \cdot b = 0, \quad x \cdot y = xy + x \circ y \tag{1}$$

для всех $x, y \in A,\ b \in B$. Обозначим полученную алгебру через $A \circ_D B$. Справедлива следующая

Теорема 20. *Алгебра* $A \circ_D B$ *является левосимметрической.*

Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная коммутативная алгебра над полем F с ненулевым дифференцированием d. Пусть $\mathcal{B} := \bar{\mathcal{A}}$ — изоморфная копия алгебры $\mathcal{A}$ (как векторного пространства) с классическим левосимметрическим умножением $\bar{x} \star \bar{y} = \overline{xd(y)}$. Пусть φ — естественное вложение $\mathcal{A}$ в $\bar{\mathcal{A}}$: $\varphi(a) = \bar{a}$. Определим отображение $D : \mathcal{B}^{(-)} \mapsto \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ правилом $D(\bar{a}) = ad$ для любого $a \in \mathcal{A}$. Легко проверить, что D — это гомоморфизм алгебр Ли и $\varphi(b \cdot x) = b\varphi(x)$ для любых $x \in A,\ b \in B$, где $b \cdot x := D_b(x)$. Обозначим полученную алгебру $\mathcal{A} \oplus \bar{\mathcal{A}}$ с умножением (1) через $\mathcal{A}_d$ и назовем *дублем Витта* алгебры $\mathcal{A}$. По Теореме 20 $\mathcal{A}_d$ является левосимметрической алгеброй. Более того, данная алгебра оказывается простой, если исходная алгебра $\mathcal{A}$ была унитальной d-простой алгеброй.

Теорема 21. *Пусть* $\mathcal{A}$ *— унитальная ассоциативная коммутативная алгебра над полем* F*. Алгебра* $\mathcal{A}_d$ *является простой тогда и только тогда, когда* $\mathcal{A}$ *является* d*-простой.*

Список литературы

[1] A. Cayley, A Memoir on the Symmetric Functions of the Roots of an Equation, Philosophimathcal Transactions of the Royal Society of London, **147** (1857), 489–496.

[2] J. L. Koszul, Domaines bornes homogenes et orbites de groupes de transformations affines, Bull. Soc. Math. France, **89** (1961), 515–533.

[3] E. B. Vinberg, The theory of convex homogeneous cones, Trans. Moscow Math. Soc. **12**, (1963), 1033–1047.

[4] M. Gerstenhaber, On the deformation of rings and algebras, Ann. Math, (2), **79**, 1 (1964), 59–103.

[5] I. Z. Golubchik, V. V. Sokolov, Generalized operator Yang-Baxter equations, integrable ODEs and nonassociative algebras, J. Nonlinear Math. Phys., **7**, 2 (2000), 184–197.

[6] J. Milnor, On fundamental groups of complete affinely flat manifolds, Adv. Math., **25** (1977), 178–187.

[7] D. Segal, The structure of complete left-symmetric algebras, Math. Ann., **293** (1992), 569–578.

[8] V. Y. Gubarev, P. S. Kolesnikov, Operads of decorated trees and their duals, Comment. Math. Univ. Carolinae, **55**, 4 (2014), 421–445.

[9] E. Kleinfeld, Assosymmetric rings, Proc. Amer. Math. Soc., **8** (1957), 983–986.

[10] I. M. Gel'fand, I. Ya. Dorfman, Hamiltonian operators and algebraic structures related to them, Functional Analysis and Its Applications, **13**, 4 (1979), 13–30 (Russian).

[11] A. A. Balinskii, S. P. Novikov, Poisson brackets of hydrodynamic type, Frobenius algebras and Lie algebras, Doklady Akademii Nauk SSSR **283**, 5 (1985), 1036–1039 (Russian).

[12] E. Zelmanov, On a class of local translation invariant Lie algebras, Soviet Math. Dokl., **35** (1987), 216–218 (Russian).

[13] V. T. Filippov, A class of simple nonassociative algebras, Math. Notes, **45**, 1 (1989), 68–71 (Russian).

[14] J. M. Osborn, Novikov algebras, Nova J. Algebra Geom., **1** (1992), 1–14.

[15] J. M. Osborn, Simple Novikov algebras with an idempotent, Comm. Algebra, **20** (1992), 2729–2753.

[16] X. Xu, Classification of simple Novikov algebras and their irreducible modules of characteristic 0, J. Algebra, **246** (2001), 673–707.

[17] A. P. Pozhidaev, I. P. Shestakov, On the right-symmetric algebras with a unital matrix subalgebra, Sib. Mat. Zh., **62**, 1 (2021), 173–184; translation in Sib. Math. J., **62**, 1 (2021), 138–147.

[18] D. Burde, Simple left-symmetric algebras with solvable Lie algebra, Manuscr. Math., **95**, 3 (1998), 397–411.

[19] D. Burde, Left-symmetric structures on simple modular Lie algebras, J. Algebra, **169**, 1 (1994), 112–138.

[20] L. Auslander, Simply transitive groups of affine motions, Am. J. Math., **99**, (1977), 809–826.

[21] A. A. Albert, Almost alternative algebras, Portugal. Math., **8** (1949), 23–36.

[22] L. A. Kokoris, On rings of (γ, δ)-type, Proc. Amer. Math. Soc., **9**, 6 (1958), 897–904.

[23] A. P. Pozhidaev, I. P. Shestakov, Simple right-symmetric $(1, 1)$-superalgebras, Algebra i Logika, **60**, 2 (2021), 166–175; translation in Algebra and Logic, **60**, 2 (2021), 108–114.

[24] A. P. Pozhidaev, On endomorphs of right-symmetric algebras, Sib. Mat. Zh., **61**, 5 (2020), 1077–1086; translation in Sib. Math. J., **61**, 5 (2020), 859–866.

[25] A. P. Pozhidaev, On Mizuhara's construction for the endomorphs, submitted to SEMR (Russian).

[26] A. Pozhidaev, U. Umirbaev, V. Zhelyabin, On simple left-symmetric algebras, J. Algebra, **621** (2023), 58–86.

[27] A. Mizuhara, On simple left symmetric algebras over a solvable Lie algebra, Sci. Math. Jpn., **57**, 2 (2003), 325–337.

[28] A. P. Pozhidaev, On Mizuhara's construction for pre-Lie algebras, to be submitted to Sib. Math. J. (Russian).

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВА ПЛАНАРНОСТИ ГРАФОВ КЭЛИ ОТНОСИТЕЛЬНО СВОБОДНЫХ ПОЛУГРУПП

Д. В. Соломатин

Омский голударственный педагогический университет,
наб. Тухачевского, 14, Омск, 644099, Россия

e-mail: solomatin_dv@omgpu.ru

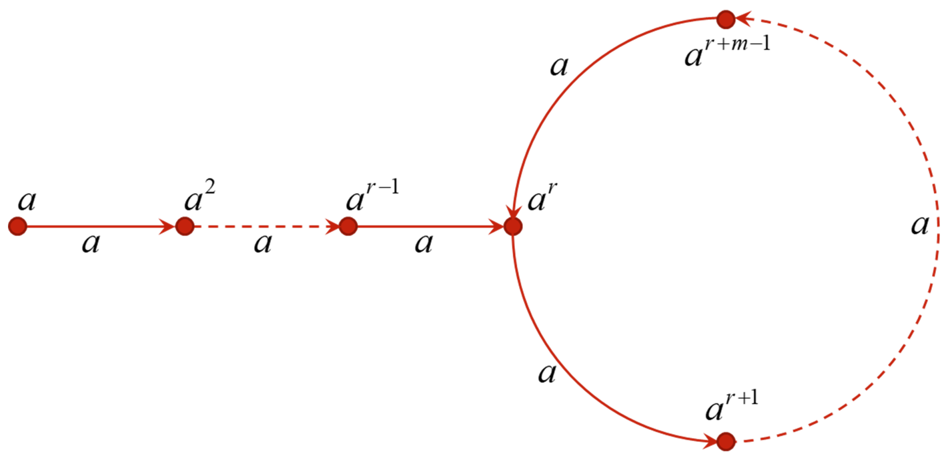
1 Введение

Задача планаризации, доступная для понимания школьниками в тщетных попытках соединить три дома и три колодца коммуникациями без пересечения линий или пять островов всевозможными не пересекающимися мостами, находит применение в самых неожиданных сферах, от проектирования печатных плат, до разработки и проектирования алгоритмов запутывания программ, или анализа графов потока управления. На программы, в частности, можно смотреть как на ассоциативные множества, элементами которых являются процедуры и функции. Если рассмотреть множество всевозможных процедур относительно операции их объединения и последовательного выполнения в теле объединенной процедуры, то рассматриваемое множество обладает структурой полугруппы, так как выбранная операция ассоциативная, бинарная, алгебраическая. Перечисление планарных графов Кэли полугрупп при таком подходе граничит с известной задачей приведения графа потока управления к плоскому виду. Также графы естественным образом возникают при визуализации абстрактных алгебраических структур.

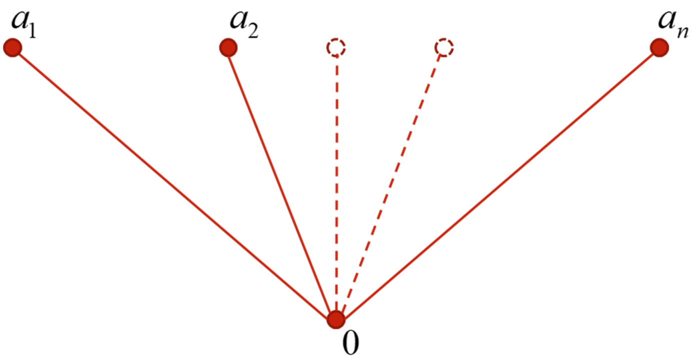
Изучение планарных графов традиционно относят к вопросам топологии, которые представляют определённых интерес и с инженерной точки зрения, но рассматриваемый нами алгебраический подход значительно шире. Описание допускающих плоские графы Кэли конечных групп известно давно, их исследования не прекращаются и продолжаются многими учеными, в том числе зарубежными авторами. Первое упоминание используемого нами определения конструкции графов Кэли для полугрупп относительно множества образующих её элементов, как ориентированного мультиграфа с помеченными или раскрашенными дугами опубликовано в трудах второй пражской конференции по топологии 1966 года. При этом, исследования полугрупп методами теории графов проводилось и ранее, а в дальнейшем широкое развитие и обобщение тех идей с приложением к теории графов было отражено в систематических работах под руководством профессора Бадана Зелинка. Хорошо известно, что можно фиксировать свойства графов получая тем самым описание связанных с ними алгебраических структур и наоборот, фиксируя алгебраические свойства получать уникальные серии графов, наглядно отражающих внутреннюю природу некоторой алгебраической структуры. Напомним краткие определения основных понятий.

Определение 1. *Графом Кэли полугруппы* называется граф, множество вершин которого формируют элементы полугруппы, а вершина a соединены с вершиной b ребром помеченным элементом x, если и только если во множестве образующих этой полугруппы обнаруживается такое x, что $ax = b$.

Для конечной циклической полугруппы $C_{r,m} = \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle$, при любом $r \geq 1$ и $m \geq 1$, этот граф представлен на следующем рисунке.

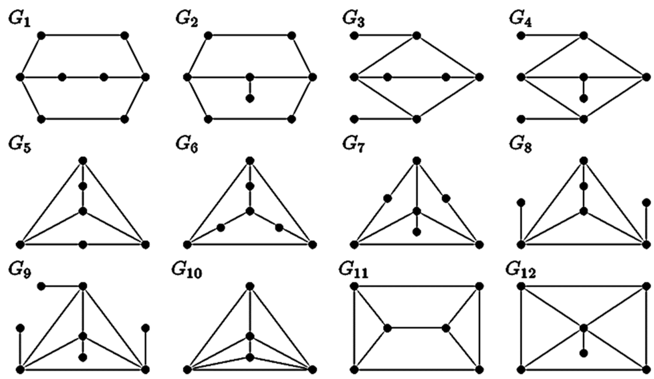


Ясно, что пометки рёбер, их направление, кратность дуги или петли не оказывают влияние на возможность плоской укладки анализируемого графа, поэтому их можно упускать при переходе к основе графа Кэли. Это особенно заметно на примере графа Кэли полугруппы с нулевым умножением $Z_n = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \mid \{xy = zt \mid x, y, z, t \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\}\rangle$, при $n \geq 1$. Когда рассматриваем её основу, картина существенно упрощается до получения графа, изображенного ниже.



Что характерно, почти нет плоских графов. В том смысле, что предел отношения количества плоских графов к общему числу графов на n вершинах равен нулю, при n стремящемся к бесконечности. Тем интереснее отыскивать полугруппы, графы Кэли которых планарны. Причем это условие можно видоизменять. Так, увеличивая допустимое число скрещиваний получаются графы с одним скрещиванием — тороидальные, графы с двумя скрещиваниями, с χ скрещиваниями и так далее. А если внимательно посмотреть на плоские графы, то можно охватить все планарные (как изоморфные плоским), на языке запрещенных конфигураций они характеризуются отсутствием подграфов, гомеоморфных полному графу пятого порядка или полному двудольному графу содержащему по три вершины в каждой из долей, кратко обозначают эти графы как K_5 и $K_{3,3}$ соответственно. Внутри множества планарных графов выделяются деревья. На языке запрещенных конфигураций это графы, не содержание подграфов гомеоморфных графу K_3, то есть полному графу третьего порядка. Таким образом сформируются ациклические графы. Промежуточное звено между деревьями и планарными графами занимают внешнепланарные, согласно определению это такие графы, всякое ребро которых своими вершинами принадлежит одной и той же внешней грани. На языке запрещенных конфигураций эти графы не содержат подграфы гомеоморфные графам K_4 или $K_{2,3}$. Чуть шире чем класс внешнепланарных внутри класса планарных располагаются обобщенные внещнепланарные, когда от каждого ребра требуется принадлежность внешней грани хотя бы одним своим концом. На языке запрещенных миноров это графы, не содержащие подграфов гомеоморфных одному из представленных ниже двенадцати графов Седлачека.

