Novosibirsk State Technical University

Algebra and Model Theory 7

Collection of papers
edited by A.G. Pinus, K.N. Ponomarev and S.V. Sudoplatov

Novosibirsk
2009

512(06)

Algebra and Model Theory. Collection of papers. Edited by A.G. Pinus, K.N. Ponomarev and S.V. Sudoplatov. Novosibirsk State Technical University, 2009. — 152 p.

ISBN 5–7782–0175–3

The papers in this book are devoted to some problems of algebra and model theory.

Technical editor I.D. Chernykh.

© Novosibirsk State Technical University

Introduction

Algebra and Model Theory 7

The Eighth Summer School "Frontiers in Model Theory and Universal Algebra" was held on 22–27 of June 2009 in the camping center "Erlogol" in Altai mountains. The School was organized by Algebra and Math Logic department of Novosibirsk State Technical University (NSTU). Thirty participants took part in the conference.

The School was supported by RFBR (grant N 09-01-06069).

The book is composed from some articles of the participants. Organizing Committee of the conference thanks Dean of Faculty for External Education Prof. Z.S. Temljakova for financial support of this edition.

Chairmen of Organizing Committee:

Prof. Victor D. Mazurov (Institute of Mathematics of Siberian Branch of Academy of Sciences),

Prof. Alexander V. Mikhalev (Moscow State University),

Prof. Evgenii A. Palyutin (Institute of Mathematics of Siberian Branch of Academy of Sciences),

Prof. Alexander G. Pinus (NSTU),

Prof. Konstantin N. Ponomaryov (NSTU),

Prof. Sergey V. Sudoplatov (Institute of Mathematics of Siberian Branch of Academy of Sciences, NSTU).

Secretary:

Associate Prof. Evgenii N. Poroshenko (NSTU).

Erlogol 2009
Intermediate Problems of Model Theory and Universal Algebra
(June, 22–27)

23 June. Chairman Sergey Sudoplatov

V.M. Kopytov (*Novosibirsk, Russia*).

On a certain collecting process in ordered groups.

V.A. Churkin (*Novosibirsk, Russia*).

On isomorphisms of crystallographic groups in pseudo-Euclidean spaces.

Chairman Valery Churkin

O.V. Bryukhanov (*Novosibirsk, Russia*).

On matrix generation of finitely generated groups.

K.M. Skorobogatov (*Novosibirsk, Russia*).

Lattices of subsemilattices of finite trees.

D.Yu. Vlasov (*Novosibirsk, Russia*).

Language of formal mathematics mdl.

24 June. Chairman Valery Kopytov

E.I. Timoshenko (*Novosibirsk, Russia*).

Partially-commutative metabelian groups.

S.V. Sudoplatov (*Novosibirsk, Russia*).

Countable models of small theories.

Chairman Sergey Odintsov

M.A. Grechkoseeva (*Novosibirsk, Russia*).

Recognizing of groups by spectrum and order.

F.A. Dudkin (*Novosibirsk, Russia*).

Subgroups of finite index in Baumslag-Solitar groups.

K.A. Baikalova (*Novosibirsk, Russia*).

On some hypergraphs of prime models.

26 June. Chairman Evgenii Timoshenko

S.P. Odintsov (*Novosibirsk, Russia*).

Priestley duality and Nelson lattices.

A.V. Chekhonadskih (*Novosibirsk, Russia*).

Graphs of root simplexes of real polynomials.

О НЕКОТОРЫХ ГИПЕРГРАФАХ ПРОСТЫХ МОДЕЛЕЙ И ПОРОЖДАЕМЫХ ИМИ ПРЕДЕЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ

К.А. Байкалова

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: bkristina@bk.ru

В общей теории графов и приложениях заметную роль играют гиперграфы [1]–[3]. В работе [4] гиперграфовый подход применен к описанию моделей теорий, у которых носители минимальных простых моделей образуют ациклические структуры. При этом диаметры гиперграфов таких структур исчерпываются значениями 1, 2 или ∞. В настоящей работе положительно решается вопрос о существовании теорий, у которых гиперграфы минимальных простых моделей имеют произвольный заданный диаметр.

В последнее время возрастает интерес к изучению гиперграфов элементарных простых (над конечными множествами) подмоделей данной счетной насыщенной модели [5]. Это связано с тем, что элементарные цепи простых над кортежами моделей определяют всевозможные счетные модели малых теорий, т.е. теорий, имеющих счетное число типов над пустым множеством. В книге [5] показано, что любая счетная модель малой теории проста над некоторым конечным множеством или предельна, т.е. представляется в виде объединения элементарной цепи простых над кортежами моделей, а сама не является простой ни над каким конечным множеством. В связи с этим в работе приводятся описания как гиперграфов простых над кортежами моделей серии конкретных теорий, так и предельных моделей, порождаемых этими гиперграфами.

В работе без пояснений используется стандартная теоретико-модельная терминология [6]–[7].

1 Вложения графов в гиперграфы минимальных простых моделей

Модель называется *минимальной*, если она не содержит собственных элементарных подмоделей.

Модель M_0 называется *простой*, если для любой модели M_1 теории T существует элементарная подмодель M_2 модели M_1, изоморфная M_0.

Гиперграфом называется любая пара множеств $\Gamma = (X, Y)$, где Y — некоторое подмножество булеана $P(X)$.

Маршрутом длины n в гиперграфе Γ называется любая последовательность элементов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ из X такая, что существуют $y_i \in Y$ такие, что $a_i, a_{i+1} \in y_i$ и $y_i \neq y_{i+1}$.

Расстоянием между элементами a и b гиперграфа Γ называется длина кратчайшего маршрута от a до b в Γ, если такой маршрут существует, и расстояние между a и b бесконечно в противном случае.

Связной компонентой гиперграфа Γ называется любое подмножество множества , в котором любые два элемента связаны маршрутами.

Диаметром $d(\Gamma)$ гиперграфа Γ называется наибольшее из расстояний между элементами, лежащими в одной компоненте связности.

Обозначим через $H(M)$ множество носителей всевозможных минимальных простых подмоделей модели M. Пара $(M, H(M))$ называется *гиперграфом минимальных простых подмоделей модели* M.

Ниже в этом параграфе будет установлена следующая теорема.

Теорема. *Любой граф* Γ*, содержащий только дуги или только ребра, вложим в некоторый гиперграф* $(M, H(M))$ *минимальных простых моделей (тригонометрической) теории так, что каждая дуга (ребро) графа* Γ *принадлежит единственной минимальной простой модели из этого гиперграфа и* $d(\Gamma) = d(M, H(M))$.

Напомним серию определений из работ [8]–[9].

Система $\mathcal{P} = \langle P, L, I\rangle$, где P — множество *точек*, L — множество *линий*, $I \subseteq P \times L$ — *отношение инцидентности*, называется *точной* (λ_1, λ_2)-*псевдоплоскостью*, где λ_1, λ_2 — некоторые кардиналы, если выполняются следующие предложения:

$$\forall p \in P \ \ \exists^{=\lambda_1} l \in L \ \ I(p, l), \ \ \forall l \in L \ \ \exists^{=\lambda_2} p \in P \ \ I(p, l),$$
$$\forall p_1 \neq p_2 \in P \ \ \exists^{\leq 1} l \in L \ \ (I(p_1, l) \wedge I(p_2, l)),$$
$$\forall l_1 \neq l_2 \in L \ \ \exists^{\leq 1} p \in P \ \ (I(p, l_1) \wedge I(p, l_2)).$$

Здесь $\exists^{=\lambda}$ означает “существует ровно λ”, а $\exists^{\leq 1}$ — “существует не более одного”.

Пусть $\mathcal{P} = \langle P, L, \in\rangle$ — (λ_1, λ_2)-псевдоплоскость. Если p_1, p_2 — точки псевдоплоскости $\mathcal{P}$, то наименьшее число n, для которого существуют линии $l_1, \ldots, l_n$ с условиями $p_1 \in l_1$, $p_2 \in l_n$, $l_i \cap l_{i+1} \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, n-1$, называется *расстоянием* $d(p_1, p_2)$ *между точками* p_1 *и* p_2, если такая последовательность линий существует, и $d(p_1, p_2) \rightleftharpoons \infty$, если такой последовательности нет.

Пусть $\mathcal{P}' = \langle P', L', \in\rangle$ — (λ_1, λ_2)-псевдоплоскость, для которой $P' \subseteq P$, $L' \subseteq L$ и P', L' — максимальные подмножества P и L соответственно такие, что расстояния между любыми двумя точками конечны. Тогда псевдоплоскость $\mathcal{P}'$ называется *связной компонентой* или *компонентой связности* псевдоплоскости $\mathcal{P}$. Число связных компонент псевдоплоскости $\mathcal{P}$ обозначается через $c(\mathcal{P})$. Псевдоплоскость $\mathcal{P}$ называется *связной*, если $c(\mathcal{P}) = 1$. *Диаметром* $d(\mathcal{P})$ псевдоплоскости $\mathcal{P}$ называется наибольшее расстояние между точками, принадлежащими одной и той же связной компоненте, если такое расстояние существует, и символ ∞, если расстояния в некоторой связной компоненте не ограничены.

Точная (λ_1, λ_2)-псевдоплоскость $\mathcal{P}$ называется *плоскостью*, если выполняется

$$\forall p_1 \neq p_2 \in P\, \exists^{=1} l \in L\, (I(p_1, l) \wedge I(p_2, l)).$$

Плоскость $\mathcal{P}$ называется *проективной плоскостью*, если

$$\forall l_1 \neq l_2 \in L\, \exists^{=1} p \in P\, (I(p, l_1) \wedge I(p, l_2)).$$

Точная (λ_1, λ_2)-псевдоплоскость называется *точной λ-псевдоплоскостью*, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Любая последовательность, состоящая из $n \geq 3$ точек $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, для которых существуют линии $l_1, l_2, \ldots, l_n$ такие, что $p_1, p_2 \in l_1$, …, $p_{n-1}, p_n \in l_{n-1}$, $p_n, p_1 \in l_n$, называется *n-угольником* или *многоугольником*. Как обычно при $n = 3$ n-угольник называется *треугольником*, при $n = 4$ — *четырехугольником* и т.д. Последовательность точек $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ $(n \geq 1)$, для которых существуют линии $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$ такие, что $p_1, p_2 \in l_1$, …, $p_{n-1}, p_n \in l_{n-1}$, называется *ломаной*.

Обозначим через $l(p_1, p_2)$ линию, проходящую через две данные точки p_1 и p_2, $p_1 \neq p_2$, через $p(l_1, l_2)$ — точку пересечения двух данных линий l_1 и l_2, $l_1 \neq l_2$.

Пусть G_1, G_2 — некоторые группы, $G_1 \neq \{e\}$. Система $\langle G_1, G_2, \mathcal{P}\rangle$ (обозначаемая через $\mathrm{pm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$) называется *полигонометрией пары групп* (G_1, G_2) на точной $(|G_1|, |G_2|)$-псевдоплоскости $\mathcal{P} = \langle P, L, \in\rangle$, если выполняются следующие условия:

(a) для любой линии $l \in L$ (соответственно для любой точки $p \in P$) группа G_1 (соответственно G_2) действует точно транзитивно на множестве точек из l (на множестве линий, проходящих через точку p), т.е. для любых $p', p'' \in l$ существует единственный элемент $g_1 \in G_1$ такой, что $p'' = p'g_1$ на множестве l, и для любых линий l', l'', содержащих точку p, найдется единственный элемент $g_2 \in G_2$ такой, что $l'' = l'g_2$ на множестве $\{l \in L \mid p \in l\}$;

(б) для любых $p_1, p_2 \in P$ и $l_1, l_2 \in L$, если $p_1 \in l_1$ и $p_2 \in l_2$, то существует биекция $f : P \to P$ такая, что

(i) $f(p_1) = p_2$, $f(l_1) = l_2$;

(ii) $f(l)$ принадлежит множеству L для любой линии $l \in L$, и $f(\{l \mid p \in l\}) = \{l \mid f(p) \in l\}$ для любой точки $p \in P$;

(iii) для любой линии l и точек $p', p'' \in l$, если $p'' = p'g_1$ на l, то $f(p'') = f(p')g_1$ на $f(l)$; для любой точки p и линий l', l'', содержащих точку p, если $l'' = l'g_2$ на множестве $\{l \mid p \in l\}$, то $f(l'') = f(l')g_2$ на множестве $\{l \mid f(p) \in l\}$.

При этом биекции f называются *автоморфизмами* полигонометрии $\mathrm{pm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$.

Если каждый многоугольник полигонометрии $\mathrm{pm} = \mathrm{pm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ распадается на треугольники, то полигонометрия pm называется *тригонометрией* и обозначается $\mathrm{trm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ или сокращенно trm.

Пусть $S = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — некоторый *многоугольник* в полигонометрии $\mathrm{pm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$, т.е. последовательность точек, для которых существуют линии $l_1, l_2, \ldots, l_n$ такие, что $p_1, p_2 \in l_1$, $\ldots$, $p_{n-1}, p_n \in l_{n-1}$, $p_n, p_1 \in l_n$. Тогда параметры сторон многоугольника S задаются элементами a_i *группы сторон* G_1, переводящими точки p_i в точки p_{i+1} на линиях l_i, $i = 1, \ldots, n-1$, и элементом $a_n \in G_1$, переводящим точку p_n в точку p_1 на линии l_n. Соответственно параметры углов многоугольника S определяются элементами α_i *группы углов* G_2, переводящими линии l_i в линии l_{i+1} на множествах $\{l \mid p_{i+1} \in l\}$, $i = 1, \ldots, n-1$, и элементом $\alpha_1 \in G_2$, переводящим линию l_n в линию l_1 на множестве $\{l \mid p_1 \in l\}$. Таким образом, параметры многоугольника S задаются матрицей $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$, которую в дальнейшем будем называть $(G_1, G_2) - n$*-угольником*, или просто (G_1, G_2)*-многоугольником*.

Теорией $T(\mathrm{pm})$ *полигонометрии* $\mathrm{pm} = \mathrm{pm}(G_1, G_2, \langle P, L, \in\rangle)$ называется теория $\mathrm{Th}(\mathcal{M}(\mathrm{pm}))$, где $\mathcal{M}(\mathrm{pm}) = \langle P; \langle Q_{g_1}^{(2)} \mid g_1 \in G_1\rangle, \langle R_{g_2}^{(3)} \mid g_2 \in G_2\rangle\rangle$, $Q_{g_1} = \{(p, p') \mid p' = pg_1$ на некоторой линии $l \in L\}$, $g_1 \in G_1$, $R_{g_2} = \{(p, p', p'') \mid$ существуют $l(p, p'), l(p, p'')$ и $\angle(l(p, p'), l(p, p'')) = g_2\}$, $g_2 \in G_2$. Если trm — тригонометрия, то теория $T(\mathrm{trm})$ называется *тригонометрической*.

Пусть pm — полигонометрия пары групп (G_1, G_2) на точной псевдоплоскости $\mathcal{P} = \langle P, L, \in \rangle$. *Графом* $\Gamma(\mathrm{pm})$ *полигонометрии* pm называется граф $\langle P, \{Q_g \mid g \in G_1\}\rangle$ с цветными дугами, где $Q_g \rightleftharpoons \{\langle p_1, p_2\rangle \mid p_2 = p_1 g$ на некоторой линии $l \in L\}$.

Углом между дугами $\langle p, p_1\rangle \in Q_{g_1}$ *и* $\langle p, p_2\rangle \in Q_{g_2}$, $g_1, g_2 \neq e$, в полигонометрии pm называется угол между линиями $l(p, p_1)$ и $l(p, p_2)$. *Углом между дугой* $\langle p, p_1\rangle \in Q_{g_1}$ *и линией* l в полигонометрии pm называется угол между линиями $l(p, p_1)$ и l.

Пусть G — неединичная группа. Определим операцию TA_G *древесного присоединения* к связной полигонометрии pm цветных дуг, соответствующих элементам из G. Зададим полигонометрию $\mathrm{TA}_G(\mathrm{pm})$ следующими условиями:

1) $\mathrm{TA}_G(\mathrm{pm})$ — связная полигонометрия пары групп $(\bar{G}_1, \bar{G}_2)$, где $\bar{G}_1 = G_1 *_{G_1 \cap G} G$, $\bar{G}_2 = G_2 * \mathbb{Z}$;

2) $\mathbf{S}(\mathrm{TA}_G(\mathrm{pm})) = \mathrm{GN}\big(\mathbf{S}(\mathrm{pm}) \cup \boldsymbol{\Delta}_e(\bar{G}_1, \bar{G}_2)\big)$, где $\mathbf{S}(\mathrm{TA}_G(\mathrm{pm}))$ — множество $(\bar{G}_1, \bar{G}_2)$-многоугольников полигонометрии $\mathrm{TA}_G(\mathrm{pm})$, $\mathbf{S}(\mathrm{pm})$ — множество (G_1, G_2)-многоугольников полигонометрии pm, $\boldsymbol{\Delta}_e(\bar{G}_1, \bar{G}_2)$ — множество $(\bar{G}_1, \bar{G}_2)$-треугольников полигонометрии, содержащих единичные параметры, GN — оператор порождения $(\bar{G}_1, \bar{G}_2)$-многоугольников полигонометрии из данного множества $(\bar{G}_1, \bar{G}_2)$-многоугольников.

Полигонометрия $\mathrm{TA}_G(\mathrm{pm})$ определяется однозначно с точностью до изоморфизма. При этом к каждой точке p каждой линии l полигонометрии pm присоединяется дуга $\langle p, p'\rangle \in Q_g$, $g \in \bar{G}_1$, которая в полигонометрии pm образует угол $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ с линией l и не принадлежит никаким циклам C в $\Gamma(\mathrm{TA}_G(\mathrm{pm}))$ с условием $C \cap l(p, p') = \{p, p'\}$.

Операцию взятия связной подполигонометрии полигонометрии $\mathrm{TA}_G(\mathrm{pm})$ по паре подгрупп (G_1, G_2) можно рассматривать как обратную операцию к операции TA_G, при которой добавленные дуги удаляются: связная компонента $\mathrm{TA}_G(\mathrm{pm}) \upharpoonright (G_1, G_2)$ полигонометрии, полученной ограничением действий групп полигонометрии $\mathrm{TA}_G(\mathrm{pm})$ на подгруппы G_1 и G_2, изоморфна полигонометрии pm.

Пусть α — элемент группы углов G_2, $K = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — ломаная в полигонометрии pm,

$$\mathbf{S} = \mathrm{GN}\ \Big(\ \mathbf{S}(\mathrm{pm}) \cup \boldsymbol{\Delta}_e(G_1, G_2) \cup$$
$$\cup \left\{ \left(\begin{array}{ccc} |p_1\hat{\ }p_2| & |p_2\hat{\ }p_3| & \ldots \\ \angle(l(p_1,p_2), l(p_2,p_3)) & \angle(l(p_2,p_3), l(p_3,p_4)) & \ldots \end{array} \right. \right.$$
$$\left. \left. \begin{array}{ccc} \ldots & |p_{n-2}\hat{\ }p_{n-1}| & |p_{n-1}\hat{\ }p_n| \\ \ldots & \angle(l(p_{n-2},p_{n-1}), l(p_{n-1},p_n)) & \alpha \end{array} \right) \right\} \Big) \ -$$

полигонометрическое множество. Обозначим через $\mathrm{VI}_{\alpha,K}(\mathrm{pm})$ связную полигонометрию пары групп (G_1, G_2), имеющую полигонометрическое множество $\mathbf{S}$. Операция $\mathrm{VI}_{\alpha,K}$ называется *α-отождествлением вершин p_1, p_n по ломаной K*.

Заметим, что результат действия операции $\mathrm{VI}_{\alpha,K}$ (если он определен) зависит только от выбора линий $l(p_1,p_2)$ и $l(p_{n-1},p_n)$, проходящих через точки p_1, p_n, но не от всей ломаной K. При этом отождествляются точки p_1 и p_n, а угол $\angle(l(p_{n-1},p_n), l(p_1,p_2))$ полагается равным α.

Пусть $AK = \{(\alpha_i, K_i) \mid i \in \lambda\}$ — семейство пар, для которых существуют полигонометрии $\mathrm{VI}_{\alpha_i,K_i}(\mathrm{pm})$, $i \in \lambda$, и

$$\mathrm{GN}\left(\bigcup_{i\in\lambda}\mathbf{S}(\mathrm{VI}_{\alpha_i,K_i}(\mathrm{pm})) \cup \mathbf{\Delta}_e(G_1,G_2)\right) \text{ —}$$

полигонометрическое множество. Обозначим через $\mathrm{VI}_{AK}(\mathrm{pm})$ связную полигонометрию, соответствующую этому множеству.

Напомним, что связная полигонометрия $\mathrm{pm} = \mathrm{pm}(G_1,G_2,\mathcal{P})$ называется *древесной*, если $\mathbf{S}(\mathrm{pm}) = \mathrm{GN}(\mathbf{\Delta}_e(G_1,G_2))$. Древесная полигонометрия определяется однозначно с точностью до изоморфизма по паре групп (G_1,G_2) и обозначается через $\mathrm{pm}_t(G_1,G_2,\mathcal{P})$.

Пусть pm — связная полигонометрия пары групп (G_1,G_2), не имеющая ломаных $(p_1,\ldots,p_n)$, параметры которых не меняются при движении из конца в конец, т.е. ломаных, для которых $|p_i\hat{\ }p_{i+1}| = |p_{i+1}\hat{\ }p_i|$, $\angle(l(p_i,p_{i+1}), l(p_{i+1},p_{i+2})) = \angle(l(p_{i+1},p_{i+2}), l(p_i,p_{i+1}))$. Пусть p_1,p_2 — различные точки из полигонометрии, являющиеся концами некоторой ломаной K с последовательными параметрами сторон и углов $a_1, \alpha_1, \ldots, a_{t-1}$, α_{t-1}, a_t. Пусть g — неединичный элемент некоторой группы G. Предположим, что в pm не существует линии $l(p_1,p_2)$ и отсутствуют многоугольники, препятствующие проведению линии $l(p_1,p_2)$. Определим операцию $L_{K,g,G}$ *проведения линии $l(p_1,p_2)$ в полигонометрии* pm, при которой образуется полигонометрия $L_{K,g,G}(\mathrm{pm})$, содержащая точки, линии и действия групп полигонометрии pm и такая, что $p_2 = p_1 g$ на $l(p_1,p_2)$.

Пусть β, β' - ненулевые элементы группы $\mathbb{Z}$ и ее копии $\mathbb{Z}'$. Определим связную полигонометрию $L_{K,g,G}(\mathrm{pm})$ пары групп $(\bar{G}_1,\bar{G}_2)$ (где $\bar{G}_1 = G_1 *_{G_1\cap G} G$, $\bar{G}_2 = G_2 * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}'$) соотношением $\mathbf{S}(L_{K,g,G}(\mathrm{pm})) = \mathbf{S}$, где

$$\mathbf{S} = \mathrm{GN}\ \left(\ \mathbf{S}(\mathrm{pm}) \cup \left\{\ \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_{t-1} & a_t & g \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_{t-1} & \beta & \beta' \end{pmatrix}\ \right\} \cup \mathbf{\Delta}_e(\bar{G}_1,\bar{G}_2)\ \right).$$

Очевидно, что множество $(\bar{G}_1,\bar{G}_2)$-многоугольников $\mathbf{S}$ является полигонометрическим, и, следовательно, полигонометрия $L_{K,g,G}(\mathrm{pm})$ существует.

Пусть p_1, p_2 — некоторые различные точки полигонометрии $\mathrm{pm} = \mathrm{pm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$, $S = (p^1, \dots, p^n)$ — многоугольник с концами $p^1 = p_1$, $p^n = p_2$ и матрицей параметров $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$, $a_n = |p_2 \hat{} p_1|$, $\alpha_{n-1} = \angle(l(p^{n-1}, p_2), l(p_2, p_1))$, $\alpha_n = \angle(l(p_2, p_1), l(p_1, p^2))$, G_1' —подгруппа группы G_1, $a_1, \dots, a_{n-1} \in G_1'$, G_2' —подгруппа группы G_2, $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2} \in G_2'$, $\alpha_{n-1}, \alpha_n \notin G_2'$. Связная подполигонометрия полигонометрии pm по паре групп (G_1', G_2'), содержащая точки p_1 и p_2, называется *полигонометрией, полученной удалением линии* $l(p_1, p_2)$ *по многоугольнику* S *и паре подгрупп* (G_1', G_2'), и обозначается через $R_{S,G_1',G_2'}(\mathrm{pm})$.

Отметим, что если S — многоугольник, состоящий из точек ломаной K, то $R_{S,G_1,G_2}\big(L_{K,g,G_1}(\mathrm{pm})\big) \simeq \mathrm{pm}$.

Если pm — полигонометрия пары групп (G_1, G_2), $G_1 \leq G_1'$, то связная полигонометрия $\mathrm{TE}_{G_1'}(\mathrm{pm})$ пары групп (G_1', G_2), определяемая соотношением $\mathbf{S}(\mathrm{TE}_{G_1'}(\mathrm{pm})) = \mathrm{GN}(\mathbf{S}(\mathrm{pm}) \cup \mathbf{\Delta}_e(G_1', G_2))$, называется *полигонометрией, полученной из полигонометрии* pm *древесным продолжением линий по группе* G_1'.

Пусть pm, pm$'$ — связные полигонометрии пар групп (G_1, G_2) и (G_1, G_2') соответственно. В классе связных полигонометрий определим операцию $*^{li}$ *древесной композиции полигонометрий* pm *и* pm$'$. В качестве группы сторон полигонометрии $\mathrm{pm} *^{li} \mathrm{pm}'$ рассмотрим группу G_1, в качестве группы углов — свободное произведение счетного числа копий группы $G_2 * G_2'$: $*_{i\in\omega}(G_2 * G_2')_i$. Положим

$$\mathbf{S}(\mathrm{pm} *^{li} \mathrm{pm}') \rightleftharpoons \mathrm{GN}\big(\mathbf{S}(\mathrm{pm}) \cup \mathbf{S}(\mathrm{pm}') \cup \mathbf{\Delta}_e(G_1, *_{i\in\omega}(G_2 * G_2')_i)\big).$$

Полигонометрия $\mathrm{pm} *^{li} \mathrm{pm}'$ может быть построена также с помощью следующей конструкции:

1) на шаге $n = 0$ каждая линия полигонометрии pm заменяется на полигонометрию pm$'$ с соответствующим распределением углов между линиями; образовавшуюся систему обозначим через $\mathcal{M}_0$;

2) если система $\mathcal{M}_n$ уже построена, то система $\mathcal{M}_{n+1}$ строится заменой каждой линии из $\mathcal{M}_n$ на систему $\mathcal{M}_n$ с соответствующим распределением углов между линиями.

Искомая полигонометрия $\mathrm{pm} *^{li} \mathrm{pm}'$ получается как система $\bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_n$.

Пусть pm, pm$'$ — связные полигонометрии пар групп (G_1, G_2) и (G_1', G_2') соответственно, p_1, p_2 — точки из pm, $p_1 \neq p_2$, являющиеся концами ломаной K, p_1', p_2' — точки из pm$'$, $p_1' \neq p_2'$, являющиеся концами ломаной K', так, что выполняется одно из следующих условий:

(а) точки p_1, p_2 не соединены линией в pm и не содержатся ни в каком многоугольнике, препятствующем проведению линии $l(p_1, p_2)$;

(б) точки p'_1, p'_2 не соединены линией в pm$'$ и не содержатся ни в каком многоугольнике, препятствующем проведению линии $l(p'_1, p'_2)$;

(в) существуют линии $l(p_1, p_2)$, $l(p'_1, p'_2)$, $p_2 = p_1 g_0$ в pm и $p'_2 = p'_1 g_0$ в pm$'$, $g_0 \in G_1 \cap G'_1$.

При этом пары точек (p_1, p_2) и (p'_1, p'_2) будем называть *согласованными*.

Определим операцию $\mathrm{TC}_{K,K',g,G}$ *древесного соединения полигонометрий* pm *и* pm$'$ *по парам вершин* (p_1, p_2), (p'_1, p'_2) и неединичному элементу g некоторой группы G $\big((\mathrm{pm}, \mathrm{pm}') \mapsto \mathrm{TC}_{K,K',g,G}(\mathrm{pm}, \mathrm{pm}')\big)$.

Если не существует линий $l(p_1, p_2)$ и $l(p'_1, p'_2)$, то

$$\mathrm{TC}_{K,K',g,G}(\mathrm{pm}, \mathrm{pm}') \rightleftharpoons R_{S,G_1 * G'_1, G_2 * G'_2}(L_{K,g,\bar{G}}(\mathrm{pm}) *^{li} L_{K',g,\bar{G}}(\mathrm{pm}')),$$

где S — многоугольник, состоящий из точек ломаной K,

$$\bar{G} = G_1 *_{G_1 \cap G} G *_{G \cap G'_1} G'_1.$$

Если не существует линии $l(p_1, p_2)$ и $p'_2 = p'_1 g_0$ на $l(p'_1, p'_2)$, то для $g = g_0$ положим

$$\mathrm{TC}_{K,K',g_0,G}(\mathrm{pm}, \mathrm{pm}') \rightleftharpoons L_{K,g_0,\bar{G}}(\mathrm{pm}) *^{li} \mathrm{TE}_{\bar{G}}(\mathrm{pm}').$$

Если $p_2 = p_1 g_0$ на $l(p_1, p_2)$, а $l(p'_1, p'_2)$ не существует, то

$$\mathrm{TC}_{K,K',g_0,G}(\mathrm{pm}, \mathrm{pm}') \rightleftharpoons \mathrm{TE}_{\bar{G}}(\mathrm{pm}) *^{li} L_{K,g_0,\bar{G}}(\mathrm{pm}').$$

В случае (в) положим

$$\mathrm{TC}_{K,K',g_0,G}(\mathrm{pm}, \mathrm{pm}') \rightleftharpoons \mathrm{TE}_{\bar{G}}(\mathrm{pm}) *^{li} \mathrm{TE}_{\bar{G}}(\mathrm{pm}').$$

Во всех случаях полигонометрии pm и pm$'$ вложимы в полигонометрию $\mathrm{TC}_{K,K',g,G}(\mathrm{pm}, \mathrm{pm}')$ так, что пара точек (p_1, p_2) отождествляется с парой точек (p'_1, p'_2), и если в одной из полигонометрий существует линия $l(p_1, p_2)$ или $l(p'_1, p'_2)$, то соответствующая линия имеется в $\mathrm{TC}_{K,K',g,G}(\mathrm{pm}, \mathrm{pm}')$.

С помощью перечисленных операций, исходя из древесной полигонометрии, пошаговыми построениями можно получить такую полигонометрию pm, что граф Γ будет вложим в граф $\Gamma(pm)$ и при этом $d(\Gamma) = d(\Gamma(\mathrm{pm}))$. Обозначим $M = \mathrm{pm} *^{li} \mathrm{pm}$. Тогда $\mathrm{Th}(M)$ — искомая теория и граф Γ вложим в гиперграф $(M, H(M))$ так, что образ каждой дуги (ребра) графа Γ принадлежит единственной минимальной простой модели из этого гиперграфа и $d(\Gamma) = d(M, H(M))$.

2 Построение гиперграфов и предельных моделей для некоторых теорий

Пусть M — счетная насыщенная модель теории T языка L.

2.1 Теории одноместных предикатов. Теории с отношением эквивалентности

Если язык L содержит только одноместные предикаты, достаточно рассмотреть только 1-типы, т.к. связей между элементами нет. Носитель любой элементарной подмодели M_0 модели M будет получаться объединением не более, чем счетного множества всех реализаций главных типов, имеющих конечное число реализаций, и некоторого счетного подмножества множества реализаций для каждого главного типа, имеющего бесконечное число реализаций. Если носитель подмодели содержит конечное число реализаций неглавных типов, эта подмодель будет простой над множеством этих реализаций. Если бесконечное — предельной.

Если теория T имеет только одно отношение эквивалентности, в теории содержится информация о числе и мощности классов эквивалентности. Если классов эквивалентности мощности n конечное число, все они целиком будут лежать в M_0, если бесконечное — некоторое их счетное множество. Неглавные типы реализуются элементами из бесконечных классов эквивалентности. В простую над кортежем $\bar{a} = \langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ модель с каждым элементом a_i попадает целиком весь его класс эквивалентности или бесконечно много ему эквивалентных элементов. В предельной модели будет бесконечно много бесконечных классов эквивалентности.