Если пытаться расширить класс планарных, то там нас ожидают незацепленное вложение графа, на языке запрещенных конфигураций это графы, не содержание подграфов петерсенова семейства. Далее пойдут уже упомянутые выше тороидальные графы, для которых запрещенных миноров более 16 000.



Полугруппы графы Кэли которых принадлежат какому-либо из вышеперечисленных классов нами изучались долгое время и возникал естественный вопрос о систематизации разрозненных примеров таких полугрупп.

2 Обобщение и конкретизация графов Кэли полугрупп

Стоит вспомнить, что методов научного познания не так много. С одной стороны, есть конкретизация, предполагающая дальнейшее увеличение числа примеров, но она сопряжена с риском появления ошибок. С другой стороны, можно предложить обобщение. В случае полугрупп это означает переход к тождествам. Привычны тождества коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности. Можно из функционального анализа вспомнить тождество Лейбница, и узрить его аналоги в геометрии и в ассоциативной алгебре. С точки зрения абстрактной алгебры это всё одно и то же тождество. Как известно, тождествами можно задавать классы полугрупп, так называемые полугрупповые многообразия, для которых понятие ранга планарности предложил изучать Л. М. Мартынов, анонсировав соответствующую проблематику на юбилейном заседании Омского Алгебраического Семинара. Суть определения ранга планарности из [1] представляет наибольшее число образующих, относительно которых свободная полугруппа данного многообразия допускает планарный граф Кэли. Так как свободные полугруппы в многообразиях играют важную роль, хотя бы потому, что любая полугруппа многообразия является гомоморфным образом подходящей свободной в нём полугруппы, то изучение этого понятия видится весьма актуальной задачей. При изучении свойства планарности графов Кэли для многообразия полугрупп принципиальный характер поэтому имеет проблема описания рангов планарности многообразий полугрупп, сформулированная Л. М. Мартыновым.

Прежде чем перейти к ключевым результатам о рангах планарности многообразий полугрупп, приведём некоторые примеры, связанные со свойством планарности графов Кэли полгурупп. Так, например, в классе коммутативных моноидов при выборе двух образующих, один из которых единица полугруппы, граф Кэли планарен. При изменении определяющего соотношения по прежнему видна возможность плоской укладки графа Кэли, вплоть до трех образующих, при некоторых ограничениях на период m. Также известен аналогичный конкретный пример в более широком классе коммутативных полугрупп. Оказывается, что относительно четырех образующих граф Кэли свободной полугруппы данной серии многообразий уже не будет планарным, так как содержит подграф, основа которого гомеоморфна графу K_5. В общем случае анализ похожих конфигураций приводит к тому, что ранг планарности многообразий всех полугрупп идемпотентов оказывается равен трём, а ранг планарности многообразия нильполугрупп $N_w = \mathrm{var}\{xw = w, wx = w\}$, при любом слове w, не содержащем переменную x, оказывается бесконечным. Далее, ранг планарности любого перестановочного многообразия полугрупп оказывается равен 1 или 2. Продемонстрируем с какими вычислительными сложностями можно столкнуться при анализе свободных полугрупп многообразия идемпотентов даже от небольшого числа образующих. При выборе одного образующего свободная полугруппа одноэлементна; для двух образующих в ней уже 6 элементов; для трех образующих 159 элементов; для четырех 332 380, счет идет на сотни тысяч; для пяти — 2 751 884 514 765, уже выскальзывает за пределы разрядной сетки. В то же время, можно отметить, что плоская укладка графа Кэли свободной полугруппы многообразия идемпотентов с тремя образующими существует. При этом для четырех образующих свободной полугруппы многообразия идемпотентов в основе её графа Кэли обнаруживается подграф, гомеоморфный графу $K_{3,3}$, поэтому он не является планарным. Таким образом, ранг планарности этого многообразия оказался равен 3.

На сегодняшний день доказано существование полугрупповых многообразий как бесконечного, так и любого наперёд заданного конечного ранга планарности. Причём среди многообразий бесконечного ранга планарности особую роль играют тотально-планарные многообразия полугрупп, всякая полугруппа которых допускает планарный граф Кэли. Таких многообразий лишь три, а именно: это многообразие полгрупупп с нулевым умножением, в основе графа Кэли каждой полугруппы которого лежит звезда; во-вторых, это многообразие полугрупп правых нулей, в основе графа Кэли которых находится груда; и наконец многообразие полугрупп, задаваемое тождеством $xy = xz$, основа графа Кэли которых представляет собой паросочетание. Возникает естественный вопрос: каким образом охарактеризовать многообразия бесконечного ранга планарности, как их отличить от многообразий конечного ранга планарности? Один из подходов к отысканию ответа на этот вопрос предполагает использование инварианта Колен де Вердьера. А именно, ранг планарности многообразия V оказывается бесконечным тогда и только тогда, когда предельное значение инварианта Колен де Вердьера для основы графа

Кэли свободной полугруппы на n образующих для многообразия V не превышает 3, при n стремящемся к бесконечности. Напомним, этот инвариант определяется следующим образом.

Определение 2. Пусть G — это обыкновенный неориентированный граф, без ограничения общности построенный на n вершинах. Тогда *инвариант Колен де Вердьера* — это наибольший коранг такой квадратной матрицы M порядка n с действительными коэффициентами $(M_{i,j})$, что для всех i, j, при $i \neq j$, элемент i-й строки j-го столбца отрицателен, когда индексы i и j соответствуют смежным вершинам, а в противном случае на пересечении i-й строки j-го столбца этой матрицы стоит 0. Во-вторых, эта матрица M имеет ровно одно отрицательное собственное значение кратности 1 и не существует ненулевой матрицы X такой, что $MX = 0$ и такой, что на пересечении i-й строки j-го столбца располагаются нули, когда $i = j$ или $M_{i,j} \neq 0$, то есть вершины i и j оказываются смежными в графе G.

Не стоит пугаться столь замысловатого определения: вычисление этого инварианта сводится к нахождению коранга матрицы, похожей на матрицу смежности графа, а коранг — это размер матрицы минус её ранг. Таким образом, для максимизации коранга достаточно минимизировать ранг соответствующей матрицы, что достигается диагональными элементами. Приведём пару простых примеров.

Пример 3. В многообразии полугрупп правых нулей предельное значение инварианта оказывается бесконечным. Действительно, основу графа Кэли свободной полугруппы с n образующими данного многообразия формирует полный граф n-го порядка, инвариант Колен де Вердьера для которого равен $n - 1$. Следовательно, ранг планарности многообразия полугрупп правых нулей конечен.

Пример 4. Для многообразия полугрупп с нулевым умножением предельное значение инварианта основы графа Кэли свободной полугруппы с n образующими данного многообразия равно 2. Так как основу графа Кэли свободной полугруппы n-го порядка из этого многообразия формирует звезда, значение инварианта которой равно 2 для любого $n > 3$. Следовательно, ранг планарности данного многообразия бесконечен.

Ниже приведём пример несколько неожиданного применения изложенного результата. Как упоминалось ранее, ранг планарности случайно выбранного многообразия полугрупп либо бесконечен, либо может быть любым натуральным числом. И решающее значение при доказательстве этого утверждения имеют многообразия полугрупп $\mathrm{Nil}_2 P_n^{(1;2)} = \{x^2 = 0, xyx = 0, x_1x_2x_3x_4...x_n = x_2x_1x_3x_4...x_n\}$, ранг планарности которых при каждом $n > 3$ оказывается равен $n - 1$. Плоская укладка основы графа Кэли $(n - 1)$-порожденной полугруппы этого многообразия получается следующим образом. Отправной точкой берется лес, как для всякого 0-приведенного многообразия. В силу внешнепланарности леса, как дизъюнктного объединения деревьев, можно добавить к нему изолированную вершину 0 и все остальные вершины леса соединить ребром с 0 так, чтобы планарность сохранилась. Теперь рассмотрим свободную n-порожденную полугруппу нашего многообразия. При достаточном количестве образующих начинает работу последнее его тождество, которое в случае $(n-1)$-порожденной полугруппы вырождалось, поскольку в любой $(n-1)$-порожденной полугруппе этого многообразия слово длины n равно 0. В результате образуется достаточно склеек слов длины n свободной n-порожденной полугруппы данного многообразия, при $n > 3$ приводящих к появлению в основе графа Кэли этой полугруппы относительно n-элементного множества образующих подграфа, гомеоморфного полному двудольному графу $K_{3,3}$. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Пример 5. Ранг планарности многообразия $\mathrm{Nil}_2P_n^{(1;2)}$ равен $n-1$, а предельное значение инварианта Колен де Вердьера при n, стремящемся к бесконечности, для основы графа Кэли свободной n-порожденной полугруппы этого многообразия больше 3.

Комбинируя свойство элементов нильполугрупп данного конечного нильиндекса 2 со свойством перестановочности некоторых элементов можно получить много других примеров многообразий полугрупп наперёд заданного ранга планарности. А именно, для любого натурального числа $n > 3$ оказываются справедливы следующие утверждения. Во-первых, ранг планарности многообразия с перестановкой $(n-1)$-го и n-го элементов в тождестве системы тождеств многообразия заданного системой из трёх тождеств $x^2 = xyx = 0$ и перестановочным тождеством, позволяющим переставлять в произведении из n элементов последние два, равен n. Во-вторых, ранг планарности многообразия $\mathrm{Nil}_2P_n^{(i;j)}$ с перестановкой i-го и j-го элементов, заданного системой трёх тождеств $x^2 = xyx = 0$ и перестановочным тождеством, переставляющим пару элементов с не последним, равен $n-1$. Также, оказывается, равен $n-1$ ранг планарности многообразия $\mathrm{Nil}_2P_n^{(i;j)}$ полугрупп, заданного системой трёх тождеств $x^2 = xyx = 0$ и перестановочным тождеством, позволяющим переставлять не последний элемент. В-четвёрных, оказывается, равен $n-1$ ранг планарности многообразия $\mathrm{Nil}_2P_n^{S_{n-1}}$ полугрупп, удовлетворяющих следующему набору тождеств: $x^2 = xyx = 0$ и системе перестановочных тождеств, заканчивающихся на один и тот же элемент x_n, а предшествующие $n-1$ элемент переставляются с помощью подстановки из симметрической группы подстановок на $(n-1)$-элементном множестве. И в-пятых, также, оказывается, равен $n-1$ ранг планарности многообразия полугрупп, заданного системой тождеств $x^2 = xyx = 0$, дополненной всеми возможными тождествами, переставляющими все n элементов перестановочного тождества всевозможными $n!$ способами.

3 К проблеме спектров рангов планарности многообразий полугрупп

И в заключение изложим актуальную на наш взгляд задачу с новых сторон. Определённый интерес представляет вопрос о том, какие наборы натуральных чисел и символа ∞ могут быть рангами планарности нетривиальных подмногообразий произвольного многообразия полугрупп. Профессор Л. М. Мартынов предлагал называть этот вопрос “Проблема спектров рангов планарности многообразий полугрупп”.

Условимся в дальнейшем обозначать спектр рангов планарности многообразия V следующим образом: $\mathrm{Spec}_{r\pi}(V)$; а $\mathbb{N}^{\infty} = \{1, 2, 3, \ldots, \infty\}$. По определению спектр рангов планарности полугруппового многообразия V называется полным, если он содержит все натуральные числа и символ ∞. Чем же тогда характеризуется множество всех многообразий полугрупп, имеющих полный спектр рангов планарности? Например, ввиду того факта, что примеры, обеспечивающие ранги планарности, равные 1 и 2, описаны, спектр рангов планарности многообразий всех нильполугрупп данного конечного ниль-индекса $k > 4$ будет полным. В случае многообразий всех нильпотентных полугрупп данной ступени нильпотентности l легко видеть, что спектр рангов планарности многообразий всех нильпотентных полугрупп ступени 2 исчерпывается лишь бесконечностью, так как это многообразие является планарным и является атомом решетки многообразий полугрупп. Аналогично можно удостовериться в том, что спектр рангов планарности многообразия полугрупп левых нулей исчерпывается бесконечностью, а спектр рангов планарности многообразия полугрупп правых нулей состоит только из 4, спектр рангов планарности многообразия абелевых групп экспоненты 2 состоит из числа 3, а спектр рангов планарности абелевых групп экспоненты $p > 2$ состоит только из 1. Кроме того, спектр рангов планарности многообразия всех нильпотентных полугрупп ступени нильпотентности 3 состоит из 3 и ∞, так как единственным не 0-приведенным подмногообразием многообразия всех нильпотентных полугрупп ступени 3 будет многообразие всех коммутативных нильпотентных полугрупп ступени 3, для которого ранг планарности равен 3; а 0-приведенные подмногообразия имеют бесконечный ранг планарности. Напомним, что разнообразие ситуации с рангами демонстрирует наша теорема о том, что ранги планарности многообразия коммутативных полугрупп могут быть $\{1, 2, 3, \infty\}$, другими словами, спектр рангов планарности многообразия коммутативных полугрупп четырехэлементен. А принимая во внимание существование многообразия полугрупп любого наперёд заданного ранга планарности можно утверждать, что спектр рангов планарности многообразия всех полугрупп является полным, то есть $\mathrm{Spec}_{r\pi}(\mathrm{var}\{\}) = \mathbb{N}^{\infty}$.

Список литературы

[1] New Problems of Algebra and Logic, Omsk Algebraic Seminar. См.: `http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=12900`.

О ПСЕВДОКОНЕЧНЫХ ПОЛИГОНАХ НАД КОНЕЧНЫМИ МОНОИДАМИ

А. А. Степанова, Е. Л. Ефремов, С. Г. Чеканов*

Дальневосточный федеральный университет
о. Русский, п. Аякс, 10, г. Владивосток, 690922, РФ

e-mail: stepltd@mail.ru, efremov-el@mail.ru, chekanov.sg@dvfu.ru

Введение

Теория моделей псевдоконечных структур — активно развивающаяся в последнее время область математики (см. [1]–[4]). Это направление исследований благодаря теореме Лося тесно связано с теорией конечных моделей. Структура $\mathfrak{M}$ языка L псевдоконечна, если любое предложение языка L, истинное в $\mathfrak{M}$, истинно в некоторой конечной структуре языка L. Известно, что любое поле имеет бесконечное псевдоконечное расширение, любое векторное пространство над любым полем является псевдоконечным. Работы ряда авторов посвящены описанию псевдоконечных моделей классических теорий: в [5] описаны псевдоконечные поля; в [6] дана характеризация простых псевдоконечных групп; в [7] изучено строение псевдоконечных ациклических графов; в [8] рассмотрены псевдоконечные модели теории отношения эквивалентности.

Данная статья посвящена псевдоконечным полигонам над конечными моноидами. Приводится пример конечного моноида, над которым существует как псевдоконечный полигон, так и не псевдоконечный. Доказывается, что любой полигон над конечный группой псевдоконечен.

1 Предварительные сведения

Алгебраическая система $\langle A; s\rangle_{s\in S}$ сигнатуры $L_S = \{s \mid s \in S\}$ называется *(левым) S–полигоном* (или *полигоном над S*, или *полигоном*), если $s_1(s_2a) = (s_1s_2)a$ и $1a = a$ для любых $s_1, s_2 \in S$, $a \in A$. Полигон $\langle A; s\rangle_{s\in S}$ будем обозначать через ${}_SA$. Все рассматриваемые в работе полигоны, если не

*Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2022-880 от 31.01.2022 года по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

оговаривается противное, являются левыми S–полигонами. Копроизведением полигонов ${}_SA_i$ $(i \in I)$ называется их дизъюнктное объединение и обозначается $\coprod_{i\in I} {}_SA_i$.

Алгебраическая система $\mathfrak{M}$ сигнатуры L *псевдоконечна*, если любое предложение сигнатуры L, истинное в $\mathfrak{M}$, истинно в некоторой конечной алгебраической системе языка L.

Лемма 1. [4] *Алгебраическая система $\mathfrak{M}$ сигнатуры L псевдоконечна тогда и только тогда, когда она элементарно эквивалентн ультрапроизведению конечных алгебраических систем сигнатуры L.*

Лемма 2. [9] *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — алгебраические системы сигнатуры L. Для того, чтобы алгебраические системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ были элементарно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы для любого $n \in \omega$ и любой конечной сигнатуры $L_1 \subseteq L$ существовали непустые множества $F_1(L_1, n), \ldots, F_n(L_1, n)$ конечных частичных изоморфизмов $\mathfrak{A}|L_1$ в $\mathfrak{B}|L_1$ со следующим свойством:*

если $f \in F_i(L_1, n)$, $1 \leqslant i < n$, то для любых $a \in A$, $b \in B$ существуют $g_1, g_2 \in F_{i+1}(L_1, n)$, для которых $a \in domg_1$, $b \in rangg_2$, $f \subseteq g_1$ и $f \subseteq g_2$.

Лемма 3. [9] *Пусть D — фильтр на множестве I. Тогда D является ультрафильтром в том и только том случае, когда для любого $K \subseteq I$ либо $K \in I$, либо $I \setminus K \in I$.*

Если ${}_SA$ — полигон, то запись $\bar{a} \in A$, где $\bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, означает, что $a_1, \ldots, a_n \in A$. Если $\bar{u} = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$, то через $l(\bar{u})$ будем обозначать длину кортежа $\bar{u}$ и запись $v \in \bar{u}$ означает, что v — элемент кортежа $\bar{u}$.

2 Примеры псевдоконечных полигонов над конечными моноидами

Рассмотрим несколько примеров полигонов над конечными моноидами. Пример 4 показывает, что условие конечности любого циклического подполигона полигона не является достаточным для псевдоконечности полигона.

Пример 4. Пусть $(S; \cdot)$ — моноид, где $S = \{1, s, t, r\}$, 1 — единица S, $u \cdot v = r$ для любых $u, v \in S \setminus \{1\}$, ${}_SS_i$ — копии полигона ${}_SS$, u_i — копии элементов $u \in S$ в полигоне ${}_SS_i$ $(i \in \omega)$, ${}_SA = \bigcup_{i\in\omega} {}_SS_i/\Theta$, где Θ — конгруэнция полигона $\bigcup_{i\in\omega} {}_SS_i$, порожденная множеством $\{(s_i, t_{i+1}) \mid i \in \omega\}$. Тогда полигон ${}_SA$ не псевдоконечен.

Доказательство. Пусть моноид S и полигон ${}_SA$ определены указанным в Примере 4 образом. Введем обозначения:

$$\Phi_1 \leftrightharpoons \forall x(sx \neq tx \to \exists! y(sx = ty \wedge ty \neq sy)),$$

$$\Phi_2 \leftrightharpoons \exists x(sx \neq tx \wedge \neg\exists y(tx = sy)),$$

$$\Phi_3 \leftrightharpoons \forall xy(sx = sy \wedge sx \neq tx \rightarrow x = y),$$

$$\Phi \leftrightharpoons \Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \Phi_3.$$

Из построения полигона ${}_SA$ следует, что ${}_SA \vDash \Phi$.

Покажем, что формула Φ ложна в любом конечном полигоне над моноидом S. Предположим, что ${}_SB \vDash \Phi$ для некоторого полигона. Покажем, что ${}_SB$ — бесконечный полигон. Пусть $F = \{b \in B \mid sb \neq tb\}$. Если $b \in F$ и $sb = b$, то $tb = tsb = rb = s^2b = sb$, противоречие. Следовательно, $sb \neq b$ для любого $b \in F$. Аналогично, $tb \neq b$ для любого $b \in F$. Если $rb = b$, то $sb = s(rb) = (sr)b = (tr)b = t(rb) = tb$, противоречие, т.е. $rb \neq b$ для любого $b \in F$. Так как ${}_SB \vDash \Phi_2$, существует $b_0 \in F$ такой, что $tb_0 \neq sb$ для любого $b \in B$. Предположим, что построены элементы $b_0, \ldots, b_k \in F$ такие, что $sb_i = tb_{i-1}$, $(0 \leqslant i < k)$ и $sb_i \notin \bigcup_{0<j\leqslant i-1} Sb_j$ $(0 \leqslant i \leqslant k)$. Покажем, что существует $b_{k+1} \in F$, для которого выполняются соотношения: $tb_{k+1} = sb_k$ и $sb_{k+1} \notin \bigcup_{0\leq j\leq k} Sb_j$. Так как ${}_SB \vDash \Phi_1$, то существует единственный $b \in F$ такой, что $tb = sb_k$. Полагаем $b_{k+1} = b$. Покажем, что $sb_{k+1} \notin \bigcup_{0\leq j\leq k} Sb_j$. Предположим, что $sb_{k+1} \in Sb_i$ для некоторого i, $0 \leq i \leq k$. Возможны несколько случаев.

1) $sb_{k+1} = b_i$. Тогда $sb_i = s^2b_{k+1} = tsb_{k+1} = tb_i$, т.е. $b_i \notin F$, противоречие.

2) $sb_{k+1} = sb_i$. Так как ${}_SB \vDash \Phi_3$, $b_{k+1} = b_i$. Из $tb_{k+1} = sb_k$ следует, что $tb_i = sb_k$. В силу $b_i \in F$ получим, что $b_i \neq b_k$ и $i < k$, при этом $sb_k \in Sb_i$, противоречие.

3) $sb_{k+1} = rb_i$. Тогда $sb_{k+1} = ssb_i = stb_i$. Так как ${}_SB \vDash \Phi_3$, то $b_{k+1} = sb_i = tb_i$, т.е. $b_i \notin F$, противоречие.

4) $sb_{k+1} = tb_i$. По выбору элемента b_0 имеем $sb_i \neq tb_0$, т.е. $i > 0$. Тогда $sb_{i-1} = tb_i = sb_{k+1}$. Поскольку ${}_SB \vDash \Phi_3$, имеем $b_{i-1} = b_{k+1}$. Отсюда, также как в случае 2, доказывается, что $i - 1 < k$ и $sb_k \in Sb_{i-1}$. Противоречие.

Таким образом, доказано, что ${}_SB$ — бесконечный полигон. □

Следующий пример является примером псевдоконечного полигона над конечным моноидом, все циклические подполигоны которого конечны.

Пример 5. Пусть $(S; \cdot)$ — моноид из Примера 4, ${}_SS_i$ — копии полигона ${}_SS$, u_i — копии элементов $u \in S$ в полигоне ${}_SS_i$ ($i \in Z$, Z — множество целых чисел), ${}_SA = \bigcup_{i\in Z} {}_SS_i/\Theta$, где Θ — конгруэнция полигона $\bigcup_{i\in Z} {}_SS_i$, порожденная множеством $\{(s_i, t_{i+1}) \mid i \in Z\}$. Тогда полигон ${}_SA$ псевдоконечен.

Доказательство. Пусть моноид S и полигон ${}_SA$ определены указанным в Примере 5 образом. Введем обозначения: $\Psi_1 \leftrightharpoons \Phi_1$, $\Psi_2 \leftrightharpoons \Phi_3$, где Φ_1 и Φ_3 — формулы из примера 4,

$$\Psi_3 \leftrightharpoons \forall x(sx \neq tx \rightarrow \exists! y(sx = ty \wedge sy \neq ty)),$$

$$\Psi_4 \leftrightharpoons \forall xy(tx = ty \wedge sx \neq tx \rightarrow x = y),$$

$$\Psi \leftrightharpoons \Psi_1 \wedge \Psi_2 \wedge \Psi_3 \wedge \Psi_4$$

Из построения полигона ${}_SA$ следует, что ${}_SA \models \Psi$. Определим полигоны ${}_SB_n$ $(n \in \omega)$ следующим образом: ${}_SB_n = \bigcup_{0\leq i\leqslant n} {}_SS_i/\eta_n$, где η_n — конгруэнция полигона $\bigcup_{0\leqslant i\leqslant n} {}_SS_i$, порожденная множеством $\{(s_j, t_{j+1}) \mid 0 \leqslant j < n\} \cup \{(s_n, t_0)\}$. Заметим, что ${}_SB_n \models \Psi$. Пусть ${}_SB = \prod_{n\in\omega} {}_SB_n/D$ — ультрапроизведение полигонов ${}_SB_n$, $n \in \omega$, D — ультрафильтр на ω, содержащий фильтр Фреше. По теореме Лося ${}_SB \models \Psi$, все максимальные по включению циклические подполигоны полигона ${}_SB$ изоморфны ${}_SS$ и в ${}_SB$ нет конечных компонент связности. Следовательно, полигон ${}_SB$ изоморфен копроизведению полигонов ${}_SA$ и ${}_SB \equiv {}_SA$. По Лемме 1 полигон ${}_SA$ псевдоконечен. □

Пусть G — группа, $e \in G$ — единица группы G, H — подгруппа группы G. Через ${}_GG/H$ обозначим полигон ${}_G\{gH \mid g \in G\}$, где операция определена следующим образом: $g(a/H) = (ga)/H$. Любой связный полигон над группой G имеет вид ${}_GG/H$ для некоторой подгруппы H группы G и, следовательно, связный полигон над группой не имеет собственных подполигонов.

Теорема 6. *Любой полигон над конечной группой псевдоконечен.*

Доказательство. Пусть G — конечная группа, ${}_GA$ — полигон. Так как группа G конечна, то существует конечное число типов изоморфизмов связных полигонов над G: ${}_GG/H_1, \dots, {}_GG/H_n$, где H_i — подгруппы G. Тогда

$${}_GA = \coprod_{1\leq i\leq\alpha_1} {}_G(G/H_1)^i \sqcup \ldots \sqcup \coprod_{1\leqslant i\leqslant\alpha_n} {}_G(G/H_n)^i,$$

где ${}_G(G/H_j)^i$ — копии полигона ${}_G(G/H_j)$, α_j — ординалы $(1 \leqslant j \leqslant \alpha_j)$. Через Γ_1 обозначим множество формул Ψ_j^k $(1 \leqslant j \leqslant \alpha_j)$, истинных на ${}_GA$ тогда и только тогда, когда в ${}_GA$ есть k косомножителей вида ${}_G(G/H_j)$, через Γ_2 — множество формул Θ_j^k $(1 \leqslant j \leqslant \alpha_j)$, истинных на ${}_GA$ тогда и только тогда, когда в ${}_GA$ нет k косомножителей вида ${}_G(G/H_j)$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Ясно, что Γ — множество аксиом для полигона ${}_GA$. Поэтому для любого предложения Φ, истинного в ${}_GA$, найдется конечное подмножество $\Gamma' \subseteq \Gamma$ такое, что $\Gamma' \vdash \Phi$. Поскольку любое конечное подмножество Γ имеет конечную модель, то предложение Φ также имеет конечную модель. Следовательно, ${}_GA$ — псевдоконечный полигон. □

Список литературы

[1] D. Garca, D. Macpherson, C. Steinhorn, Pseudofinite structures and simplicity, J. Math. Log, **15**, (2015), 41 p.

[2] Z. Chatzidakis, Notes on the model theory of finite and pseudo-finite fields, http://www.logique.jussieu.fr/ zoe/papiers/Helsinki.pdf.

[3] A. Pillay. Strongly minimal pseudofinite structures, http://arxiv.org/abs/1411.5008, 2014.

[4] J. Väänänen, Pseudo-finite model theory, Matemática Contemporânea, **24** (2003), 169–183.