2.2 Ациклические теории двуместных предикатов. Теории унаров

Если язык L содержит только один двухместный предикат P и теория T такова, что граф $(M, \{(x, y) \in M_2 \mid P(x, y)\})$ не содержит циклов, то типы содержат информацию о расстояниях между элементами и одноместные формулы, говорящие о числе и 1-типах соседей каждого элемента. Чтобы получить носитель элементарной подмодели M_0 модели M строим множество M_1 аналогично предыдущему. Далее для каждой пары $a_1, a_2 \in M_1$, если a_1 и a_2 соединены конечным маршрутом, добавляем к M_1 кратчайший (a_1, a_2)-маршрут. Для вновь добавленных элементов добавляем некоторые соседние с ними, руководствуясь все тем же правилом (если a имеет конечное число соседей такого типа, добавляем все, если бесконечное — некоторое счетное множество). Повторяем эти действия до тех пор, пока они приводят к добавлению новых элементов. Таким образом получаем множество M_0 — носитель простой элементарной подмодели.

Если имеем несколько одноместных предикатов и один двухместный, такой что полученный граф не имеет циклов, в 1-типах появляются необходимые одноместные предикаты и гиперграф строится точно так же, как в предыдущем случае.

Если имеем несколько двухместных предикатов, таких, что полученный раскрашенный граф не имеет циклов, в типах появляется информация о цвете связей между элементами и построение проводится аналогично предыдущему случаю.

Если язык L содержит только одну одноместную функцию f, граф $\Gamma = (M, \{(x, y) \in M_2 \mid f(x) = y\})$ содержит не более одного цикла в каждой компоненте связности, т.е. каждая компонента связности либо является деревом, для которого мы уже умеем строить простые элементарные подмодели, либо содержит один цикл и соединенные с ним деревья. Во втором случае цикл целиком попадает в носитель подмодели, а деревья достраиваются по тому же алгоритму.

2.3 Теории линейных порядков

Если в теории имеется одно отношение линейного порядка, множество M можно разбить на промежутки, содержащие только плотный или только дискретный порядок.

Если из промежутка с дискретным порядком, содержащего конечное число элементов, хотя бы один попадает в M_0, этот промежуток попадает в M_0 целиком.

Рассмотрим промежуток с дискретным порядком, содержащий бесконечное число элементов. Если в этом промежутке есть минимальный элемент, промежуток имеет начальный отрезок, изоморфный $< N, \leq >$. Если есть максимальный, аналогично, имеется подинтервал, изоморфный множеству натуральных чисел с перевернутым отношением порядка. Оставшаяся часть этого интервала — копии целых чисел. Если в подмодель попадают элементы из этого интервала, туда попадают минимальный и максимальный элементы, если они есть, вместе с копиями натуральных чисел, в которых они лежат, и некоторый, не более чем счетный (конечный для простой подмодели и счетный — для предельной), набор копий целых чисел.

Если из промежутка с плотным порядком хотя бы один элемент попадает в M_0, туда попадают минимальный и максимальный элементы, если они есть, и некоторое счетное подмножество, выбранное так, чтобы порядок остался плотным.

Пусть $M' = \{X \subseteq M \mid X$ — максимальный промежуток, содержащий только плотный или только дискретный порядок$\}$. Введем предикаты $R(X)$: X — промежуток с плотным порядком, $P_n(X)$: X — промежуток длины n с дискретным порядком, $Q_{\max}(X)$: в X есть максимальный элемент, $Q_{\min}(X)$: в X есть минимальный элемент. Зададим на M' линейный порядок: скажем, что $X \leqslant Y$, если $\forall x \in X \forall y \in Y x \leq y$. В M' имеем дискретный линейный порядок и несколько одноместных предикатов. 1-типы элементов помимо одноместных предикатов содержат так же информацию о том, является ли элемент минимальным или максимальным. Если носитель M' модели M' конечен, то $M'_0 = M'$. Если M' бесконечно, оно состоит из копий натуральных и целых чисел, как описано выше. В этом случае сначала строим множество M'_1 по 1-типам (так же, как в случае одноместных предикатов). После чего для каждого элемента $a \in M'_1$ добавляем копию натуральных или целых чисел, в которой он лежит. Получили множество M'_0. Далее для каждого $X \in M'_0$ описанным выше образом добавляем элементы в M_0. Таким образом получаем носитель M_0 элементарной подмодели M_0 модели M.

3 Примеры

3.1

Рассмотрим теорию Th($< N, \leq >$). В теории только одно отношение линейного порядка. Один бесконечный промежуток с дискретным порядком и с минимальным элементом. Насыщенная модель представляет из себя копию множества натуральных чисел и бесконечно много копий множества целых чисел. Подмодели включают в себя копию множества натуральных чисел и не более чем счетное число копий множества целых чисел. Минимальная простая подмодель — $< N, \leq >$.

3.2

Рассмотрим множество $M = \{X \subset N \mid \exists n \in N : |X| = n\}$ и теорию Th($< M, \subseteq >$). Отношение частичного порядка, есть наименьший элемент (пустое множество). Заметим, что если $X \subseteq Y$, все (X, Y)-

маршруты имеют одинаковую длину, равную $|Y|-|X|$. 1-Типы содержат информацию о том, насколько элемент удален от наименьшего. n-Тип описывает 1-типы элементов и наибольшие общие подмножества. Носителем простой подмодели будет множество $M_0 = \{X \subset K \mid \exists n \in N : |X| = n\}$, где K — любое счетное подмножество множества натуральных чисел.

Список литературы

[1] *Лекции* по теории графов/ В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. — М.: Наука, 1990.

[2] *Мелихов А.Н. Берштейн Л.С., Курейчик В.М. и др.* Применение графов для проектирования дискретных устройств. — М.: Наука, 1974.

[3] *Деньдобренко Б.Н., Малика А. С* Автоматизация конструирования РЭА. — М.: Высшая школа, 1980.

[4] *Судоплатов С. В.* Об ациклических гиперграфах минимальных простых моделей // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42, №6. С. 1408–1412.

[5] *Судоплатов С. В.* Проблема Лахлана. — Новосибирск: НГТУ, 2009.

[6] *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. — СПб.: Лань, 2005.

[7] *Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В.* Математическая логика и теория алгоритмов: Учебник. — М.: ИНФРА-М, Новосибирск: НГТУ, 2004, 2008.

[8] *Sudoplatov S. V.* Group polygonometries and related algebraic systems // Contributions to General Algebra 11 / Proc. of the Olomouc Workshop '98 on General Algebra. Klagenfurt: Verlag Johannes Heyn, 1999. P. 191–210.

[9] *Судоплатов С. В.* О классификации полигонометрий групп // Мат. труды. 2001. Т. 4, №1. С. 174–202.

ОБ i-РАЗЛОЖЕНИИ n-ГРУППОИДОВ

А.Н. Бородин

Горно-алтайский государственный университет,
Россия, 659700, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1
e-mail: SerajSova@Yandex.ru

n-Группоидом (где $n \geq 2$) называется универсальная алгебра $\langle Q; f^n \rangle$ с сигнатурой состоящей из одной n-арной операции f^n. Следуя Мальцеву[1] напомним понятие *i-трансляции* n-группоида, где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определение 1. *Отображение*

$$\iota^i_{a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n}(x) = f^n(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n), \tag{1}$$

где $x \in Q$, и $\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \rangle \in Q^{n-1}$, n-группоида в себя называется его i-трансляцией.

Множество всех i-трансляций n-группоида $\langle Q; f^n \rangle$ для различных кортежей из Q^{n-1} обозначим через ι^i, а его мощность — через $|\iota^i|$.

Для обычного группоида $\langle Q; f \rangle$ с бинарной алгебраической операцией $f : Q \times Q \to Q$ две его трансляции $\iota^1_a(x) = f(x, a)$ и $\iota^2_a(x) = f(a, x)$ называют правой и левой, обозначая через R_a и L_a. Очевидно, что $|R| \leq |Q|$ и $|L| \leq |Q|$, так как соответствующие отображения $Q \to R$ и $Q \to L$ сюрьективны.

Определение 2. *n-Группоид $\langle Q; f^n \rangle$ назовем i-разложимым, если существуют такие бинарная — $\circ$ и $(n-1)$-арная — f^{n-1} алгебраические операции, для которых выполняется следующее тождество:*

$$f^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i \circ f^{n-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Ясно, что обычный группоид $\langle Q; f \rangle$ с бинарной операцией f разложим, причем его 1-разложимость выражается в тождестве (2) операциями $x \circ y = f(x, y)$ и $f^1 = Id$, а 2-разложимость — операциями $x \circ y = f(y, x)$ и $f^1 = Id$. Условия i-разложимости произвольного группоида выражает следующая теорема.

Теорема 1. *n-Группоид $\langle Q; f^n\rangle$, (где $n \geq 2$), с n-арной алгебраической операцией f^n i-разложим тогда и только тогда, когда $|\iota^i| \leq |Q|$.*

Доказательство. Замечания после определений 1 и 2 в отношении обычного группоида $\langle Q; f\rangle$ доказывают эту теорему для случая $n = 2$. Пусть теперь $n > 2$. Докажем сначала необходимость условия $|\iota^i| \leq |Q|$. Предположим, что n-группоид $\langle Q; f^n\rangle$ i-разложим, то есть выполняется тождество (2) для некоторых операций $\circ$ и f^{n-1}. Введем отображение φ множества его i-трансляций ι^i в Q по следующему правилу:

$$\varphi(\iota^i_{a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n}) = f^{n-1}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \in Q. \qquad (3)$$

Отображение (3) инъективно, так как две различные i-трансляции $\iota^i_{a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n}$ и $\iota^i_{a'_1,\dots,a'_{i-1},a'_{i+1},\dots,a'_n}$ имеют в соответствии с определяющей формулой (1) и тождеством (2) два различные образа $f^{n-1}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ и $f^{n-1}(a'_1, \dots, a'_{i-1}, a'_{i+1}, \dots, a'_n)$ в Q и потому $|\iota^i| = |f^{n-1}(Q^{n-1})| \leq |Q|$.

Перейдем к доказательству достаточности условия теоремы. Если $|\iota^i| \leq |Q|$, то существует хотя бы одно инъективное отображение $\varphi : \iota^i \to Q$. На множестве Q n-группоида $\langle Q; f^n\rangle$ введем еще одну $(n-1)$-арную алгебраическую операцию по такой схеме:

$$f^{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \varphi(\iota^i_{x_1,\dots,x_{n-1}}). \qquad (4)$$

Очевидно, что на множестве ее значений $f^{n-1}(Q^{n-1})$ однозначно определено обратное к φ отображение φ^{-1}. Бинарную алгебраическую операцию на множестве Q введем следующим образом:

$$y \circ x = \varphi^{-1}(x)(y), \qquad (5)$$

если $x \in f^{n-1}(Q^{n-1})$ и $y \in Q$. Если же $x \notin f^{n-1}(Q^{n-1})$ и $y \in Q$, то пусть $y \circ x$ будет любым элементом из Q. Тогда, очевидно, имеем тождество

$$f^n(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \iota^i_{x_i,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n}(x_i) =$$
$$= \varphi^{-1}(f^{n-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n))(x_i) =$$
$$= x_i \circ f^{n-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

с алгебраическими операциями (4) и (5). □

Список литературы

[1] *А.И.Мальцев.* К общей теории алгебраических систем. 1954.

МАТРИЧНАЯ ПРЕДСТАВИМОСТЬ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ ГРУПП

О.В. Брюханов

Сибирский университет потребительской кооперации
РОССИЯ, 630087, г.Новосибирск, пр.К.Маркса, д.24
e-mail: brjuoleg@rambler.ru

Группу G называют линейной, если она изоморфна подгруппе общей линейной группы $\mathrm{GL_n(F)}$ при некотором n и поле F. Сам этот изоморфизм называют матричным представлением группы G, а число n степенью представления.

Следуя А.И.Мальцеву [3], группу G будем называть предельно аппроксимируемой группами из класса $\mathfrak{G}$, если для любого конечного множества попарно различных элементов группы G существует гомоморфизм этой группы на группу из класса $\mathfrak{G}$, при котором образы этих элементов будут так же попарно различны. Так, если в группе G существует матрешка нормальных подгрупп

$$\mathrm{G} = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots 1$$

с факторами $\mathrm{G}/G_i \in \mathfrak{G}$, где $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} G_i = 1$, то она является предельно аппроксимируемой группами из класса $\mathfrak{G}$.

А.И.Мальцев [3] и В.Л.Нисневич [5] независимо показали связь между матричной представимостью над полем для конечно порожденной группы и её предельной аппроксимируемостью конечными линейными группами с фиксированной степенью представления. Если каждая конечно порождённая линейная группа предельно аппроксимируется конечными группами [3, 4], то уже не всякая конечно порождённая группа, предельно аппроксимируемая конечными группами, будет линейной. Например, группа

$$\Gamma = \langle\ a, b \mid b^6 = 1, [b, b^{a^i}] = 1, i \in \mathbb{N}\ \rangle$$

предельно аппроксимируется конечными группами. Достаточную для этого матрешку подгрупп образуют ядра гомоморфизмов φ_k, $k{=}1, 2, \ldots,$

которые посылают p^k-ую степень элемента a в единицу, а порядок элемента b оставляют неизменным. С другой стороны группа Γ содержит в качестве подгруппы прямое произведение счетного числа конечных циклических групп $\mathbb{Z}_6$, а такая абелева группа не представима матрицами ни над каким полем, по критерию А.И.Мальцева [3]. Следовательно и вся группа Γ не является линейной. В работе [6], А.Люботский описал p-матрешки подгрупп в конечно порожденных группах, существование которых равносильно матричной представимости над полем нулевой характеристики для этих групп. В настоящей работе приведен критерий матричной представимости над произвольным полем для конечно порожденных групп, основанный на их предельной аппроксимируемости матричными группами фиксированной степени над некоторыми коммутативными ассоциативными кольцами.

Определение 1. *Убывающую последовательность идеалов* $\{P_i\}$ *коммутативного ассоциативного кольца* $\mathfrak{o}$ *будем называть простой, если для любых* $i, j \in \mathbb{N}$ *и любых элементов* $x \notin P_i$, $y \notin P_j$ *произведение* $xy \notin P_k$, *где* k *зависит только от* i *и* j.

Очевидно, что пересечение всех идеалов P_i из простой последовательности $\{P_i\}$ будет простым идеалом кольца $\mathfrak{o}$.

Пусть F — поле с нетривиальным нормированием v, $\mathfrak{o}$ — подкольцо кольца нормирования поля F. Если взять $\{v_i\}$, $i \in \mathbb{N}$ — строго возрастающую последовательность положительных значений принимаемых этим нормированием на кольце $\mathfrak{o}$, в которой всегда найдется элемент больший суммы двух других элементов, то множества $P_i = \{\ x \in \mathfrak{o} \mid v(x) \geqslant v_i\ \}$ образуют простую последовательность идеалов кольца $\mathfrak{o}$. Это следует из того, что если $v(x) < v_i$ и $v(y) < v_j$, то $v(xy) < v_i + v_j \leqslant v_k$, где v_k первое из значений последовательности которое больше суммы $v_i + v_j$.

Определение 2. *Пусть* $\{\mathfrak{o}_\alpha\}$, $\alpha \in \Omega$ *— семейство ассоциативных, коммутативных колец с единицей,* $\mathcal{F}$ *— фильтр на множестве* Ω *и в каждом кольце* $\mathfrak{o}_\alpha$ *выбрана убывающая последовательность идеалов* $\{P_{\alpha j}\}$, $j \in \mathbb{N}$. *Для* $i, j \in \mathbb{N}$ *определим множества индексов* $\mathcal{I}_{ij}^k \subseteq \Omega$ *колец* $\mathfrak{o}_\alpha$ *в которых из того что* $x \notin P_{\alpha i}$, $y \notin P_{\alpha j}$ *следует, что произведение* $xy \notin P_{\alpha k}$. *Если для любых* i, j *найдется множество* $\mathcal{I}_{ij}^k \in \mathcal{F}$, *то семейство последовательностей идеалов* $\{P_{\alpha j}\}$, $\alpha \in \Omega$, $j \in \mathbb{N}$ *будем называть равномерно простым на фильтре* $\mathcal{F}$.

Рассмотрим счетное семейство ассоциативных, коммутативных колец с единицей, $\{\mathfrak{o}_\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{N}$, и связанное с ним семейство убывающих последовательностей идеалов $\{P_{\alpha j}\}$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$, $P_{\alpha j} \trianglelefteq \mathfrak{o}_\alpha$. Если для каждой пары $i, j \in \mathbb{N}$ определена пара $\beta, k \in \mathbb{N}$ такая, что при $\alpha > \beta$ в кольцах $\mathfrak{o}_\alpha$ из того что $x \notin P_{\alpha i}$, $y \notin P_{\alpha j}$ следует, что произведение $xy \notin P_{\alpha k}$, то данное семейство последовательностей идеалов является равномерно простым на фильтре $\mathcal{F}$. Здесь $\mathcal{F}$ — максимальный фильтр на $\mathbb{N}$ содержащий дополнения ко всем конечным подмножествам.

Лемма 3. *Пусть* $\{\mathfrak{o}_\alpha\}$, $\alpha \in \Omega$ — *семейство ассоциативных, коммутативных колец с единицей,* $\mathcal{F}$ — *максимальный фильтр на множестве индексов* Ω, $\{P_{\alpha j}\}$, $\alpha \in \Omega$, $j \in \mathbb{N}$ — *равномерно простое на фильтре* $\mathcal{F}$ *семейство последовательностей идеалов* $P_{\alpha j} \trianglelefteq \mathfrak{o}_\alpha$. *Тогда множество* $\overline{\mathbf{P}}$ *состоящее из элементов* x *декартова произведения* $\overline{\prod\limits_{\alpha\in\Omega}}\mathfrak{o}_\alpha$, *для которых все индексные множества* $\mathcal{I}_j^x = \{\ \alpha \in \Omega \mid x_\alpha \in P_{\alpha j}\ \}$ *принадлежат фильтру* $\mathcal{F}$, *образуют простой идеал кольца* $\overline{\prod\limits_{\alpha\in\Omega}}\mathfrak{o}_\alpha$. *Следовательно фактор-кольцо* $\overline{\prod\limits_{\alpha\in\Omega}}\mathfrak{o}_\alpha/\overline{\mathbf{P}}$ — *без делителей нуля и вкладывается в некоторое поле.*

Доказательство. Возьмём произвольные элементы $x, y \in \overline{\mathbf{P}}$ и $z \in \overline{\prod\limits_{i\in\Omega}}\mathfrak{o}_i$. Тогда для элементов $x+y$ и xz, на индексных множествах $\mathcal{I}_j^x \bigcap \mathcal{I}_j^y$, $j \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{I}_j^x$, $j \in \mathbb{N}$ соответственно, выполнены включения $x_\alpha + y_\alpha \in P_{\alpha j}$ и $x_\alpha z_\alpha \in P_{\alpha j}$. В силу выбора элементов x и y, множества $\mathcal{I}_j^x$ и $\mathcal{I}_j^y$ принадлежат фильтру $\mathcal{F}$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Следовательно фильтру $\mathcal{F}$ принадлежат и множества $\mathcal{I}_j^{x+y}$, $\mathcal{I}_j^{xz}$, как надмножества для множеств $\mathcal{I}_j^x \bigcap \mathcal{I}_j^y$, $\mathcal{I}_j^x$ соответственно. Таким образом элементы $x + y$ и xz принадлежат множеству $\overline{\mathbf{P}}$ и оно является идеалом.

Покажем, что идеал $\overline{\mathbf{P}}$ является простым. Если $x, y \notin \overline{\mathbf{P}}$, то найдутся индексные множества $\mathcal{I}_i^x, \mathcal{I}_j^y \notin \mathcal{F}$. Так как фильтр $\mathcal{F}$ максимален, то дополнения к ним $\overline{\mathcal{I}}_i^x = \{\ \alpha \in \Omega \,|\, x_\alpha \notin P_{\alpha i}\ \}$ и $\overline{\mathcal{I}}_j^y = \{\ \alpha \in \Omega \,|\, y_\alpha \notin P_{\alpha j}\ \}$ являются элементами фильтра $\mathcal{F}$. Для всех индексов $\alpha \in \overline{\mathcal{I}}_i^x \bigcap \overline{\mathcal{I}}_j^y$ выполняются отношения $x_\alpha \notin P_{\alpha i}$ и $y_\alpha \notin P_{\alpha j}$. Следовательно $x_\alpha y_\alpha \notin P_{\alpha k}$, для всех $\alpha \in \overline{\mathcal{I}}_i^x \bigcap \overline{\mathcal{I}}_j^y \bigcap \mathcal{I}_{ij}^k$. Так как семейство последовательностей идеалов $\{P_{\alpha j}\}$, $\alpha \in \Omega$, $j \in \mathbb{N}$ является равномерно простым на фильтре $\mathcal{F}$, то $\overline{\mathcal{I}}_i^x \bigcap \overline{\mathcal{I}}_j^y \bigcap \mathcal{I}_{ij}^k \in \mathcal{F}$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. Таким образом $\overline{\mathcal{I}}_k^{xy} \in \mathcal{F}$, как надмножество множества индексов $\overline{\mathcal{I}}_i^x \bigcap \overline{\mathcal{I}}_j^y \bigcap \mathcal{I}_{ij}^k$. Следовательно $\mathcal{I}_k^{xy} \notin \mathcal{F}$ и $xy \notin \overline{\mathbf{P}}$. □

Лемма 4. *Пусть* $\{\mathfrak{o}_\alpha\}$, $\alpha \in \Omega$ — *семейство ассоциативных, коммутативных колец с единицей,* $\mathcal{F}$ — *максимальный фильтр на множестве индексов* Ω, $\{P_{\alpha j}\}$, $\alpha \in \Omega$, $j \in \mathbb{N}$ — *равномерно простое на фильтре* $\mathcal{F}$

семейство последовательностей идеалов $P_{\alpha j} \trianglelefteq \mathfrak{o}_\alpha$. Если для некоторой группы $\mathbf{G}$ определено семейство гомоморфизмов

$$\varphi_\alpha : \mathbf{G} \to \mathrm{GL}_\mathrm{n}(\mathfrak{o}_\alpha), \ \bigcap_{\alpha\in\Omega} \ker\varphi_\alpha = 1.$$

При этом для каждого нетривиального элемента g существует число $m(g)$ такое, что выполнено отношение

$$\{\alpha \in \Omega \mid \varphi_\alpha(g) - E \notin \mathbf{Mat_n}(P_{\alpha m(g)})\} \in \mathcal{F},$$

где E единичная матрица из $\mathbf{Mat_n}(\mathfrak{o}_\alpha)$. Тогда группа G *изоморфно представима матрицами степени* n *над некоторым полем* F.

Доказательство. Сперва, для каждого $g \in \mathbf{G}$ выберем матрицу

$$\overline{[g]} \in \mathrm{GL}_n(\overline{\prod_{\alpha\in\Omega}}\mathfrak{o}_\alpha) = \overline{\prod_{\alpha\in\Omega}}\mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_\alpha)$$

с условием $\overline{[g]}_\alpha = \varphi_\alpha(g) \in \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_\alpha)$. Теперь в качестве матричного представления элемента $g \in G$ в группе $\mathrm{GL}_n(\overline{\prod_{\alpha\in\Omega}}\mathfrak{o}_\alpha/\overline{\mathbf{P}})$ возьмем гомоморфный образ матрицы $\overline{[g]}$ относительно гомоморфизма индуцированного кольцевым гомоморфизмом $\overline{\prod_{\alpha\in\Omega}}\mathfrak{o}_\alpha \to \overline{\prod_{\alpha\in\Omega}}\mathfrak{o}_\alpha/\overline{\mathbf{P}}$, где $\overline{\mathbf{P}}$ — идеал как в предыдущей лемме. По построению данное отображение φ является гомоморфизмом. Покажем, что ядро его тривиально. Если $g \in \ker\varphi$, то матрица $\overline{[g]} - E \in \mathbf{Mat_n}(\overline{\mathbf{P}})$. Следовательно все индексные множества

$$\mathcal{I}_j = \{\alpha \in \Omega \mid \varphi_\alpha(g) - E \in \mathbf{Mat_n}(P_{\alpha j})\}, j \in \mathbb{N},$$

где E – единичная матрица из $\mathbf{Mat_n}(\mathfrak{o}_\alpha)$, принадлежат максимальному фильтру $\mathcal{F}$. Это противоречит условию леммы, так как дополнениями к этим множествам являются множества

$$\{\alpha \in \Omega \mid \varphi_\alpha(g) - E \notin \mathbf{Mat_n}(P_{\alpha j})\}, j \in \mathbb{N}.$$

Таким образом отображение φ является изоморфизмом, а по предыдущей лемме фактор-кольцо $\overline{\prod_{\alpha\in\Omega}}\mathfrak{o}_\alpha/\overline{\mathbf{P}}$ вкладывается в некоторое поле F. □

Теорема 5. *Конечно порожденная группа $\mathbf{G}$ изоморфно представима матрицами степени* n *над некоторым полем* F *тогда и только тогда, когда найдется счетное семейство ассоциативных коммутативных колец $\{\mathfrak{o}_i\}$, с семейством последовательностей идеалов $\{P_{ij}\}$,*

$P_{ij} \trianglelefteq \mathfrak{o}_i$, *для которых определена последовательность гомоморфизмов*

$$\varphi_i : \mathbf{G} \to \mathrm{GL_n}(\mathfrak{o}_i), \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \ker \varphi_i = 1.$$

При этом для каждого не единичного элемента $g \in \mathbf{G}$ *и любой пары чисел* $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ *определена тройка чисел* $m, k, l \in \mathbb{N}$ *таких, что при всех* $i > l$ *в кольцах* $\mathfrak{o}_i$ *выполнены отношения:*

a) $\varphi_i(g) - E \notin \mathbf{Mat_n}(P_{im})$, *где* E *единичная матрица из* $\mathbf{Mat_n}(\mathfrak{o}_i)$*;*

b) из того, что $x \notin P_{ij_1}$, $y \notin P_{ij_2}$ *следует, что произведение* $xy \notin P_{\alpha k}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{G}$ конечно порожденная счетная группа матриц степени n над полем F. Можно считать, что $\mathbf{G} \leqslant \mathrm{GL_n}(\mathfrak{o})$, где $\mathfrak{o}$ — счетное конечно порожденное подкольцо поля F, а само поле F является полем частных кольца $\mathfrak{o}$. Кольцо $\mathfrak{o}$ строго содержится в поле F ([1], Гл.7). В этом случае, существует такое нетривиальное нормирование υ поля F при котором множество $P = \{ \ x \in \mathfrak{o} \mid \upsilon(x) > 0 \ \}$ является нетривиальным собственным простым идеалом кольца $\mathfrak{o}$ [2]. Так как множество $V = \{ \ \upsilon(x) \mid x \in \mathfrak{o} \ \}$ будет счетным, выберем в нем строго возрастающую последовательность $0 < \upsilon_1 < \upsilon_2 < \cdots$, в которой найдется элемент больше любого наперед заданного значения из V. Очевидно, что идеалы $P_i = \{x \in \mathfrak{o} \mid \upsilon(x) \geqslant \upsilon_i\}$ образуют простую последовательность идеалов кольца $\mathfrak{o}$ (см. пример к определению 1) и $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} P_i = 0$. Тогда в качестве счетного семейства колец можно взять последовательность фактор-колец $\mathfrak{o}_i = \mathfrak{o} \diagup P_i$, а фактор-идеалы $P_{ij} = P_j \diagup P_i$ составляют равномерно простое семейство последовательностей идеалов счетного семейства колец $\{\mathfrak{o}_i\}$ (см. пример к определению 2). Кольцевые гомоморфизмы $\Phi_i : \mathfrak{o} \to \mathfrak{o}_i$ индуцируют групповые гомоморфизмы $\varphi_i : \mathbf{G} \to \mathrm{GL_n}(\mathfrak{o}_i)$ ядра которых удовлетворяют требуемым свойствам. При этом в качестве номера l можно взять номер больше $m(g)$ номера первого значения υ_i, которое будет больше нормы хотя бы одного матричного элемента матрицы $g - E \in \mathbf{Mat_n}(\mathfrak{o})$, и k, который определяется номерами j_1, j_2 из простой последовательности идеалов $\{P_i\}$ (см. определение 1).

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $\mathcal{F}$ — максимальный фильтр на $\mathbb{N}$ содержащий дополнения ко всем конечным подмножествам. По условию теоремы семейство последовательностей идеалов $\{P_{ij}\}$ является равномерно простым на фильтре $\mathcal{F}$. Далее множества

$$\mathcal{I}^g = \{ \, i \in \mathbb{N} \,|\, \varphi_i(g) - E \notin \mathbf{Mat_n}(P_{im(g)}) \, \}$$

принадлежат фильтру $\mathcal{F}$. Следовательно, по лемме 4, группа $\mathbf{G}$ изоморфно представима матрицами степени n над некоторым полем F. $\square$

Теорема 5, в частности утверждает, что группа $\mathbf{G}$ предельно аппроксимируется своими гомоморфными образами. В этом смысле,теорема обобщает аналогичные результаты А.И.Мальцева из работы[3], где рассматривался случай предельной аппроксимируемости линейными группами фиксированной степени.

Список литературы

[1] *Атья М. Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. — М.:Наука, 1972.

[2] *Ершов Ю.Л.* Кратно нормированные поля.— Сибирская школа алгебры и логики.— Новосибирск.:Научная книга, 2000.

[3] *Мальцев А.И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами. Матем.сб.,(1940), т.8(50), №3, 405-423.

[4] *Мерзляков Ю.И.* Рациональные группы. — М.: Наука, 1980.

[5] *Нисневич В.Л.* О группах изоморфно представимых матрицами над коммутативным полем. Матем.сб.,(1940), т.8(50), №3, 395-403.

[6] *A.Lubotzky*, A group theoretic characterization of linear group. J. Algebra 113(1988), 207-214.

КРИТИЧЕСКИЕ КОРНЕВЫЕ ЗОНЫ И РЕДУКЦИЯ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГРАФОВ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

А.В. Чехонадских

Новосибирский Государственный Технический Университет,
Россия, 630092, Новосибирск, пр. Маркса 20
e-mail: algebra@nstu.ru

1. Введение. Многие прикладные задачи приводят к вопросу о достижении нужного расположения корней многочлена с действительными коэффициентами. Так, система автоматического управления (САУ): объект и регулятор — в классическом случае описывается системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами; после применения преобразования Лапласа описание системы принимает чисто алгебраическую форму:

$$Y(s) = W(s)U(s),$$

где $Y(s)$ — это изображение выхода, $U(s)$ — изображение управляющего воздействия (стандартного сигнала), наконец, $W(s) = N(s)/\chi(s)$ — матричная передаточная функция САУ, а $\chi(s)$ — её характеристический многочлен, имеющий вещественные коэффициенты и комплексные корни $z_1, ..., z_n$ — так называемые полюса системы. Для заданного объекта требуется подобрать структуру регулятора и указать такие параметры, что бы САУ имела надлежащие свойства. Параметры регулятора входят в коэффициенты многочлена, что позволяет менять расположение его корней. Связь значений полюсов системы и её свойств лежит в основе так называемого модального синтеза САУ.

Теоремы разложения позволяют указать по полюсам САУ наиболее принципиальные характеристики выхода $\overline{y}(t)$. Так, каждая действительная часть $\mathrm{Re}(z_k)$ определяет скорость затухания k-го слагаемого, а их максимум — устойчивость и запас устойчивости системы; в свою очередь, мнимые части $\mathrm{Im}(z_k)$ задают колебательные частоты этих слагаемых и создаваемые ими фронты. Свойство робастной апериодичности САУ, предполагающее бесколебательное погашение возмущения [1,2], требует доминирования устойчивого вещественного корня, и т.д.

Задача синтеза САУ пониженного порядка сводится к нахождению таких значений параметров регулятора, при которых достигается оптимальное в том или ином смысле расположение характеристических корней. В фундаментальном обзоре [3] приводится ряд актуальных задач ТАУ, которые изначально носят оптимизационный характер. Однако, классические методы анализа и оптимизации не могут использоваться непосредственно по следующим причинам.

Параметры регулятора $\bar{t} \in \mathbf{R}^k$ входят в коэффициенты характеристического многочлена $f_n(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ...a_1 s + a_0$ линейно; сами коэффициенты $\overline{a}(\bar{t}) \in \mathbf{R}^n$ также действительны, а корни, как правило, комплексны и не имеют естественной упорядоченности, что позволяет представлять их $n!$ векторами пространства $\mathbf{C}^n$. Более того, всевозможные значения корней многочленов с действительными коэффициентами образуют невыпуклое подмножество пространства $\mathbf{C}^n$, которое n-мерно над полем действительных чисел и имеет сложную структуру пересечений и границ. Всё это делает весьма затруднительной постановку оптимизационных задач; а численные методы, обеспечивая некоторый практический результат, никак не гарантируют его оптимальности [3].