[5] J. Ax, The elementary theory of finite fields, Ann. Math., **88** (1968), 239-–271.

[6] J. S. Wilson, On pseudofinite simple groups, J. Lond. Math. Soc. (2), **51** (1995), 471–490.

[7] N. D. Markhabatov, "Approximations of Acyclic Graphs", Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **40** (2022), 104–111.

[8] N. D. Markhabatov, Approximations of the theories of structures with one equivalence relation, Herald of the Kazakh-British technical university, **20(2)** (2023), 67–72. https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-2-67-72

[9] Yu. L. Ershov and E. A. Palyutin, Mathematical logic, M. : Nauka. 1987. (Russian)

CONDITIONAL CHARACTERISTICS OF RIGIDITY

S. V. Sudoplatov*

Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State Technical University,
20, K.Marx avenue, Novosibirsk, 630073, Russia;
Novosibirsk State University,
1, Pirogova street, Novosibirsk, 630090, Russia

e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

We continue to study variations of rigidity [1, 2] applying them for Δ-restrictions, i.e., restrictions relative to special conditions Δ. In the paper, we consider these conditions for the degrees and indexes of rigidity, their properties and links.

Throughout the paper we use the standard model-theoretic notions and the terminology in [1].

1 Preliminaries

Definition. [1]. For a set A in a structure $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ is called *semantically A-rigid* or *automorphically A-rigid* if any A-automorphism $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ is identical. The structure $\mathcal{M}$ is called *syntactically A-rigid* if $M = \mathrm{dcl}(A)$.

A structure $\mathcal{M}$ is called *$\forall$-semantically / $\forall$-syntactically n-rigid* (respectively, *$\exists$-semantically / $\exists$-syntactically n-rigid*), for $n \in \omega$, if $\mathcal{M}$ is semantically / syntactically A-rigid for any (some) $A \subseteq M$ with $|A| = n$.

The least n such that $\mathcal{M}$ is Q-semantically / Q-syntactically n-rigid, where $Q \in \{\forall, \exists\}$, is called the *$Q$-semantical / Q-syntactical degree of rigidity*, it is denoted by $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-sem}}(\mathcal{M})$ and $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-synt}}(\mathcal{M})$, respectively. Here if a set A produces the value of Q-semantical / Q-syntactical degree then we say that A *witnesses* that degree. If such n does not exists we put $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-sem}}(\mathcal{M}) = \infty$ and $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-synt}}(\mathcal{M}) = \infty$, respectively.

*The work was carried out in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No. FWNF-2022-0012, and partially supported by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19674850).

Recall [1] that the following inequalities hold for considering degrees:

$$\deg_{\rm rig}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M}) \leq \deg_{\rm rig}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M}), \tag{1}$$

$$\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M}) \leq \deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M}), \tag{2}$$

$$\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M}) \leq \deg_{\rm rig}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M}), \tag{3}$$

$$\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M}) \leq \deg_{\rm rig}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M}). \tag{4}$$

Let $\Delta = \Delta(X)$ be a type over $\emptyset$, i.e., a consistent set of formulae in the given language Σ with free variables in X and without parameters. Below we define the following Δ-*conditional* degrees of rigidity similar to the notions above.

Definition. A structure $\mathcal{M}$ is called $(\forall, \Delta)$-*semantically* / $(\forall, \Delta)$-*syntactically* n-*rigid* (respectively, $(\exists, \Delta)$-*semantically* / $(\exists, \Delta)$-*syntactically* n-*rigid*), for $n \in \omega$, if $\mathcal{M}$ is semantically / syntactically A-rigid for any (some) $A \subseteq M$ with $|A| = n$ and $\models \Delta(A)$.

The least n such that $\mathcal{M}$ is (Q, Δ)-semantically / (Q, Δ)-syntactically n-rigid, where $Q \in \{\forall, \exists\}$, is called the (Q, Δ)-*semantical* / (Q, Δ)-*syntactical degree of rigidity*, it is denoted by $\deg_{\rm rig}^{Q\text{-sem},\Delta}(\mathcal{M})$ and $\deg_{\rm rig}^{Q\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M})$, respectively. Here if a set A produces the value of (Q, Δ)-semantical / (Q, Δ)-syntactical degree then we say that A *witnesses* on that degree. If such n does not exist we put $\deg_{\rm rig}^{Q\text{-sem},\Delta}(\mathcal{M}) = \infty$ and $\deg_{\rm rig}^{Q\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}) = \infty$, respectively.

We assume that $\deg_{\rm rig}^{Q\text{-}s,\Delta}(\mathcal{M}) = \deg_{\rm rig}^{Q\text{-}s}(\mathcal{M})$, for $Q \in \{\forall, \exists\}$, $s \in \{\text{sem}, \text{synt}\}$, and for $\Delta = \emptyset$ or if Δ consists of tautologies.

Remark 1.1. By the definition the sets A witnessing the natural values $\deg_{\rm rig}^{Q\text{-}s,\Delta}(\mathcal{M})$, for $Q \in \{\forall, \exists\}$, $s \in \{\text{sem}, \text{synt}\}$, have cardinalities at most $|X|$, and if Δ forces that elements of its realizations are pairwise distinct then $|A| = |X|$.

Now we immediately obtain the following modifications of inequalities (1)– (4) for an arbitrary type $\Delta = \Delta(X)$:

$$\deg_{\rm rig}^{\forall\text{-sem},\Delta}(\mathcal{M}) \leq \deg_{\rm rig}^{\forall\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}), \tag{5}$$

$$\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-sem},\Delta}(\mathcal{M}) \leq \deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}), \tag{6}$$

$$\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-sem},\Delta}(\mathcal{M}) \leq \deg_{\rm rig}^{\forall\text{-sem},\Delta}(\mathcal{M}), \tag{7}$$

$$\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}) \leq \deg_{\rm rig}^{\forall\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}). \tag{8}$$

Remark 1.2. Let $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M})=0$. It means that all elements of $\mathcal{M}$ are defined by singletons, i.e., are defined by the structure $\langle M,c_a\rangle_{a\in M}$ in a constant language.

Let $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M})=1$. It means, using Graph Theory language [3], that there is an element $a\in M$ satisfying $\mathcal{M}\models\Delta(\{a\})$ and such that for each $b\in M$ there is an arc (a,b) marked by a formula $\varphi_b(a,x)$ with $\varphi_b(a,\mathcal{M})=\{b\}$. Here each element b has a unique labeling formula φ_b and distinct elements have distinct labeling formulae. Taking the set W of labels we obtain the labeled graph $\Gamma_a=\langle M,R,W\rangle$, where R is the set of all arcs (a,b), $b\in M$. The graph Γ_a is called a 1-*hedgehog*, or 1-*star* [6], with the root a.

The 1-hedgehogs define deterministic algebras of isolating formulae [4, 5] allowing to pass by a sequences of arcs and obtaining unique images.

If $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M})=n\in\omega\setminus\{0,1\}$ and it is witnessed by a set A then we can construct a hypergraph [6] with the set M of vertices and with hyperedges $A\cup\{b\}$, $b\in M$, marked by formulae $\varphi_b(x,A)$ with $\varphi_b(\mathcal{M},A)=\{b\}$. Similarly to the previous case, taking the set W of labels, we obtain a labeled hypergraph $\mathcal{H}_a=\langle M,H,W\rangle$, where H is the set of all hyperedges $A\cup\{b\}$, $b\in M$. This hypergraph is called the n-*hedgehog*, or n-*star*, with the root A. It defines a partial algebra whose partial operations give values b by the labels $\varphi_b(x,A)$.

The basic illustration for the conditional characteristics above gives the following:

Example 1.3. Let $\mathcal{V}$ be a linear space over a field $\mathcal{F}$ interpreted as a module $\mathcal{M}$. Following [1, Example 2.4] we have

$$\deg_{\rm rig}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M})=\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M})=\deg_{\rm rig}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M})=\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M})=0$$

iff $\dim(\mathcal{V})\leq 1$ and $|\mathcal{F}|=2$ for $\dim(\mathcal{V})=1$. If $\mathcal{M}$ is not rigid then $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M})=\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M})=\dim(\mathcal{V})$ for finite $\dim(\mathcal{V})$ and $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M})=\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M})=\infty$, otherwise. Besides, $\deg_{\rm rig}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M})=\deg_{\rm rig}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M})=\infty$ if $\dim(\mathcal{V})$ is infinite or $\dim(\mathcal{V})\geq 1$ and $\mathcal{F}$ is infinite. Finally, for $\dim(\mathcal{V})=n\in\omega\setminus\{0\}$ and $|\mathcal{F}|=m\in\omega\setminus\{0\}$ with $(n,m)\neq(1,2)$ we have $\deg_{\rm rig}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M})=\deg_{\rm rig}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M})=(n-1)m+1$, since we obtain the rigidity taking all vectors in a $(n-1)$-dimensional subspace $\mathcal{V}'$, with $(n-1)m$ elements, and a vector in $\mathcal{V}\setminus\mathcal{V}'$.

Assuming that $\mathcal{V}$ has a finite dimension $\dim(\mathcal{V})=n\geq 1$ and $|F|\geq 3$ we take a (complete) type $\Delta=\Delta(X)$ expressing that X consists of n linearly independent vectors. Now for any $s\in\{\rm sem,synt\}$ we have

$$\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-}s}(\mathcal{M})=\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-}s,\Delta}(\mathcal{M})=\deg_{\rm rig}^{\forall\text{-}s,\Delta}(\mathcal{M})=n$$

whereas $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-}s}(\mathcal{M})<\deg_{\rm rig}^{\forall\text{-}s}(\mathcal{M})$ as above.

Thus the restriction to Δ allows to replace the existence by universality preserving the degree.

Below, in Section 3, we show that this replacement is valid for homogeneous structures and complete types.

2 Properties of conditional degrees of rigidity

The following Propositions partially similar to assertions in [1] collect some basic properties for Δ-conditional degrees of rigidity.

Proposition 2.1 (Monotony). *For any structure $\mathcal{M}$, $s \in \{\mathrm{sem}, \mathrm{synt}\}$ and $\Delta_i = \Delta_i(X)$, $i = 1, 2$, if $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$ then $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-}s,\Delta_1}(\mathcal{M}) \geq \deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-}s,\Delta_2}(\mathcal{M})$ and $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-}s,\Delta_1}(\mathcal{M}) \leq \deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-}s,\Delta_2}(\mathcal{M})$.*

Proof. Since $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$ then $\Delta_1(\mathcal{M}) \supseteq \Delta_2(\mathcal{M})$. If all realizations of $\Delta_1(X)$ witness the value $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-}s,\Delta_1}(\mathcal{M}) = n$ then, in particular, all realizations of $\Delta_2(X)$ witness the value $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-}s,\Delta_1}(\mathcal{M})$, implying $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-}s,\Delta_1}(\mathcal{M}) \geq \deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-}s,\Delta_2}(\mathcal{M})$.

Now if a realization A of $\Delta_1(X)$ witness the value $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-}s,\Delta_1}(\mathcal{M}) = \lambda$ then either a realization of $\Delta_2(X)$ witness the value $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-}s,\Delta_2}(\mathcal{M}) = \lambda$ or Δ_2 is not realized by these witnessing sets implying $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-}s,\Delta_1}(\mathcal{M}) < \deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-}s,\Delta_2}(\mathcal{M})$. $\square$

Proposition 2.2. 1. *If a set $A \subset M$ witnesses on the value $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-}s}(\mathcal{M}) = n$, for $Q \in \{\forall, \exists\}$, $s \in \{\mathrm{sem}, \mathrm{synt}\}$, then for any $\Delta = \Delta(X)$ with $\models \Delta(A)$, the set A witnesses on $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-}s,\Delta}(\mathcal{M}) = n$, i.e.,*

$$\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-}s,\Delta}(\mathcal{M}) = \deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-}s}(\mathcal{M}). \tag{9}$$

2. *If there are no sets $A \subset M$ witnessing on the value $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-}s}(\mathcal{M}) = n$, for $Q \in \{\forall, \exists\}$, $s \in \{\mathrm{sem}, \mathrm{synt}\}$ and for $\Delta = \Delta(X)$ with $\models \Delta(A)$, then*

$$\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-}s,\Delta}(\mathcal{M}) > \deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-}s}(\mathcal{M}). \tag{10}$$

Proof. 1. It follows since:

i) the value $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-}s}(\mathcal{M}) = n$ means that all n-element sets including realizations of $\Delta(X)$ witness that value, which equals $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-}s,\Delta}(\mathcal{M})$ for these realizations;

ii) the value $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-}s}(\mathcal{M}) = n$ means that some n-element set, which by the conjecture can be taken among realizations of $\Delta(X)$, witness that value, and it equals $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-}s,\Delta}(\mathcal{M})$ for this realization.

In any case we have the equality (9)).

2. Since $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-}s}(\mathcal{M}) = n$ is witnessed by sets of least finite cardinality n the absence of $A \subset M$ witnessing on the value $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-}s}(\mathcal{M}) = n$ among realizations of $\Delta(X)$ implies that the value $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-}s,\Delta}(\mathcal{M})$ is greater than $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-}s}(\mathcal{M})$, i.e., the inequality (10) holds. $\square$

Proposition 2.3. 1. *If $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-}s}(\mathcal{M}) = n$, for $s \in \{\mathrm{sem}, \mathrm{synt}\}$, then for any $\Delta = \Delta(X)$ with $|X| = n$ written in Δ, $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-}s,\Delta}(\mathcal{M}) = n$.*

2. *If $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-}s}(\mathcal{M}) = n$, for $s \in \{\mathrm{sem}, \mathrm{synt}\}$, then for some $\Delta = \Delta(X)$ with $|X| = n$ written in Δ, $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-}s,\Delta}(\mathcal{M}) = n$.*

3. *For* $s \in \{\mathrm{sem}, \mathrm{synt}\}$ *the value* $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-}s}(\mathcal{M})$ *equals the minimal value* $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-}s,\Delta}(\mathcal{M})$ *among all possibilities of* Δ.

4. *For* $s \in \{\mathrm{sem}, \mathrm{synt}\}$ *the natural value* $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-}s}(\mathcal{M})$ *equals all values* $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-}s,\Delta}(\mathcal{M})$ *among all possibilities of* $\Delta = \Delta(X)$ *with minimal cardinality of* X *producing a natural value* $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-}s,\Delta}(\mathcal{M})$.

The proof is obvious by the definition of degrees.

Proposition 2.4. *For any* Δ *without free variables the following conditions hold:*

(1) $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-sem},\Delta}(\mathcal{M}) = 0$ *iff* $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-sem},\Delta}(\mathcal{M}) = 0$, *and iff the structure* $\mathcal{M}$ *is* ($\emptyset$-)*semantically rigid;*

(2) $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}) = 0$ *iff* $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}) = 0$ *and iff the structure* $\mathcal{M}$ *is* ($\emptyset$-)*syntactically rigid.*

The proof is obvious by the definition of degrees.

Proposition 2.5. *For any type* $\Delta = \Delta(X)$ *the following conditions hold:*

(1) $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-sem},\Delta}(\mathcal{M}) = n \in \omega$ *iff for any set* $A \subseteq M$ *with* $|A| \geq n$ *and* $\models \Delta(A)$ *there is minimal* $B \subseteq A$, *under inclusion, such that* $|B| = n$, $\models \Delta(B)$ *and any automorphism* $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ *fixing* B *pointwise fixes all elements in* $\mathcal{M}$, *too, and there are no sets of cardinalities* $n' < n$ *with that property; here* $B \subseteq A$ *can be taken arbitrary with* $|B| = n$ *and* $\models \Delta(B)$;

(2) $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-sem},\Delta}(\mathcal{M}) = n \in \omega$ *iff for some set* $A \subseteq M$ *with* $|A| \geq n$ *and* $\models \Delta(A)$ *there is minimal* $B \subseteq A$, *under inclusion, such that* $|B| = n$, $\models \Delta(B)$ *and any automorphism* $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ *fixing* B *pointwise fixes all elements in* $\mathcal{M}$, *too, and there are no sets of cardinalities* $n' < n$ *with that property;*

(3) $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}) = n \in \omega$ *iff for any set* $A \subseteq M$ *with* $|A| \geq n$ *and* $\models \Delta(A)$ *there is minimal* $B \subseteq A$, *under inclusion, such that* $|B| = n$, $\models \Delta(B)$ *and* $M = \mathrm{dcl}(B)$, *and there are no sets of cardinalities* $n' < n$ *with that property; here* $B \subseteq A$ *can be taken arbitrary with* $|B| = n$ *and* $\models \Delta(B)$;

(4) $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}) = n \in \omega$ *iff for some set* $A \subseteq M$ *with* $|A| \geq n$ *and* $\models \Delta(A)$ *there is minimal* $B \subseteq A$, *under inclusion, such that* $|B| = n$, $\models \Delta(B)$ *and* $M = \mathrm{dcl}(B)$, *and there are no sets of cardinalities* $n' < n$ *with that property.*

Proof is obvious by the definition of degrees.

Remark 2.6. The notions above of Δ-conditional degrees of rigidity admit a natural generalization replacing the condition $\models \Delta(A)$ by the condition $A \in P$ for some given property $P \subseteq \mathcal{P}(M)$, see [7], spreading related assertions for these P-*conditional* degrees of rigidity.

3 Model-theoretic properties related to degrees of rigidity

Theorem 3.1. *If $\mathcal{M}$ is a homogeneous structure and $\Delta = \Delta(X)$ is a complete type then* $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}) = \deg_{\rm rig}^{\forall\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M})$ *and* $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-sem},\Delta}(\mathcal{M}) = \deg_{\rm rig}^{\forall\text{-sem},\Delta}(\mathcal{M})$.

Proof. If $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}) = \infty$ then each realization A of $\Delta(X)$ does not produce the A-rigidity of $\mathcal{M}$. Therefore $\deg_{\rm rig}^{\forall\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}) = \infty$, too.

Let a set A witness that $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}) = n \in \omega$. If $\mathcal{M} \models \Delta(B)$ then A and B are connected by an automorphism f since $\Delta(X)$ is complete and $\mathcal{M}$ is homogeneous. Thus the n-hedgehog with the root A is transformed by f onto a n-hedgehog with the root B. Thus B also witnesses that $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}) = n$. Since B is taken arbitrary satisfying Δ we obtain the equality $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}) = \deg_{\rm rig}^{\forall\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M})$.

Now since all realizations of Δ are connected by automorphisms we conclude that the A-rigidity of $\mathcal{M}$ with respect to $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ implies the B-rigidity of $\mathcal{M}$ with respect to $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ for any A and B with $\models \Delta(A)$ and $\models \Delta(B)$. Indeed, let A and B be connected by an automorphism f. If $\mathcal{M}$ is not B-rigid witnessed by a non-identical B-automorphism g then $\mathcal{M}$ is not A-rigid witnessed by a non-identical A-automorphism fgf^{-1}: if $g(b_1) = b_2$ with $b_1 \neq b_2$ then $fgf^{-1}(a_1) = a_2$ with $a_1 \neq a_2$, where $a_1 = f^{-1}(b_1)$, $a_2 = f^{-1}(b_2)$.

Since the rigidity is preserved under automorphisms in $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ and Δ is complete then $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-sem},\Delta}(\mathcal{M}) = \deg_{\rm rig}^{\forall\text{-sem},\Delta}(\mathcal{M})$. □

Remark 3.2. As complete types $\Delta(X)$, with n-element realizations define a partition of n-element subsets of a homogeneous structure $\mathcal{M}$ producing an equivalence relation $E_n(\mathcal{M})$ on $\{A \subseteq M \mid |A| = n\}$ "to have n-element sets with same type", Theorem 3.1 implies that E_n is a refinement of the equivalence relations $E_{n,\rm synt}(\mathcal{M})$ and $E_{n,\rm sem}(\mathcal{M})$ "to have same syntactic/semantic degree of rigidity".

Now for each E_n-class, $E_{n,\rm synt}$-class, and $E_{n,\rm sem}$-class, respectively, we define common syntactic and semantic degrees of rigidity of their elements as in Theorem 3.1. We denote these degrees by $\deg_{\rm rig}^{{\rm synt},Y}(\mathcal{M})$ and $\deg_{\rm rig}^{{\rm sem},Y}(\mathcal{M})$ for given equivalence class Y.

Using the definition of degrees and Theorem 3.1 we express the degrees $\deg_{\rm rig}^{\forall\text{-}s}(\mathcal{M})$ by the degrees $\deg_{\rm rig}^{s,Y}(\mathcal{M})$, for $s \in \{\rm synt, sem\}$ as follows.

For any $n \in \omega$ either $E_{n,s}$-classes Y have $\deg_{\rm rig}^{s,Y}(\mathcal{M}) = n$ or $\deg_{\rm rig}^{s,Y}(\mathcal{M}) = \infty$. Therefore, either we find minimal k such that all $E_{k,s}$-classes Y have $\deg_{\rm rig}^{s,Y}(\mathcal{M}) = k$ producing $\deg_{\rm rig}^{\forall\text{-}s}(\mathcal{M}) = k$, or that k does not exist implying $\deg_{\rm rig}^{\forall\text{-}s}(\mathcal{M}) = \infty$.

Thus we obtain the following:

Theorem 3.3. *For any homogeneous structure* $\mathcal{M}$ *and* $s \in \{\mathrm{synt}, \mathrm{sem}\}$*, either* $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-}s}(\mathcal{M}) = k_0$*, where* k_0 *is minimal natural* k *such that all* $E_{k,s}$*-classes* Y *have* $\deg_{\mathrm{rig}}^{s,Y}(\mathcal{M}) = k$*, or* $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-}s}(\mathcal{M}) = \infty$ *if that* k_0 *does not exist.*

Proposition 3.4. *If* $\mathcal{M}$ *is an infinite structure,* $\Delta = \Delta(X)$ *and*

$$\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}) = n \in \omega$$

then there are infinitely many $(n+1)$*-types over* $\emptyset$*:* $|S^{n+1}(\emptyset)| \geq \omega$*.*

Proof. Let a set A witness that $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}) = n$. Then $|A| \leq n$ and for each element $a \in M$ there exists a formula $\varphi_a(x, A) \in S^1(A)$ such that $\mathcal{M} \models \varphi_a(a, A) \wedge \exists^{=1} x \varphi_a(x, A)$. Then the set $\{\varphi_a(x, X) \mid a \in M\}$ consists of pairwise non-equivalent formulae, i.e., there infinitely many pairwise non-equivalent formulae with $(|A|+1)$ free variables, implying $|S^{|A|+1}(\emptyset)| \geq \omega$. By $|A| \leq n$ and the preservation of infinitely many types under extensions of tuples of free variables, we conclude $|S^{n+1}(\emptyset)| \geq \omega$. □

Corollary 3.5. *If* $\mathcal{M}$ *is an* ω*-categorical structure then for any type* $\Delta = \Delta(X)$*,* $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}) = \deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}) = \infty$*.*

Proof. By the definition of $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M})$ we can assume that Δ is realized in $\mathcal{M}$. Now since $\mathcal{M}$ is ω-categorical then by Ryll—Nardzewski Theorem and Proposition 3.4 we have $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}) = \infty$. The inequality $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}) \leq \deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M})$ allows to conclude that $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-synt},\Delta}(\mathcal{M}) = \infty$, too. □

The following theorem shows that along with the existence of nonrigid elementary extensions of a given structure in a large cardinality, violation of rigidity is also possible by taking an appropriate elementary extension of the same cardinality.

Theorem 3.6. *Any countable structure* $\mathcal{M}$ *has a countable elementary extension* $\mathcal{N}$ *with* $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{N}) = \infty$*.*

Proof. If $\mathcal{M}$ does not hedgehogs then it is a required elementary extension of itself. If hedgehogs exist then there are at most countably many them and we enumerate these hedgehogs $\mathcal{H}$: $\{\mathcal{H}_i \mid i \in \omega\}$. By Proposition 3.4 3.4 each hedgehog $\mathcal{H}$ with a root A produces a countable elementary extension $\mathcal{M}'$ of $\mathcal{M}$ with an arc (a hyperedge) for A which does not belong to $\mathcal{H}$. Then we construct a chain $\{\mathcal{M}_i \mid i \in \omega\}$ of elementary extensions of $\mathcal{M}$ such that $\mathcal{M}_i$ turns off $\mathcal{H}_i$ to be a hedgehog. Now we consider the countable structure $\mathcal{N}_0 = \bigcup\limits_{i \in \omega} \mathcal{M}_i$ and continue the process countably many times constructing an elementary chain $\{\mathcal{N}_j \mid j \in \omega\}$ of elementary extensions of $\mathcal{M}$ such that each $\mathcal{N}_{j+1}$ turns off all hedgehogs of $\mathcal{N}_j$. Finally we obtain the required structure $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{j \in \omega} \mathcal{N}_j$ without hedgehogs, i.e., with $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{N}) = \infty$. □

Remark 3.7. Notice that the absence of n-hedgehogs in a structure can be violated in its elementary extensions. Indeed, one can construct a countable arc-colored graph Γ without hedgehogs where each its m-element subset A, for $m \in \omega$, has a vertex a with 1-hedgehog on $A \cup \{a\}$, such that a countable elementary extension $\Gamma' \succ \Gamma$ obtains a common root a' for a 1-hedgehog in Γ'.

Thus the value $\deg^{\exists\text{-synt}}_{\rm rig}(\cdot)$ can both increase and decrease under elementary extensions of structures.

References

[1] S. V. Sudoplatov, Variations of rigidity `arXiv:2307.13228 [math.LO]`, 2023, 13 p, URL: `https://doi.org/10.48550/arXiv.2307.13228`

[2] B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, Variations of rigidity for ordered theories, Preprint. Almaty, Novosibirsk, 2023, 17 p.

[3] S. V. Sudoplatov, E. V. Ovchinnikova, Discrete mathematics: Tutorial, Moscow : Urait, 2023, 280 p. (Russian) ISBN 978–5–534–00871–5, URL: `https://urait.ru/bcode/510824`

[4] I. V. Shulepov, S. V. Sudoplatov, Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory, Siberian Electronic Mathematical Reports, **11** (2014), 380–407.

[5] S. V. Sudoplatov, Classification of countable models of complete theories, Part 1, Novosibirsk : NSTU, 2018, 376 p.

[6] V. A. Emelichev, O. I. Melnikov, V. I. Sarvanov, R. I. Tyshkevich, Lectures on Graph Theory, Moscow : Nauka, 1990,384 p. (Russian)

[7] S. V. Sudoplatov, Formulas and Properties, Their Links and Characteristics // Mathematics, **9**, 12 (2021), 1391, 16. `https://doi.org/10.3390/math9121391`

О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИЙ МОНОИДОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

И. К. Уктамалиев

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: i.uktamaliev@g.nsu.ru

Сначала введем основные понятия и определения.

Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, \Sigma \rangle$ — алгебраическая система сигнатуры Σ и $A \subseteq M$. Через Σ_A мы обозначим сигнатуру, образованную добавлением элементов множества A к Σ в качестве константы, через $\mathfrak{M}_A$ — обогащение системы $\mathfrak{M}$ до сигнатуры Σ_A.