Ситуация существенно упростится, если представить множество корней вещественного многочлена степени n некоторым подмножеством пространства $\mathbf{R}^n$ так, чтобы это представление было взаимно однозначно и непрерывно; иначе говоря, если описывать множество действительных и комплексно сопряжённых корней n действительными координатами (в случае кратности корней возможно и $k \leq n$ координат). Для сепарабельного многочлена это возможно локально. Если допускать возникновение кратных корней — что неизбежно происходит при практической оптимизации — то приходится использовать несколько координатных множеств.

Представление общей геометрии этих множеств в виде корневого симплекса, их описание с помощью симплектических графов и возможности сокращения симплектической структуры до составляющих, которые имеют значение для численной оптимизации, составляют предмет данной работы.

2. Конструкция корневого симплекса. Прежде всего, необходимо ввести понятия, позволяющие определить корневой симплекс как множество кусочных координат для корней вещественного многочлена $f(s)$.

Определения. *Координатизацией* множества корней будем называть представление этого множества в виде конечного набора множеств $K_i^{[l]}j$, замкнутого относительно пересечений и снабжённого семейством *координатных функций* $\kappa_{ij}^{[l]} : K_i^{[l]}j \longrightarrow \mathbf{R}^l$. При этом на пересечении $K_{i_1}^{[l_1]}j_1 \cap K_{i_2}^{[l_2]}j_2 = K_{i_3}^{[l_3]}j_3$ имеется согласование координат $\kappa_{i_1j_1}^{[l_1]}$ и $\kappa_{ij_2}^{[l_2]}$ между собой и с функцией $\kappa_{i_3j_3}^{[l_3]}$.

Области значений $\kappa_{ij}^{[l]}(K_i^{[l]}j) \subset \mathbf{R}^l$ называются *сегментами* и образуют *корневой симплекс*. Важно подчеркнуть, что речь идёт именно о *совокупности этих образов* (а не объединении), каждый из которых находится в своей копии пространства $\mathbf{R}^l$.

Нельзя не отметить аналогии между понятиями корневого симплекса и *симплициального* или *геометрического комплекса* [4, 5], изучающегося в классической алгебраической топологии.

Далее следует описать (1) способ представления множества корней в виде объединения множеств $K_i^{[l]}j$ и (2) структуру корневого симплекса: как граничат различные сегменты, каковы размерности пересечений сегментов и их границ и т.д. Сам же корневой симплекс представляет собой составную — и не глобальную, и не локальную в общепринятом смысле — систему действительных координат корней вещественных многочленов.

3. R-градуировка и предпорядок на комплексной плоскости. При синтезе систем САУ используются различные характеристики, численно выражающие 'качество' расположения корневого набора. При оптимизационных процедурах они оказываются *целевыми функциями*. Часто такая функция связана с семейством вложенных областей $\{B_\alpha | \alpha \in \mathbf{R}, B_\alpha \subset B_\beta$ при $\alpha < \beta$; так что минимальное значение R-*градуировки* α, при котором все корни попадают в область B_α, и оказывается целевой функцией: чем уже область, тем "лучше"корневой набор.

Формальные детали понятия R-градуировки уточняются в [6].

Область B_α и значение R-градуировки α для корневого набора задают самые "правые"корни — те, которые оказываются на границе области. Однако каждому отдельному корню или комплексно сопряжённой паре соответствуют некоторая область B_α этого семейства и значение градуировки. Сравнение комплексных чисел по их градуировочным значениям оказывается предпорядком на комплексной плоскости.

Поэтому везде ниже будем считать, что на плоскости $\mathbf{C}$ задан предпорядок $\leq_\alpha$, такой, что отношение $=_\alpha$ является эквивалентностью, факторизация множества $\mathbf{C}$ по которому приводит к модели $\{\mathbf{R}, \leq\}$ — действительным числам с обычным порядком $\leq$. Простейшим примером будет сравнение комплексных чисел по их действительной части: здесь $B_\alpha = \{s|\mathrm{Re}s \leq \alpha\}$; эквивалентностью оказывается равенство действительных частей.

Важно, чтобы множество α-эквивалентных пар поддавалось некоторой кусочно-гладкой параметризации $x_\alpha(l)+iy_\alpha(l)$ с помощью параметра l: $\{s|\alpha_s = \alpha_0\} = \{x_{\alpha_0}(l) + iy_{\alpha_0}(l)|l \in \mathbf{R}$. Благодаря этому множество таких пар имеет меньшую размерность; сама же параметризация часто оказывается кусочно-линейной.

В таком случае все корни, и действительные, и комплексные можно пронумеровать в соответствии с предпорядком:

$x_1 \leq_\alpha ... \leq_\alpha x_m \pm iy_{m+1} \leq_\alpha ... \leq_\alpha x_n$ — такие системы α-неравенств в дальнейшем будут называться *задающими.*

Если же несколько корней или пар оказываются эквивалентны, допустимы различные варианты нумерации.

Точные формулировки для понятий, упомянутых выше, таковы.

Определение. *Корневым сегментом* A_pq, где p — число комплексных пар, а q — номер конкретного сегмента среди прочих с тем же p, будем называть конус пространства $\mathbf{R}^n$, состоящий из n-мерных векторов, для координат которых $(x_1; ...; x_m; y_{m+1}; ...; x_n)$ выполняются неравенства $x_1 \leq_\alpha ... \leq_\alpha x_m \pm iy_{m+1} \leq_\alpha ... \leq_\alpha x_n$ (предполагается, что $y_j \geq 0$). Заменяя одно и более α-неравенств на равенства, получим сегменты соответственно меньших размерностей:

$n-1$-мерные сегменты B_ij задаваемые системой неравенств с одним равенством, ограничивающие сегменты A_pq и, в свою очередь, ограниченные следующими;

$n-2$-мерные сегменты C_kl и т.д. вплоть до одномерной прямой L, отображающей n-кратные корни.

Границами сегментов A_pq как конусов пространства $\mathbf{R}^n$ оказываются части $n-1$-мерных гиперплоскостей, которые сами являются конусами в пространстве $\mathbf{R}^{n-1}$. Линейная биекция координат на границах в n-мерном пространстве и в $n-1$-мерных конусах позволяет их отождествлять и считать, что каждый сегмент B_ij разграничивает какую-то пару A_pq и $A_{p'}q'$, каждый C_kl — пару B_ij и $B_{i'}j'$ и т.д. Как правило, эта биекция сводится к обычной перестановке (перенумерации) координат, либо аннулированию (или, наоборот, восстановлению) совпадающих значений, стоящих подряд:

$$(x_1; ...; x_m; x_{m+1}; ...; x_n) \xleftrightarrow{x_m = x_{m+1}} (x_1; ...x_m; 0; ...; x_n) \longleftrightarrow \\ \xleftrightarrow{y_{m+1}=0} (x_1; ...; x_m; y_{m+1}; ...; x_n)$$

Объединения всевозможных сегментов с одним и тем же числом p комплексных пар образует *симплектический слой* A_p, а сегменты различных слоёв вместе с границами различных размерностей, образуют *корневой симплекс.*

Один и тот же числовой вектор может задавать различные корневые наборы в зависимости от того, в каком именно сегменте расположен набор. Но если сегмент задан, то *соответствия корней и координат, а также корней и коэффициентов многочлена становится взаимно однозначным.* (Последнее требует оговорки о многолистности сегментов, отвечающих двум и более комплексным парам корней [6]).

4. Несепарабельность и слабая несепарабельность: межслойные и внутрислойные границы. Непрерывное изменение коэффициентов многочлена может приводить к тому, что в задающих неравенствах $x_1 \leq_\alpha ... \leq_\alpha x_m \pm iy_{m+1} \leq_\alpha ... \leq_\alpha x_n$ одно из неравенств перейдёт в равенство. Например, появление равенства $y_{m_1} = 0$ приводит к переходу комплексной пары $x_m \pm iy_{m+1}$ в кратную действительную пару $x_m = x_{m+1}$, расположенную на границе слоя A_p; очевидно, этот же корневой набор возникает также на границе слоя A_{p-1} при переходе неравенства $x_m \leq x_{m+1}$ в равенство.

Как установлено в [7], для сепарабельного мнгогочлена зависимость *корни* $\longleftrightarrow$ *коэффициенты* задаёт локальный диффеоморфизм. Тем самым, во внутренних точках каждого n-мерного корневого сегмента связь корневых координат и коэффициентов многочлена аналитична. Более того, матрица Якоби J^{-1} зависимости *коэффициенты* $\longleftrightarrow$ *корни* оказывается матрицей Вандермонда с диагональным 'знаменателем', т.е. $J^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} (z_1-z_2)...(z_1-z_n) & 0 & ... & 0 \\ 0 & (z_2-z_1)...(z_2-z_n) & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & (z_n-z_1)...(z_n-z_{n-1}) \end{pmatrix}^{-1} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} z_1^{n-1} & ... & z_1 & 1 \\ z_2^{n-1} & ... & z_2 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ z_n^{n-1} & ... & z_n & 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда вытекает такой важный факт.

Предложение 1 [6]. При наличии кратных корней или, что то же самое, при несепарабельном многочлене производное отображение соответствия *коэффициенты* $\longleftrightarrow$ *корни* терпит разрыв 2-го рода.

Если целевая функция градуировки задаётся самыми α-правыми корнями, то в условиях предложения терпят разрывы и её производные. В этой связи возникают такие понятия:

Определение. Многочлен $f(s)$ называется *сильно несепарабельным*, если кратны его α-наибольшие корни: $... \leq_\alpha x_{n-1} = x_n$ или $... \leq_\alpha x_{n-3} + iy_{n-2} = x_{n_1} + iy_n$.

Определение. Многочлен $f(s)$ называется *слабо несепарабельным*, если его α-наибольшие корни или пары корней α-эквивалентны, но не совпадают и не сопряжены, например, $z_{n-1} =_\alpha z_n$ при $z_{n-1} \neq z_n$ и $z_{n-1} \neq \overline{z}_n$; или $x_{n-2} \pm iy_{n-1} =_\alpha x_n$.

Сами эти корни называются α-кратными.

И поскольку при сильной несепарабельности многочлена, как правило, возникают разрыв 2-го рода у производной целевой функции, то *межслойные границы корневого симплекса с кратными старшими корнями оказываются критическими областями целевой функции характеристических корней.*

Подобное происходит и на внутрислойных границах. В этом случае самыми α-правыми оказываются сразу несколько корней или пар. Изменение вектора параметров $\triangle\ \overline{t}$ часто приводит к перемене их мест относительно предпорядка: один корень при этом сдвигается "вправо", другой — "влево"; либо же тот, который движется быстрее, обгоняет более медленный; важно, что равенство $z_{n-1} =_\alpha z_n$ при колебании параметров $\pm\ \triangle\ \overline{t}$ обычно приводит перестановке крайних корней. Хотя зависимость координат каждого из них от параметров дифференцируема, за счёт переключения целевой функции с одного корня (пары) на другой происходит разрыв 1-го рода её производной Таким образом, *внутрислойные границы корневого симплекса с α-кратными старшими корнями также оказываются критическими многообразиями целевой функции* [8].

Подводя итог сказанному, можно отметить, что сегментарно-граничная структура корневого симплекса отражает, во-первых, различные α-соотношения между корнями в виде простых линейных α-неравенств, во-вторых, особые многообразия целевой функции, что имеет важное значение для её оптимизации.

5. Симплектические графы. Сегментарно-граничные отношения между сегментами максимальной размерности описываются неориентированным графом $H_n = \langle\{A_ij|i,j\};\{B_lm|l,m\}\rangle$, вершинами которого являются как раз n-мерные сегменты A_ij, а рёбрами —$n-1$-мерные границы B_kl между ними (рис. 1 справа, рис. 2 слева).

Более полно сегментарно-граничная структура корневого симплекса описывается ориентированным графом $G_n = \langle\{A_i j; B_l m; ...; L|i, j, l, m...\}; R\rangle$, вершинами которого являются сегменты корневого симплекса, а дуги идут от сегмента к границе (рис. 1 в центре).

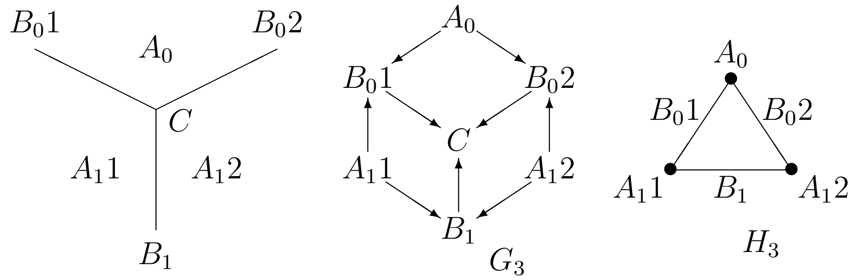


Рис. 1. Схема корневого симплекса многочлена 3-й степени (слева): сегмент A_0 включает действительные корни, сегменты $A_1 1$ и $A_1 2$ — оба варианта расположения действительного корня и комплексной пары, границы $B_0 1, 2$ включают пару кратных корней,B_1 — действительный корень и комплексную пару с равными целевыми значениями; C — линия корней кратности 3. Сегментарно-граничные соответствия представлены орграфом G_3 (в центре), и неорграфом H_3 (справа).

Различные свойства и строение симплектических графов разобраны в [6]. Важнейший результат относительно симплектических неорграфов, выражается в следующих утверждениях.

Теорема 1. Пусть H_k — неорграф корневого симплекса многочлена степени k. Тогда

$$H_{n-1} \widetilde{+} H_{n-2} \cong H_n,$$

где знак $\widetilde{+}$ означает неполное соединение неорграфов.

Следствие. С ростом степени многочлена мощность неорграфа H_k растёт как число Фибоначчи: $|H_k| = \varphi_{k+1}$, и, в частности, асимптотически экспоненциально с основанием $\approx 1,618$.

Замечание. Содержание операции неполного соединения симплектических неорграфов опирается на понятия старшего и младшего предграфа и точно указано в [6].

Для симплектических орграфов G_n предлагается система матричных кодов [9], позволяющая определять важнейшие характеристики каждой вершины (например, число комплексных пар и размерность соответствующего сегмента), а также их смежность.

Вершины графа кодируются по неравенствам, задающим соответствующий сегмент. Кодами служат матрицы $K_{2\times m} = \begin{pmatrix} k_{11} \ldots k_{1m} \\ k_{21} \ldots k_{2m} \end{pmatrix}$, где $m \le n, k_{1j} \ge 1, 0 \le k_{2j}, \sum k_{ij} = n$.

Число столбцов m равно количеству α-различных корней, т.е. на единицу больше числа значков $\leq$ в задающих неравенствах данного сегмента и вершины графа. Строка $(k_{11}...k_{1m})$ составляется из чисел α-равных между собой членов задающих неравенств, причём комплексно сопряжённая пара здесь считается за один корень. Элементы второй строки указывают, сколькие из этих равных между собой элементов соответствуют комплексным парам; а сумма второй строки $\sum k_{2j} = p$ — это число комплексных пар набора. Сумма всех элементов матрицы равна степени многочлена и общему числу корней.

Отметим, что код конкретного корня x_k или пары корней $z_{k,k+1} = x_k \pm iy_k$ находится в столбце с минимальным номером l — самом левом, для которого выполняется условие $\sum\limits_{j\leq l}(k_{1j} + k_{2j}) \geq k$. Кроме того, выполняется простое кодовое соотношение для размерности сегмента.

Предложение 2 [9]. Размерность сегмента устанавливается по его коду как сумма $m + \sum\limits_{j} k_{2j} = \sum\limits_{j}(sign(k_{1j}) + k_{2j})$.

Коды вершин симплектического орграфа позволяют просто устанавливать смежность вершин и, тем самым, отношение *область* $\longleftrightarrow$ *граница* для сегментов разных размерностей, а опосредованно — и отношение сопредельности (т.е. граничат ли они между собой) для сегментов равной размерности.

Так, при переходе на межслойную границу с "действительной"стороны одно из нестрогих неравенств меняется на равенство:

$$x_1 \leq ... \leq x_k \leq x_{k+1} \leq ... \leq x_n \longmapsto x_1 \leq ... \leq x_k = x_{k+1} \leq ... \leq x_n,$$

или, для более "кратного"варианта:

$$x_1 \leq ... = x_k \leq x_{k+1} = ... \leq x_n \longmapsto x_1 \leq ... = x_k = x_{k+1} = ... \leq x_n.$$

В обоих случаях число столбцов сокращается на единицу, причём в кодовой матрице складываются l-й и $(l+1)$-й столбцы — именно те, в которых закодированы k-й и $(k+1$-й корни (поскольку они разделены неравенством, они находятся обязательно в соседних столбцах):

$$\begin{pmatrix} k_{11} \; ... \; k_{1l} \; k_{1l+1} \; ... \; k_{1m} \\ k_{21} \; ... \; k_{2l} \; k_{2l+1} \; ... \; k_{2m} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} k_{11} \; ... \; k_{1l} + k_{1l+1} \; ... \; k_{1m} \\ k_{21} \; ... \; k_{2l} + k_{2l+1} \; ... \; k_{2m} \end{pmatrix}$$

Назовём эту операцию *столбцовым сложением.*

При возвращении на межслойную границу с "мнимой"стороны одна из комплексно сопряжённых пар обращается в кратную действительную:

$$x_1 \leq ... \leq \mathbf{Re} z_{k,k+1} \leq x_{k+2} \leq ... \leq x_n \& y_k \geq 0 \longmapsto$$
$$x_1 \leq ... \leq x_k = x_{k+1} \leq x_{k+2} \leq ... \leq x_n \& y_k = 0$$

— число столбцов при этом не меняется, но единица l-го столбца, в котором закодирована пара $z_{k,k+1} = x_k \pm iy_k$, поднимается из 2-й строки в 1-ю:

$$\begin{pmatrix} k_{11} \; ... \; k_{1l} \; ... \; k_{1m} \\ k_{21} \; ... \; k_{2l} \; ... \; k_{2m} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} k_{11} \; ... \; (k_{1l}+1) \; ... \; k_{1\,m-1} \\ k_{21} \; ... \; (k_{2l}-1) \; ... \; k_{2\,m-1} \end{pmatrix}.$$

Назовём эту операцию *строчным сложением.*

Нетрудно видеть, что и выходы из сегмента на внутрислойные границы, как, например,

$$x_1 \leq ... \leq x_{k-1} \leq z_{k,k+1} \leq ... \leq x_n \longmapsto x_1 \leq ... \leq x_{k_1} = z_{k,k+1} \leq ... x_n,$$

или

$$x_1 \leq ... \leq z_{k,k+1} \leq z_{k+2,k+3} \leq ... \leq x_n \longmapsto x_1 \leq ... \leq z_{k,k+1} = z_{k+2,k+3} \leq ... \leq x_n$$

— выражаются в столбцовом сложении кода.

Определение. Обе возможности сложения: строчного и столбцового — будем вместе называть *сложением кода.* Множества кодовых матриц, получающихся из данного кода, называются *суммой кода.*

Анализ различных кодовых матриц позволяет установить скорость роста мощности симплектических орграфов.

Теорема 2 [10]. При $n > 3$ мощности орграфов G_n связаны равенством

$$g_n = 2g_{n-1} + 2g_{n-2} - 2g_{n-3}.$$

Следствие. Функция g_n мощности графа растёт асимптотически экспоненциально с основанием $\alpha \approx 2,4812$.

Также с помощью кодов можно изображать симплектические графы, обходясь без литеральных обозначений - например, на рис. 2 с их помощью представлен орграф G_5.

Быстрый рост мощности симплектических графов заставляет искать возможности сокращения их структуры — до той, которая отражала бы критические области целевой функции в пространстве параметров.

6. Корневые зоны и редукция симплектических неорграфов. Каждому допустимому вектору параметров регулятора (т.е. точке в пространстве параметров) соответствует некоторый характеристический многочлен системы АУ; соотношения между его корнями позволяют отнести этот набор корней к определённому сегменту корневого симплекса, а точку в пространстве параметров — к соответствующей ему *корневой зоне* этого пространства. Рассматривая прообразы сегментов A_ij, B_lm, и т.д. в пространстве параметров, получаем в нём корневые зоны $\widetilde{A}_ij$, $\widetilde{B}_lm$,... соответственно. Так корневой симплекс создаёт в пространстве параметров *карту зон*. Соответствия зон и границ в карте корневых зон также описываются симплектическими графами — с той важной оговоркой, что корневые зоны нередко оказываются двухсвязными, и, по-видимому, могут быть многосвязны.

Однако, для описания зонно-граничных отношений в карте зон корневой симплекс задействован не полностью. Практическую ценность представляют возможности сокращения симплектических графов, поскольку их мощности асимптотически растут экспоненциально. А в процессе численной минимизации α-градуировки корневого набора существенную роль играет только некоторая часть возникающих сегментов: именно, тех, где многочлен оказывается сильно или слабо несепарабелен. Как раз эти условия и задают определённые корневые сегменты, поэтому для этих прикладных задач достаточно рассматривать во всём корневом симплексе только такие критические границы — и, соответственно, разделяемые ими зоны. Для неорграфов это приводит к неожиданному результату: принципиальная *экстремальная* структура корневого симплекса степени $n \geq 4$ сводится к редуцированному неорграфу $\overline{H}_4$ (рис. 3), для орграфов также получается значительное сокращение.

(1) Прежде всего, число параметров сказывается на реализуемости графа "по уровневой глубине": n-мерные сегменты в пространстве параметров переходят в k-мерные корневые зоны, спуск к сегментам меньших размерностей приводит к нульмерным корневым зонам на $n-k$ -м уровне. Так, для случая двух параметров сегменты A_pq реализуются как двумерные корневые зоны; B_ij оказываются одномерными кривыми, наконец, каждому сегменту C_kl соответствует точка или несколько точек. Этот фактор безразличен для неорграфа и непосредственно учитывается в орграфе просто тем, что его рассмотрение заканчивается $n-k$-м уровнем. А для случая трёх параметров ПИД-регулятора сегменты A_ij

реализуются как трёхмерные корневые зоны $\widetilde{A}_i j$; $\widetilde{B}_l m$ оказываются двумерными поверхностями, $\widetilde{C}_p q$ — линиями, и, наконец, каждому сегменту $D_u v$ соответствует одна или несколько точек $\widetilde{D}_u v$. Этим реализация орграфа G_n исчерпывается.

(2) Далее, в этом k-мерном многообразии пространства коэффициентов могут возникать не все соотношения между корнями: т.е. некоторые корневые сегменты оказываются не представлены вообще. Если ограничиться рассмотрением корневых зон той же размерности, что и пространство параметров, то структура границ между ними в карте зон отражается редуцированным неорграфом $\widehat{H}_n$. Легко усматривается следующее утверждение.

Предложение 3. Редуцированный неорграф $\widehat{H}_n$ является частью неорграфа H_n, порождённой вершинами фактически возникающих сегментов.

Замечание. В предложении речь идёт о части графа, а не подграфе, порождённом наличествующими вершинами, поскольку некоторые сегменты, граничащие в корневом симплексе, могут оказаться несмежными зонами в карте. Однако, на практике можно рассматривать именно подграф, поскольку фактическая нереализованность некоторых рёбер для практической минимизации несущественна.

(3) Наконец, благодаря самой конструкции R-градуировки от "левых"корней ничего не зависит. Решающее значение имеет только правая секция задающих неравенств, связывающая старшие корни или пары. Полная картина особых границ даётся тремя "правыми"корнями или двумя комплексными парами, а численность "меньших"корней (и, тем самым, степень многочлена) в этом отношении себя не проявляет. Нарушения дифференцируемости и критические точки возникают в случаях, когда правые корни оказываются

(а) кратной действительной парой $x_{n-1} = x_n$;

(б) действительным корнем и комплексной парой с равными целевыми значениями, например, $x_{n-2} =_\alpha x_{n-1} \pm iy_n$;

(в) двумя комплексными парами с равными целевыми значениями, например, $x_{n-3} \pm iy_{n-2} =_\alpha x_{n-1} \pm iy_n$. Ниже буква α возле значков неравенства будет опускаться.

Рассматривая только соответствующие сегменты и корневые зоны, можно сократить структуру неориентированного симплектического графа до редуцированного графа $\overline{H}_4$ (рис. 3).

Границы типа (а) в последнем обозначены как $B_1 2$ и $B_2 1$ — они разграничивают корневую зону $\widetilde{A}_0 : ... \leq x_{n-1} \leq x_n$ и зоны

$$\widetilde{A}_1 3 : ... \le x_{n-2} \le x_{n-1} \pm iy_n \text{ или } \widetilde{A}_2 : ... \le x_{n-3} \pm iy_{n-2} \le x_{n-1} \pm iy_n$$

соответственно.

Граница типа (б) обозначена как $B_0 3$; она разграничивает корневые зоны $\widetilde{A}_1 2 : ... \le x_{n-2} \pm iy_{n-1} \le x_n$ и $\widetilde{A}_1 3 : ... \le x_{n-2} \le x_{n-1} \pm iy_n$.

Граница типа (в) оказывается петлёй B_3, это "линия склейки"двух листов сегмента $\overline{A}_2 = A_2' \cup A_2'' : ... \le x_{n-3} \pm iy_{n-2} =_\alpha x_{n-1} \pm iy_n$.

При добавлении границ, где дифференцируемость целевой функции не нарушается, именно,

$B_0 2 : ... \le x_{n-2} = x_{n-1} \le x_n$ или $... \le x_{n-3} \pm iy_{n-2} = x_{n-1} \le x_n$ и $B_2 2 : ... \le x_{n-3} = x_{n-2} \le x_{n-1} \pm iy_n$, получается граф $\overline{H}_4$, который формально возникает из неорграфа H_4 стягиванием ребра $B_0 1$ и объединением $\overline{A}_0 = A_0 \cup A_1 1$.

Тем самым установлено следующее утверждение [11].

Предложение 4. Для многочлена любой степени ≥ 4 целевая функция типа **R**-градуировки имеет структуру объединённых корневых зон и особых мноогобразий, описывающуюся графом $\overline{H}_4$.

В общем случае очевидно следуещее утверждение.

Предложение 5. Объединение двух смежных корневых сегментов или зон приводит к стягиванию в неорграфе H_n ребра, соответствующему границе между объединяемыми сегментами (зонами).

7. Редукция орграфа. Теперь можно указать, как три фактора редукции проявляют себя в орграфах.

(1) О том, как сказывается на реализации орграфа G_n меньшая размерность пространства параметров по сравнению со степенью многочлена, уже сказано выше в п. 6.

(2) При неполном присутствии корневых сегментов для многочлена $f_{\bar{t}}(s) = s^n + \alpha_{n-1}(\bar{t})s^{n-1} + ... + \alpha_0(\bar{t})$ множество корневых зон и их границ представляется подграфом $\widehat{G}_n$ орграфа G_n, порождаемым реально возникшими зонами максимальной размерности, поскольку в пространстве параметров зоны, содержащие кратные или α-кратные корни, не могут иметь полной размерности пространства, так как и кратность, и α-кратность задают нелинейные многообразия в пространстве коэффициентов, и их пересечение с k-мерным линейным многообразием $(\alpha_0(\bar{t}), ..., \alpha_{n-1}(\bar{t}))^T$ не может иметь размерности k даже локально. А $k-1$-мерная зона в пространстве параметров автоматически оказывается граничной между k-мерными.

Остаётся указать алгоритм порождения вершин более низких уровней.

Вершины и рёбра неорграфа $\overline{H}_n$ образуют два верхних уровня вершин орграфа $\overline{G}_n$ — k-й и $k-1$-й, что и служит базисом индукции. Если вершины X_ij уровня l уже построены, то нижележащий, $l-1$-й уровень строится следующим образом.

Границы симплекса и вершины орграфа бывают двух типов: (а) между различными сегментами и (б) внутри сегмента — "петли"между листами многолистных сегментов.

Для нахождения вершин типа (а) рассматриваются пересечения кодовых сумм всех возникших пар вершин X_ij и $X_{i'}j'$, и если какая-то пара граничит по сегменту $Y_{i''}j''$ размерности $l-1$, то его код окажется одним из таких пересечений [6, 9]. Для вершин типа (б) следует рассматривать сегменты с α-соседними сопряжёнными парами (обрамлять их могут α-равенства, это не существенно): $... \leq_\alpha x_{m-2} \pm iy_{m-1} \leq_\alpha x_m \pm iy_{m+1} \leq_\alpha ...$ — появление равенства между парами приводит к снижению размерности как раз на единицу; для кодовых матриц это соответствует столбцовому сложению, а возникающие в его результате коды позволяют указать вершины $l-1$-го уровня орграфа $\overline{G}_n$.

(3) Наконец, если есть возможность объединить некоторые корневые зоны, границы между которыми оказываются несущественны для оптимизации целевых функций, или по каким-то другим причинам, то вершины редуцированного орграфа $\overline{G}_n$ строится как классы вершин исходного орграфа $\widehat{G}_n$ — а редуцированная карта корневых зон строится из объединений зон по этим классам.

Итак, пусть в орграфе $\widehat{G}_n$ указано разбиение вершин высшего, k-го уровня на классы $\overline{A}_ij$ объединяемых вершин. Это задаёт базис индукции. Пусть разбиение вершин l-го уровня на классы $\overline{X}_ij$ осуществлено и задана соответствующая ему эквивалентность $\sim$ на множестве вершин этого уровня. Вершины $l-1$-го уровня эквивалентны, если им инцидентны одинаковые наборы входящих дуг от классов $\overline{X}_ij$, именно:

$Y_km \sim Y_{k'}m'$ означает, что для всякой дуги $\langle X_ij; Y_km\rangle$ найдётся дуга $\langle X_{i'}j'; Y_{k'}m'\rangle$ такая, что $X_{i'}j' \sim X_ij$.

Смежные классы $\overline{Y}_km$ по этой эквивалентности задают искомое разбиение вершин $l-1$-го уровня.

Эти эквивалентности и разбиения также легко устанавливаются с помощью кодовых матриц.

В результате возникает орграф $\overline{G}_n$, вершинами которого оказываются смежные классы эквивалентных вершин всех уровней орграфа . Дуги между классами соседних уровней означают, что каждая вершина нижнего класса достижима из некоторой вершины, входящей в верхний класс.

8. Пример. Рассмотрим построение графа $\overline{G}_5$, описывающего критические зоны для многочлена 5-й степени. Структура корневых сегментов и их границ для многочлена 5-й степени $f_5(s)$ полностью описывается 44-вершинным графом G_5 (рис. 2). Сокращение производится за счёт объединения корневых сегментов, которые разделяются некритическими границами (не нарушающими дифференцируемости R-градуировки). Граф $\overline{G}_5$ наследует от неорграфа $\overline{H}_4$ вершины $\overline{A}_i j$ и рёбра $B_k m$, которые здесь также становятся вершинами. Кроме того, $\overline{G}_5$ включает в себя вершины, отвечающие критическим корневым зонам меньшей размерности. Чтобы избежать литеральных обозначений вершин и задающих неравенств сегментов, граф $\overline{G}_5$ на рис. 4 изображён с помощью *сокращённых матричных кодов*, в которых знаком * отмечены клетки, содержащие любые допустимые элементы (в т.ч. пустые), например,

$$\begin{pmatrix} * & 2 & 1 \\ * & * & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} * & 2 \\ * & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В интересах примеров, где главный экстремум достигается при возникновении кратной комплексной пары, на рис. 4 в граф включены также вершины с кодами

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2' \end{pmatrix} : x_1 \leq_\alpha x_2 \pm i y_3 = x_4 \pm i y_5 \text{ и } \begin{pmatrix} 3 \\ 2' \end{pmatrix} : x_1 =_\alpha x_2 \pm i y_3 = x_4 \pm i y_5,$$

где штрих при цифре $2'$ обозначает кратную комплексную пару — кратную в самом обычном смысле. Это многообразие размерности на единицу меньше, чем охватывающее его многообразие α-кратности тех же корней; в корневом симплексе оно не представлялось потому, что в сегментарно-граничной структуре симплекса ему не соответствует вовсе ничего. Здесь же оно оказывается множеством "с наибольшим экстремальным потенциалом".

Прежде всего, нужно объединить зоны максимальной размерности в четыре вершины, корневые диаграммы которых соответствуют вершинам неорграфа $\overline{H}_4$, т.е. с кодами вида:

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 1 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 1 & 1 \\ * & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 1 & 1 \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 1 & 1 \\ * & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Границы между ними также представлены графом $\overline{H}_4$; во-первых, это критические границы, указанные в п.6 и представляющие в качестве старших корней кратную действительную пару или α-равные корень и комплексную пару, либо две комплексные пары:

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 2 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 1 & 2 \\ * & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 2 \\ * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 2 \\ * & 2 \end{pmatrix}.$$

Во-вторых, это некритические зоны, также являющиеся границами между вышеуказанными зонами:

$$\begin{pmatrix} * & 2 & 1 \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 2 & 1 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$

Далее, в редуцированный орграф обязательно включаются все вершины, коды которых соответствуют зонам с нарастающей кратностью α-старших корней, то есть с правыми столбцами вида:

$$\begin{pmatrix} * & 3 \\ * & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 3 \\ * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 3 \\ * & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 3 \\ * & 3 \end{pmatrix},$$

затем

$$\begin{pmatrix} * & 4 \\ * & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 4 \\ * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 4 \\ * & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 4 \\ * & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 4 \\ * & 4 \end{pmatrix},$$

и т.д., разумеется, с учётом ограничений, накладываемых степенью многочлена.

Остальные вершины вводятся в орграф $\overline{G}_5$ по индукции.

Рис. 3. Полный симплектический неорграф H_4 и редуцированный граф $\overline{H}_4$, отражающий структуру объединённых корневых зон и особых многообразий целевой функции для многочлена степени ≥ 4.

Рис. 4. Редуцированный орграф $\overline{G}_5$, отражающий структуру корневых зон и критических границ для многочлена 5-й степени.

ЛИТЕРАТУРА

[1] **Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.** *Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем*/ Автоматика и телемеханика. — 1990. — №9. — С. 45 — 54.

[2] **Гайворонский С.А.** *Параметрический синтез линейных регуляторов робастных систем с гарантированными корневыми показателями качества*// Четвертая международная конференция по проблемам управления: Пленарные доклады и избранные труды/ М.: Институт проблем управления, 2009. — С. 576 — 582.

[3] **Поляк Б.Т., Щербаков П.С.** *Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к их решению*/ Автоматика и телемеханика. — 2005. — №5. — С. 7 — 46.

[4] **Зейферт Г., Трельфалль В.** *Топология*/ Л.: ГОНТИ. — 1938. — 400 с.

[5] **Понтрягин Л.С.** *Основы комбинаторной топологии. Изд.4*/ М.: Наука. — 2004. — 136 с.

[6] **Чехонадских А.В.** *Корневые симплексы и симплектические графы действительных многочленов*/ Науч. вестн. НГТУ. — 2009. — №1(34). — С.143 — 163.

[7] **Chekhonadskih A.V., Voevoda A.A.** *On Jacoby Matrix Rang Of Polynomial Coefficients-Roots Correspondens*// Algebra and Model Theory 5/ Novos. State Techn. Univ. — Novosibirsk. — 2005 г. — Pp. 275 — 280.

[8] **Воевода А.А., Чехонадских А.В.** *Дифференцируемость целевой функции множества характеристических корней*/ Науч. вестн. НГТУ. — 2007. — №3(28). — С. 203 — 205.

[9] **Chekhonadskih A.V., Voevoda A.A.** *Codes and adjustment in digraphs of root simplexes of real polynomials*// Algebra and Model Theory 6/ Novos. State Techn. Univ. — Novosibirsk. — 2007. — Pp. 7 — 15.

[10] **Чехонадских А.В.** *О скорости роста орграфов корневого симплекса многочленов с действительными коэффициентами*/ Сб. науч. тр. НГТУ. — Новосибирск: Изд-во НГТУ. — 2007. — №4 (50). — С.163-168.

[11] **Воевода А.А., Чехонадских А.В.** *Оптимизация расположения полюсов системы автоматического управления с регулятором пониженного порядка* /Автометрия. — 2009. — Т. 45. — №5. — С.113 — 123.

КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКАЯ ГРУППА, СОДЕРЖАЩАЯ 2^n ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫХ РЕШЕТОК

В.А. Чуркин*

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090
e-mail: churkin@math.nsc.ru

Введение

Существенную роль в классификации кристаллографических групп движений псевдоевклидовых пространств играет аналог ослабленной теоремы Бибербаха, состоящей в том, что кристаллографическая группа однозначно задает свою подгруппу трансляций как абстрактная группа. Ослабленная теорема Бибербаха верна в евклидовых пространствах [1, 2] и в пространствах Минковского [3]. Недавно в работе [4] построена серия кристаллографических групп в псевдоевклидовых пространствах $\mathbb{R}^{p,q}$ при $\min\{p,q\} \geqslant 3$, содержащих две различные автоморфно сопряженные абелевы решетки, каждая из которых снабжена вещественной невырожденной симметрической билинейной формой, инвариантной относительно действия группы сопряжением на решетке. Будем называть такую решетку для краткости псевдоевклидовой. Каждая из них может быть реализована как решетка трансляций из группы движений псевдоевклидова пространства. В связи с этим Р.М. Гарипов сформулировал вопрос о возможном количестве псевдоевклидовых решеток в кристаллографической группе.

В этой работе вычисляется точное количество псевдоевклидовых решеток в одной кристаллографической группе G из [4], действующей движениями в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^{3,3}$, — их оказалось ровно две (теорема 1). Описана группа автоморфизмов группы G (теорема 2).

*Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ.344.2008.1)., а также при поддержке гранта АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы»(проект 2.1.1/419).

Показано также, что n-ая декартова степень G^n группы G содержит ровно 2^n псевдоевклидовых решеток (теорема 3).

§1. Кристаллографическая группа с двумя решетками

Опишем группу G с двумя решетками из [4] и докажем для нее все основные свойства независимо от работы [4].

Группа G двуступенно нильпотентна, порождается двумя абелевыми нормальными подгруппами Z и T ранга 6, ее центр $T \cap Z$ — свободная абелева группа ранга 3 с базисом $c_1,\ c_2,\ c_3$. Группа Z имеет базис $b_1,\ b_2,\ b_3,\ c_1,\ c_2,\ c_3$, а T — базис $a_1,\ a_2,\ a_3,\ c_1,\ c_2,\ c_3$. Группа $G = TZ$, кроме соотношений коммутируемости между a_i и a_j, b_i и b_j, a_i и c_j, b_i и c_j, задается также определяющими соотношениями

$$[a_i,\ b_i] = 1, \quad [a_i,\ b_j] = c_k^{\varepsilon(ij\,k)} \text{ при } i \neq j.$$

Здесь $[a,\ b] = aba^{-1}b^{-1}$ — коммутатор элементов a и b, а $\varepsilon(ij\,k)$ — знак перестановки $(ij\,k)$.

Подробнее,

$$\begin{array}{lll}
[a_1, b_1] = 1, & [a_2, b_1] = c_3^{-1}, & [a_3, b_1] = c_2, \\
[a_1, b_2] = c_3, & [a_2, b_2] = 1, & [a_3, b_2] = c_1^{-1}, \\
[a_1, b_3] = c_2^{-1}, & [a_2, b_3] = c_1, & [a_3, b_3] = 1.
\end{array}$$

Группу G можно реализовать как кристаллографическую группу в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^{3,3}$, если считать $b_1,\ b_2,\ b_3,\ c_1,\ c_2,\ c_3$ базисом решетки $Z = \mathbb{Z}^6$ или трансляциями пространства $\mathbb{R}^6$, а порождающие a_i отождествить с линейными операторами $\widehat{a_i} : x \mapsto a_i x a_i^{-1},\ x \in Z \simeq \mathbb{Z}^6$, которые в базисе $b_1,\ b_2,\ b_3,\ c_1,\ c_2,\ c_3$ имеют клеточно-треугольные матрицы $A_i = \begin{pmatrix} I & O \\ L_i & I \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, 3$, где I — единичная матрица порядка 3, а

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что операторы $\widehat{a_i}$ сохраняют симметрическую билинейную форму

$$\zeta(x, y) = x_1 y_4 + x_4 y_1 + x_2 y_5 + x_5 y_2 + x_3 y_6 + x_6 y_3$$

типа (3,3) на $\mathbb{R}^6$. Достаточно проверить это для соответствующей квадратичной формы $\kappa(x) = \zeta(x, x)$. Например, для A_1 имеем

$$\kappa(A_1x) = \kappa(x_1, x_2, x_3, x_4, -x_3 + x_5, x_2 + x_6) = \\ = 2x_1x_4 + 2x_2(-x_3 + x_5) + 2x_3(x_2 + x_6) = 2x_1x_4 + 2x_2x_5 + 2x_3x_6 = \kappa(x).$$

Соответствие $a_i \leftrightarrow b_i$, $c_i \leftrightarrow c_i$, $i = 1, 2, 3$, сохраняет определяющие соотношения и продолжается до автоморфизма группы $G = TZ$, меняющего местами подгруппы T и Z. Поэтому подгруппа T также обладает симметрической билинейной формой типа (3,3), инвариантной относительно действия G на T сопряжением.

Теорема 1. *Кристаллографическая группа G, построенная выше, имеет ровно две псевдоевклидовы решетки, т. е. ровно две нормальные свободные абелевы подгруппы конечного ранга, максимальные среди абелевых и обладающие невырожденной симметрической билинейной формой, инвариантной относительно действия группы на решетке сопряжением.*

Доказательство начнем с вычисления централизаторов элементов группы G.

Поскольку в 2-ступенно нильпотентной группе

$$[xy, z] = [x, z][y, z], \quad [x, yz] = [x, y][x, z],$$

то легко вывести формулу коммутирования для элементов общего вида из группы G. А именно, коммутатор элементов $a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}a_3^{\alpha_3}b_1^{\beta_1}b_2^{\beta_2}b_3^{\beta_3}$ и $a_1^{\alpha_1'}a_2^{\alpha_2'}a_3^{\alpha_3'}b_1^{\beta_1'}b_2^{\beta_2'}b_3^{\beta_3'}$ равен $c_1^{\gamma_1}c_2^{\gamma_2}c_3^{\gamma_3}$, где

$$\gamma_1 = \begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2' & \beta_3'\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\alpha_2' & \alpha_3'\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}, \ \gamma_2 = -\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1' & \beta_3'\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\alpha_1' & \alpha_3'\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}, \ \gamma_3 = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1' & \beta_2'\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\alpha_1' & \alpha_2'\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}. \tag{1}$$

Здесь $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta'\end{vmatrix} = \alpha\beta' - \beta\alpha'$ — определитель матрицы.

С целью упростить дальнейшие вычисления в группе G будем работать только с наборами показателей, т. е. перейдем к вычислениям в соответствующей вещественной градуированной алгебре Ли $L = A \oplus B \oplus C$ с градуировкой $(1, -1, 0)$. Здесь A и B — абелевы подалгебры, C — центр алгебры L. Подалгебры A, B, C являются 3-мерными евклидовыми пространствами $\mathbb{R}^3$. С учетом формулы (1) зададим скобку Ли $[\ ,\ ]$ на $A \oplus B$ по следующему правилу. Если $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in A$, $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in B$, $a' = (\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3') \in A$, $b' = (\beta_1', \beta_2', \beta_3') \in B$, то

$$[(a, b),\ (a', b')] = a \times b' - a' \times b \tag{2}$$

принадлежит C. Здесь $u \times v$ обозначает векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Лемма 1. *Пусть a и b — линейно независимые векторы из $\mathbb{R}^3$. Тогда централизатор элемента $(a,\ b)$ в алгебре L по модулю центра L состоит из элементов вида $(\alpha a + \beta b,\ \gamma a + \alpha b)$, где $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$. Централизатор имеет размерность 3 и неабелев.*

Доказательство. Если $[(a, b),\ (a', b')] = 0$, то $a \times b' = a' \times b$ ввиду (2). Если $a \times b' = a' \times b = 0$, то $a' = \beta b$, $b' = \gamma a$, $(a', b') = \beta(b, 0) + \gamma(0, a)$. Если $a \times b' = a' \times b = c \neq 0$, то $c \perp a, b, a', b'$, векторы a, b, a', b' принадлежат одной плоскости, ортогональной вектору c. Поэтому

$$a' = \alpha a + \beta b,$$
$$b' = \gamma a + \delta b.$$

Отсюда $a \times (\gamma a + \delta b) = (\alpha a + \beta b) \times b,\ \ \delta(a \times b) = \alpha(a \times b),\ \ \delta = \alpha$. Следовательно, $(a', b') = (\alpha a + \beta b,\ \gamma a + \alpha b) = \alpha(a, b) + \beta(b, 0) + \gamma(0, a)$. При этом $(a', b') = (0, 0)$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Поскольку $[(b, 0),\ (0, a)] = b \times a \neq 0$, то централизатор (a, b) неабелев.

Лемма доказана.

Следствие. *Элемент $(a,\ b)$ при линейно независимых a и b нельзя включить в базис абелевой подалгебры ранга 3 из L по модулю центра L.*

Лемма 2. *Пусть $a \neq 0$ и $b = \lambda a$ — линейно зависимые векторы из $\mathbb{R}^3$. Тогда централизатор элемента $(a,\ \lambda a)$ в алгебре L по модулю центра L состоит из элементов вида $(u,\ \lambda u + \alpha a)$, где $u \in \mathbb{R}^3,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Централизатор имеет размерность 4, неабелев, но содержит абелеву подалгебру ранга 3. Аналогично, централизатор элемента $(\lambda a,\ a)$ в алгебре L по модулю центра L состоит из элементов вида $(\alpha a - \lambda v,\ v)$, где $\alpha \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}^3$. Централизатор имеет размерность 4, неабелев, но содержит абелеву подалгебру ранга 3.*

Доказательство. Имеем

$$[(a,\ \lambda a),\ (u,\ v)] = a \times v - u \times \lambda a = a \times (v - \lambda u) = 0$$

тогда и только тогда, когда $v - \lambda u = \alpha a,\ v = \lambda u + \alpha a$. Остальные утверждения очевидны. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть R — какая-нибудь решетка в группе G. Пусть $R \neq Z$. Поскольку R — максимальная среди абелевых подалгебр, то R содержит центр C алгебры L. В работе [4] показано, что коранги r и s пересечения $R \cap Z$ в R и Z удовлетворяют неравенствам

$$\frac{r(r-1)}{2} \leqslant s, \quad \frac{s(s-1)}{2} \leqslant r.$$

Поэтому коранг пересечения $R \cap Z$ в R не может быть равен 1 или 2.

С другой стороны,

$$\mathrm{rk}\,(R/R \cap Z) \leqslant \mathrm{rk}\,(R/C) \leqslant \mathrm{rk}\,(L/C) = 3.$$

Но подгруппа $R \cap Z$ изолирована в аддитивной группе R. Действительно, если $kr \in Z$ и k — ненулевое целое, а $r \in R$, то $k[r, z] = [kr, z] = 0$, $[r, z] = 0$ для всех z из Z, и тогда $r \in Z$ ввиду максимальности Z среди абелевых подалгебр L. Следовательно, $R \cap Z = C$, $\mathrm{rk}\,(R/C) = 3$.

С учетом леммы 1, следствия и леммы 2 базис абелевой подалгебры R по модулю C имеет вид

$$r_1 = (\alpha_1 a_1, \beta_1 a_1),\ r_2 = (\alpha_2 a_2, \beta_2 a_2),\ r_3 = (\alpha_3 a_3, \beta_3 a_3),$$

где можно считать, что α_i, β_i — целые числа и что a_i — линейно независимые целочисленные векторы, все три компоненты которых в совокупности взаимно просты.

Ввиду формулы (5) при $i \neq j$ коммутатор

$$[r_i,\ r_j] = \alpha_i\beta_j(a_i \times a_j) - \alpha_j\beta_i(a_j \times a_i) = (\alpha_i\beta_j + \alpha_j\beta_i)(a_i \times a_j) = 0$$

тогда и только тогда, когда перманент

$$\mathrm{per}\begin{pmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{pmatrix} = \alpha_i\beta_j + \alpha_j\beta_i = 0.$$

Если $\alpha_i \neq 0,\ \beta_i \neq 0$, то при попарно различных i, j, k получаем

$$\mathrm{per}\begin{pmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ -\beta_i & \beta_j \end{pmatrix} = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} \alpha_i \\ -\beta_i \end{pmatrix}.$$

Аналогично,

$$\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} \alpha_i \\ -\beta_i \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{per}\begin{pmatrix} \alpha_j & \alpha_k \\ \beta_j & \beta_k \end{pmatrix} = -2\lambda_j\lambda_k\alpha_i\beta_i = 0$$

только при $\lambda_j = 0$ или $\lambda_k = 0$. Но тогда $r_j = 0$ или $r_k = 0$, что противоречит линейной независимости $r_1,\ r_2,\ r_3$.

Если $\alpha_i \neq 0,\ \beta_i = 0$, то

$$\operatorname{per}\begin{pmatrix}\alpha_i & \alpha_j\\ 0 & \beta_j\end{pmatrix} = \alpha_i\beta_j = 0$$

только при $\beta_j = 0$, когда $j \neq i$. Тогда

$$r_1 = (\alpha_1 a_1,\ 0),\ r_2 = (\alpha_2 a_2,\ 0),\ r_3 = (\alpha_3 a_3,\ 0),$$

Но тогда $R \subset Z$ и $R = Z$ ввиду максимальности решетки среди абелевых подалгебр. Следовательно, $\alpha_i = 0,\ \beta_i \neq 0$. Рассуждая аналогично предыдущему, получим, что $R = T$.

Теорема доказана.

§2. Автоморфизмы группы с двумя решетками

Автоморфизм группы назовем центральным, если он действует тождественно на центре группы и на факторгруппе по центру. Каждый такой автоморфизм для нашей группы G имеет вид $x \mapsto x\,\theta(xC)$, где θ — произвольный гомоморфизм из факторгруппы по центру $G/C \simeq \mathbb{Z}^6$ в центр $C \simeq \mathbb{Z}^3$. Центральные автоморфизмы образуют нормальную подгруппу в группе всех автоморфизмов. Найдем остальные автоморфизмы группы G.

Теорема 2. *Пусть G — кристаллографическая группа с двумя псевдоевклидовыми решетками из теоремы 1. Тогда группа ее автоморфизмов по модулю центральных автоморфизмов изоморфна центральному произведению группы* $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ *и диэдральной группы порядка 8.*

Доказательство. Любой автоморфизм группы G отображает псевдоевклидову решетку на псевдоевклидову решетку. Поскольку в группе их только две и имеется автоморфизм, меняющий их местами, то, домножая на него при необходимости, можно считать, что исходный автоморфизм оставляет решетки Z и T на месте. Чтобы упростить обозначения, снова перейдем к алгебрам Ли и будем считать, что φ — автоморфизм алгебры L, оставляющий на месте абелевы подалгебры C, $A \oplus C$, $B \oplus C$. Пусть e_1, e_2, e_3 — стандартный базис $\mathbb{Z}^3$ (строки единичной матрицы порядка 3), $e_1 \times e_2 = e_3,\ e_2 \times e_3 = e_1,\ e_3 \times e_1 = e_2$. Тогда по модулю центра

$$\varphi : (e_i, 0) \mapsto (a_i, 0),\ (0, e_j) \mapsto (0, \varepsilon_j a_j),\quad i, j = 1, 2, 3,$$

где a_1, a_2, a_3 — базис $\mathbb{Z}^3$, $\varepsilon_j = \pm 1$. Это следует из леммы 2, описывающей централизаторы элементов вида $(a, 0)$, из того, что при автоморфизме централизатор $(e_i, 0)$ переходит в централизатор $(a_i, 0)$, и из того, что $(e_i, 0)$ и $(0, e_i)$ коммутируют.

Автоморфизм должен сохранять определяющие соотношения алгебры L и, в частности, соотношения

$$[(e_i, 0), (0, e_j)] = e_i \times e_j = \varepsilon(ij\,k)e_k$$

Следовательно, получаем дополнительные условия на базис a_1, a_2, a_3:

$$[(a_i, 0), (0, \varepsilon_j a_j)] = \varepsilon_j(a_i \times a_j) = \varepsilon(ij\,k)\,\varphi(e_k). \tag{3}$$

Отсюда $a_1 \times a_2,\ a_2 \times a_3,\ a_3 \times a_1$ — базис центра C. Но это автоматически следует из того, что a_1, a_2, a_3 — базис $\mathbb{Z}^3$, поскольку по известной формуле аналитической геометрии для смешанного произведения трех векторов

$$\det(a_1 \times a_2,\ a_2 \times a_3,\ a_3 \times a_1) = \det(a_1, a_2, a_3)^2 = 1.$$

Кроме того, транспозиция i и j в равенстве (3) дает равенства $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Следовательно, надо положить

$$\varphi(e_k) = \pm\varepsilon(ij\,k)\,(a_i \times a_j)$$

и все условия для φ быть автоморфизмом алгебры L будут выполнены.

Обозначим через $\sigma_1,\ \sigma_2$ — такие автоморфизмы L, что

$$\sigma_1 : (e_i, 0) \mapsto (-e_i, 0),\quad (0, e_j) \mapsto (0, e_j),\quad e_i \times e_j \mapsto -e_i \times e_j,\quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$\sigma_2 : (e_i, 0) \mapsto (e_i, 0),\quad (0, e_j) \mapsto (0, -e_j),\quad e_i \times e_j \mapsto -e_i \times e_j,\quad i, j = 1, 2, 3.$$

Кроме того, пусть матрица $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ индуцирует диагональный автоморфизм φ_A, такой, что

$$\varphi_A : (e_i, 0) \mapsto (Ae_i, 0),\quad (0, e_j) \mapsto (0, Ae_j)$$

по модулю центра.

Обозначим через τ автоморфизм L, меняющий местами подалгебры $A \oplus C$, $B \oplus C$ и действующий на C тождественно.

Тогда

1) $\varphi_{-I} = \sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$,

2) $\tau\sigma_1\tau = \sigma_2$,

3) $\tau^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \mathrm{id}$,

4) φ_A коммутирует с τ, σ_1, σ_2.

Из этих соотношений и из разложения произвольного автоморфизма φ следует, что группа всех автоморфизмов алгебры L по модулю центральных автоморфизмов изоморфна центральному произведению группы $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ и диэдральной группы порядка 8, порожденной $\tau,\ \sigma_1,\ \sigma_2$.

Теорема доказана.

§3. Кристаллографическая группа, содержащая 2^n решеток

Теорема 3. *Пусть G — кристаллографическая группа с двумя псевдоевклидовыми решетками из теоремы 1. Тогда её декартова степень G^n является кристаллографической группой движений псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{3n,3n}$, которая содержит ровно 2^n автоморфно сопряженных псевдоевклидовых решеток.*

Доказательство. Пусть G — группа движений пространства $\mathbb{R}^{3,3}$ с двумя решетками Z и T, причем Z — решетка трансляций. Пусть $G_i \simeq G$ — изоморфные копии группы G с решетками Z_i и T_i, где $i = 1, \ldots, n$. Пусть $D = G_1 \times \ldots \times G_n \simeq G^n$ — декартова степень группы G. Тогда D действует естественно на прямой сумме n пространств $\mathbb{R}^{3,3}$, сохраняя соответствующую ортогональную сумму симметрических билинейных форм типа (3,3). Можно считать прямое произведение решеток Z_i решеткой трансляций группы D. Таким образом, D — кристаллографическая группа в пространстве $\mathbb{R}^{3n,3n}$.

Сопоставим подмножеству $X \subset N = \{1, 2, \ldots, n\}$ его дополнение $Y = N \setminus X$ и подгруппу

$$R_X = (\times_{i \in X} Z_i) \times (\times_{j \in Y} T_j)$$

группы $D = G_1 \times \ldots \times G_n \simeq G^n$.

Утверждается, что подгруппы R_X — псевдоевклидовы решетки типа $(3n, 3n)$ в группе D. Действительно, R_X — нормальная свободная абелева подгруппа, совпадающая со своим централизатором в группе D, поскольку таковы все множители Z_i и T_i в группах G_i. С другой стороны, каждый множитель обладает инвариантной относительно сопряжения в группе симметрической билинейной формой. Тогда ортогональная сумма этих форм, дает невырожденную симметрическую билинейную форму на R_X, инвариантную относительно сопряжения элементами группы D.

Очевидно, решетки R_X и $R_{X'}$ при любых $X, X' \subset N$ сопряжены автоморфизмом группы D, который при необходимости меняет местами подгруппы Z_i и T_i из G_i, либо действует на G_i тождественно.

Всего различных решеток R_X имеется 2^n. Осталось доказать, что других псевдоевклидовых решеток в группе D нет.

Пусть R — некоторая псевдоевклидова решетка в группе D. Тогда R содержит центр C группы D, равный прямому произведению множителей $C_i = Z_i \cap T_i$. Пусть p_i — гомоморфизм проекции группы D на i-й множитель G_i. Тогда $p_i(R)$ — нормальная свободная абелева подгруппа группы G_i. Но ввиду доказательства теоремы 1 все абелевы подгруппы группы G_i по модулю ее центра известны — это либо подгруппы группы Z_i и T_i ранга 6, либо подгруппы максимальной абелевой группы $R^i_{a,b}$ ранга 5, которая соответствует в алгебре Ли подалгебре с базисом (a,b), $(-b,a)$ по модулю центра, где a и b линейно независимы. С учетом максимальности R среди абелевых подгрупп группы D получаем, что R — произведение множителей вида Z_i, T_i или $R^i_{a,b}$ по одному для всякого $i = 1,\ldots,n$. Осталось доказать, что если среди них есть по крайней мере один множитель вида $R^i_{a,b}$, то на R нельзя задать невырожденную симметрическую билинейную форму, инвариантную относительно действия D сопряжением.

Пусть по определению $Q_i = Z_i$, если i-й множитель R совпадает с T_i или $R^i_{a,b}$. В противном случае пусть $Q_i = T_i$. Обозначим через Q — произведение всех подгрупп Q_i, $i = 1,\ldots,n$. Конечно, решетка Q имеет невырожденную симметрическую билинейную форму, инвариантную относительно действия D и ее подгруппы $P = QR$ сопряжением. Если еще и подгруппа R такова, то в [4] показано, что

$$\mathrm{rk}\,[Q,R] \leqslant \mathrm{rk}\,(R/(Q\cap R)).$$

Очевидно, $Q \cap R = C$, $\mathrm{rk}\,(R/(Q\cap R)) < 3^n$. Покажем, что $[Q,R] = C$. Тогда $\mathrm{rk}\,[Q,R] = 3^n$ и получается противоречие.

Достаточно вычислить коммутанты $[Q_i, R_i]$. Если $R_i = T_i$, то $Q_i = Z_i$ и $[Q_i, R_i] = C_i$. Если $R_i = Z_i$, то $Q_i = T_i$ и $[Q_i, R_i] = C_i$. Осталось проверить, что $[Z_i, R^i_{a,b} = C_i$.

Опуская индекс и переходя к алгебрам Ли, проверим, что коммутаторы

$$[(e_j,0),(-b,a)] = e_j \times a, \quad [(e_j,0),(a,b)] = e_j \times b, \quad j = 1,\ldots,3, \qquad (4)$$

порождают 3-мерное подпространство при независимых векторах $a, b \in \mathbb{R}^3$.

Если $a = (\alpha,\beta,\gamma)^\top$, $b = (\delta,\epsilon,\sigma)^\top$, то вектора (3) — столбцы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta & 0 & -\sigma & \epsilon \\ \gamma & 0 & -\alpha & \sigma & 0 & -\delta \\ -\beta & \alpha & 0 & -\epsilon & \delta & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверяется, если ранг A равен 2, то векторы a и b будут линейно зависимы. Действительно, если $\gamma \neq 0$, то два первых столбца A образуют базис системы ее столбцов. Поскольку 4-й и 5-й столбцы линейно выражаются через два первых, то они выражаются соответственно только через 1-й и через 2-й

$$\sigma = \lambda\gamma, \quad \epsilon = \lambda\beta, \quad \delta = \lambda\alpha, \quad b = \lambda a.$$

Аналогично разбираются случаи $\beta \neq 0$ и $\alpha \neq 0$.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] *Bieberbach L.* Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume, I // Math. Ann., 70 (1911), 297–336.

[2] *Bieberbach L.* Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume, II // Math. Ann., 72 (1912), 400–412.

[3] *Гарипов Р.М.* Группы орнаментов на плоскости Минковского, Алгебра и логика, 42, N 6 (2003), 655–682.

[4] *Чуркин В.А.* Ослабленная теорема Бибербаха для кристаллографических групп в псевдоевклидовых пространствах, сдана в журн. «Алгебра и логика».

1-ОДНОРОДНЫЕ РАСШИРЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТНЫХ СИСТЕМ

Е.В. Овчинникова*

Кафедра алгебры и математической логики,
Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, 630092, Новосибирск, РОССИЯ.
e-mail: algebra@nstu.ru, eovchin@ngs.ru

Для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$, любой изоморфизм между подсистемами $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ системы $\mathcal{A}$ называется *частичным изоморфизмом* системы $\mathcal{A}$.

В работе Хрушовского [1] доказана следующая

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — конечный неориентированный граф без петель, $p_1, \ldots, p_n$ — частичные изоморфизмы графа $\mathcal{A}$. Тогда существует конечный граф $\mathcal{B}$, расширяющий $\mathcal{A}$, и автоморфизмы графа $\mathcal{B}$, расширяющие $p_1, \ldots, p_n$.*

Хервиг [2] обобщил этот результат Хрушовского для произвольной конечной предикатной алгебраической системы.

В работе [3] показано, что любой конечный полигон над линейно упорядоченным моноидом вложим в конечный полигон, у которого любой частичный изоморфизм продолжается до автоморфизма.

Систему $\mathcal{A}$ назовем n-pi-*однородной*, если в ней любой частичный изоморфизм φ, для которого $|\mathrm{dom}\varphi| = n$, продолжается до автоморфизма системы $\mathcal{A}$.

Группа $\mathrm{Aut}\mathcal{A}$ автоморфизмов алгебраической системы $\mathcal{A}$ называется *транзитивной*, если для любых двух элементов a и b системы $\mathcal{A}$ существует автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}\mathcal{A}$ такой, что $\varphi(a) = b$.

Очевидно, что транзитивность группы автоморфизмов алгебраической системы $\mathcal{A}$ эквивалентна 1-pi-однородности системы $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{A}_i = \langle A_i, \Sigma \rangle_{i \in I}$ — семейство систем предикатной сигнатуры Σ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ для $i \neq j$, $i, j \in I$. На множестве $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ определим систему

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 09-01-00336-а.

сигнатуры Σ, полагая $P_{\mathcal{A}} = \bigcup\limits_{i \in I} P_{\mathcal{A}_i}$ для всех $P \in \Sigma$. Полученная система называется *дизъюнктным объединением* систем $\mathcal{A}_i$ и обозначается через $\bigsqcup\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

На носителе A системы $\bigsqcup\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ определим отношение эквивалентности $\sim$ по правилу: $a \sim b \Leftrightarrow a, b \in A_i$ для некоторого $i \in I$.

Отношение эквивалентности θ на множестве A назовем *а-эквивалентностью* (или амальгамной эквивалентностью), если $\theta \cap \sim = 0_A$.

Для a-эквивалентности θ на A и индексов $i, j \in I$, $i \neq j$, положим $A_{ij} \rightleftharpoons \{a \in A_i \mid a\theta b$ для некоторого $b \in A_j\}$ и $\theta_{ij} \rightleftharpoons \theta \cap (A_{ij} \times A_{ji})$. Заметим, что отношения θ_{ij} являются биекциями между A_{ij} и A_{ji}.

Если A_{ij} непусто, обозначим через $\mathcal{A}_{ij}$ подсистему системы $\mathcal{A}_i$ с носителем A_{ij}. a-Эквивалентность θ на A назовем *а-конгруэнцией* (или амальгамной конгруэнцией) системы $\mathcal{A}$, если θ_{ij} являются изоморфизмами между $\mathcal{A}_{ij}$ и $\mathcal{A}_{ji}$.

Для a-конгруэнции θ на системе $\mathcal{A} = \bigsqcup\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ определим фактор-систему $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\theta$ по следующим правилам: $B = A/\theta$ и для любых $P^{(n)} \in \Sigma$, $b_1, \ldots, b_n \in B$ имеет место $(b_1, \ldots, b_n) \in P_{\mathcal{B}}$ тогда и только тогда, когда существуют $i \in I$, $a_1, \ldots, a_n \in A_i$ такие, что $(a_1, \ldots, a_n) \in P_{\mathcal{A}_i}$ и $\theta(a_k) = b_k$ для любого $k = 1, \ldots, n$. Здесь через $\theta(a)$ обозначается множество $\{x \mid a\theta x\}$.