Определение 1. Пусть p — множество Σ_A-формул с переменными $x_1, \ldots, x_n$. Множество Σ_A-формул p называется *n-типом* над множеством A, если совместно множество $p \cup \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$. Тип p называется *полным*, если для любой Σ_A-формулы φ с переменными $x_1, \ldots, x_n$ выполняется либо $\varphi \in p$, либо $\neg\varphi \in p$. Обозначим через $S^n_{\overline{x}}(A)$ и $S^n(A)$ соответственно множество всех полных n-типов от переменных $\overline{x}$ над множеством A и множество всех полных n-типов над множеством A и ещё обозначим

$$S(A) = \bigcup_{n \in \omega \setminus \{0\}} S^n(A).$$

Если $|S(\varnothing)| = \omega$, то теория $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ называется *малой*.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle A, \Sigma \rangle$ — алгебраические системы сигнатуры Σ. Отображение $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ называется *элементарным отображением* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{B}$, если

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(h(a_1) \ldots, h(a_n))$$

для произвольной $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ формулы сигнатуры Σ и произвольного $a_1, \ldots, a_n \in A$.

В этом случае алгебраическая система $\mathfrak{B}$ называется *элементарным расширением алгебраической системы* $\mathfrak{A}$ и обозначается через $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

Определение 3. Модель $\mathfrak{M}$ теории T называется *простой*, если существует элементарное отображение $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{A}$ для произвольной модели $\mathfrak{A}$ теории T. Модель $\mathfrak{M}$ теории T называется *простой над множеством* , где $A \subseteq M$, если модель $\mathfrak{M}_A$ является простой моделью теории T_A, полученной из теории T обогащением константами из A. Если A — конечно, т.е. $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, тогда простая модель $\mathfrak{M}_A$ называется *простой над кортежем* $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.

Определение 4. Модель $\mathfrak{M}$ теории T называется *атомарной*, если $\mathrm{tp}(\overline{a})$ является изолированным для любых $\overline{a} \in M$.

Известно, что согласно теореме Воота модель $\mathfrak{M}$ теории T проста тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ атомарна. Следовательно, если $\mathrm{dcl}(A) = M$, то модель $\mathfrak{M}$ является простой над множеством A.

Определение 5. Семейство $\{\mathfrak{A}_\mathfrak{n} | n \in \omega\}$ алгебраических систем называется *элементарной цепью*, если $\mathfrak{A}_\mathfrak{n} \preceq \mathfrak{A}_{\mathfrak{n}+1}$ для любого $n \in \omega$.

Определение 6. Если для непростой модели $\mathfrak{M}$ существует семейство простых моделей $F = \{\mathfrak{A}_\mathfrak{n} | n \in \omega\}$ такое, что $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{n \in \omega} \mathfrak{A}_n$ и F — элементарная цепь, то $\mathfrak{M}$ называется *предельной моделью.*

Определение 7. Пусть T — счетная теория сигнатуры Σ и $I(T, \kappa)$ — количество попарно неизоморфных моделей теории T, имеющих мощность κ. Функция $I(T, \cdot)$, сопоставляющая каждой бесконечной мощности κ значение $I(T, \kappa)$, называется *спектральной функцией*, или *спектром теории* T.

Лемма 8. *Если для теории T выполнено $|S(\varnothing)| = 2^\omega$, то $I(T, \omega) = 2^\omega$.*

Доказательство. Предположим, что $I(T, \omega) < 2^\omega$. Пусть Γ — множество мощности $I(T, \omega)$, содержащее типы изоморфизмов всех счётных моделей теории T и $\mathrm{FD}(\mathfrak{M}) = \{\mathrm{tp}_\mathfrak{M}(\overline{a}) \mid \overline{a} \in M\}$, $\mathfrak{M} \models T$. Тогда $S(\varnothing) = \bigcup\limits_{\mathfrak{M} \in \Gamma} \mathrm{FD}(\mathfrak{M})$. Из этого следует, что $|S(\varnothing)| \leq \omega \cdot |\Gamma| < 2^\omega$. Это противоречие доказывает, что $I(T, \omega) = 2^\omega$. $\square$

Обозначим через $\mathrm{P}(T), \mathrm{L}(T), \mathrm{NPL}(T)$ мощности множеств типов изоморфизма простых над кортежами, предельных и всех остальных счётных моделей теории T соответственно.

Определение 9. Тройка $(\mathrm{P}(T), \mathrm{L}(T), \mathrm{NPL}(T))$ называется *тройкой распределения числа счётных моделей* теории T и обозначим через $\mathrm{cm}_3(T)$.

Для теорий T с континуумом типов выполняется $I\,(T, \omega) = 2^\omega$, и значит хотя бы одно из значений $\mathrm{P}(T), \mathrm{L}(T), \mathrm{NPL}(T)$ равно 2^ω.

В [1] установлена следующая

Теорема 10. *Если предположим, что континуум-гипотеза верна, то для любой немалой теории T тройка $\mathrm{cm}_3(T)$ равно одному из следующих:*
1. $(2^\omega, 2^\omega, \lambda))$, $\lambda \in \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$;
2. $(0, 0, 2^\omega)$;
3. $(\lambda_1, \lambda_2, 2^\omega)$, *где* $\lambda_1 \geq 1, \lambda_1, \lambda_2 \in \{\omega, 2^\omega\}$.
Все указанные значения имеют реализации в классе немалых теорий.

Интересным является вопрос о том, какие возможны тройки распределения для различных естественных классов немалых теорий. В статьях [5, 6] определено, что тройка распределения $\mathrm{cm}_3(\mathrm{Th}(\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle)) = (2^\omega, 2^\omega, 2^\omega)$ для аддитивной группы целых чисел. Мы найдем количество простых и предельных моделей теории $\mathrm{Th}\left(\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle\right)$ аддитивного моноида натуральных чисел. Здесь мы считаем, что $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, \}$, в отличие от обычного.

Описание типов элементов $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, +, 0\rangle$ возможно с помощью разложения их на простые множители. Мы опишем тип единицы как тип элемент, неделимый на все элементы, кроме самого себя:

$$\neg \exists x_1 \left(x_1 + x_1 \approx 1\right), \neg \exists x_2 \left(x_2 + x_2 + x_2 \approx 1\right), \ldots,$$

$$\neg \exists x_n \left(x_n + \cdots + x_n \approx 1\right), \ldots$$

Поскольку каждое конечное подмножество данного множества формул выполнимо (всегда можно найти число, не делящееся на конечное число некоторых чисел), то, согласно теореме компактности, все множество заданных формул также выполнимо.

Известно, что $\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle$ является простой моделью над $\{1\}$. Более того, ниже будет доказано, что модель $\mathfrak{N}$ является простой моделью даже над множеством $\varnothing$ для теории $\mathrm{Th}(\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle)$. Типы простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ представлены только формулами, описывающими деление на себя и на 1. Тогда типы σ, описывающие элементы $\mathfrak{N}$, изолируются множествами формул, "говорящих" о делимости этих элементов на степени простых чисел или изолируются над $\{1\}$ множествами формул, "говорящих" о неделимости этих элементов на степени простых чисел.

Из теоремы компактности следует следующий результат:

Лемма 11. *Пусть $\mathfrak{M} = \langle M,\ \Sigma\rangle$ — алгебраическая система сигнатуры Σ, $A \subseteq M$ и p — некоторый n-тип над A. Тогда существует элементарное расширение $\mathfrak{M}'$ для $\mathfrak{M}$ такое, что тип p реализуется в $\mathfrak{M}'$.*

Доказательство. Пусть $F(\Sigma)$ — множество формул сигнатуры Σ,

$$\mathrm{Diag}_{el}(\mathfrak{M}) = \{\varphi(\overline{m}) \mid \mathfrak{M} \models \varphi(\overline{m}),\ \varphi \in F(\Sigma)\},$$

$B = p \cup \mathrm{Diag}_{el}(\mathfrak{M})$ и Δ — конечное подмножество множества B.

Без ограничения общности считаем, что B состоит из единственной формулы

$$\theta(x_1,\dots,x_n,a_1,\dots,a_m)\wedge\psi(a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_k),$$

где $a_1,\dots,a_n\in A,\ b_1,\dots,b_k\in M\setminus A,\ \theta(\overline{x},\overline{a})\in p$ и $\mathfrak{M}\models\psi(\overline{a},\overline{b})$.

Пусть $\mathfrak{D}_0$ — модель выполнимого множества предложений $p\cup\mathrm{Th}(\mathfrak{M}_A)$. Поскольку $\exists\overline{v}\psi(\overline{a},\overline{v})\in\mathrm{Th}(\mathfrak{M}_A)$,

$$\mathfrak{D}_0\models\theta(\overline{x},\overline{a})\wedge\exists\overline{v}\psi(\overline{a},\overline{v}).$$

Интерпретируя $b_1,\dots,b_k$ как свидетельство $\exists\overline{v}\psi(\overline{a},\overline{v})$, мы получаем $\mathfrak{D}_0\models\Delta$. Таким образом, Δ выполнимо.

По теореме компактности B выполнима. Пусть $\mathfrak{D}\models B$. Поскольку $\mathfrak{D}\models\mathrm{Diag}_{el}(\mathfrak{M})$, отображение, которое переводит $m\in M$ в интерпретацию константного символа m в $\mathfrak{D}$, является элементарным вложением. Пусть c_i будут интерпретациями x_i. Тогда $(c_1,\dots,c_n)$ является реализацией p. $\square$

Пусть $\mathbb{P}$ — множество простых чисел и $\overline{\mathbf{P}}=\big(p_0,\dots\ p_i,\dots\big)$ — нумерация простых чисел. Выберем последовательность, $\overline{\mathbf{M}}=\big(m_0,\dots,m_i,\dots\big)$, элементы которой взяты из множества $\omega\cup\{\infty\}$. Построим следующее множество пар Z, соответствующих $\overline{\mathbf{P}}$ и $\overline{\mathbf{M}}$:

$$Z=\Big\{(p_0,m_0),\dots,\ (p_i,m_i),\dots\ \Big|\ \big(p_0,\dots\ p_i,\dots\big)=\overline{\mathbf{P}},$$
$$\big(m_0,\dots,m_i,\dots\big)=\overline{\mathbf{M}}\Big\}.$$

Рассмотрим следующее множество формул, описывающих, деление x на наибольшую степень p_i равно $p_i^{m_i}$, где $(p_i,m_i)\in Z$:

$$q_Z(x)=\left\{p_i^{m_i}|x\ \middle|\ (p_i,m_i)\in Z\right\}.$$

Здесь обозначение $p_i^{m_i}|x$ означает, что наибольшая степень p_i равна $p_i^{m_i}$, на которую делится x.

Известно, что количество последовательностей, элементы которых можно составить из множества $\omega\cup\{\infty\}$, равно 2^ω количество соответствующих множеств пар Z также равно 2^ω. Таким образом, количество множеств формул $q_Z(x)$ равно 2^ω. Отсюда следует, что мощность множества $S_x^1(\varnothing)$ равна 2^ω, т. е. $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ не является малой.

По Лемме 11 существует элементарное расширение $\mathfrak{M}$ для $\mathfrak{N}$, реализующее $q_Z(x)$. Пусть элемент $a\in M$ является реализацией $q_Z(x)$ в $\mathfrak{M}$. Возьмем пару $(p_{i_0},m_{i_0})\in Z$, при $m_{i_0}>0$. Используя формулу $p_{i_0}x\approx a$, мы можем найти элемент a_{i_0}, где $p_{i_0}a_{i_0}=a$. Видно, что этот элемент a_{i_0} реализует множество формул $q_{Z_{i_0}}=\Big\{p_i^{m_i}|x,\ \Big|\ (p_i,m_i)\in Z_{i_0}\Big\}$, которое описывает делимость на максимальную степень простых чисел, соответствующее множеству

$$Z_{i_0}=\Big\{(p_0,m_0),\dots,\ (p_{i_0-1},m_{i_0-1}),\ (p_{i_0},m_{i_0}-1),\ (p_{i_0+1},m_{i_0+1}),\dots\ \Big\}.$$

Кроме того, взяв некоторую пару $(p_{j_0}, m_{j_0}) \in Z$, мы можем создать элемент a_{j_0}, используя соответственно формулу $p_{j_0}a \approx x$, где $p_{j_0}a = a_{j_0}$. Как видно выше, что этот элемент a_{j_0} реализует множество формул $q_{Z_{j_0}} = \Big\{p_i^{m_i}|x \;\Big|\; (p_i, m_i) \in Z_{j_0}\Big\}$, которое описывает делимость на максимальную степень простых чисел, соответствующее множеству

$$Z_{j_0} = \Big\{(p_0, m_0), \dots,\ (p_{j_0-1}, m_{j_0-1}),\ (p_{j_0}, m_{j_0}+1),\ (p_{j_0+1}, m_{j_0+1}), \dots\ \Big\}.$$

Теперь, используя эти элементы a_{i_0} и a_{j_0}, мы можем получить элементы a_{i_i} и a_{j_1} по формулам $p_{i_1}x \approx a_{i_0}$ (или $p_{i_1}a_{i_0} \approx x$), $p_{j_1}a_{j_0} \approx x$ (или $p_{j_1}x \approx a_{j_0}$). В свою очередь, для элементов a_{i_1} и a_{j_1} мы получаем набор пар Z_{i_1} и Z_{j_1}, как указано выше.