Очевидно следующее

Утверждение. *Если θ — а-конгруэнция на системе $\mathcal{A} = \bigsqcup\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$, то для любого $i \in I$ отображение $\varphi_i : \mathcal{A} \to \left(\bigsqcup\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i\right) \Big/ \theta$, действующее по правилу $\varphi_i(a) = \theta(a)$, является изоморфным вложением.*

Система $\mathcal{P}(q) = \langle P, L, I\rangle$, где P — множество *точек*, L — множество *линий*, $I \subseteq P \times L$ — *отношение инцидентности*, $q \in \omega$, называется *проективной q-плоскостью*, если выполняются следующие предложения:

$$\forall p \in P \ \ \exists^{=q+1} l \in L \ \ I(p, l), \quad \forall l \in L \ \ \exists^{=q+1} p \in P \ \ I(p, l),$$

$$\forall p_1 \neq p_2 \in P \ \ \exists^{=1} l \in L \ \ (I(p_1, l) \wedge I(p_2, l)),$$
$$\forall l_1 \neq l_2 \in L \ \ \exists^{=1} p \in P \ \ (I(p, l_1) \wedge I(p, l_2)).$$

Здесь $\exists^{=q+1}$ означает “существует ровно $q + 1$”.

Далее проективные q-плоскости называются (*проективными*) *плоскостями*, если из контекста ясно, о каком q идет речь.

Следующие факты о проективных плоскостях можно найти в книге [4].

Факт 1. *Любая проективная q-плоскость состоит из $m \rightleftharpoons q^2+q+1$ точек и имеет такое же количество линий.*

Если $P = \{p_0, \ldots, p_{m-1}\}$, $L = \{l_0, \ldots, l_{m-1}\}$, то *матрицей инцидентности* проективной q-плоскости $P(q)$ называется матрица $S(q)$ порядка m, состоящая из элементов

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } p_j \in l_i, \\ 0, & \text{если } p_j \notin l_i. \end{cases}$$

Если матрица $S(q)$ — циклическая и симметрическая (по отношению к главной диагонали), то будем обозначать ее через $\Omega(q)$. Например, матрица $\Omega(4)$ порядка 21 представлена на рис. 1 (нулям соответствуют пустые клетки).

	0	1			4					9					14		16				20
0	1	1			1										1		1				
1	1			1										1		1					1
			1										1		1					1	1
		1										1		1					1	1	
4	1										1		1					1	1		
										1		1					1	1			1
									1		1					1	1			1	
								1		1					1	1			1		
							1		1					1	1			1			
9						1		1					1	1			1				
					1		1					1	1			1					
				1		1					1	1			1						
			1		1					1	1			1							
		1		1					1	1			1								
14	1		1					1	1			1									
		1					1	1			1										1
16	1					1	1			1										1	
					1	1			1										1		1
				1	1			1										1		1	
			1	1			1										1		1		
20		1	1			1										1		1			

Рис. 1.

Если $q = p^n$ для некоторого простого числа p и натурального n, то матрицу $S(q)$ можно построить, используя таблицы сложения и умножения поля $\mathrm{GF}(q)$. Плоскость с такой матрицей инцидентности называется *плоскостью Галуа* и обозначается через $S_{2,q}$.

Факт 2 [5]. *Матрица инцидентности плоскости Галуа $S_{2,q}$ перестановками строк и столбцов приводится к матрице $\Omega(q)$.*

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ — предикатная система мощности m, в которой любые две одноэлементные подсистемы изоморфны. Тогда существует система $\mathcal{B} = \langle B, \Sigma \rangle$ мощности не более $4m^2 - 6m + 3$, расширяющая систему $\mathcal{A}$ и имеющая транзитивную группу автоморфизмов.*

Доказательство. Сначала докажем теорему для случая, когда $m = p^n + 1$, где p — простое число, $n \in \omega$.

Пусть множество A состоит из элементов $a_0, \ldots, a_{p^n}$. Обозначим через $\mathcal{A}_k = \langle A_k, \Sigma \rangle$ изоморфные попарно непересекающиеся копии системы $\mathcal{A}$, где множества A_k равны $\{a_{k,0}, \ldots, a_{k,p^n}\}$, и через $\psi_k : A \to A_k$ — отображения, действующие по правилам $\psi_k(a_i) = a_{k,i}$, $i = 0, \ldots, p^n$, и являющиеся изоморфизмами, $k = 0, 1, \ldots, p^{2n} + p^n$.

Пусть $\{m_0, \ldots, m_{p^n}\} = \{m \mid \omega_{1m} = 1\}$, где ω_{ij} — элементы матрицы $\Omega(p^n)$. Например, при $p^n = 4$, получаем $\{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4\} = \{0, 1, 4, 14, 16\}$, при $p^n = 3$ $\{m_0, m_1, m_2, m_3\} = \{0, 1, 3, 7\}$,.

На элементах системы $\bigsqcup\limits_{k=0}^{p^{2n}+p^n} \mathcal{A}_k$ определим отношение θ по следующему правилу: $a_{k,i} \theta a_{l,j}$ тогда и только тогда, когда

$$k - m_i \equiv l - m_j \ (\mathrm{mod}(p^{2n} + p^n + 1)).$$

Очевидно, что отношение θ является a-эквивалентностью.

Например, при $p^n = 3$, расположив элементы системы $\bigsqcup\limits_{k=0}^{12} \mathcal{A}_k$ следующим образом:

$a_{0,0}$	$a_{0,1}$		$a_{0,2}$				$a_{0,3}$					
$a_{1,1}$		$a_{1,2}$				$a_{1,3}$						$a_{1,0}$
	$a_{2,2}$				$a_{2,3}$						$a_{2,0}$	$a_{2,1}$
$a_{3,2}$				$a_{3,3}$						$a_{3,0}$	$a_{3,1}$	
			$a_{4,3}$						$a_{4,0}$	$a_{4,1}$		$a_{4,2}$
		$a_{5,3}$						$a_{5,0}$	$a_{5,1}$		$a_{5,2}$	
	$a_{6,3}$						$a_{6,0}$	$a_{6,1}$		$a_{6,2}$		
$a_{7,3}$						$a_{7,0}$	$a_{7,1}$		$a_{7,2}$			
					$a_{8,0}$	$a_{8,1}$		$a_{8,2}$				$a_{8,3}$
				$a_{9,0}$	$a_{9,1}$		$a_{9,2}$				$a_{9,3}$	
			$a_{10,0}$	$a_{10,1}$		$a_{10,2}$				$a_{10,3}$		
		$a_{11,0}$	$a_{11,1}$		$a_{11,2}$				$a_{11,3}$			
	$a_{12,0}$	$a_{12,1}$		$a_{12,2}$				$a_{12,3}$				

получаем в столбцах классы эквивалентности по конгруэнции θ.

При таком расположении классов эквивалентности системы $\bigsqcup\limits_{k=0}^{p^{2n}+p^n} \mathcal{A}_k$ для произвольного p^n ее элементы находятся на месте единиц матрицы $\Omega(p^n)$.

Так как $\Omega(p^n)$ является матрицей инцидентности проективной плоскости, то $|A_{kl}| = 1$. Поскольку любые две одноэлементные подсистемы систем A_k изоморфны, θ — a-конгруэнция на системе $\bigsqcup\limits_{k=0}^{p^{2n}+p^n} \mathcal{A}_k$, а отображения $\chi_k : \mathcal{A}_k \to \left(\bigsqcup\limits_{k=0}^{p^{2n}+p^n} \mathcal{A}_k\right) \Big/ \theta$, действующие по правилам $\chi_k(a_{k,i}) = \theta(a_{k,i})$, являются изоморфными вложениями.

Замечание. Для любого элемента $a_{k,i}$ множество $\theta(a_{k,i})$ $(p^n + 1)$-элементно и $\{j \mid a_{l,j} \in \theta(a_{k,i})$ для некоторого $l\} = \{0, \ldots, p^n\}$.

Из данного замечания следует, что система $\mathcal{B} = (\bigsqcup\limits_{k=0}^{p^{2n}+p^n} \mathcal{A}_k) \Big/ \theta$ имеет мощность $p^{2n} + p^n + 1$.

Для любого $r \in \{0, 1, \ldots, p^{2n} + p^n\}$ определим автоморфизм φ_r системы $\mathcal{B}$ по следующему правилу:

$$\varphi_r(\theta(a_{k,i})) = \theta(a_{k-r(\mathrm{mod}(p^{2n}+p^n+1)),i}).$$

Если $k - m_i \equiv l - m_j \ (\mathrm{mod}(p^{2n} + p^n + 1))$, то $k - r - m_i \equiv l - r - m_j$ $(\mathrm{mod}(p^{2n} + p^n + 1))$; следовательно, отображение φ_r определено корректно. Поскольку при изменении k от 0 до $p^{2n}+p^n$ числа $k - r(\mathrm{mod}(p^{2n} + p^n + 1))$ пробегают это же множество, то отображение φ_r является подстановкой на множестве B.

Пусть P — t-местный предикатный символ сигнатуры Σ и $(b_1, \ldots, b_t) \in P_{\mathcal{B}}$. Тогда, по определению системы $\mathcal{B}$ как фактор-системы по a-конгруэнции, существуют $k \in \{0, \ldots, p^{2n} + p^n\}$ и элементы $a_{k,i_1}, \ldots, a_{k,i_t} \in A_k$, для которых $(a_{k,i_1}, \ldots, a_{k,i_t}) \in P_{\mathcal{A}_k}$ и $b_j = \theta(a_{k,i_j})$ при $j \in \{1, \ldots, t\}$. Отображение $\psi_k^{-1} \circ \psi_{k-r(\mathrm{mod}(p^{2n}+p^n))}$ является изоморфизмом между системами $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{A}_{k-r(\mathrm{mod}(p^{2n}+p^n))}$. Следовательно,

$$(a_{k-r(\mathrm{mod}(p^{2n}+p^n)),i_1}, \ldots, a_{k-r(\mathrm{mod}(p^{2n}+p^n)),i_t}) \in P_{\mathcal{A}_{k-r(\mathrm{mod}(p^{2n}+p^n))}}$$

и φ_r действительно является автоморфизмом системы $\mathcal{B}$.

Покажем, что для любых элементов $b, c \in B$ существует автоморфизм из $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$, переводящий b в c. Рассмотрим элементы $a_{k,0} \in b$, $a_{l,0} \in c$ (в силу замечания такие элементы существуют и единственны). Тогда

$$\varphi_{k-l(\mathrm{mod}(p^{2n}+p^n))}(\theta(a_{k,0})) = \theta(a_{l,0}),$$

т. е. $\varphi_{k-l(\mathrm{mod}(p^{2n}+p^n))}(b) = c$.

Для завершения доказательства заметим, что отображения $\psi_k \circ \chi_k$, $k \in \{0, 1, \ldots, p^{2n} + p^n\}$, являются изоморфными вложениями системы $\mathcal{A}$ в систему $\mathcal{B}$.

Если неверно, что $m = p^n + 1$, выберем минимальное $k = p^n + 1 \geq m$, где p — простое число, $n \in \omega$. Построим систему $\mathcal{A}' = \langle A', \Sigma \rangle$ мощности k, расширяющую $\mathcal{A}$, дополнив интерпретации предикатных символов $P^n \in \Sigma$ наборами $(a', \ldots, a')$ для всех $a' \in A' \setminus A$, если $(a, \ldots, a) \in P_{\mathcal{A}}$ для $a \in A$. Тогда в системе $\mathcal{A}'$ (также как и в $\mathcal{A}$) любые две одноэлементные подсистемы изоморфны и вместо системы $\mathcal{A}$ для построения системы $\mathcal{B}$ используем $\mathcal{A}'$.

Для оценки мощности системы $\mathcal{B}$ заметим, что для любого натурального m найдется $n \in \omega$ такое, что $2m - 2 \geq 2^n \geq m$. Следовательно, мощность системы $\mathcal{B}$ не более $(2m-2)^2 + (2m-2) + 1 = 4m^2 - 6m + 3$. $\square$

Так как частными случаями предикатной системы, в которой любые две одноэлементные подсистемы изоморфны, являются графы без петель или рефлексивные графы, верно

Следствие. *Пусть $\mathcal{A}$ — граф без петель или рефлексивный граф, имеющий мощность n. Тогда существует граф $\mathcal{B}$ мощности не более* $4m^2 - 6m + 3$, *расширяющий $\mathcal{A}$ и имеющий транзитивную группу автоморфизмов.*

Список литературы

[1] *Hrushovski E.* Extending partial isomorphisms of graphs // Combinatorica. 1992. V. 12. P. 204–218.

[2] *Herwig B.* Extending Partial Automorphisms on Finite Structures // Combinatorica. 1995. V. 15. P. 365–371.

[3] *Овчинникова Е.В.* О расширениях частичных изоморфизмов конечных полигонов над линейно упорядоченными моноидами // Алгебра и теория моделей, 6. Сборник трудов. Новосибирск: изд-во НГТУ, 2007. С. 45–48.

[4] *Картеси Ф.* Введение в конечные геометрии. — М.: Наука, 1980.

[5] *Singer J.* A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory // Trans. Amer. Math. Soc. 1938. V. 43. P. 377 – 386.

NON-COMMUTATIVE STABLE THEORIES OF FRECHET-POWERS ARE NON-CLASSIFIABLE

E.A. Palyutin*

RUSSIA,
630090, Novosibirsk,
Academician Koptyug avenue, 4,
Sobolev Institute of Mathematics.
e-mail: palyutin@math.nsc.ru

1 Introduction

The concept of commutative theory (not necessarily complete) was introduced in the articles [3], [4]. Theories of classes of modules over associative rings [1] as well as theories of varieties, quasivarieties and Horn classes with non-maximal spectrums ([5], [7], [8], [10]) have this properties. Commutative theories have rather good structural theory. The main theorem of the given article shows, that for the case, when an axiomatizable class is closed under the Frechet filter (in particular, for a variety, a quasivariety or a Horn class), has a stable theory and doesn't have a maximal structural complexity, for example, admits a dimensional interpretation of the class of all graphs, it is required to have a commutative theory.

The dimensional interpretation of graphs, defined in the article, is similar to the property DOP, introduced by S.Shelah for studying of structures of models for theories with non-maximal spectrums. For the proof of basic useful properties of theories without DOP, S.Shelah has used an additional property of superstability of theories, that theories with non-maximal spectrums always have. Note that, in the definition of commutative theories, the condition of superstability is not supposed. Under condition of superstability the condition of commutativity for axiomatizable classes, closed by Frechet powers, actually coincides with the property of absence of DOP. Taking this

*The work is supported by RFBR grant No. 09-01-00336-a, by the Council for Grants (under RF President) and State Aid of Fundamental Science Schools via project NSh-344.2008.1 and also by ADTP "Development of the Scientific Potential of Higher School"of Russian Federal Agency for Education (Grant 2.1.1.419).

fact into account, one can say, that the structural theory of commutative superstable theories has been in essence completed at the end of 80th years of the last century (see [5] - [10]).

2 Basic definitions and agreements

As usual, all considered model-theoretic concepts will be concerned to some fixed, in a context of consideration, complete theory T of a language L and C will be its monster-model, i.e. an enough saturated model of T containing, as elementary substructures, all considered models of T in the context of given article. Elements, tuples, sets, etc. will be concerned to this model too. Concept of the truth of formulas also will be concerned to this structure C though the structure C, thus, usually will not be specified. Further a formula will mean to be a formula of language L. The cardinality of the set of sentences of language L will be denoted by $|L|$.

Tuples of elements in the structure C (accordingly tuples of variables) are denoted by bold letters of the beginning (end) of the latin alphabet $\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{e}$ ($\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{z}$). For a set R and a tuple $\mathbf{s}$, we write simply $\mathbf{s} \in R$ instead of $\mathbf{s} \in R^n$. The length of tuple $\mathbf{w}$ are denoted by $l(\mathbf{w})$.

We shall consider formulas with parameters in the structure C, i.e. formulas with substitution of elements of structure C instead of their free variables. Thus, for a formula Φ with parameters from C, we say that Φ is a formula over a set $X \subseteq C$ (over a tuple $\mathbf{a}$) if all its parameters belong to the set X (to the tuple $\mathbf{a}$). If $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ is a formula, $\mathbf{a} \in C$ and $l(\mathbf{a}) = l(\mathbf{y})$, the record $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ will denote the result of substitutions in the formula Φ of elements of $\mathbf{a}$ instead of the corresponding variables in $\mathbf{y}$. Thus the record $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ also will denote that all parameters of this formula belong to the tuple $\mathbf{a}$, all free variables of this formula belong to the tuple $\mathbf{x}$. The record $\Phi(\mathbf{x})$ means that all free variables of this formula belong to the tuple $\mathbf{x}$, however such record does not contain any information on parameters. If parameters of a formula $\Phi(\mathbf{x})$ belong to a set A we say that $\Phi(\mathbf{x})$ is a formula over A. If Φ is a formula without parameters we say that Φ is the formula over $\varnothing$. If α, β are sets of formulas over a set A the record $\alpha \vdash \beta$ will denote that, in the predicate calculus, the deducibility $(D(A) \cup \alpha) \vdash \Phi$ takes place for all $\Phi \in \beta$, where $D(A)$ is the set of all formulas with parameters in A and without free variables, that are true in the monster-model C.

Definition. *For formulas Φ and Ψ, the formula $(\exists \mathbf{x} \Phi \wedge \forall \mathbf{x}(\Phi \to \Psi))$ is said to be the result P-*operation, *applied to the formulas Φ and Ψ.*

The following concept, named a h-formula, has introduced in the article [2].

Definition. *A formula Φ of the language L is called a P-*formula *if it belongs to the least class, containing all atomic formulas and closed under conjunctions and P-operations. Formulas, that are equivalent in predicate calculus to P-formulas, also are called P-formulas.*

ATTENTION! In the given article we shall consider only P-formulas as basic formulas. (In other articles of the author primitive formulas also were considered as basic.)

Notice that, for a P-formula Φ, formulas $\exists x\Phi$ and $\forall x\Phi$ are equivalent accordingly to P-formulas $(\exists x\Phi \wedge \forall x(\Phi \to \Phi))$ and $(\exists x\ x = x \wedge \forall x(x = x \to \Phi))$. Therefore we can asssume that the class of P-formulas is closed under quantifications.

If $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ is a formula of the language L, the set $\{\mathbf{b} \mid C \models \Phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})\}$ is denoted by $\Phi(C, \mathbf{a})$. Let $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ be a basic formula of the language L, $\mathbf{a}$ be a tuple of elements and $l(\mathbf{a}) = l(\mathbf{y})$. The set $\Phi(C, \mathbf{a})$ is called *a basic set. If* If $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ are tuples of elements and $l(\mathbf{a}) = l(\mathbf{b}) = l(\mathbf{y})$, the sets $\Phi(C, \mathbf{a})$ and $\Phi(C, \mathbf{b})$ are called *basic copies.*

We say that a formula $\Phi(\mathbf{x}^1; \mathbf{x}^2)$ (with parameters in C) defines an equivalence in C if it defines, in C, an equivalence on set X, where $X = \exists \mathbf{x}^1 \Phi(\mathbf{x}^1; C) = \exists \mathbf{x}^2 \Phi(C; \mathbf{x}^2)$. Here we admit the case $X = \varnothing$.

An equivalence α on some set X of n-tuples of elements in C, defined in C by some basic formula $\Phi(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$, is called a *basic equivalence.* The domain X of that equivalence α is defined in C by the basic formula $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ and denoted by domα. We shall frequently identify α with Φ and write $\alpha(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ instead of $\Phi(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$. Note that the property "to be a basic equivalence"concerns the formula Φ as well as the record $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, grouping the variables of the formula Φ.

An equivalence α is called Δ-*basic* , if there is a set E of basic equivalences such that
$$\alpha = \bigcap\{\beta \mid \beta \in E\}.$$

Definition. *(a) A formula $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ without parameters is called* $\mathbf{x}$-normal *if, for any $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C$, $l(\mathbf{a}) = l(\mathbf{b}) = l(\mathbf{y})$, an equality $\Phi(C; \mathbf{a}) = \Phi(C; \mathbf{b})$ or $(\Phi(C; \mathbf{a}) \cap \Phi(C; \mathbf{b})) = \varnothing$ is true. A formula $\Phi(\mathbf{x})$ without parameters is called* normal *if it is $\mathbf{x}'$-normal for any tuple $\mathbf{x}'$ whose elements belong to the tuple $\mathbf{x}$.*

*(b) A theory T is called P-*normal *(or* basic normal *) if, for any basic copies X, Y, an equality $X = Y$ or $X \cap Y = \varnothing$ is true.*

Definition. *A theory T is called P-*irreducible *(or* basic irreducible *) if, for any finite set of P-formulas $\Phi_0(\mathbf{x};\mathbf{y}),\ldots,\Phi_n(\mathbf{x};\mathbf{y})$ and for any tuple $\mathbf{a}\in C$ of elements, the inclusion*

$$\Phi_0(C;\mathbf{a})\subseteq\bigcup\{\Phi_1(C;\mathbf{a}),\ldots,\Phi_n(C,\mathbf{a})\}$$

implies an inclusion

$$\Phi_0(C;\mathbf{a})\subseteq\Phi_i(C;\mathbf{a})$$

for some $i\in\{1,\ldots,n\}$.

Clearly that, by compactness, the condition of finiteness can be removed in the previous definition. .

Any consistent set of formulas with parameters in C is called *a type* . For a type t the record $t(\mathbf{x};A)$ means that the type t consists of formulas of kind $\Phi(\mathbf{x};\mathbf{a})$, where $\mathbf{a}\in A$. We say that the type t *is generated by a subtype* $q\subseteq t$ if $q\vdash t$ holds.

For a type $t(\mathbf{x};A)$ we denote by $t(C;A)$ the set of realizations of $t(\mathbf{x};A)$ in C.

We say that *a set X divides a set Y*, if $(X\cap Y)\neq\varnothing$ and $(Y\setminus X)\neq\varnothing$. We shall apply this concept to formulas $\Phi(\mathbf{x};\mathbf{a})$ and to types $t(\mathbf{x};A)$, meaning sets $\Phi(C;\mathbf{a})$ and $t(C;A)$.

If $\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ is a basic formula over $\varnothing$ we denote by $\mathbf{x}\Phi$ the formula

$$\exists\mathbf{y}(\Phi(\mathbf{x}^1,\mathbf{y})\wedge\Phi(\mathbf{x}^2,\mathbf{y})).$$

If the theory T is basic normal, the formula $(\mathbf{x}\Phi)(\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^2)$ defines in C an equivalence with domain $\exists\mathbf{y}\Phi(C,\mathbf{y})$ and classes being all nonempty sets of the kind $\Phi(C,\mathbf{a})$, where $\mathbf{a}$ is a tuple of elements in C. It implies that any nonempty basic set X is a class of some equivalence α, definable by a basic formula without parameters. That equivalence is called an *universe of set X*. Nonempty basic sets X and Y are basic copies if and only if there exists their common universe α.

A set X is called Δ-*basic* if there exists a family S of basic sets such that

$$X=\bigcap\{Y\mid Y\in S\}.$$

In this case the intersection of the universes of $Y\in S$ is called *the universe of the set X*. If

$$X'=\bigcap\{Y'\mid Y\in S\}$$

and Y' are basic copies of sets Y, then X' is a Δ-*basic copy of the set X.*

Definition. *A set Z* is independent (or it is free) over A in a set X *if $Z \subseteq X$, for any basic formula $\Phi(x; \mathbf{y})$ over A, for any tuple $\mathbf{d} \in Z$, $l(\mathbf{d}) = l(\mathbf{y})$ and any element $b \in Z$, not belonging to the tuple $\mathbf{d}$, the condition $b \in \Phi(C; \mathbf{d})$ implies $X \subseteq \Phi(C; \mathbf{d})$. If $X = t(C)$ we say that the set Z is independent (or it is free) in the type $t(\mathbf{x})$. For a model M, $X \subseteq M$, we denote by* $\dim_A(X, M)$ *the supremum of cardinalities of independent in X over A subsets of the model M.*

Definition. *We say that* $\{X_1\}$ is independent (or it is free) over A in the set X *if $X_1 \subseteq X$ and, for any basic formula $\Phi(x)$ over A, the condition $(X_1 \cap \Phi(C) \neq \varnothing)$ implies $X \subseteq \alpha(X_1)$, where α is an universe of set $\Phi(C)$. Further, if it is clear from the context, we say simply "X_1* is independent (or it is free) over A in set X" instead of "$\{X_1\}$ is independent (or it is free) over A in set X".

Note that such concepts, as indecernibility of a set of elements, independence of a family of elements, etc. are naturally distributed on sets of Δ-basic sets. For example, for indecernibility it is possible to use the definition through an expansion of any permutation of the family Δ-basic sets up to automorphism of the model C.

A graph Γ, as usual, is a set of ordered pairs. The union of the projections of Γ to the first and second coordinates is called the set of *vertices* of the graph Γ. If these projections are disjoint, the graph G is called *bipartite* and, accordingly, these projections are called *the parts* of bipartite graph G.

Definition. *We say that a class graphs (bipartite graphs) K* is dimensionally interpretable in a theory T *if there exist Δ-basic sets X, U (Δ-basic sets X, Y, U) and a type $t(x, y, z)$ over some set A such that for any graph $\Gamma \in K$ there are a model M_Γ of the theory T and an injective mapping f of the set of the vertices of the graph Γ in an indiscernible over A set of copies of set X (of the parts Γ accordingly in indiscernible sets of copies of sets X and Y) such that the condition $\langle a, b\rangle \in \Gamma$ is equivalent to the condition*

(in $t(C, fa, fb)$, there is a free copy V of the set U and $\dim_A(V, M_\Gamma) > (|L| + |\Gamma|)^+$).

In this case we say that f is a t-interpretation of the graph Γ in M_Γ.

As already for a long time accepted in the model theory, at studying the theory T proofs are carried out in the theory T^{eq} such that its models contain classes of definable equivalences in models of the theory T as new elements.

Definition. *For a theory T we denote by T^{peq} the restriction of the theory T^{eq} to the language, containing classes of equivalence, definable only by P-formulas.*

Proofs of the basic properties of this theory are contained in [9, 10]. Note that in these works the given theory was denoted by T^{eh}.

ATTENTION! Further, if necessary, we shall carry out the proofs in the theory T^{peq}, not reminding specially about it.

3 2 main examples

In this Section we shall decrcibe 2 examples of the interpretation of graphs, that are typical in our situation. Further we shall consider a general scheme, that will break up on 2 parts corresponding to these two examples.

Example 1.

Let language of the theory T_1 consist of two binary symbols α, β.

The axioms of the theory T_1 assert the following:

1) α and β define equivalences with infinitely many classes;

2) α and β are permutable, i.e. the compositions $(\alpha \circ \beta)$ and $(\beta \circ \alpha)$ coincide;

3) the union $(\alpha \vee \beta)$ in the lattice of equivalence on C is the unit equivalence, i.e. coincides with C^2;

4) the intersection $(\alpha \wedge \beta)$ is an equivalence with infinite classes.

It is not difficult to show, that any two countable T_1-models are isomorphic. Hence, the theory T_1 is complete. Also it is clear, that the class of T_1-models is closed under unions of increasing chains. By Lindström's theorem the theory T_1 is model-complete. Also it is easy to show, that this theory is ω-stable. Thus, the theory T_1 is rather simple with respect to many parameters. Except for the following, namely, the class of its uncountable models has no any acceptable classification up to isomorphism. Really, now we shall show how the class of all bipartite graphs can be interpreted in this theory. As is known, any structure of a finite language is interpretable homogeneously (and in an elementary way) in some bipartite graph. Thus, the problem of classification of uncountable T_1-models is in essence equivalent to the problem of classification of all structures.

Describe an interpretation of bipartite graphs in T_1-models. We take an arbitrary bipartite graph Γ with parts B_1 and B_2. Let $\varkappa$ be some incountable cardinal greater than $|\omega \cup (B_1 \cup B_2)|^+$. By compactness there exists a T_1-model A, for which sets of α-classes, β-classes and every $(\alpha \wedge \beta)$-class have cardinalities not less than κ.

As type $t(x, y, z)$ we take the formula expressing the relation $x \in (y \cap z)$ for an α-class y and a β-class z. Consider some injective mapping $f : (B_1 \cup B_2) \to A^{\mathrm{peq}}$ such that $f(B_1)$ and $f(B_2)$ are accordingly sets of α-classes and β-classes.

Take a substructure $A_0 \subseteq A$, turning out of the structure A by a reduction of $(\alpha \wedge \beta)$-classes of the kind $(fa \cap fb)$, where $\langle a, b\rangle \notin \Gamma$, up to some countable set. Clearly, that the structure A_0 is a T_1-model, and the mapping f is a t-interpretation of Γ in A_0.

Example 2.

Let the language of the theory T_2 consist of the binary symbol α and and the 4-ary symbol μ.

Axioms of the theory T_2 assert the following:

1) α defines an equivalence with infinitely many classes and each its class is infinite;

2) μ defines on α-classes a structure of the affine elementary Abelian 2-groups, i.e.

$$C \models \mu(a, b, c, d) \Leftrightarrow \alpha d = (\alpha a + \alpha b - \alpha c),$$

where $+$ and $-$ are the sum and the subtraction in the elementary Abelian 2-group.

Similarly as for the theory T_1, it is easy to show, that the theory T_2 is ω-categorical, complete, model-complete and ω-stable. The class of all graphs is interpreted in the class of its uncountable models. We show it.

Take a graphs Γ with a set of vertexes B. Let $\varkappa$ be some uncountable cardinal, greater than $|B|^+$. By compactness there exists a T_2-model A, for which sets of α-classes and each α-class have cardinalities not less than $\varkappa$. Let X_0 be some α-class.

As type $t(x, y, z)$ we take the formula expressing the condition $x \in (y + z - X_0)$. Let $f : B \to A^{\mathrm{eq}}$ be an injective mapping such that $f(B)$ is an independent set of α-classes relative to $\{X_0\}$.

Take a substructure $A_0 \subseteq A$, turning out of the structure A by reduction of α-classes of a kind $(fa + fb - X_0)$, where $\langle a, b\rangle \notin \Gamma$, up to some countable set. Clearly, that structure A_0 is a T_2-model, and the mapping f is a t-interpretation of Γ in A_0.

4 Commutative theories

For convenience of the reader we resume definitions of some concepts, introduced in other papers (see [3, 4, 14]). We note that some of them will differ a little from originally introduced.

Let α be an equivalence, X be some set. We say that X is α-closed if, for any $a \in (X \cap \mathrm{dom}\alpha)$, $\alpha a \subseteq X$. We denote by $\alpha \restriction X$ the restriction $(\alpha \cap X^2)$ of the equivalence α to the set X. We denote the set $\{(\alpha \restriction X)\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in X\}$ by X/α.

Definition. *For sets X and Y of tuples of length n, we write $X \approx Y$ if, for any basic formula $\Phi(\mathbf{x})$ over $\varnothing$, $l(\mathbf{x}) = n$, the conditions $(X \cap \Phi(C)) = \varnothing$ and $(Y \cap \Phi(C)) = \varnothing$ are equivalent.*

Definition. *(1) A pair $X = \langle X^*, \alpha\rangle$, where X^* is a Δ-basic set, α is a basic equivalence and the condition $X^* \subseteq dom(\alpha)$ holds, is called* a generalized basic set (g.b. set). *We shall use also the record $X = X^*/\alpha$ instead of the record $X = \langle X^*, \alpha\rangle$. Moreover the set X^* is called* the basis, *and α is* the forming equivalence of the g.b. set X *or simply the forming of the g.b. set X. The universe of the set X^* is called the universe of the g.b. set X.*

(2) G.b. sets X_1, X_2 are called g.b. copies, if they have a common forming equivalence, and their bases X_1^*, X_2^* are copies.

(3) For g.b. copies $X = X^*/\alpha$ and $Y = Y^*/\alpha$ we write $X \approx Y$ if, for any basic formula $\Phi(\mathbf{x})$, for which the set $\Phi(C)$ is $\alpha \restriction X^*$-closed, the condition $(X^* \cap \Phi(C)) = \varnothing$ is equivalent to the condition $(Y^* \cap \Phi(C)) = \varnothing$.

(4) Let X, Y be g.b. sets, having a common forming equivalence. If the condition $X^* \subseteq Y^*$ holds, we say that X is a (g.b.) subset of the g.b. set Y and denote it by $X \subseteq Y$.

Note, that we work in T^{peq}, therefore in essence g.b. sets are Δ-basic sets. However we shall use the concept of g.b. sets, when its forming equivalence will be important to us.

Definition. *The formula $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ is called* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$-reflective, *if $l(\mathbf{x}) = l(\mathbf{y})$ and the condition*

$$\vdash (\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \to (\exists \mathbf{z}\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) \wedge \exists \mathbf{z}\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{z})))$$

holds.