Если множество Z' может быть сформировано из Z путем выполнения описанного выше процесса за конечное число шагов, мы обозначаем через $Z \wr Z'$. Это отношение " $\wr$ " является отношением эквивалентности в семействе всех множеств пар Z. Действительно, по определению отношения " $\wr$ " мы видим, что оно симметрично и транзитивно. Множество Z', образованное умножением или делением на 1, которое является реализацией $q_Z(x)$, равно Z. Таким образом, мы можем считать отношение " $\wr$ " рефлексивным. По определению отношения " $\wr$ " мы видим, что выполняется следующее утверждение:

Лемма 12. *Пусть* $\overline{\mathbf{M}} = \big(m_0, \dots, m_i, \dots\big)$, $\overline{\mathbf{N}} = \big(n_0, \dots, n_i, \dots\big)$ — *последовательности, элементы взятые из множества* $\omega \cup \{\infty\}$, *а множества*

$$Z_1 = \Big\{(p_0, m_0), \dots,\ (p_i, m_i), \dots\ \Big|\ \big(p_0, \dots\ p_i, \dots\big) = \overline{\mathbf{P}},$$
$$\big(m_0, \dots, m_i, \dots\big) = \overline{\mathbf{M}}\Big\} \text{ и}$$
$$Z_2 = \Big\{(p_0, n_0), \dots,\ (p_i, n_i), \dots\ \Big|\ \big(p_0, \dots\ p_i, \dots\big) = \overline{\mathbf{P}},$$
$$\big(n_0, \dots, n_i, \dots\big) = \overline{\mathbf{N}}\Big\}$$

— *множества пар, соответствующих этим последовательностям. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1) $Z_1 \wr Z_2$; *2) Существует конечное множество простых чисел* $P_0 \subset \mathbb{P}$ *такое, что* m_i *и* n_i *одновременно конечны или бесконечны для каждого простого числа* $p_i \in P_0$, *а* m_j *и* n_j *одинаковы для остальных* $p_j \in \mathbb{P} \setminus P_0$.

Более того, согласно определению отношения эквивалентности " $\wr$ ", если модель $\mathfrak{M}$ *теории* $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ *реализует* $q_Z(x)$, *то* $\mathfrak{M} \models q_{Z'}(x)$ *для всех* $Z \wr Z'$.

Пусть W — семейство множеств пар

$$Z = \Big\{(p_0, m_0), \dots,\ (p_i, m_i), \dots\ \Big|\ \big(p_0, \dots\ p_i, \dots\big) = \overline{\mathbf{P}},$$

$$\Big(m_0,\dots,m_i,\dots\Big)=\overline{\mathbf{M}}\Big\},$$

соответствующих $\overline{\mathbf{M}}=\big(m_0,\dots,m_i,\dots\big)$ последовательностям, элементы которых взяты из множества $\omega\cup\{\infty\}$. Следующая лемма следует из леммы 12:

Лемма 13. *Мощность фактормножества множества W, образованного отношением эквивалентности “ $\wr$ ”, равна 2^ω.*

Доказательство. Пусть $[Z]=\Big\{Z'\ \Big|\ Z'\wr Z\Big\}$ — некоторый класс эквивалентности в W. Тогда существует конечное множество простых чисел $P_0\subset\mathbb{P}$ такое, что m_i и n_i одновременно конечны или бесконечны для каждого $p_i\in P_0$, где $(p_i,m_i)\in Z_1$, $(p_i,n_i)\in Z_2$, $Z_1,Z_2\in[Z]$. Согласно утверждению 1, каждое отображение f, переводящее множество простых чисел $P=\{p_0,\dots,p_i,\dots\}$ в множество $\{k,\infty\}$, соответствует единственному классу эквивалентности $[Z]$. Здесь k — некоторое конечное натуральное число. Поскольку $|P|=\omega$ и $|\{k,\infty\}|=2$, общее количество отображений $f:P\to\{k,\infty\}$, равно 2^ω, а значит, и количество классов эквивалентности в W равно 2^ω. □

Если $m_{i_0},\dots,m_{i_j}$, соответствующие конечному числу простых чисел $p_{i_0},\dots,p_{i_j}$ в $Z\in W$, являются конечными натуральными числами, а m_i равны 0 для всех остальных простых p_i, то множество формул $q_Z(x)$ реализуется в самом $\mathfrak{N}$. Поэтому, чтобы найти другие модели теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$, кроме $\mathfrak{N}$, поступим следующим образом.

Определим формулу $x<y$ следующим образом:

$$x<y\rightleftharpoons\exists t\Big((x+t\approx y)\wedge(t\neq 0)\Big).$$

Эта формула дает линейный порядок в $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$, но он не будет плотным порядком. На самом деле, если $\varphi\rightleftharpoons\forall x\exists y\Big((x<y)\wedge\neg\exists z\big((x<z)\wedge(z<y)\big)\Big)$, то $\varphi\in\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. По этой формуле мы можем вывести, что $\mathrm{dcl}(\varnothing)=\mathbb{N}$. Это означает, что все элементы $\mathfrak{N}$ можно рассматривать как константы. Таким образом, мы можем рассматривать следующее множество формул как формулы с одной переменной:

$$[n<x]=\Big\{n<x\mid n\in\mathbb{N}\Big\}.$$

Пусть $q_Z(x)=\Big\{p_i^{m_i}|x\ \Big|\ (p_i,m_i)\in Z\Big\}$ — множества формул, представляющих деление на максимальную степень простых чисел для множества пар

$$Z=\Big\{(p_0,m_0),\dots,\ (p_i,m_i),\dots\ \Big|\ \big(p_0,\dots\ p_i,\dots\big)=\overline{\mathbf{P}},$$

$$\big(m_0,\dots,m_i,\dots\big)=\overline{\mathbf{M}}\Big\}$$

из W. Рассмотрим множества формул $Q_Z(x)=q_Z(x)\cup[n<x]$ для этого Z.

По Лемме 11 существует элементарное расширение $\mathfrak{A}$ для $\mathfrak{N}$, реализующее $Q_Z(x)$. Для элемента $a \in A$ обозначим через $(a)_\omega$ следующее множество:

$$(a)_\omega = \{a \pm j \mid j \in \omega\}.$$

Пусть элемент $a \in A$ является реализацией $Q_Z(x)$ в $\mathfrak{A}$. Тогда мы можем найти все делители a в $\mathfrak{A}$. Обозначим множество всех делителей в $\mathfrak{A}$ через D_a:

$$D_a = \{b \mid a = jb,\ j \in \omega\}$$

Кроме того, мы обозначаем через H_a множество элементов, которые можно найти, умножая a на все натуральные числа в $\mathfrak{A}$:

$$H_a = \{c \mid c = ja,\ j \in \omega\}.$$

Рассмотрим следующее множество:

$$K_a = \bigcup_{b \in D_a} (b)_\omega \ \cup \ \bigcup_{c \in H_a} (c)_\omega.$$

Тогда модель $\mathfrak{M} = \langle K_a \cup \mathbb{N}, +, 0\rangle$ является простой моделью над множеством $\{a\}$. Действительно, по построению множества K_a ясно, что $\mathrm{dcl}(a) = K_a \cup \mathbb{N}$. Обозначим построенную таким образом простую модель над множеством $\{a\}$ через $\mathfrak{M}_a$. Если $Z' \wr Z$ и элемент b является реализацией $Q_{Z'}(x)$, то $\mathfrak{M}_a \cong \mathfrak{M}_b$.

Таким образом, если Z_1 и Z_2 не эквивалентны по отношению "$\wr$", возникает вопрос, являются ли $\mathfrak{M}_{a_1}$ и $\mathfrak{M}_{a_2}$ также изоморфными, где a_1 и a_2 реализации $Q_{Z_1}(x)$ и $Q_{Z_2}(x)$ соответственно.

Рассмотрим следующую пару Z_i:

$$Z_i = \Big\{(p_0, m_0), \ldots,\ (p_{i-1}, m_{i-1}),\ (p_i, \infty),\ (p_{i+1}, m_{i+1}), \ldots\ \Big\}$$

т.е. в Z_i только p_i соответствует бесконечности, а остальные простые числа соответствуют конечным натуральным числам. Пусть элемент a_i будет реализацией типа $Q_{Z_i}(x)$. Но если элемент $a_i + 1$ реализует некоторый тип $Q_{Z'}(x)$, то пара Z' не эквивалентна с парой Z. Обратим внимание на следующее утверждение, чтобы оно было более понятным.

Лемма 14. *Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ число $3^n + 1$ не делится на 2^k для произвольного $k \geq 3$.*

Доказательство. Очевидно, что если натуральное число не делится на число b^s, то число a не делится на число b^r при произвольном $r \geq s$. Здесь b, s, r — натуральные числа. Таким образом, достаточно доказать это утверждение при $k = 3$. Докажем, что число $3^n + 1$ не делится на $2^3 = 8$ для произвольного $n \in \mathbb{N}$. Известно, что для произвольного $n \in \mathbb{N}$:

$$3^n \equiv \begin{cases} 3 (\mathrm{mod}\ 8), & \text{если } n \\ 1 (\mathrm{mod}\ 8), & \text{если } n \text{ четное число} \end{cases}.$$

Тогда из этого следует, что

$$3^n+1\equiv\begin{cases}4(\text{mod } 8), & \text{если } n \text{ нечетное число}\\ 2(\text{mod } 8), & \text{если } n \text{ четное число}\end{cases}.$$

Итак, доказано, что число 3^n+1 не делится на число 2^3 для всех $n\in\mathbb{N}$. Таким образом, что число 3^n+1 при произвольном $n\in\mathbb{N}$ не делится на число 2^k при произвольном $k\geq 3$. $\square$

Из приведенного выше доказательства видно, что, например, простая модель $\mathfrak{M}_a$, которая реализует $Q_Z(x)$ для

$$Z=\Big\{(2,0),\ (3,\infty),\ (5,0),\ldots,\ (p_i,0),\ldots\ \Big|\ \big(2,3,5,\ldots\ p_i,\ldots\big)=\overline{\mathbf{P}},$$

$$\big(0,\infty,0,\ldots 0,\ldots\big)=\overline{\mathbf{M}}\Big\},$$

также реализует $Q_{Z'}(x)$ для

$$Z'=\Big\{(2,m_0),\ (3,m_1),\ldots,\ (p_i,m_i),\ldots\ \Big|\ \big(2,3,\ldots\ p_i,\ldots\big)=\overline{\mathbf{P}},$$

$$\big(m_0,m_1,\ldots m_i,\ldots\big)=\overline{\mathbf{M}}\Big\}.$$

Здесь из Леммы 11 видно, что $m_1=0$ и m_0 равно 2 или 4, то есть $\neg Z\wr Z'$. С другой стороны, $\mathfrak{M}_a\models Q_{Z'}(x)$, т.е. $\mathfrak{M}_{a_i}\cong\mathfrak{M}_{a_i+1}$. Итак, хотя $\neg Z\wr Z'$, мы видим, что простые модели над $Q_Z(x)$ и $Q_{Z'}(x)$ могут быть изоморфны.

В общем, для произвольного $a'\in K_a$ верно, что $\mathfrak{M}_a\cong\mathfrak{M}_{a'}$. Поскольку множество K_a счетно, а класс типов $Q_Z(x)$ континуально, существует континуальное число неизоморфных простых моделей.

Пусть a будет реализацией типа $Q_Z(x)$ для множества пар Z, и пусть $\mathfrak{M}_a$ — простая модель над $\{a\}$. Пусть Z_1 будет множеством таких пар, что простая модель $\mathfrak{M}_{a_1}$ над типом $Q_{Z_1}(x)$ не изоморфна модели $\mathfrak{M}_a$. Тогда мы можем получить простую модель $\mathfrak{M}_{\{a,a_1\}}$ над множеством $\{a,a_1\}$. Тогда видно, что $\mathfrak{M}_a\preceq\mathfrak{M}_{\{a,a_1\}}$. Пусть Z_2 будет множеством таких пар, что простая модель $\mathfrak{M}_{a_2}$ над типом $Q_{Z_2}(x)$ не изоморфна моделями $\mathfrak{M}_{a_1}$ и $\mathfrak{M}_a$. Тогда мы можем получить простую модель $\mathfrak{M}_{\{a,a_1,a_2\}}$ над множеством $\{a,a_1,a_2\}$. Тогда видно, что $\mathfrak{M}_a\preceq\mathfrak{M}_{\{a,a_1\}}\preceq\mathfrak{M}_{\{a,a_1,a_2\}}$. Продолжая этот процесс, формируем элементарную цепь следующим образом:

$$\mathfrak{M}_a\preceq\mathfrak{M}_{\{a,a_1\}}\preceq\cdots\preceq\mathfrak{M}_{\{a,a_1,\ldots,a_i\}}.$$

Тогда модель $\overrightarrow{\mathfrak{M}}=\bigcup\limits_{i\in w}\mathfrak{M}_{\{a,\ldots,a_i\}}$, составленная из этой элементарной цепи, является предельной моделью. Поскольку количество простых моделей в элементарной цепи, образующей эту предельную модель, счетно, мы можем получить континуум таких предельных моделей.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 15. *Для теории* $T = \mathrm{Th}(\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle)$ *в тройке распределения* cm_3 *имеет место* $P(T) = 2^\omega$ *и* $L(T) = 2^\omega$

Список литературы

[1] S. V. Sudoplatov, Classification of countable models of complete theories, Part 2, Novosibirsk : NSTU, 2018, 394 p. (Russian)

[2] S. V. Sudoplatov, E. V. Ovchinnikova, Mathematical logic and theory of algorithms: Tutorial, 5th edition, Moscow : Urait, 208 p. (Russian)

[3] R. A. Popkov, S. V. Sudoplatov, Distributions of countable models of theories with continuum many types, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 267–291.

[4] R. A. Popkov, S. V. Sudoplatov, On distributions of countable models of theories with continuum many types, Syntax and semantics of logic systems. Proceedings of 4th Russian school-seminar, Irkutsk : Edition of FGBOU VPO East-Siberian State Academy of Education, 2012, 98–102. (Russian)

[5] R. A. Popkov, On number of prime and limit models of the theory of additive group of integers, Bulletin of Omsk University, **72**, 2 (2014), 34–36. (Russian)

[6] R. A. Popkov, The distribution of countable models of the theory of the group of integers, Siberian Mathematical Journal, **56**, 1 (2015), 155–159.

[7] J. T. Baldwin, A. R. Blass, A. V. W. Glass, D. W. Kueker, A 'natural' theory without a prime model, Algebra Universalis, **3**, 1 (1973), 152–155.