Definition. *Let X, Y be g.b. copies, α be their forming equivalence.*

1) We say that X is connected with Y by the formula $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z})$, *if there is a tuple $\mathbf{c}$ and the following conditions hold:*

(a) for any $\mathbf{a}^1 \in X^*$ and $\mathbf{b}^1 \in Y^*$ there exist $\mathbf{a}^2 \in X^*$ and $\mathbf{b}^2 \in Y^*$ such that $\Phi(\mathbf{a}^1; \mathbf{b}^2; \mathbf{c})$ and $\Phi(\mathbf{a}^2; \mathbf{b}^1; \mathbf{c})$ are true in C;

(b) for any $\mathbf{a} \in X^*$ the set $\Phi(\mathbf{a}; C; \mathbf{c})$ is $(\alpha \restriction Y^*)$-closed and does not contain Y^*;

(c) for any $\mathbf{b} \in Y^*$ *the set* $\Phi(C, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *is* $(\alpha \restriction X^*)$*-closed and does not contain* X^**.*

2) We say that the set X is basic connected with the set Y, *if* $|X| = |Y| = 1$ *or there exists a* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$*-reflective basic formula* $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z})$ *such that* X *is connected with* Y *by the formula* $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z})$*.*

If the formula $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{c})$ from the previous definition defines an one-to-one mapping X on Y we say that X *is injectively connected with* Y *by the formula* $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z})$.

Definition. *A g.b. set* X *is called* additive *if some basic formula* Φ *(with parameters) defines an Abelian group on* X*.*

Definition. *Let* $X \subseteq Y$ *be* Δ*-basic sets,* $X \neq \varnothing$*.*

(1) We say that X is additive in Y, *if there exists a basic equivalence* α *such that* $Y \subseteq \mathrm{dom}\alpha$*,* $X = (Y \cap \alpha\mathbf{a})$ *for* $\mathbf{a} \in X$ *and the g.b. set* Y/α *is additive.*

(2) We say that X is Δ-additive in Y, *if there exists a decreasing chain* $\{X_i \mid i < \lambda\}$ *of* Δ*-basic sets such that* $X_0 = Y$*,* $X = \bigcap\{X_i \mid i < \lambda\}$ *and* X_i *is additive in* $\bigcap\{X_j \mid j < i\}$ *for any* $i < \lambda$*. The chain* $\{X_i \mid i < \lambda\}$ *is called* the Δ-additive sequence for X in Y. *If* λ *is finite, we say that* X multiadditive in Y.

(3) Let λ *be an ordinal,* $\lambda \geq 1$*,* X *be a* Δ*-basic set. A sequence* $S = \langle \alpha_i \mid i < \lambda \rangle$ *of basic equivalences is called* a homogeneously Δ-additive sequence in X , *if* $X \subseteq \mathrm{dom}\alpha_i, i < \lambda$*, and for any ordinal* $i < \lambda$ *there is a basic formula* $\Phi_i(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z}; \mathbf{w})$*, being Maltsev's term (see [14]) on g.b. set* $(X \cap \bigcap\{\alpha_j\mathbf{a} \mid j < i\})/\alpha_i$ *for any* $\mathbf{a} \in X$*. The aforesaid basic formula* Φ_i *is called the* i-witness of the Δ-additivity of S in X . *In the case of finite* λ *such sequence we is called* homogeneously multiadditive .

(4) Let X, Y *be* Δ*-basic sets and* $Y \subseteq X$*. The set* Y *is called* homogeneously Δ-additive (multiadditive) in X *if there exists a homogeneous* Δ*-additive (multiadditive) sequence* $S = \langle \alpha_i \mid i < \lambda \rangle$ *in* X *such that the equivalence* $\bigcap S$ *is the universe* Y*. In this case the sequence* S *is called the* homogeneously Δ-additive (multiadditive) sequence for Y in X.

(5) Let X_0, X_1, Y_0, Y_1 *be* Δ*-basic sets and* $Y_i \subseteq X_i$*,* $i \leq 1$*. We say that* Y_0, Y_1 *are* homogeneously Δ-additive (multiadditive) in X_0, X_1, *if there exists a sequence of basic equivalences* $S = \langle \alpha_i \mid i < \lambda \rangle$*, being the homogeneous* Δ*-additive (multiadditive) sequence for* Y_0, Y_1 *accordingly in* X_0, X_1*, and for every* $i < \lambda$ *there is a common* i*-witness of* Δ*-additivity* S *in* X_0 *and* X_1*.*

Definition. *A pair* $\langle X, Y \rangle$ *of* Δ*-basic sets is called* Δ-additive *if* $X \approx Y$ *and there exists a* Δ*-basic set* Z *and a homogeneously* Δ*-additive sequence*

S in Z such that $(X \cup Y) \subseteq Z$ and $\bigcap S$ is the common universe of X and Y.

Definition. A pair of Δ-basic sets $< X, Y >$ is called *hereditary basic connected,* if for any g.b. set $X_1 = \langle X_1^*, \alpha \rangle$, $X_1^* \subseteq X$, there exists its g.b. copy $Y_1 = \langle Y_1^*, \alpha \rangle$, $Y_1^* \subseteq Y$ such that X_1 and Y_1 are basic connected.

Definition. A triplet $< X_0, Y, X_1 >$ of Δ-basic copies is called a *basic triangle,* if there exist Δ-basic equivalences α, β such that X_0, Y, X_1 are $(\alpha \wedge \beta)$-classes and the following conditions hold: $\alpha Y = \alpha X_0$, $\beta Y = \beta X_1$ and $X_0 \approx Y \approx X_1$.

Definition. A basic triangle $< X_0, Y, X_1 >$ is called *alternatively basic connected,* if for any g.b. set Y', $(Y')^* \subseteq Y$, with forming γ there exist $i \leq 1$ and a copy X' of the g.b. set Y', $(X')^* \subseteq X_i$, with forming γ such that Y', X' are basic connected.

Definition. A theory T is called *basic commutative* if the following conditions are satisfied:

1) T is basic normal;
2) any Δ-additive pair $\langle X, Y \rangle$ is hereditary basic connected;
3) any basic triangle is alternatively basic connected.

5 Theories of Frechet-powers

As it is known, the *Frechet filter* on infinite set I is the family

$$F_I = \{X \mid X \subseteq I, (I \setminus X) \text{ is finite}\}.$$

The reduced degree A^ω / F_ω, where ω is the set of the natural numbers, is called the *Frechet-power of the structure* A and it is denoted by A^F.

In this paragraph we formulate properties of theories of Frechet-powers that are necessary for us. Proofs of these properties can be found in article [15].

Proposition 1. *Let K be any class of structures of language L. Then the theory $T = \mathrm{Th}\{A^F \mid A \in K\}$ of Frechet-powers of structures of the class K has the following properties:*

(1) the theory T is P-irreducible;

(2) the theory T has the quantifiers elimination up to P-formulas i.e. each formula of the language L is equivalent to a Boolean combination of P-formulas;

(3) the stability of the theory T is equivalent to its P-normality.

6 λ-positive envelopes

In this paragraph we assume, that the theory T is complete, P-normal, P-irreducible and admit the quantifiers elimination up to P-formulas. In particular, as pointed out above, any stable theory T of Frechet-power A^F of some structure A satisfies that properties. Some simple enough statements of this Section are contained in the article [15]. We formulate them only for the convenience of the reader. Further λ is the cardinal greater than $|L|^+$.

Definition. *(a) A set t, formed by basic formulas over A with free variables from a tuple $\mathbf{x}$ and of their negations, is called* a basic type over A from $\mathbf{x}$.

(b) If t is a type, by t^+ we denote the set of all basic formulas that deduced from the type t and it is called the positive part of the type t . *By t^- we denote the set of all negations of the basic formulas that deduced from type t.*

(c) A consistent type t from variables $\mathbf{x}$ is called basic complete over A in $\mathbf{x}$, *if $t \vdash \Phi$ or $t \vdash \neg\Phi$ take place for any basic formula $\Phi(\mathbf{x})$ over A. A basic complete basic type t over A from $\mathbf{x}$, closed by the deducibility of basic formulas over A from $\mathbf{x}$ and of their negations, is called a* maximal basic *type over A from $\mathbf{x}$. Clearly, that the maximality of a basic type t means, that among consistent basic types over A from $\mathbf{x}$ there are no proper extensions of the type t.*

(d) If for a basic type t over A from variables $\mathbf{x}$ there is a type $q \subseteq t^-$ of the cardinality less than λ and also $(q \cup t^+) \vdash t$ is satisfied, the type t is called a λ-positive type over A from variables $\mathbf{x}$. *In this case the type q is said to be a* λ-basis (over A from $\mathbf{x}$) *oftheλ-positive type t (over A from $\mathbf{x}$). If $\lambda = 1$ a λ-positive type t is called a* positive type. *A maximal λ-positive basic type is called* λ-maximal.

(e) For a tuple $\mathbf{a}$ the set of all basic formulas $\Phi(\mathbf{x})$ over A and their negations, true on the tuple $\mathbf{a}$, is called the basic type of the tuple $\mathbf{a}$.

(f) A tuple $\mathbf{a}$ is called λ-positively isolated over a set A, *if its basic type t over A is λ-positive. In this case we say that the type t* λ-isolates the tuple $\mathbf{a}$ over A.

Remark 1. *The principle of maximum (Zorn's lemma) and the theorem of compactness imply that, if a basic type p over A from variables $\mathbf{x}$ is generated by a subtype $q \subseteq p$, then there is a maximal basic type r over A from $\mathbf{x}$ which is generated by a subtype $q \cup r^+$ and $p \subseteq r$. From here we get that for any λ-positive type p over A from variables $\mathbf{x}$ there exists a maximal basic type over A from $\mathbf{x}$, containing type p and being λ-positive over A from $\mathbf{x}$.*

Proposition 2. *Let X be a Δ-basic set, Z be independent in X over A and the following conditions are satisfied: $|A| < |Z|$, $|L| < |Z|$ and $|Z|$ is a regular cardinal. If for a set B the condition $|B| < |Z|$ holds, then there is a subset $Z' \subseteq Z$ with the condition $|Z'| = |Z|$ and Z' is independent in X over $(A \cup B)$.*

Proof. We say that the formula $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ essentially depends on variables $x_1, \ldots, x_n$ in X, if for any $i \in \{1, \ldots, n\}$ and any $a_j, j \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq i$, the inclusion $X \subseteq \Phi(a_1, \ldots, a_{i-1}, C, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ doesn't hold. As for any basic formula $\Phi(x)$ over any set the set $\Phi(C)$ is a class of equivalence, which is definable by a basic formula without parameters, this set either contains the set X or contains not more than one element in the set Z. Notice that, under the condition $|L| < |Z|$, the number of formulas with parameters in a set of smaller cardinality than $|Z|$, also has the cardinality smaller than $|Z|$. Using these facts and the regularity of the cardinal $|Z|$, it is possible to construct a sequence $S = \langle a_\alpha \mid \alpha < |Z| \rangle$ elements of the set Z, for which the following condition is satisfied:

(*) *for any P-formulas $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ over $(A \cup B)$, essentially dependent in X from variables $x_1, \ldots, x_n$, and for any ordinals $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < |Z|$, $C \models \neg\Phi(a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_n})$ holds.*

It, in view of the quantifiers elimination up to P-formulas, means, that the sequence S is the indiscernible. As the theory T is stable, the set Z', consisting of elements of sequence S, is the indiscernible set over $(A \cup B)$. Clearly, that then Z' will be independent set in X over $(A \cup B)$. □

Proposition 3. *Let Z be a free set over A in a Δ-basic set X. Let a basic formula $\Phi(x, y)$ over A defines a one-to-one mapping of the set X on a set Y. Then the image U of the set Z at this mapping is free in Y over A.*

Proof. We denote the given mapping by f. Suppose, that the set $f(Z)$ is not free in Y over A. It means, that for some basic formula $\Psi(x; y_1, \ldots, y_n)$ over A and for some elements $d_1, \ldots, d_n \in Z$ the set $\Psi(C; f(d_1), \ldots, f(d_n))$ divides the set Y and contains some element $f(b)$ for $b \in Z$, and $f(b) \notin \{f(d_1), \ldots, f(d_n)\}$. Then for the basic formula

$$\Theta(x; d_1, \ldots, d_n) = \exists y_1 \cdots \exists y_n \exists z(\Phi(d_1, y_1) \wedge \cdots \wedge \Phi(d_n, y_n) \wedge \Psi(z; y_1, \ldots, y_n) \wedge \Phi(x, z))$$

the set $\Theta(C; d_1, \ldots, d_n)$ will divide the set X and contain an element $b \in Z$, distinct from $d_1, \ldots, d_n$. It contradicts the freedom of the set Z in X over A. □

Definition. *1) A sequence $S = \langle a_\alpha \mid \alpha < \mu \rangle$, where μ is some ordinal, is called a* λ-positive construction over A, *if for any $\alpha < \mu$ an element a_α is*

λ-positively isolated over the set $S_\alpha = (A \cup \{a_\beta \mid \beta < \alpha\})$. In this case the sequence S is called the λ-positive construction over A of the set

$$B = \bigcup\{S_\alpha \mid \alpha < \mu\}.$$

2) A set B is called λ-positively constructed *(or simply* λ-constructible *)* over A *if there exists a λ-positive construction $\langle a_\alpha \mid \alpha < \varkappa\rangle$ over A, for which*

$$B = (\{a_\alpha \mid \alpha < \varkappa\} \cup A).$$

Proposition 4. *Let T be a P-normal theory and t be a positive type. Then the type t is equivalent to its restriction $t \restriction B$ on some set B of cardinality $\leqslant |L|$.*

Proof. By the P-normality of T all basic formulas of kind $\Phi(\mathbf{x};\mathbf{a})$, $\mathbf{a} \in A$, included in the consistent type t for the concrete basic formula $\Phi(\mathbf{x};\mathbf{y})$, are equivalent. □

Definition. *A set A is called* λ-compact *, if any λ-positive type over A is realized in A.*

Remark 2. *Notice, that if X is more than a one-element Δ-basic set, definable over set D, $|A| < \lambda$, then for any λ-compact set M with the condition $(D \cup A) \subseteq M$ we have $\dim_A(X, M) \geqslant \lambda$. It follows from the basic irreducibility and Proposition 4, as $\lambda > |L|$ and any λ-positive type over M is realized in M.*

By Proposition 4 we get

Proposition 5. *If A is a λ^+-saturated model then A is λ-compact.*

Definition. *Let $A \subseteq B$. The set B is called a* λ-positive envelope of the set *A if B is λ-compact and B is λ-constructible over A.*

Proposition 6. *If a set B is maximal in C (by inclusion)* λ-constructible over A then B is λ-compact.

Proof. Let $t(x)$ be an arbitrary λ-positive type over B. By Remark 1 there exists a maximal λ-positive type $p(x)$ over B, extending the type $t(x)$. Let an element a realize the type $p(x)$. The maximality of B implies $a \in B$. □

Proposition 7. *If B is a λ^+-saturated model, $A \subseteq B$, then there exists a set $D \subseteq B$, being a λa-positive envelope of the set A.*

Proof. It is clear, that one can take for D a maximal λ-constructible over A subset of the set B. $\square$

Proposition 8. *Let B be a λ^+-saturated model of a theory T, $A \subseteq B$. Then any λ-positive envelope A^* of the sets A in B is an elementary submodel of the structure B.*

Proof. By known criterion of elementary equivalence and the quantifier elimination in the theory T up to P-formulas it is required to show, that for any P-formulas $\Phi(x;\mathbf{y}), \Psi_1(x;\mathbf{y}), \dots, \Psi_n(x;\mathbf{y})$ and any tuple $\mathbf{a} \in A^*$ the validity of the formula

$$\exists x(\Phi(x;\mathbf{b}) \wedge \neg\Psi_1(x;\mathbf{b}) \wedge \dots \wedge \neg\Psi_n(x;\mathbf{b}))$$

in B implies the validity in B of the formula

$$(\Phi(a;\mathbf{b}) \wedge \neg\Psi_1(a;\mathbf{b}) \wedge \dots \wedge \neg\Psi_n(a;\mathbf{b}))$$

for some element $a \in A^*$. By Remark 1 there exists a maximal λ-positive type $t(x)$ over $(\mathbf{a} \cup \mathbf{b})$, which contains the set

$$\{\Phi(x;\mathbf{b}), \neg\Psi_1(x;\mathbf{b}), \cdots, \neg\Psi_n(x;\mathbf{b})\}.$$

By definition of λ-positive envelope there exists an element $a \in A^*$, realizing the type $t(x)$. $\square$

Theorem 1. *Let M_0 be a λ-positively constructible over E set, $|E| \leqslant \lambda$, $|L| < \lambda$ and X be a Δ-basic set, definable using parameters in E. Let M be formed by addition to M_0 of all elements, definable in C using P-formulas over M_0. Then* $\dim_E(X, M) \leqslant \lambda$.

Proof. We shall prove the statement of Theorem by induction on length γ of λ-positive construction $S = \langle a_\alpha \mid \alpha < \gamma \rangle$ of the set M_0 over E. For $\alpha < \gamma$ we take sets

$$S^*_\alpha = (S_\alpha \cup \{a \mid a \text{ is definable using some } P\text{-formula over } S_\alpha\}).$$

Assume, that $\dim_E(X, M) > \lambda$ and γ is the minimal ordinal among all counterexamples to Theorem (at various X). The minimality of the ordinal γ implies that for any $\alpha < \gamma$ Theorem is true with replacement of M by S^*_α. Let $Z \subseteq M$ be free in X over E and $|Z| > \lambda$.

Case 1: γ is a non-limit ordinal.

By virtue of the conditions $|L| \leqslant \lambda$, $|E| \leqslant \lambda$, $|Z| > \lambda$ and the minimality of γ, there exists a basic formula $\Phi_0(x, y; \mathbf{z})$ such that $|G| > \lambda$, where

$$G = \{b \mid \Phi_0(C, a_{\gamma-1}; \mathbf{d}_b) = \{b\} \text{ for some elements } b \in Z \text{ and } \mathbf{d}_b \in S_{\gamma-1}\}.$$

Define the following equivalence ε:

$$\langle \mathbf{d}, \mathbf{d}' \rangle \in \varepsilon \Leftrightarrow \exists x \exists y (\Phi_0(x, y; \mathbf{d}) \wedge \Phi_0(x, y; \mathbf{d}')).$$

By virtue of Proposition 2 there is a subset $Z' \subseteq Z$, being free in X over $(E \cup A \cup \{a_{\gamma-1}\})$ and $|Z'| > \lambda$. Then by Proposition 3 the set

$$H = \{\varepsilon\mathbf{d} \mid b \in \Phi_0(C, a_{(\gamma-1)}; \mathbf{d}), b \in Z'\}$$

will be independent over A. As for various $d_1, d_2 \in Z'$ the sets $\Phi_0(d_1, a_{(\gamma-1)}; C)$ and $\Phi_0(d_1, a_{(\gamma-1)}; C)$ are disjoint, $|H| = |Z'| > \lambda$. It contradicts to the minimality of the ordinal γ.

Case 2: γ is a limit ordinal.

Take some ordinal $\delta < \gamma$, for which $\dim_E(X, S_\delta) = \lambda$ and let $Z \subseteq (X \cap S_\delta)$ be a free in X over E set and $|Z| = \lambda$.

By induction on ordinal $\mu \in (\gamma \backslash \delta)$ we shall prove the following statement:

($\Diamond_\mu$) if some P-formula $\Phi(x)$ over S_μ divides the set X, then there is a formula $\Psi(x)$ over S_δ which divides the set X, and for which $(X \cap \Phi(C)) \subseteq (X \cap \Psi(C))$ holds.

In the case, when the ordinal μ is limit, the induction step is trivial. Let the condition ($\Diamond_{\mu_0}$) be satisfied. We shall show the property ($\Diamond_{\mu_0+1}$). Let the P-formula $\Phi(x, \mathbf{d}; a_{\mu_0})$, where $\mathbf{d} \in S_{\mu_0}$ divides the set X. Consider a λ-positive type $q(z)$, which isolates the element a_{μ_0} over the set S_{μ_0}.

Case 2a: $a \in \Phi(C, \mathbf{d}; a_{\mu_0})$ holds for some $a \in S_\delta$.

In this case one can take the formula $(x\Phi)(x, a)$ as $\Psi(x)$.

Further we shall assume, that Case 2a doesn't hold. As the type $q(z)$ is complete over S_{μ_0} and $S_\delta \subseteq S_{\mu_0}$, for any realization b of the type $q(z)$ we have

$$(\Phi(C, \mathbf{d}; b) \cap S_\delta) = \varnothing.$$

Case 2b: there is some P-formula $\Theta(z) \in q^+(z)$, for which Y divides X, where

$$Y = \bigcup\{\Phi(C, \mathbf{d}; b) \mid b \in \Theta(C)\}.$$

The set Y is defined by a P-formula over S_{μ_0}, and by the induction assumption there exists a P-formula $\Xi(x)$ over S_δ, which divides the set X and for which the following inclusion holds:

$$(Y \cap X) \subseteq \Xi(C).$$

The inclusion $\Phi(C, \mathbf{d}; a_{\mu_0}) \subseteq X$ implies the statement ($\Diamond_{\mu_0+1}$).

Case 2c: the negation of Cases 2a and 2b.

Take a set Q of P-formulas over S_{μ_0}, having a cardinality $\varkappa < \lambda$ such that the type q is generated by the set $(q^+ \cup \{\neg\Theta \mid \Theta \in Q\})$. By the condition of Case 3 we have the inclusion

$$Z \subseteq \bigcup\{\Phi(C, \mathbf{d}; b) \mid b \in \Theta(C), \Theta(z) \in Q\},$$

and also, for every $a \in Z$ we have the inclusion

$$(q^+(C) \cap \Phi(a, \mathbf{d}; C)) \subseteq \bigcup\{\Theta(C) \mid \Theta(z) \in Q\}.$$

By compactness and basic irreducibility, for some P-formulas $\Delta(z) \in q^+(C)$ and $\Theta(z) \in Q$ the following condition is satisfied:

$$(\Delta(C) \cap \Phi(a, \mathbf{d}; C)) \subseteq \Theta(C).$$

By virtue of the conditions on the cardinality $|Z| \geqslant \lambda$ and $|Q| < \lambda$, there exists a formula $\Theta_0 \in Q$ such that for some P-formulas $\Delta_1(z), \Delta_2(z) \in q^+(C)$ and some different $a_1, a_2 \in Z$ the following inclusions hold:

$$(\Delta_i(C) \cap \Phi(a_i, \mathbf{d}; C)) \subseteq \Theta_0(C), i \in \{1, 2\}.$$

Then for $\Delta_0(z) = (\Delta_1(z) \wedge \Delta_2(z))$ the following inclusion is satisfied:

$$(\Delta_0(C) \cap \Phi(a_i, \mathbf{d}; C)) \subseteq \Theta_0(C), i \in \{1, 2\}.$$

As such inclusion can be written using a P-formula $\Gamma(x)$, the P-equivalence $x\Gamma$ will divide the set X and one of its classes will contain more than one element from the set S_δ. It contradicts to the freedom of the set Z in the set X.

Now, using the statement $(\Diamond_\mu)$ for all $\mu < (\gamma \setminus \delta)$, we come to the contradiction with the assumption $\dim_E(X, M) > \lambda$. Remind, that $Z \subseteq M$ is free in X over E and $|Z| > \lambda$. For every $a \in Z$ let α_a be an ordinal, for which $a_{\alpha_a} = a$. We can assume, that for any $a \in Z$ we have the condition $\alpha_a \geqslant \delta$. By virtue of the statement $(\Diamond_\mu)$ for every $a \in Z$ there is a basic formula $\Phi_a(x, \mathbf{y})$ and parameters $\mathbf{d} \in S_\delta$ such that the condition $a \in \Phi_a(C, \mathbf{d}_a)$ is satisfied and $\Phi_a(C, \mathbf{d}_a)$ divides X. By virtue of conditions $|L| \leqslant \lambda$ and $|Z| > \lambda$, we may assume, that the kind of the formula $\Phi_a(x, \mathbf{y})$ does not depend on a, we denote it by $\Phi(x, \mathbf{y})$. We shall consider the equivalence $\eta = x\Phi$. As its classes divide the set X, and the set Z is free in X, each its class contains no more than one element of the set Z. By the statement $(\Diamond_\mu)$ for all $\mu < (\gamma \setminus \delta)$, classes of the equivalence η, containing elements of the set Z, are basic definable over the set S_δ. As these classes contain elements of independent in X, the set $\eta(Z)/\eta$ will be the independent subset of g.b. set $\eta(X)/\eta$. Then the condition $|\eta(Z)/\eta| > \lambda$ will contradict the minimality of ordinal γ. $\square$

Remark 3. *The previous Theorem implies that if to add to the conditions of Theorem, that M_0 is a λ-positive envelope of the set E, and $|X| > 1$, we get $M = M_0$ and the equality $\dim_E(X, M) = \lambda$. It follows from the condition that any λ-positive type over E is realized in M.*

The following theorem is contained in the article [15].

Theorem 2. [15] *Let B be a λ-positively constructible over $(D \cup A)$ model of a theory T, $|A| \geqslant \lambda$, $t(x)$ be a type over $(D \cup A)$, A be the set being independent in the type $t(x)$. Let the following condition be satisfied:*

(*) *if some P-formula $\Phi(x)$ over $(D \cup A)$ divides the type $t(x)$, then there is a formula $\Psi(x)$ over A which divides the type $t(x)$ and for which $t(x) \vdash (\Phi(x) \to \Psi(x))$ holds.*

Then the set A is a maximal independent in the type $t(x)$ subset of $t(B)$.

For the proof of the basic theorem of the given article we will use another variant of previous theorem. Note, that the proof of the following theorem similar to the proof of Theorem 2.

Theorem 3. *Let M be some λ-compact model of the theory T, X be a Δ-basic set, A be a maximal subset of model M, being independent in X and $|A| \geqslant \lambda$. Let for a set D the following condition is satisfied:*

(*) *if some P-formula $\Phi(x)$ over $(D \cup M)$ divides the set X, then there is a formula $\Psi(x)$ over M which divides the set X and for which the condition $(X \cap \Phi(C)) \subseteq (X \cap \Psi(C))$ holds.*

Then for any λ-constructible over $(D \cup M)$ set B the set A remains to be a maximal independent in X subset of B.

Proof. Let $S = \langle a_\alpha \mid \alpha < \mu \rangle$ be a λ-positive construction over $(D \cup A)$ for the structure B.

By induction on $\alpha < \mu$ we shall show, that the statement $(*)_\alpha$ holds which turns out from the condition (*) by replacement of D by $(D \cup S_\alpha)$.

For $\alpha = 0$ it is the condition (*). Let for all $\beta < \alpha$ the statements $(*)_\beta$ hold. For limit α the induction step is obvious. We shall consider that the ordinal $\alpha - 1$ exists. Let a P-formula $\Phi(x, \mathbf{d}; a_{\alpha-1})$ divide the set X, where $\Phi(x, \mathbf{y}; z)$ is a formula without parameters and $\mathbf{d} \in (S_{\alpha-1})$. Consider a λ-positive type $q(z)$, isolating the element $a_{\alpha-1}$ over $S_{\alpha-1}$.

Case 1: $a \in \Phi(C, \mathbf{d}; a_{\alpha-1})$ holds for some $a \in M$.

In this case we can take the formula $(x\Phi)(x, a)$ for $\Psi(x)$.

Further we shall suppose, that Case 1 doesn't hold. As the type $q(z)$ is complete over $S_{\alpha-1}$ and $M \subseteq S_{\alpha-1}$, for any realization b of the type $q(z)$ we have

$$(\Phi(C, \mathbf{d}; b) \cap M) = \varnothing.$$

Case 2: there is some P-formula $\Theta(z) \in q^+(z)$, such that the set Y divides the set X, where

$$Y = \bigcup \{\Phi(C, \mathbf{d}; b) \mid b \in \Theta(C)\}.$$

The set Y is defined by a P-formula over $S_{\alpha-1}$, and by the induction assumption there exists a P-formula $\Xi(x)$ over M, which divides the set X and for which the inclusion $(X \cap Y) \subseteq \Xi(C)$ is satisfied. The inclusion $\Phi(C, \mathbf{d}; a_{\alpha-1}) \subseteq Y$ implies the statement $(*)_\alpha$.

Case 3: the negation of Cases 1 and 2.

Take a set Q of P-formulas over $S_{\alpha-1}$, having a cardinality $\varkappa < \lambda$ such that the type q is generated by set $(q^+ \cup \{\neg\Theta \mid \Theta \in Q\})$. By the condition of Case 3 we have the inclusion

$$A \subseteq \bigcup \{\Phi(C, \mathbf{d}; b) \mid b \in \Theta(C), \Theta(z) \in Q\},$$

And also, for every $a \in A$ we have the inclusion

$$(q^+(C) \cap \Phi(a, \mathbf{d}; C)) \subseteq \bigcup \{\Theta(C) \mid \Theta(z) \in Q\}.$$

By compactness and basic irreducibility for some P-formulas $\Delta(z) \in q^+(C)$ and $\Theta(z) \in Q$ the condition

$$(\Delta(C) \cap \Phi(a, \mathbf{d}; C)) \subseteq \Theta(C)$$

is satisfied. By virtue of the conditions on cardinalities $|A| \geqslant \lambda$ and $|Q| < \lambda$, there exists a formula $\Theta_0 \in Q$ such that for some P-formulas $\Delta_1(z), \Delta_2(z) \in q^+(C)$ and different $a_1, a_2 \in A$ the inclusions

$$(\Delta_i(C) \cap \Phi(a_i, \mathbf{d}; C)) \subseteq \Theta_0(C), i \in \{1, 2\}$$

are satisfied. Then for $\Delta_0(z) = (\Delta_1(z) \wedge \Delta_2(z))$ we have the inclusions

$$(\Delta_0(C) \cap \Phi(a_i, \mathbf{d}; C)) \subseteq \Theta_0(C), i \in \{1, 2\}.$$

As such inclusion can be expressed by P-formula $\Gamma(x)$, the P-equivalence $x\Gamma$ will divide the set X and one of its classes will contain more than one element from the set A. It contradicts the independence of set A in X.

Now we shall prove the statement of Theorem, using the statements $(*)_\alpha$ for all $\alpha < \mu$. Assume that the statement of Theorem is false, i.e. for some $\alpha < \mu$ the element a_α belongs to the set X, $a_\alpha \notin A$ and the set $(A \cup \{a_\alpha\})$ is independent in X. Let a λ-positive type $q(x)$ λ-isolate the element a_α over the set S_α.

Case (a): the positive type $q^+(x)$ divides the set X.

By compactness we get that some P-formula $\Phi(x) \in q^+(x)$ divides the set X. By statement $(*)_\alpha$ there exists a P-formula $\Psi(x)$ over M which divides the set X and the condition $(X \cap \Phi(C)) \subseteq (X \cap \Psi(C))$ is satisfied. As the set $(A \cup \{a_\alpha\})$ is independent in X, the element a_α is free in $(X \cap \Phi(C))$. By λ-compactness of the model M and by the condition $\lambda > |L|$, one can find inside M a free in $(X \cap \Phi(C))$ set A_1 such that $|A_1| = \lambda$. As the type $q(x)$ is complete over M, is λ-positive and an element a_α does not belong to the model M, the set A_1 is covered by a family of P-sets of cardinality $< \lambda$, each of which divides the set $(X \cap \Phi(C))$. Hence, one of the sets of this family contains more then one element from the set A_1. It contradicts the independency of the set A_1 in $(X \cap \Phi(C))$.

Case (b): the negation of Case 1.

As the type $q(x)$ is λ-positive and $a_\alpha \notin A$, the set A is covered by a family of P-sets of cardinality $< \lambda$, each of which divides the set X. Hence, one of the sets of this family contains more then one element from the set A. It contradicts the independence of the set A in the set X. $\square$

7 Interpretation of graphs

Theorem 4. *Let the theory T of Frechet-power A^F of some structure A be stable and be not P-commutative. Then the class of all graphs or the class of all bipartite graphs is interpretable in T.*

Proof. By stability of the theory T and by Proposition 1 we get the P-normality of the theory T. Notice, that in view of the quantifiers elimination up to P-formulas in the theory of the Frechet-power, we have, that the relation $A \approx B$ is equivalent to the relation $A \equiv B$.

Case 1: the condition 3) of the definition of commutative theories does not hold.

Let the basic triangle $\Delta =< X_0, Y, X_1 >$ be not alternatively connected, i.e. for some g.b. subsets $Y'\prime \subseteq Y$ there does not exist $i \leq 1$ and a copy X' of the g.b. set Y' such that $(X')^* \subseteq X_i$ and Y', X' are basic connected.