[8] Yu. L. Ershov, E. A. Palyutin, Mathematical Logic, Moscow : Fizmatlit, 2011, 356 p. (Russian)

[9] L. Fuchs, Infinite Abelian groups, Volume I, New York, London : Academic Press, 1970, 289 p.

[10] A. Stonestrom, Some model theory of $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, \cdot)$, Mathematical Logic Quarterly, **68**, 3 (2022), 288–303.

ПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ НОВИКОВА — ПУАССОНА

А. С. Захаров

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, 630073, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2, 630090, Новосибирск, Россия

e-mail: antzakh@gmail.com

Алгебры Новикова были введены независимо в работах И. М. Гельфанда и И. Я. Дорфман [1] и в работе А. А. Балинского и С. П. Новикова [2]. Алгебра $\langle A, \circ\rangle$ называется алгеброй Новикова, если выполнены тождества

$$(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ b;$$
$$(a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c) = (b \circ a) \circ c - b \circ (a \circ c)$$

для всех элементов $a, b, c \in A$.

В работе Е. И. Зельманова [3] показано, что алгебры Новикова над полем характеристики 0 являются полями. В качестве нетривиального примера можно рассмотреть конструкцию, которая описана в работах В. Т. Филиппова [4] и С. Су [9]

Пример 1. Пусть $\mathbb{F}$ — поле и G — аддитивная подгруппа $\langle \mathbb{F}, +\rangle$, $q \in G$ — произвольный элемент, $J = \{0\}$ или $J = \mathbb{N}$. Рассмотрим векторное пространство с базисом $\{x_{a,i} \mid a \in G, i \in J\}$. Определим произведение следующим образом:

$$x_{a,i}x_{b,j} = x_{a+b+q,i+j}.$$

Определим отображение d формулой

$$d(x_{a,i}) = (a + q)x_{a,i} + ix_{a,i-1}.$$

Тогда d — дифференцирование. Соответствующая алгебра Новикова — Пуассона, заданная формулой

$$a \circ b = ad(b) + \lambda ab \tag{1}$$

для некоторого λ, будет простой, если $|G| > 2$, или $q = 0$, или $\lambda \neq q$.

Изучению конечномерных алгебр Новикова над полем характеристики больше двух посвящены работы Дж. М. Осборна [5, 6, 7]. На их основе С. Су [8] построил классификацию конечномерных алгебр Новикова над полем характеристики больше двух.

Теорема 2 (Су). *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 2$ и A — простая конечномерная алгебра Новикова. Тогда A имеет базис из элементов x_i, где $i = -1, \ldots, p^n - 2$, и умножение задается формулой*

$$x_i \circ x_j = \binom{i+j+1}{j} x_{i+j} + \delta_{i,-1}\delta_{j,-1}\alpha x_{p^n-2} + \delta_{i,-1}\delta_{j,0}\beta x_{p^n-2}$$

для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Алгебры Новикова — Пуассона возникли в работе С. Су [9] для изучения тензорной теории алгебр Новикова. Алгебра $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ называется алгеброй Новикова — Пуассона, если $\langle A, \cdot\rangle$ — ассоциативная коммутативная алгебра, $\langle A, \circ\rangle$ — алгебра Новикова, и выполнены тождества

$$a(b \circ c) = ab \circ c;$$
$$ab \circ c - a \circ bc = cb \circ a - c \circ ba.$$

Возникает естественный вопрос: как устроены простые алгебры Новикова — Пуассона?

Зафиксируем обозначение $A^2 = A \cdot A$.

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики не 2, $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — простая алгебра Новикова — Пуассона и $A^2 = A$. Тогда $\langle A, \circ\rangle$ — простая или $A \circ A = 0$.*

Заметим, что требование к характеристике поля существенно. Рассмотрим пример, который разбирался в работах [4, 10]. Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики два. Возьмем алгебру из Примера 1 с условием

$$J = \{0\}, G = \{0, 1\}, q = \lambda = 1.$$

Получим алгебру A с базисом x_0, x_1 и таблицей умножения

$$x_0x_0 = x_1x_1 = x_1,\ x_0x_1 = x_0,\ x_0 \circ x_0 = x_1 \circ x_0 = 0,\ x_0 \circ x_1 = x_0,\ x_1 \circ x_1 = x_1.$$

Тогда $\mathbb{F}x_0$ — собственный идеал $\langle A, \circ\rangle$, в то время как $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — проста.

Следствие 4. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — конечномерная простая алгебра Новикова — Пуассона над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ характеристики 0. Тогда $\langle A, \cdot\rangle$ — поле $\mathbb{F}$, а также $a \circ b = \lambda ab$.*

Следствие 5. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — конечномерная простая алгебра Новикова — Пуассона над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ характеристики $p > 2$. Тогда $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — алгебра из примера 2, а ассоциативное коммутативное умножение задано формулой*

$$a \cdot b = \xi * a * b,$$

где $\xi \in A$ и умножение $*$ задано формулой

$$x_i * x_j = \binom{i+j+2}{i+1} x_{i+j+1}. \tag{2}$$

Список литературы

[1] I. M. Gelfand, I. Ya. Dorfman, Hamiltonian operators and algebraic structures related tothem, Funktsional. Anal. i Prilozhen **13**, 4 (1979), 13–30.

[2] A A. Balinskii, S. P. Novikov, Poisson brackets of hydrodynamic type, Frobenius algebras and Lie algebras, Dokl. Akad. Nauk SSSR **283**, 5 (1985), 1036–1039.

[3] E. I. Zelmanov, A class of local translation-invariant Lie algebras. Dokl. Akad. Nauk SSSR **292**, 6 (1987), 1294–1297.

[4] V. T. Filippov, A class of simple nonassociative algebras, Mat. Zametki, **45(1)** (1989), 101–105.

[5] J. M. Osborn, Modules for Novikov algebras, Contemp. Math., **184** (1991), 327–338.

[6] J. M. Osborn, Novikov algebras, Nova J. Algebra Geom., **1**, 1 (1992),1–13.

[7] J. M. Osborn, Simple Novikov algebra with an idempotent, Comm. Algebra, **20**, 9 (1992), 2729–2753.

[8] X. Xu, On Simple Novikov Algebras and Their Irreducible Modules, J. Algebra, **185** (1996), 905–934.

[9] X. Xu, Novikov-Poisson algebra, J. Algebra, **190**, 2 (1997), 253–279.

[10] V. N. Zhelyabin, A. S. Tikhov, Novikov–Poisson algebras and associative commutative derivation algebras, Algebra Logika, **47**, 2 (2008), 107–117.

Abstracts

A. V. Chekhonadskikh. *Algebraic approach to stabilization of non-classical dynamical systems by a low-order controller.*

The survey is devoted to recent author's results related to low-order controllers design for non-classical LTI systems. We consider only SISO systems and focus on those characteristics that are directly related to characteristic polynomial roots. Using critical root diagrams we achieve optimal pole locations and relative stability maximum by controller parameters tuning. Algebraic tools developed for classical control systems described by ODE are applied to the gyroscopic stabilization of multidimensional vibrational structures and low-order control design for DAE and delay systems.

G. Czedli. *Generating the direct powers of a Boolean lattice with an extra 0.*

For an integer $r > 1$, let $B_{r,0}$ denote the $(2^r + 1)$-element lattice that we obtain from the 2^r-element Boolean lattice by adding a new least element to it. For another integer $k \geq 2$, let $n = n(r, k)$ be the smallest integer such that the k-th direct power $B_{r,0}^k$ of $B_{r,0}$ can be generated by n elements. Motivated by the applicability of large lattices with small generating sets in authentication and cryptology, we give a lower estimate of $n(r, k)$ and an upper estimate of $n(4, k)$. (For $r < 4$, lower estimates have been known.) To reach this goal, we prove a Sperner (type) theorem. With our estimates, we can efficiently determine $n(4, k)$ for most k's up to about $k \leq 10^{299}$; for the rest of k's of this magnitude, we can give two consecutive integers such that $n(4, k)$ is one of them. For example, if $k = 10^{299}$, then $n(4, k) = 1001$.

D. Y. Emelyanov. *Algebra of binary isolating formula for graphs with simplexes.*

In this paper we show examples of absorption algebras for graph theories with simplexes, algebras for theories obtained under different products of graphs.

I. B. Kozhukhov, D. Yu. Manilov, A. V. Reshetnikov. *Isomorphisms of transformation semigroups.*

In the 50s–80s of the last century, various authors proved by various methods a number of theorems that every isomorphism $\Phi : U(X) \to U(Y)$ of semigroups of transformations (full, partial, multivalued, etc.) is induced by some one-to-one mapping $X \to Y$. In this paper, a unified method of proving these theorems is proposed. It is based on the following remark: any subset of a semigroup defined by a first-order logic formula passes by the isomorphism of semigroups into a similar subset of the second semigroup. In addition, we prove a similar theorem for the semigroup of full binary relations.

B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov. *Separation properties for hypergraphs of models of quite o-minimal theories.*

We study properties of the concepts of separability for hypergraphs of models of a quite o-minimal theory. Characterizations of T_0-separability and Hausdorff separability are established. An example is given that shows the importance of quite o-minimality for this characterization.

S. B. Malyshev. *Closure operators in cubic and acyclic theories.*
The article focuses on various aspects of pregeometries with an algebraic closure operator in the context of acyclic theories. It explores the conditions under which the substitution property for pregeometries is violated in these theories. To address these conditions, novel concepts are introduced, independent of the substitution property, such as a-pregeometries and a-modularity. The article establishes conditions of dependence for a-modular and a-locally finite a-pregeometries based on the number of non-isomorphic trees and special points. Furthermore, it provides sufficient conditions for dependence on the vertices of the a-type for a-locally finite a-pregeometries.

V. A. Molchanov, R. A. Farakhutdinov. *On the problem of axiomatization of some classes of universal graphic semiautomata.*
Automata theory is one of the branches of mathematical cybernetics, that studies information transducers that arise in many applied problems. The major objective of automata theory is to develop methods by which one can describe and analyze the dynamic behavior of discrete systems. Depending on study tasks, automata are considered, for which the set of states and the set of output signals are equipped with additional mathematical structures preserved by the transition and output functions of automata. In this paper, we investigate automata without output signals over graphs and call them graphic semiautomata. In the category of graphic semiautomata, for which the set of states is equipped with the structure of the graph, there exists a universally attracting object, which is called universal graphic semiautomaton. For such semiautomata we consider the abstract characterization problem. The main result of this paper demonstrates that classes of such semiautomata are not axiomatizable for some wide classes of reflexive graphs. To show this the restricted predicate calculus language is used.

In. I. Pavlyuk, I. I. Pavlyuk. *On the solution of comparison concerning the commutativity relation in groups.*
The formula solving the binary comparison of commutativity in a group is found and a corollary on the number of classes of conjugate elements of a finite group is obtained.

In. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov. *On algebraic and definable closures for finite structures.*
Possibilities for algebraic and definable closures are studied and described for finite structures. These possibilities are applied for the description of degrees of algebraization for finite abelian groups using Euler function.

A. G. Pinus. *Definability of universal algebras by semigroups of their transformations.*

Some survey of results on relationship of universal algebras having some identical semigroups of their transformations is given.

N. L. Polyakov. *Closed classes of infinitary functions and their applications in the Theory of Ultrafilters.*

We extend some concepts and statements of the theory of closed classes of discrete functions to the infinitary case. Using this approach, we obtain new results in the theory of ultrafilters.

A. M. Popova, O. V. Bryurhanov. *Calculation of the conjugation matrix of automorphisms of integer group rings.*

In the article, the composition of two automorphisms of a rational group algebra of a finite group is studied. The first of them is induced by an automorphism of the character field of a given finite group while the second automorphism is an inner automorphism of that rational group algebra. An algorithm testing if such a composition of two automorphisms is an automorphism of the integer group ring of this finite group is described.

A. P. Pozhidaev. *Simple pre-Lie algebras: Endomorphs, Burde algebras and Mizuhara construction.*

Given survey on simple pre-Lie (right-symmetric) algebras is an extended version of the plenary talk presented on the 15th international conference Erlagol-2023 “Problems Allied to Model Theory and Universal Algebra”

D. V. Solomatin. *Investigation of the Planarity Properties of Cayley Graphs of Regarding Semigroups.*

In the paper, we survey a some result in investigations on semigroups with planar Cayley graphs and results on the study of planarity rank of a semigroup varieties.

A. A. Stepanova, E. L. Efremov, S. G. Chekanov. *On pseudofinite acts over finite monoids.*

The work has begun to study the structure of pseudofinite acts over a monoid. An example of a finite monoid is constructed over which there is both a pseudofinite act and a non-pseudofinite act. It is proved that any act over a finite group is pseudofinite.

S. V. Sudoplatov. *Conditional characteristics of rigidity.*

We define conditional characteristics of rigidity, degrees and indexes, and describe properties and links for these characteristics.

I. K. Uktamaliev. *On distributions of countable models of theories of monoids of natural numbers..*

The distribution of countable models for the theory has been studied additive monoids of natural numbers. It is shown that this theory has a fairly productive basis, which is used to define models. For the additive theory of natural numbers it is proved that the number of simple and limit models is more than countable.

A. S. Zakharov. *Simple Novikov—Poisson algebras.*

We proved that if A is a simple Novikov — Poisson (super)algebra then their Novikov part is a simple algebra when field characteristic is not 2. Also we obtained all finite dimension simple Novikov — Poisson algebras over a field of characteristic not 2.

Содержание

ALGEBRA AND MODEL THEORY 14

Collection of papers

Edited by *A. Pinus, E. Poroshenko,*
S. Sudoplatov

Technical editor *E. Poroshenko*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции.
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Периодичность 1 раз в 2 года
Подписано к печати 10.11.2023. Формат 70 × 108 1/16. Бумага офсетная
Тираж 80 экз. Уч.-изд. л. 14,7. Печ. л. 10,5. Изд. № 230. Заказ № 288.

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20