As we work in T^{peq} one can assume, that Y' is a Δ-basic set. We consider equivalences α, β from the definition of the basic triangle $< X_0, Y, X_1 >$ and classes $U_1 = \alpha X_1$, $V_1 = \beta X_1$, $U_2 = \alpha X_2$ and $V_2 = \beta X_2$. The condition of the given case implies that all these classes are pairwise different. Clearly also, that these classes lay in one $(\alpha \vee \beta)$-class D that consist of infinitely many both α-classes and β-classes. We shall consider also, that Δ-basic equivalences α, β are minimal in the sense that there do not exist strictly smaller Δ-basic equivalences α', β', for which there is a basic triangle possessing the same aforesaid properties with replacement of equivalences α, β accordingly by equivalences α', β'.

Let a bipartite graph Γ with the parts A and B be given. We take a α-class r and a β-class s in a $(\alpha \vee \beta)$-class D. In the class s we take an independent set A', and in the class r an independent over A' set B' with the following properties: there exist one-to-one mappings of A onto A' and of B onto B'; images of elements $a \in A$ and $b \in B$ by these mappings will be denoted accordingly by $a' \in A'$ and by $b' \in B'$. For $a \in A$ and $b \in B$ by a^* and b^* we denote accordingly $\alpha a'$ and $\beta b'$.

Let $\delta = (\alpha \wedge \beta)$. We consider the set

$$W_\Gamma = \{(a^* \cap b^*) \mid \langle a, b \rangle \in \Gamma\}.$$

Let $\lambda = \max\{|L|^+, |(A \cup B)|^+\}$.

The rest of the proof of Case 1 of Theorem 4 we shall issue as the separate lemma.

Lemma 1. *Let M be a λ-positive envelope of a set $(A' \cup B')$. For every $G \in W_\Gamma$ we take a copy $X_G \subseteq G$ of the Δ-basic set Y' and a subset $R_G \subseteq X_G$ such that the following conditions are satisfied:*

1) *the copy X_G is free in G;*
2) *$(M \cap X_G) \neq \varnothing$;*
3) *$|R_G| = \lambda^+$;*
4) *the set $\bigcup\{R_G \mid G \in W_\Gamma\}$ is free over M.*

Let M_Γ be a λ-positive envelope of the set $E = (M \cup \bigcup\{R_G \mid G \in W_\Gamma\})$. Then a condition $\langle a, b \rangle \in \Gamma$ is equivalent to the following condition:

(*the dimension of some copy of the set Y', being free in $(a^* \cap b^*)$, is more than λ*).

Proof. First we shall show, that for any pair $\langle a, b \rangle \notin \Gamma$ any free, in $(a^* \cap b^*)$, copy U of the set Y', having a nonempty intersection with the model M_Γ, has a nonempty intersection with the model M. For this purpose it is enough to show, that the conditions of Theorem 3 are satisfied, where A is the set being a maximal in M free subset of set $(a^* \cap b^*)$, and $D = E$. Let $\Phi(x; \mathbf{d}; \mathbf{b})$ be a basic formula, for which $\mathbf{d} \in \bigcup\{R_G \mid G \in W_\Gamma\}, \mathbf{b} \in M$ and the set $\gamma(\Phi(C; \mathbf{d}; \mathbf{b}))$ divides the set $(a^* \cap b^*)$. By compactness we can assume (having corrected Φ, not changing parameters), That the set $\Phi(C; \mathbf{d}; \mathbf{b})$ is closed under the equivalence γ, and for any parameters $\mathbf{d}; \mathbf{b}$. We prove it by induction on the length of the tuple $\mathbf{d}$. If this tuple is empty there is nothing to prove. Let the tuple $\mathbf{d} = \langle d_1, \ldots, d_n \rangle$ is not empty, consists of pairwise different elements and $d_1 \in R_G$ for some $G \in W_G$. Let $\mathbf{d}'$ be $\langle d_2, \ldots, d_n \rangle$.

Case 1a: the set

$$K = \{a \mid a \in \Phi(C, b, \mathbf{d}'; \mathbf{b}) \text{ for some } b \in X_G\}$$

divides the set $(a^* \cap b^*)$.

By the condition 2) there is some element $a_1 \in (M \cap X_G)$. By compactness there exists a basic equivalence ε such that $\delta \subseteq \varepsilon$ holds and the set

$$R = \{a \mid C \models \Phi(a, b, \mathbf{d}'; \mathbf{b}) \text{for the some} b \in \varepsilon(a_1)\}$$

Divides the set $(a^* \cap b^*)$. As the set K is defined by the basic formula with parameters $\mathbf{d}'; \mathbf{b}, a_1,\ a_1 \in M$ and the inclusion $K \subseteq R$ is satisfied, the condition (*) of Theorem 3 holds in view of the induction assumption.

Case 1b: the set K does not divide the set $(a^* \cap b^*)$, i.e. the inclusion $(a^* \cap b^*) \subseteq K$ holds.

As the elements $d_1, \dots, d_n$ are pairwise different and the set $\{d_1, \dots, d_n\}$ over M is free, then for any $b \in X_G$ there exists an element $a \in (a^* \cap b^*)$, for which $C \models \Phi(a, b, \mathbf{d}'; \mathbf{b})$ is satisfied. By freedom of the set $(A' \cup B')$, by the condition 4), and by the basic normality of the theory T we get, that for some equivalence $\theta \in \{\alpha, \beta\}$ and for any copy U of the set Y', laying in the θ-class $\theta(a^* \cap b^*)$, there exist parameters $\mathbf{d}'_0; \mathbf{b}_0$ such that the formula $\Phi(x, y, \mathbf{d}'_0; \mathbf{b}_0)$ define an one-to-one mapping of U/ϱ onto $(a^* \cap b^*)/\sigma$, where $\varrho = y\Phi, \sigma = x\Phi$. Clearly, that then all copies of the set Y', laying in the θ-class $\theta(a^* \cap b^*)$, will be basic connected. It contradicts the choice of the basic triangle $< X_0, Y, X_1 >$ and of the set Y'.

Now, by virtue of Theorem 1, for the proof of Theorem it is enough to show, that for any pair $\langle a, b\rangle \notin \Gamma$ all maximal in M free sets in free, in $(a^* \cap b^*)$, copies of the set Y' remain maximal in the λ-positive envelope M_Γ. By virtue of Theorem 3, it is enough to show, that for any pair $\langle a, b\rangle \notin \Gamma$ the condition of this theorem is satisfied for the case when A is a maximal in M free subset in a free, in $(a^* \cap b^*)$, copy U of the set Y', and the set E is taken as D. Theorem 1 and Remark 3 imply $|A| = \lambda$.

Let $\Phi(x; \mathbf{d}; \mathbf{b})$ be a basic formula, $\mathbf{d} \in \bigcup\{R_G \mid G \in W_\Gamma\}, \mathbf{b} \in M$ and the set $\Phi(C; \mathbf{d}; \mathbf{b})$ divides the set U.

Further we shall reason similar to what have been leaded at the beginning of the proof of the given Theorem.

We shall prove by induction on the length of the tuple $\mathbf{d}$. If this tuple is empty there is nothing to prove. Let the tuple $\mathbf{d} = \langle d_1, \dots, d_n\rangle$ be not empty, consist of pairwise different elements and $d_1 \in R_G$ for some $G \in W_G$. Let $\mathbf{d}'$ be $\langle d_2, \dots, d_n\rangle$.

Case (a): the set

$$K = \{a \mid a \in \Phi(C, b, \mathbf{d}'; \mathbf{b}) \text{ for some } b \in X_G\}$$

divides the set U.

By the condition 2) of Lemma there is some element $a_1 \in (M \cap X_G)$. By compactness there exist a basic equivalence ε such that $\delta \subseteq \varepsilon$ is satisfied and the set

$$R = \{a \mid C \models \Phi(a, b, \mathbf{d}'; \mathbf{b}) \text{ for the some } b \in \varepsilon(a_1)\}$$

divides the set U. As the set K is defined by a basic formula with parameters $\mathbf{d}'; \mathbf{b}, a_1$, $a_1 \in M$, the inclusion $K \subseteq R$ is satisfied, then the condition (*) of Theorem 3 is true by the induction assumption.

Case (b): the set K does not divide the set U, i.e. the inclusion $U \subseteq K$ holds.

As the elements $d_1, \ldots, d_n$ are pairwise different and the set $\{d_1, \ldots, d_n\}$ is free over M, then for any $b \in X_G$ there exists an element $a \in U$, for which $C \models \Phi(a, b, \mathbf{d}'; \mathbf{b})$ is satisfied. By freedom of the set $(A' \cup B')$, freedom of the copy U in $(a^* \cap b^*)$, the conditions 4), and by basic normality of the theory T we get that for some equivalence $\theta \in \{\alpha, \beta\}$ in any δ-class Q, laying in a θ-class $\theta(a^* \cap b^*)$, there exist a copy V of the set Y' and parameters $\mathbf{d}_0'; \mathbf{b}_0$ such that the formula $\Phi(x, y, \mathbf{d}_0'; \mathbf{b}_0)$ will define the one-to-one mapping of X_G/ϱ onto V/σ, where $\varrho = y\Phi, \sigma = x\Phi$. Clearly, that then for any two θ-equivalent δ-classes V_1, V_2 and for any copy U_1 of the set Y', laying in V_1, there will be a copy U_2 of the set Y', laying in V_2, such that U_1 and U_2 will be basic connected. It contradicts the choice of the basic triangle $< X_0, Y, X_1 >$ and the set Y'.

Case 2: the condition 2) of the definition of commutative theories is not satisfied.

Let $\langle X, Y \rangle$ be a Δ-additive pair of Δ-basic sets which is not hereditary basic connected, i.e. a g.b. set X_1, $X_1^* \subseteq X$, with forming α is not basic connected with any its g.b. copy Y_1, $Y_1^* \subseteq Y$, with forming α.

Having taken necessary intersections of X and Y with basic sets, and also factors (we work in T^{peq}), we can assume, that X_1 is the Δ-basic set and $\{X_1\}$ is free in X. By definition, one-element sets are basic connected. The condition "to be one-element set" can be expressed by P-formulas. By compactness, the freedom of X_1 in X and the condition $X \approx Y$ imply $|X_1| > 1$.

By definition of Δ-additive pair there exists a Δ-basic set Z and a homogeneously Δ-additive sequence $S = \langle \alpha_i \mid i < \lambda \rangle$ in Z, such that $(X \cup Y) \subseteq Z$ and $\bigcap S$ is the common universe of X and Y. We can assume, that the pair $\langle X, Y \rangle$ is free in Z.

By Theorem of compactness it follows, that one can assume, that Δ-basic set Z is minimal in the sense that for any copy U of the set X with the conditions $U \approx X$ and $U \subseteq \alpha_0 X$ the set X_1 will be basic connected with some copy $U_1 \subseteq U$. By compactness we also get that the basic connection, which has been mentioned above, does not depend on a choice of U (it is realized by the same P-formula). As we work in T^{peq} we can assume, that these connections are injective.

Once again having reduced Z, it is possible to assume, that X is covered by copies of the set X_1 and $\{X\}$ is free in $(\alpha_0(X) \cup \alpha_0(Y))$. We also can assume that the previous properties hold with the replacement of X by Y. Taking into account all previous properties, the reflexivity of formulas at definition of basic connection together with basic normality we get the following properties:

(a) for any copies U, V of the set X, laying in the set $\alpha_0(X)$, any copy Q of the set X_1, laying in the set U, is injectively connected with some copy W of the set X_1, laying in the set V;

(b) the property (a) with the replacement of X by Y.

By properties (a), (b), by initial property of the set X_1, that it is not connected with any its copy from the set Y and reflexivity of formulas at the definition of basic connection together with basic normality we get the following properties:

(c) any copy of the set X_1 in the set $\alpha_0(X)$ is not connected with any copy of the set X_1 in the set $\alpha_0(Y)$;

(d) the property (c) with the replacement of X by Y.

Let Γ be a graph with a set B of vertexes. We take a basic independent, in Z, set B' of copies of the set X, being $\approx$-equivalent to the set X, and also $|B'| = |B|$ is satisfied. As the set Z/α_0 is additive, an affine addition $w = x + y - z$ is basic definable on it. We fix some α_0-class U_0 and consider the operation $w = x + y - U_0$ on set Z/α_0. Denote this operation by $+$. It sets on P/α_0 a structure of an Abelian group and the α_0-class U_0 is zero of this group.

Let λ be the cardinality $\max\{|L|^+, |B|^+\}$.

By condition $|B'| = |B|$ there exists a one-to-one-mapping of B onto B'. The images of elements $b \in B$ w.r.t. this mapping will be denoted by $b' \in B'$.

Consider the set

$$W_\Gamma = \{(a' + b') \mid \langle a, b\rangle \in \Gamma\}.$$

We shall issue the rest of the proof of Case 2 of Theorem 4 by the following Lemma being similar to Lemma 1.

Lemma 2. *Let M be a λ-positive envelope of the set $(B' \cup \{U_0\})$. For every $G \in W_\Gamma$ we take a copy $X_G \subseteq G$ of the Δ-basic set X_1 and a subset $R_G \subseteq X_G$ such that the following conditions are true:*

1) *the copy* X_G *is free in* G*;*
2) $(M \cap X_G) \neq \varnothing$*;*
3) $|R_G| = \lambda^+$*;*
4) *the set* $\bigcup\{R_G \mid G \in W_\Gamma\}$ *is free over* M*.*

Let M_Γ *be a* λ*-positive envelope of the set* $E = (M \cup \bigcup\{R_G \mid G \in W_\Gamma\})$*. Then the condition* $\langle a, b\rangle \in \Gamma$ *is equivalent to the following:*

(*the dimension of some copy of the set* X_1*, being free in* $(a' + b')$*, is more, than* λ).

Proof. Practically it repeats the proof of Lemma 1, using all properties established in the beginning of the proof of Case 2. □

References

[1] *M.Ziegler*, Model theory of modules, Ann. Pure and Appl. Logic, 1984, v. 26, p. 149–213.

[2] *E.A.Palyutin*, Categorical Horn classes. 1, Algebra and logic, 1980, v. 19, N 5, p. 582–614.

[3] *E.A.Palyutin*, Elimination of quantifiers for commutative theories, Reports of the Russian Academy of Science, 1998, v. 363, N 3, p. 301–303.

[4] *E.A.Palyutin*, Commutative theories, Abstracts of Logic Colloquium'98, Prague, 1998.

[5] *E.A.Palyutin*, Normality of Horn theories with non-maximal spectrum, Algebra and logic, 1985, v.24, N 5, p. 551–587.

[6] *J.Saffe, E.A.Palyutin, S.S.Starchenko*, Models of superstable Horn theories, Algebra and logic, 1985, v. 24, N 3, p. 278–326.

[7] *E.A.Palyutin, S.S.Starchenko*, Spectra of Horn classes, Reports of the Russian Academy of Science, 1986, v. 290, N 6, p. 1298–1300.

[8] *E.A.Palyutin*, Quasivarieties with non-maximal spectrum, Abstracts of 6-th Intern. Congress of Log. Method. Phil. Sci., Moscow, 1987, p. 121–122.

[9] *E.A.Palyutin, S.S.Starchenko*, Horn theories with non-maximal spectrum, Proceedings of Institute of Mathematics of Siberian Branch of Academy of Science of the USSR, 1988, v. 8, p. 108–162.

[10] *E.A.Palyutin, S.S.Starchenko*, Horn theories with non-maximal spectrum, Amer. Math. Soc. Transl. 1999, v. 195, N 2, p. 225–284.

[11] *E.A.Palyutin*, Additive theories, Proceedings of Logic Colloquium'98, Prague, 1998, Lectures Notes in Mathematical Logic, v. 13.

[12] *A.Pillay*, Countable models of stable theories, Proc. Amer. Math. Soc., 1983, v. 89, N 4.

[13] *S.Shelah*, Classification theory and the number of non-isomorphic models, North-Holland, Second edition: 1990.

[14] *E.A.Palyutin*, Primitively connected theories, Algebra and logic, 2000, v. 39, N 2, p. 145–169.

[15] *E.A.Palyutin*, Stable theories of Frechet-powers, Siberian Electronic Mathematical Reports, 2008, v. 5, p. 699–607.

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИ БЛИЗКИХ АЛГЕБРАХ

А.Г. Пинус

Новосибирский Государственный Технический Университет,
Россия, 630092, Новосибирск, пр. Маркса 20
e-mail: algebra@nstu.ru

В серии работ Б.И.Плоткина и его соавторов (см., к примеру, [1]-[2]) разработана система понятий алгебраической геометрии для универсальных алгебр произвольных многообразий. Одно из центральных мест среди этих понятий занимает понятие алгебраического множества.

Напомним,что подмножество $B \subseteq A^n$, где n некоторое натуральное число, а A — основное множество некоторой алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$ из многообразия V называется *n-мерным алгебраическим*, если существует система уравнений

$$\{t_1^i(x_1, ..., x_n) = t_2^i(x_1, ..., x_n) | i \in I\}$$

сигнатуры σ таких, что B есть совокупность всех решений этой системы в алгебре $\mathcal{A}$. Совокупность всех n-мерных алгебраических множеств алгебры $\mathcal{A}$ образует, по отношению теоретико-множественного включения полную решетку $Alg_n\mathcal{A}$. При этом, операция $\wedge$ на $Alg_n\mathcal{A}$ совпадает с операцией теоретико-множественного пересечения, в то время как операция $\vee$ может быть отличной от операции $\cup$.

В тех же работах Б.И.Плоткина разработана серия понятий "геометрической близости, похожести" различных универсальных алгебр: *геометрической эквивалентности, геометрического подобия*. Каждое из этих понятий аппелирует в своем определении к выходу за рамки самих рассматриваемых алгебр — переходу к многообразиям порожденным этими алгебрами. Причем, если первое из них, понятие геометрической эквивалентности связывает лишь алгебры принадлежащие некоторому общему многообразию (в частности, лишь алгебры одной и той же сигнатуры), то понятие геометрического подобия может связывать алгебры различных сигнатур (к примеру, геометрически подобны любые рационально эквивалентные алгебры).

Цель настоящей заметки предложить к рассмотрению некоторые иные простые, естественные понятия "геометрической близости, похожести" алгебр — понятия "геометрической тождественности" и "геометрической схожести", не выходящие за пределы самих рассматриваемых алгебр и относящиеся, в том числе, к алгебрам произвольных сигнатур. Мы рассмотрим взаимосвязь этих новых понятий "геометрической близости" между собой, с упомянутыми выше понятиями "геометрической близости" введенными Б.И.Плоткиным и с понятиями "алгебраической близости" алгебр — хорошо известными понятиями рациональной эквивалентности (введенной А.И. Мальцевым [3]) и категорной эквивалентности (см., к примеру, [4]). Наконец подчеркнем роль полугруппы $Ihm\mathcal{A}$ внутренних гомоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ в связи с одним из введенных понятий.

Алгебры $\mathcal{A}_1 = \langle A_1; \sigma_1 \rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \langle A_2; \sigma_2 \rangle$ назовем *геометрически тождественными*, если существует биекция φ множества A_1 на множество A_2 такая, что для любого натурального n

$$\varphi(Alg_n \mathcal{A}_1) = Alg_n \mathcal{A}_2$$

Напомним, что две алгебры $\mathcal{A}_1 = \langle A_1; \sigma_1 \rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \langle A_2; \sigma_2 \rangle$ входящие в некоторое общее многообразие V являются *геометрически эквивалентными*, если для любого натурального n совпадают совокупности $Con_{\mathcal{A}_1} \mathcal{F}_V(x_1, ..., x_n)$ и $Con_{\mathcal{A}_2} \mathcal{F}_V(x_1, ..., x_n)$ $\mathcal{A}_1$ - и $\mathcal{A}_2$-замкнутых конгруэнций на $\{x_1, ..., x_n\}$-порожденных V-свободных алгебрах $\mathcal{F}_V(x_1, ..., x_n)$. Для V-алгебры $\mathcal{A}$ конгруэнция θ алгебры $\mathcal{F}_V(x_1, ..., x_n)$ $\mathcal{A}$-замкнута, если

$$\Theta = \bigcap_{\substack{\mu \in \mathcal{A}^n \\ \Theta \in ker\mu}} ker\mu$$

здесь кортеж $\langle a_1, ..., a_n \rangle \in \mathcal{A}^n$ отождествляется с гомоморфизмом μ алгебры $\mathcal{F}_V(x_1, ..., x_n)$ в алгебру $\mathcal{A}$ таким, что $\mu(x_i) = a_i$ $(i = 1, ..., n)$.

Как замечено, к примеру в [3], геометрическая эквивалентность алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ равносильна вложимости любой конечно порожденной подалгебры каждой из этих алгебр в некоторую декартову степень другой. В силу чего, к примеру, геометрически эквивалентны друг другу любые две неодноэлементные булевы алгебры. То есть, в частности, даже из мощностных соображений, геометрическая эквивалентность алгебр даже одной сигнатуры не влечет их геометрической тождественности.

Пример рационально эквивалентных алгебр (которые, очевидным образом, геометрически тождественны) показывает (в случае различия сигнатур рассматриваемых алгебр), что геометрическая тождественность не влечет геометрическую эквивалентность. То что различие сигнатур и мощностей алгебр не является решающим в этой ситуации демонстрирует следующий пример: $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ алгебры сигнатуры состоящей из одной одноместной функции $f(x)$. Пусть p и q два различных простых числа и $\mathcal{A}_1$ — дизъюнктное объединение одного f-цикла длины p и счетного числа f-циклов длинны q, в то время как $\mathcal{A}_2$ — дизъюнктное объединение одного f-цикла длинны q и счетного числа f-циклов длинны p. Очевидно, что алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ геометрически эквивалентны (т.к. $\mathcal{A}_1$ вложима в $\mathcal{A}_2^\omega$ и $\mathcal{A}_2$ вложима в $\mathcal{A}_1^\omega$), но $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ не являются геометрически тождественными (в $\mathcal{A}_1$ есть алгебраическое 1-мерное подмножество из p элементов, а в $\mathcal{A}_2$ такого нет).

Отсутствие обратной импликации для алгебр одной сигнатуры (то, что геометрическая тождественность не влечет геометрическую эквивалентность) демонстрирует следующий пример: $\mathcal{A}_1 = \langle Z; f, h\rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \langle Z; f, g\rangle$, где Z совокупность всех целых чисел и $f(n) = n, h(n) = n + 1, g(n) = n - 1$, для любого $n \in Z$ (очевидно, что уравнения сигнатуры $\langle f, g\rangle$ на Z равносильны уравнениям сигнатуры $\langle f, h\rangle$ и обратно). То, что $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ геометрически не эквивалентны следует из невыполнимости для них приведенного выше критерия связанного с вложимостью конечно порожденных подалгебр в декартовы степени.

Две алгебры $\mathcal{A}_1 = \langle A_1; \sigma_1\rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \langle A_2; \sigma_2\rangle$ назовем *геометрически схожими*, если для любого натурального n изоморфны решетки $Alg_n\mathcal{A}_1$ и $Alg_n\mathcal{A}_2$ алгебраических множеств этих алгебр. Очевидно, что геометрическая тождественность алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ влечет их геометрическую схожесть.

Как доказано в [1] решетки $Con_{\mathcal{A}}\mathcal{F}(x_1, ..., x_n)$ $\mathcal{A}$-замкнутых конгруэнций V-свободных алгебр $\mathcal{F}_V(x_1, ..., x_n)$, где V любое многообразие содержащее алгебру $\mathcal{A}$, и $Alg_n\mathcal{A}$ n-мерных алгебраических множеств алгебры $\mathcal{A}$ двойственны. Таким образом геометрическая эквивалентность алгебр влечет их геометрическую схожесть.

К отношениям "геометрической близости" относится и отношение *геометрического подобия* (geometrical similar [2]). Напомним его определение. Для любого многообразия V и любой V-алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma\rangle$ естественным образом определяется категория $K_V(\mathcal{A})$ алгебраических множеств алгебры $\mathcal{A}$: объекты этой категории суть пары $\langle\{x_1, ..., x_n\}; B\rangle$, где n-натуральное число и $B \subseteq A^n$ алгебраическое множество алгебры $\mathcal{A}$, а морфизмы - $[s] : \langle\{x_1, ..., x_n\}; B\rangle \longrightarrow \langle\{y_1, ..., y_m\}; C\rangle$ определены гомоморфизмами $s : \mathcal{F}_V(y_1, ..., y_m) \longrightarrow \mathcal{F}_V(x_1, ..., x_n)$: такими, что $\mu s \in C$ для любого $\mu \in B$ (при указанном выше отождествлении кортежей из A^n с гомоморфизмами алгебры $\mathcal{F}_V(x_1, ..., x_n)$ в алгебру $\mathcal{A}$.

Геометрическое подобие алгебр $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ определяется как изоморфизм категорий $K_{V_1}(\mathcal{A}_1)$ и $K_{V_2}(\mathcal{A}_2)$, где V_i — многообразия порожденные алгебрами $\mathcal{A}_i$ соответственно. В частности, при тождественном отображении

$$s : \mathcal{F}_V(x_1, ..., x_n) \longrightarrow \mathcal{F}_V(x_1, ..., x_n)$$

наличие морфизма $[s]$ объекта $\langle\{x_1, ..., x_n\}; B\rangle$ в объект $\langle\{x_1, ..., x_n\}; C\rangle$ равносильно включению $B \subseteq C$. Тем самым геометрическое подобие алгебр $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ влечет изоморфизм решеток $Alg_n\mathcal{A}_1$ и $Alg_n\mathcal{A}_2$ для любого натурального n, т.е. геометрическую схожесть алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.

Напомним еще одно понятие эквивалентности алгебр (одно из наиболее сильных с точки зрения сохранения алгебраических свойств) - категорную эквивалентность. Алгебры $\mathcal{A}_1 = \langle A_1; \sigma_1\rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \langle A; \sigma_2\rangle$ *категорно эквивалентны*, если изоморфны категории $V(\mathcal{A}_1)$ и $V(\mathcal{A}_2)$ (здесь $V(\mathcal{A})$ — многообразие порожденное алгеброй $\mathcal{A}$) с помощью некоторого функтора φ такого, что $\varphi(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_2$.

Рациональная эквивалентность алгебр $\mathcal{A}_1 = \langle A_1; \sigma_1\rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \langle A_2; \sigma_2\rangle$ означает сопряженность совокупностей термальных функций алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ с помощью некоторой биекции между множествами A_1 и A_2. Очевидно, что рациональная эквивалентность алгебр влечет их категорную эквивалентность, геометрические тождественность, схожесть и подобие (но не геометрическую эквивалентность - последние алгебры обязаны быть одной сигнатуры). Примеры категорно, но не рационально эквивалентных алгебр (к примеру конечная алгебра и некоторая ее матричная степень) вытекают из работы Р.МакКензи [5].

Возможность категорной эквивалентности алгебр различных сигнатур показывает, что существуют категорно эквивалентные, но не геометрически эквивалентные алгебры.

Пример алгебр $\mathcal{A}_1 = \langle Z; f\rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \langle Z; f, g\rangle$ (где Z- совокупность целых чисел, f, g-одноместные функции и $f(n) = n+1, g(n) = n-1$) которые имеют одни и те же алгебраические множества, но разномощные решетки подалгебр показывает, что геометрическая тождественность алгебр не влечет ни рациональную, ни категорную их эквивалентности. Разномощные булевы алгебры демонстрируют, что геометрическая эквивалентность не влечет рациональную, а геометрическая эквивалентность двухэлементной (подпрямо неразложимой) и любой иной неодноэлементной (не подпрямо неразложимой) булевой алгебры - то что геометрическая эквивалентность алгебр не влечет их категорную эквивалентность.

Существование геометрически схожих (геометрически подобных) алгебр различных сигнатур демонстрирует, что ни геометрическая схожесть, ни геометрическое подобие, вообще говоря, не влекут геометрической эквивалентности.

Любые две алгебры пустой сигнатуры (два множества) очевидным образом геометрически схожи (подобны), но, в случае разномощности, не геометрически тождественны и, следовательно, геометрическая схожесть (подобие) не влечет геометрическую тождественность. Категорная эквивалентность любых примальных алгебр (в том числе и разномощных) демонстрирует то, что категорная эквивалентность не влечет геометрическую тождественность. То, что геометрическая схожесть не влечет категорную (а, значит, и рациональную) эквивалентность показывает пример алгебр $\mathcal{A}_1 = \langle Z; f\rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \langle Z; f, g\rangle$, где f, g-одноместные функции и $f(n) = n+1, g(n) = n-1$ для $n \in Z$. Геометрическая схожесть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ проверяется непосредственно (любое уравнение сигнатуры $\langle f, g\rangle$ эквивалентно некоторому уравнению сигнатуры $\langle f\rangle$), а так как алгебра $\mathcal{A}_1$ имеет, в отличии от алгебры $\mathcal{A}_2$ собственные подалгебры, то $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ не являются категорно эквивалентными.

В работе [2] отмечено, что геометрическая эквивалентность алгебр влечет их геометрическое подобие.

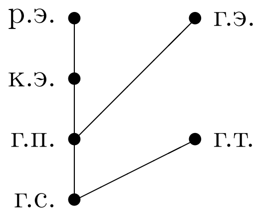
Поскольку определение геометрического подобия алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ допускает определение в категорных терминах (в рамках категорий многообразий порожденных этими алгебрами), то имеет место импликация: категорная эквивалентность $\longrightarrow$ геометричекое подобие.

Как замечено в той же работе [2] любые непериодические абелевы группы геометрически подобны тогда и только тогда, когда они порождают одно и тоже квазимногообразие. Тем самым группы Z и Z^2 демонстрируют то, что геометрическое подобие не влечет категорную эквивалентность.

Уже дважды рассмотренный выше пример алгебр $\mathcal{A}_1 = \langle Z; f\rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \langle Z; f, g\rangle$, где $f(n) = n + 1, g(n) = n - 1$ дает пример геометрически тождественных, но не геометрически подобных (за счет наличия собственных подалгебр в алгебре $\mathcal{A}_1$ и отсутствия таковых у $\mathcal{A}_2$, а, значит, отсутствия изоморфизма категорий свободных алгебр многообразий порожденных алгебрами $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ соответственно) алгебр. Тем самым ни геометриическая тождественность, ни, тем более, геометрическая схожесть алгебр не влекут их геометрического подобия.

Приведенные выше замечания о взаимосвязях отношений геометрической тождественности (г.т.), геометрической эквивалентности (г.э.), геометрической схожести (г.с.), геометрического подобия (г.п.), рациональной эквивалентности (р.э.) и категорной эквивалентности (к.э.) суммированы в следующем утверждении (записанном в виде диаграммы Хассе для частично упорядоченной отношением импликации (следования) совокупности {г.т., г.э., г.с., г.п., р.э., к.э.}.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Взаимосвязи отношений геометрических тождественности, эквивалентности, схожести, подобия, рациональной и категорной эквивалентностей алгебр описываются следующей диаграммой Хассе



Через $Ihm\mathcal{A}$ обозначим полугруппу внутренних гомоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ (гомоморфизмов между произвольными подалгебрами алгебры $\mathcal{A}$) с естественным определением операции умножения как суперпозиции.

Для любой алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$ и любого натурального n на множестве A^n определим отношение квазипорядка $\leq_n$: для $\overline{a} = \langle a_1, ..., a_n \rangle, \overline{b} = \langle b1, ..., b_n \rangle \in A^n$ отношение $\overline{a} \leq_n \overline{b}$ имеет место тогда и только тогда, когда существует $g \in Ihm\mathcal{A}$ такой, что $g(a_i) = b_i$ для любого $i \leq n$. Через $D^+_{\overline{a}}(x_1, ..., x_n)$ обозначим позитивную диаграмму кортежа $\overline{a}$ в алгебре $\mathcal{A}$, т.е. совокупность равенств

$$t_1(x_1, ..., x_n) = t_2(x_1, ..., x_n)$$

где $t_i(\overline{x})$ — термы сигнатуры σ, такие, что

$$\mathcal{A} \models t_1(\overline{a}) = t_2(\overline{a})$$

Таким образом очевидно,что

$$\overline{b} \leq_n \overline{a} \Longleftrightarrow \mathcal{A} \models D^+_{\overline{a}}(\overline{b})$$

и любое алгебраическое множество $B \subseteq A^n$ является идеалом квазиупорядоченного множества (к.у.ма) $\langle A^n; \leq_n \rangle$. Напомним, что подмножество $D \subseteq C$ к.у.ма $\langle C; \leq \rangle$ называется идеалом, если для любых $a_1 \in D, a_2 \in C$ из неравенства $a_2 \leq a_1$ следует включение $a_2 \in D$.

Обратное неверно, к примеру, пусть сигнатура σ состоит из единственного одноместного символа f и для любого натурального n — Z_n n-цикл сигнатуры σ. Пусть $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$ является дизъюнктным объединением алгебр Z_p, Z_q и Z_{pq} для некоторых простых p и q таких, что $p \neq q$. Если $a, b \in \mathcal{A}$ и порождают в $\mathcal{A}$ p- и q-циклы соответственно, то подалгебра алгебры $\mathcal{A}$ порожденная парой $\{a, b\}$ очевидно является идеалом в к.у.ме $\langle A; \leq_1 \rangle$, но не является алгебраическим множеством для алгебры $\mathcal{A}$.

Для любой алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$, любого $\overline{a} \in A^n$ главный идеал $\{\overline{b} \in A^n | \overline{b} \leq_n \overline{a}\} = I_{\overline{a}}$ является алгебраическим множеством (определяемым системой уравнений $D^+_{\overline{a}}(\overline{x})$). Более того, главные идеалы в решетке $Alg_n\mathcal{A}$ (как и в решетке $Id(\langle A^n; \leq_n \rangle)$ идеалов к.у.ма $\langle A^n; \leq_n \rangle$) суть компактные V-неразложимые элементы решетки $Alg_n\mathcal{A}$ (решетки $Id(\langle A^n; \leq_n \rangle)$).

Тем самым, если алгебры $\mathcal{A}_1 = \langle A_1; \sigma_1 \rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \langle A_2; \sigma_2 \rangle$ геометрически тождественны (с помощью некоторой биекции φ множества A_1 на множество A_2) то к.у.мы $\langle A_1^n; \leq_n \rangle$ и $\langle A_2^n; \leq_n \rangle$ изоморфны с помощью той же биекции φ. То же самое имеет место, если сопряжены (некоторой биекцией φ множества A_1 на множество A_2) полугруппы $Ihm\mathcal{A}_1$ и $Ihm\mathcal{A}_2$. Обратное конечно, в общем случае, неверно, т.е. ни сопряженность полугрупп $Ihm\mathcal{A}_1$ и $Ihm\mathcal{A}_2$, ни изоморфизм к.у.мов $\langle A_1^n; \leq_n \rangle$ и $\langle A_2^n; \leq_n \rangle$ (с помощью некоторой биекции A_1 на A_2) не влечет геометрической тождественности алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.

Алгебру $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$ назовем *геометрически совершенной* (ср. с logical perfect у Б.И. Плоткина [7]), если любой идеал в к.у.ме $\langle A^n; \leq_n \rangle$ является алгебраическим множеством. К примеру, если $\mathcal{A}$ примальна, то все подмножества множества A^n алгебраичны для $\mathcal{A}$, порядок $\leq_n$ на A^n тривиален ($\overline{a} \leq_n \overline{b} \iff \overline{a} = \overline{b}$) и, тем самым, $\mathcal{A}$-геометрически совершенна. Алгебру $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$ назовем *геометрически минимальной*, если алгебраические множества алгебры $\mathcal{A}$ суть лишь главные идеалы к.у.мов $\langle A^n; \leq_n \rangle$. В качестве примера геометрически минимальной алгебры укажем на рассмотренное выше дизъюнктное объединение $p-, q$ - и pq-циклов (p, q пара различных простых натуральных чисел) для сигнатуры состоящей из одной одноместной функции.

Очевидным образом имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Сопряженность полугрупп $Ihm\mathcal{A}_1$ и $Ihm\mathcal{A}_2$ для любых геометрически совершенных (геометрически минимальных) алгебр $\mathcal{A}_1 = \langle A_1; \sigma_2 \rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \langle A_2; \sigma_2 \rangle$ влечет геометрическую тождественность этих алгебр.

В связи с понятиями геометрической тождественности и геометрической схожести алгебр представляют интерес как абстрактное, так и конкретное описание систем решеток $\{Alg_n\mathcal{A} | \mathcal{A}$-некоторая алгебра$\}$, т.е.:

1) описание последовательностей $\langle L_n | n \in \omega \rangle$ полных решеток для которых существует универсальная алгебра $\mathcal{A}$ такая, что для любого n решетки L_n и $Alg_n\mathcal{A}$ изоморфны;

2) описание, для любого множества A, решеточно упорядоченных (относительно $\subseteq$) систем подмножеств B_n множеств A^n таких, что для

некоторой алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$ имеют место равенства $B_n = Alg_n\mathcal{A}$.

В виде частичного ответа на эти вопросы приведем абстрактное и конкретное описание решетки $Alg_1\mathcal{A}$.

Под полной решеткой подмножеств множества A будем понимать некоторую совокупность подмножеств множества A решеточно упорядоченную отношением теоретико-множественного включения так, что для множеств $B_i (i \in I)$ из этой совокупности роль $inf\{B_i | i \in I\}$ играет множество $\bigcap\limits_{i \in I} B_i$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. а) Для любой полной решетки L существует универсальная алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $L \cong Alg_1\mathcal{A}$.

б) Для любой полной решетки S подмножеств множества B такой, что $\{\varnothing, B\} \in S$ существует множество D и алгебра $\mathcal{A}$ с основным множеством $B \cup D$ такая, что $Alg_1\mathcal{A} = (S \backslash \{B\}) \cup \{B \cup D\}$.

Доказательство. Докажем утверждение а), доказательство утверждения б) будет содержаться в доказательстве первого. Пусть L произвольная полная решетка. Как хорошо известно (см. к примеру [8]) L допускает представление полной решеткой L_1 подмножеств некоторого множества C. Через L_1' обозначим совокупность $L_1 \backslash \{C\}$ подмножеств множества C. Через T обозначим совокупность любых конечных последовательностей $\overline{B} = B_1, ..., B_n$ элементов из L_1'. Пусть $D = \{d_{\overline{B}} | \overline{B} \in T\}$ — совокупность попарно различных (для различных $\overline{B} \in T$) элементов, дизъюнктная с C и $A = C \cup D$. Через P обозначим совокупность $L_1' \cup \{A\}$. Очевидно, что P упорядоченная теоретико-множественным включением, является полной решеткой подмножеств множества A изоморфной решетке L. На множестве A определим алгебру $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$ сигнатуры σ, состоящей из попарно различных символов $h_B (B \in L_1')$ унарных функций, следующим образом:

$$h_B(a) = \begin{cases} a, \text{если } a \in B \\ d_B, \text{если } a \in A \backslash B \\ d_{B\overline{C}}, \text{если } a = d_{\overline{C}}, \text{где } \overline{C} \in T. \end{cases}$$

Здесь $B\overline{C}$ — результат конкатенации (приписывания) последовательности $\overline{C}$ вслед за символом B.

Таким образом,

$$B = \{a \in A | \mathcal{A} \models h_B(a) = a\},$$

$$A = \{a \in A | \mathcal{A} \models a = a\}$$

и мы имеем включение

$$P \subseteq Alg_1\mathcal{A}.$$

С другой стороны, для любого терма

$$t(x) = h_{B1}(h_{B2}(...(h_{Bn}(x))...)) \ (t(x) = x)$$

сигнатуры σ через D_t обозначим множество $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i \ (A)$. Тогда, в силу определения функций h_B, для любых термов $t_1(x), t_2(x)$ сигнатуры σ имеет место равенство

$$\{a \in A | \mathcal{A} = t_1(a) = t_2(a)\} = B_{t_1} \cap B_{t_2}$$

Таким образом, справедливо и обратное включение

$$Alg_1\mathcal{A} \subseteq P,$$

а значит и равенство $Alg_1\mathcal{A} = P$. Тем самым алгебра $\mathcal{A}$ искомая доказывающая утверждения 3 а, 3 б.

Наконец, возвращаясь к вопросу об абстрактном описании последовательности решеток $Alg_n\mathcal{A}$ для произвольных универсальных алгебр $\mathcal{A}$, отметим очевидные вложения решеток $Alg_k\mathcal{A} \times Alg_m\mathcal{A}$ в решетки $Alg_n\mathcal{A}$ для любых натуральных k, m, n таких, что $k + m \leq n$.

Естественным образом представляет интерес

ВОПРОС о взаимосвязи свойств решеток $Alg_n\mathcal{A}$ со свойствами алгебр $\mathcal{A}$.

В первую очередь, в силу полноты решеток $Alg_n\mathcal{A}$, естественен вопрос о том когда решетки $Alg_n\mathcal{A}$ алгебраичны или ко-алгебраичны. Множество $B \in Alg_n\mathcal{A}$ будем называть *финитарным*, если оно является совокупностью в $\mathcal{A}$ решений конечной системы уравнений. Так как любое множество из $Alg_n\mathcal{A}$ есть инфинум в решетке $Alg_n\mathcal{A}$ некоторой совокупности финитарных множеств, то роль ко-компактных элементов в решетках $Alg_n\mathcal{A}$ могут играть только финитарные алгебраические множества алгебры $\mathcal{A}$. Тем самым очевидно, что решетки $Alg_n\mathcal{A}$ ко-алгебраичны тогда и только тогда, когда финитарные алгебраические множества алгебры $\mathcal{A}$ ко-компактны в решетках $Alg_n\mathcal{A}$, т.е. когда для любых термов $p_i(x_1, ..., x_n), q_i(x_1, ..., x_n)(i \in I), s(x_1, ..., x_n), t(x_1, ..., x_n)$ сигнатуры алгебры $\mathcal{A}$ из истинности на $\mathcal{A}$ формулы

$$\forall x_1, ..., x_n (\bigwedge_{i \in I} p_i(x_1, ..., x_n) = q_i(x_1, ..., x_n) \longrightarrow s(x_1, ..., x_n) = t(x_1, ..., x_n))$$

вытекает существование конечного подмножества $I_0 \subseteq I$ такого, что на $\mathcal{A}$ истинна формула

$$\forall x_1, ..., x_n(\bigwedge_{i \in I_0} p_i(x_1, ..., x_n) = q_i(x_1, ..., x_n) \longrightarrow s(x_1, ..., x_n) = t(x_1, ..., x_n)).$$

Последнее свойство алгебры $\mathcal{A}$ определено в работе Б. Плоткина [2] как *«локальная геометрическая Нетеровость»* алгебры $\mathcal{A}$.

Таким образом, ко-алгебраичность решеток $Alg_n\mathcal{A}$ равносильна локальной геометрической Нетеровости алгебры $\mathcal{A}$.

В качестве следующего примера взаимосвязи свойств алгебры $\mathcal{A}$ со свойствами решеток $Alg_n\mathcal{A}$ приведем следующий: для любой дискриминаторной алгебры $\mathcal{A}$ решетки $Alg_n\mathcal{A}$ дистрибутивны.

Пусть $t(x, y, z)$ — терм сигнатуры алгебры $\mathcal{A}$ определяющий на ней функцию дискриминатора. Пусть

$$t_1(x_1, ..., x_n) = t_2(x_1, ..., x_n),$$

$$t_3(x_1, ..., x_n) = t_4(x_1, ..., x_n)$$

пара уравнений на алгебре $\mathcal{A}(t_i(\overline{x})$ — термы). Тогда если B_1 и B_2 совокупность решений на алгебре $\mathcal{A}$ соответственно, первого и второго из этих уравнений, то очевидно, что $B_1 \cup B_2$ является совокупностью на $\mathcal{A}$ решений уравнения

$$t(t_1(\overline{x}), t_2(\overline{x}), t_3(\overline{x})) = t(t_2(\overline{x}), t_1(\overline{x}), t_4(\overline{x})).$$

Таким образом, если $C_j (j = 1, 2)$ множества из $Alg_n\mathcal{A}$ являющиеся решениями совокупностей уравнений $\{t_i^{j1}(\overline{x}) = t_i^{j2}(\overline{x})/i \in I\}$, то $C_1 \cup C_2$ является множеством решений уравнений

$$\{t(t_i^{11}(\overline{x}), t_i^{12}(\overline{x}), t_i^{21}(\overline{x})) = t(t_i^{12}(\overline{x}), t_i^{11}(\overline{x}), t_i^{22}(\overline{x}))/i \in I\}$$

А так как роль операции $\wedge$ в решетках $Alg_n\mathcal{A}$ играет теоретико-множественное пересечение, то, действительно, решетки $Alg_n\mathcal{A}$ дистрибутивны для дискриминаторных алгебр $\mathcal{A}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. B.I. Plotkin. Some Notions of Algebraic Geometry in Universal Algebra// Algebra Anal., 1997, v.9, №4, pp. 224 - 248.

2. B.I. Plotkin. Algebras with the same (algebraic) Geometry// Proceedings of the Steclov Institute of Mathematics, v. 242, 2003, pp. 165 - 196.

3. А.И. Мальцев. К общей теории алгебраических систем// Мат.сб. (Новая серия), т. 35(77), 1954, с. 3 - 20.

4. C. Bergman, J.Berman. Morita equivalence of almost-primal clones// J. Pure and Applied Algebra, v. 108, 1996, pp. 175 - 201.

5. R. McKenzie. An algebraic version of categorical equivalence for varieties and more general algebraic categories// Logic and Algebra. Marcel Dekker, New York, 1996, pp. 211 - 243.

6. А.Г. Пинус. Геометрические шкалы многообразий алгебр и квазитождества// в печати.

7. B. Plotkin. Unityped akgebras// in appear.

8. В.Н. Салий. Решетки //Общая алгебра. т. 2, Изд-во Наука, М., 1991, с. 192 - 292.

ГРУППА АВТОМОРФИЗМОВ КОЛЬЦА $ZSL_2(3)$

А.М. Попова, Е.В. Грачев

Кафедра алгебры и математической логики
Новосибирский государственный технический университет
проспект К. Маркса, 20 Новосибирск, Россия
e-mail: algebra@nstu.ru

В работе изучается строение группы автоморфизмов группового кольца $ZSL_2(3)$. Как и в предыдущих работах, мы используем теорию представлений (см. [1]). Мы рассматриваем клеточно-диагональное представление, "склеенное"из всех неприводимых, неэквивалентных представлений группы. Как известно, для группы $SL_2(3)$ таких представлений семь: три одномерных, три двумерных и одно трехмерное. Обозначим их, соответственно, $T_1, \cdots, T_7$. Тогда $D(Sl_2(3)) = diag(T_1, \cdots, T_7)$. Легко заметить, что $ZSL_2(3) \cong Z[D(SL_2(3))]$, где последнее означает целочисленную линейную оболочку матричной группы $D(SL_2(3))$.

Поскольку представления T_4, T_5, T_6 имеют одинаковые степени, то прежде всего нужно понять, является ли автоморфизмом кольца $Z[D(SL_2(3))]$ перестановка этих клеток. Чтобы ответить на этот вопрос заметим следующее.

Пусть G — произвольная конечная группа. Между различными клетками кольца $Z[D(G)]$ рассмотрим отображения

$$\mu_{ij} : \sum_{g\in G} \alpha_g T_i(g) \to \sum_{g\in G} \alpha_g T_j(g), \alpha_g \in Z.$$

Если μ_{ij} не является изоморфизмом, то i - я и j - я клетки расклеиваются, то есть существуют такие целые положительные числа m_i и m_j, что в $Z[D(G)]$ лежат кольца вида

$$O_i = \{diag(0, ..., 0, m_i Z[T_i(G)], 0, ..., 0)\}$$

$$O_j = \{diag(0, ..., 0, m_j Z[T_j(G)], 0, ..., 0)\}.$$

При этом $m_i = \frac{|G|}{n_i}$ является минимальным числом с таким свойством.

Если же μ_{ij} является изоморфизмом, то i - я и j - я клетки не расклеиваются. Таким образом, кольцо $Z[D(G)]$ можно составить из блоков, состоящих из не расклеювающихся клеток.

В нашем случае клетки T_5 и T_6 не расклеиваются, так как они изоморфны. Для этого достаточно рассмотреть представления порождающих группы $SL_2(3)$:

$$D(a) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&&& \\ & z &&&&&&&&&& \\ && \overline{z} &&&&&&&&& \\ &&& z & 0 &&&&&&& \\ &&& -1 & \overline{z} &&&&&&& \\ &&&&& 0 & 1 &&&&& \\ &&&&& -z & -\overline{z} &&&&& \\ &&&&&&& 0 & 1 &&& \\ &&&&&&& -\overline{z} & -z &&& \\ &&&&&&&&& 0 & 1 & 0 \\ &&&&&&&&& 0 & 0 & 1 \\ &&&&&&&&& 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D(b) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&&& \\ & \overline{z} &&&&&&&&&& \\ && z &&&&&&&&& \\ &&& 0 & -\overline{z} &&&&&&& \\ &&& z & -1 &&&&&&& \\ &&&&& \overline{z} & -z &&&&& \\ &&&&& 0 & 1 &&&&& \\ &&&&&&& z & -\overline{z} &&& \\ &&&&&&& 0 & 1 &&& \\ &&&&&&&&& -1 & -1 & -1 \\ &&&&&&&&& 0 & 1 & 0 \\ &&&&&&&&& 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь z — первообразный корень третьей степени из 1. Из этих представлений видим, что изоморфизм этих клеток задается автоморфизмом поля $Q(z) : z \to \overline{z}$. Таким образом клетки T_5 и T_6 образуют блок. А клетка T_4 не изоморфна клеткам T_5 и T_6, что проверяется простыми вычислениями, то есть клетка T_4 расклеивается с клетками T_5 и T_6. На поставленный выше вопрос отвечает

Лемма 1. *Перестановка расклеивающихся клеток не является автоморфизмом кольца $Z[D(G)]$.*

Доказательство. Пусть представления $T_i(G)$ и $T_j(G)$ имеют одинаковые степени $n_i = n_j$ и являются расклеивающимися. Рассмотрим кольцо $Z[D(G)]$, где $D(G) = diag(T_1, ..., T_i, T_j)$. Тогда при приведении базиса $Z[D(G)]$ к нижнетреугольному виду последние $2q$ элементов базиса имеют вид $diag(0, ..., 0, b_1, b_1'), ..., diag(0, ..., 0, b_q, b_q'), diag(0, ..., 0, c_1), ..., diag(0, ..., 0, c_q)$. Если бы перестановка клеток $T_i(G)$ и $T_j(G)$ была автоморфизмом кольца, то в нем лежали бы матрицы $diag(0, ..., c_i, 0), i = 1, ..., q$, и они линейно выражались бы через матрицы $diag(0, ..., 0, b_i, b_i')$, т.е. имело бы место равенство $(c_1, ..., c_q) = (b_1, ..., b_q) \cdot S$, откуда, $(b_1', ..., b_q') \cdot S = 0$. Т.к. S — невырожденная, то $b_1' = ... = b_s' = 0$, а тогда в $Z[D(G)]$ лежит подкольцо $diag(0, ..., 0, Z[T_i(G)], 0)$, что невозможно, т.к. расклеивающее число $m_i = \frac{|G|}{n_i} \neq 1$. Полученное противоречие и доказывает лемму. □

Из леммы 1 следует, что ограничения любого автоморфизма кольца $Z[D(G)]$ на блоки являются автоморфизмами блоков.

Из леммы 1 также следует, что клетка T_4 не переставляется с клетками T_5 и T_6. Рассмотрим вопрос о перестановке клеток T_5 и T_6 Для этого нам понадобится нижнетреугольный базис кольца $Z[D(SL_2(3))]$.

Для нахождения такого базиса $Z[D(SL_2(3))]$ "растянем" матрицы представления $D(SL_2(3))$ в столбцы, при этом элементам поля $Q(z)$ поставим в соответствие столбцы их координат в базисе $(1, z)$. Получим следующий базис.

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	−3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	−2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	−1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	−2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	−1	1	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	−2	1	−1	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	−1	1	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	−1	1	−2	0	−2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	2	−2	1	−2	0	−1	1	−3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	−1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	2	0	−1	−2	2	−3	1	−3	4	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	−2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	−1	1	−2	−2	1	1	−3	0	0	2	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	−1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	−3	1	1	0	0	−1	−1	3	0	0	0	0	−2	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	−2	2	−1	2	0	1	−2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	−2	2	−1	2	0	1	−1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	−2	0	1	2	−2	3	−2	3	−2	−6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	−2	0	1	2	−2	3	−1	3	−4	−6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	−1	2	2	−1	−2	3	0	0	−4	−6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	−1	1	−1	2	2	−1	−1	3	0	0	−2	−6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	−1	−1	0	0	1	2	−3	0	0	0	0	4	−6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	3	−1	−1	0	0	1	1	−3	0	0	0	0	2	−6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	−2	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	−1	0	0	−1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	−2	0	0	0	0	0	0	0
0	0	−4	1	0	4	1	−3	3	0	4	0	0	0	0	2	2	−8	0	0	0	0	0	0
0	−3	2	−2	2	0	0	−1	0	0	0	0	4	0	0	−2	0	0	4	0	0	0	0	0
1	0	−1	1	0	0	3	0	−3	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	−4	0	0	0	0
0	−1	−1	−3	2	−4	−3	1	−5	0	0	4	0	−4	4	2	−2	0	4	4	−8	0	0	0
0	0	3	−4	2	−4	−4	3	0	0	−4	0	0	4	4	−2	−4	0	4	4	0	8	0	0
0	−1	1	−3	−2	0	−1	−4	1	−4	0	4	0	4	0	0	−2	0	4	0	0	0	8	0
1	1	0	−1	0	0	−3	1	3	0	0	0	0	4	−4	2	−2	0	0	4	0	0	0	−8

Из вида нижнетреугольного базиса заключаем, что алгебра $Q(diag(T_5, T_6))$ изоморфна алгебре $(Q(z))_2$. Поэтому автоморфизмами этого блока служат автоморфизмы такой алгебры, которые описывает

Лемма 2. *Любой автоморфизм алгебры $A = (Q(\xi))_n$, где $Q(\xi)$ — алгебраическое расширение поля Q, является произведением автоморфизма поля $Q(\xi)$ на сопряжение матрицей из $GL_n(Q(\xi))$.*

Доказательство. Алгебра A является центральной простой алгеброй над своим центром (см. [4]). Следовательно, автоморфизмы A, как алгебры над центром — внутренние по теореме Нётер-Сколема. Любой автоморфизм A на центре превращается в автоморфизм центра, т.е. поля $Q(\xi)$. Пусть $\varphi \in AutA$, $a_i \in (Q(\xi))_n, \alpha_i \in Q(\xi), e$ — единичная матрица степени n. Тогда

$$\varphi(\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_t a_t) = \varphi(\alpha_1 e)\varphi(a_1) + ... + \varphi(\alpha_t e)\varphi(a_t).$$

Понятно, что $\varphi(\alpha_1 e) = \tau(\alpha_i)e$, где $\tau \in AutQ(\xi)$. Тогда $\tau^{-1}\varphi(\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_t a_t) = \alpha_1\tau^{-1}\varphi(a_1) + ... + \alpha_t\tau^{-1}\varphi(a_t)$ т.е. $\tau^{-1}\varphi$ является автоморфизмом алгебры A над ее центром, т.е. сопряжением матрицей $s \in GL_n(Q(\xi))$. Получили $\tau^{-1}\varphi = \varphi_s$ и $\varphi = \tau \cdot \varphi_s$, т.е. любой автоморфизм алгебры A представляется как произведение автоморфизма поля на сопряжение матрицей. $\square$

Перестановка клеток T_5 и T_6 как раз и соответствует автоморфизму поля $Q(z)$. Прямыми вычислениями проверяется, что такой автоморфизм в композиции с сопряжением матрицей

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&&&& \\
& 1 &&&&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&&&& \\
&&& 1 & z &&&&&&&& \\
&&& 0 & -\overline{z} &&&&&&&& \\
&&&&& z & 0 &&&&&& \\
&&&&& 1 & -\overline{z} &&&&&& \\
&&&&&&& \overline{z} & 0 &&&& \\
&&&&&&& 1 & -z &&&& \\
&&&&&&&&& 1 & 0 & 0 \\
&&&&&&&&& -1 & -1 & -1 \\
&&&&&&&&& 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

задает автоморфизм кольца $Z[D(Sl_2(3))]$.

Что касается последней клетки T_7, то аналогично [2], по теореме Нётер-Сколема в этой клетке все автоморфизмы задаются только сопряжениями матрицами из $GL_3(Q)$. На самом деле можно ограничиться только матрицами из $GL_3(Z)$.

Лемма 3. *Пусть $s \in M_n(Z)$, $|s| \neq 0$, $0 \neq m \in N$ и компоненты матрицы s взаимно просты. Если $(me_{ij})^s \in M_n(Z)$ для любых $i, j = 1, \cdots, n$, то $|s| = \pm 1$.*

Доказательство. Обозначим $s = (s_{ij})$, $s^* = (S_{ji})$, $\triangle = |s|$. Тогда $e_{ij}^s =$
$$se_{ij}s^* \cdot \frac{1}{\triangle} = \frac{1}{\triangle} \begin{pmatrix} s_{1j}S_{1i} & s_{1j}S_{2i} & \cdots & s_{1j}S_{ni} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ s_{nj}S_{1i} & s_{nj}S_{2i} & \cdots & s_{nj}S_{ni} \end{pmatrix} \in M_n(Z)$$

Отсюда следует, что $s_{pj}S_{qi} \vdots \triangle$ $\forall p, q = 1, \cdots, n$. Таким образом $\forall p, q, i, j = 1, \cdots, n$ $[s_{pj}S_{qi} \vdots \triangle]$.

Если $(me_{ij})^s \in M_n(Z)$, то, как следует из предыдущих, рассуждений $m \vdots |s|$. Однако в таком случае $m \vdots |s|^k$ при любом $k \in N$. Отсюда и следует утверждение леммы. $\square$

Из леммы 2 следует, что для поиска автоморфизмов клетки T_7 можно ограничиться такими матрицами $v \in GL_3(Z)$, для которых имеют решения (аналогично [2]) системы сравнений
$$vb_i \equiv \sum_{j=16}^{24} x_j b_j v \ (mod\ 8),\ i = 16, \cdots, 24$$

где $8 = \frac{24}{3}$ — расклеивающее число для T_7, а $b_{16}, \cdots, b_{24}$ — матрицы нижнетреугольного базиса кольца $Z[D(SL_2(3))]$.

Теперь понятно, что из лемм 2 и 3 следует, что автоморфизмами блока $diag(T_5, T_6)$ служат композиции сопряжений матрицами из $GL_2(z)$ с автоморфизмами поля $Q(z)$. Поскольку для этого блока расклеивающее число равно $12 = \frac{24}{2}$, то сопрягающими матрицами служат такие матрицы из $GL_2(z)$, для которых имеют решения системы сравнений
$$yb_i \equiv \sum_{j=8}^{15} x_j b_j y \ (mod\ 12),\ i = 8, \cdots, 15.$$

Наконец, для клетки T_4 и трех одномерных клеток показано в [1],что единицами здесь являются только элементы $\pm g$, где $g \in SL_2(3)$. А так как автоморфизмы кольца группу единиц переводят в группу единиц, то автоморфизмами четырех верхних клеток служат только автоморфизмы группы $SL_2(3)$. Реализация алгоритма для нахождения группы автоморфизмов конечной группы позволила найти эту группу. Ее порядок равен 24, и она изоморфна группе $C_2 \times A_4$.

Для описания строения группы $G = Aut(ZSl_2(3))$ рассмотрим следующий инвариантный ряд этой группы. Введем обозначения для инвариантных подгрупп этой группы. Автоморфизмы кольца $Z[D(Sl_2(3))]$, задаваемые сопряжениями матрицами y из соответствующей $GL_n(z)$ будем обозначать φ_y. Обозначим

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \varphi_y & & & \\ & & & & \varphi_z & & \\ & & & & & \overline{\varphi_z} & \\ & & & & & & \varphi_v \end{pmatrix} \right\}, \text{ где } y, z \in GL_2(z),\ v \in GL_3(Z),$$

$\overline{\varphi_z}$– означает сопряжение матрицей z и взятие комплексно-сопряженного.

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \varphi_z & & \\ & & & & & \overline{\varphi_z} & \\ & & & & & & \varphi_v \end{pmatrix} \right\}, B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \varphi_v \end{pmatrix} \right\}$$

Составим инвариантный ряд $G \triangleright B \triangleright B_1 \triangleright B_2$ и будем изучать строение факторов этого ряда.

Обозначим через $U(diag(T_5, T_6))$ – группу единиц кольца $Z[diag(T_5, T_6)]$, $V(diag(T_5, T_6))$ – группу нормализованных единиц кольца. Аналогично определим $U(T_4), V(T_4), U(T_7), V(T_7)$.

Рассмотрим строение группы B_2. Непосредственными вычислениями нашли, что $B_2/U(T_7) \cong C_4 \times C_2^2$.

Рассмотрим строение фактора B_1/B_2. Непосредственными вычислениями нашли, что $(B_1/B_2)/U(diag(T_5, T_6)) \cong C_3$.

Рассмотрим строение фактора B/B_1. Выше было замечено, что $B/B_1 \cong A_4$.

Фактор G/B изоморфен группе, порожденной автоморфизмом φ_0, то есть изоморфен группе C_2.

Из этих результатов следует

Теорема 4. $Out(ZSL_2(3)) \cong C_2 \times (C_3 \leftthreetimes (C_4 \times C_2^2))$.

Теперь рассмотрим строение группы $Int(ZSL_2(3))$ – внутренних автоморфизмов нашего кольца. Для нормальных подгрупп этой группы введем обозначение

$$B_1' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \varphi_z & & \\ & & & & & \overline{\varphi_z} & \\ & & & & & & \varphi_v \end{pmatrix} \right\}, B_2' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \varphi_v \end{pmatrix} \right\},$$

где $z \in V(ZT_5)$, $v \in V(ZT_7)$

Составим инвариантный ряд $Int(ZSL_2(3)) \rhd B_1' \rhd B_2'$.

Группа B_2' изоморфна группе $V(T_7)$. В работе [1] показано, что $V(T_7)/Ker\varphi_8 \cong C_4^2 \times C_2^2$.

Фактор B_1'/B_2' изоморфен группе $V(diag(T_5, T_6))$. Там же показано, что $V(diag(T_5, T_6))/Ker\varphi_{12} \cong (C_6 \times C_2 \times C_3^2) \cdot C_2^6$.

Наконец $Int(ZSL_2(3))/B_1' \cong A_4$.

Из этих результатов следует

Теорема 5. $Int(ZSL_2(3)) \cong A_4 \leftthreetimes ((C_6 \times C_2 \times C_3^2) \cdot C_2^6 \leftthreetimes (C_4^2 \times C_2^2)) \leftthreetimes (Ker\varphi_{12} \times Ker\varphi_8)$.

В заключении заметим, что для группы $SL_2(3)$ справедлива следующая гипотеза Цассенхауза.

Пусть G — конечная группа, ZG — целочисленное групповое кольцо, $h = \Sigma\alpha_g g \in ZG, \varepsilon(h) = \Sigma\alpha_g$.

Определение. Автоморфизм $\theta \in AutZG$ называется нормализованным, если $\forall h \in ZG[\varepsilon(h) = \varepsilon(\theta(h))]$ (или, что эквивалентно, если $\varepsilon(\theta(g)) = 1\ \forall g \in G$).

Гипотеза Цассенхауза

(**Aut**). Пусть $\theta \in AutZG$ — нормализованный. Тогда существует единица $\alpha \in QG$ и автоморфизм $\sigma \in AutG$ такие, что

$$\theta(g) = \alpha^{-1}\sigma(g)\alpha, \forall g \in G.$$

В [3] была доказана справедливость гипотезы Цассенхауза для групп, все неприводимые характеры которых над полем C имеют индекс Шура равный 1. Характер клетки T_4 имеет индекс Шура равный 2. Но тем не менее гипотеза Цассенхауза справедлива.

Это следует из того, что автоморфизм поля $Q(z)$ $z :\to \overline{z}$ реализуется автоморфизмом группы $SL_2(3)$: $\sigma(a) = b, \sigma(b) = a$ и сопряжением соответствующей матрицей φ_0.

Литература

1. A.M. Popova, S.V. Zhurkov. Group of units of the integer group ring of the group $SL_2(3)$. //Algebra and Model Theory 5. Novosibirsk, 2005, P. 170-181.

2. А.М. Попова. Группы автоморфизмов кольца ZA_4. // Фундаментальная и прикладная математика, 2008, Т. 14, №5, с. 185-189.

3. А.М. Попова. Об одной гипотезе Цассенхауза. // Тезисы докладов, Мальцевские чтения, 2009, с. 75. http://math.nsc.ru/conference/malmeet/09/Abstracts/abstracts-09.pdf

4. Р. Пирс. Ассоциативные алгебры. М., 1986, с. 541.

БАЗИС ГРЕБНЕРА — ШИРШОВА АЛГЕБРЫ ОНСАГЕРА

Е.Н. Порошенко

Новосибирский Государственный Технический Университет,
Россия, 630092, Новосибирск, пр. Маркса 20
e-mail: algebra@nstu.ru

Определение 1. [3, 2] *Алгебра Онсагера* — это алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$ характеристики 0, базисом которой являются элементы A_m,G_l, где $m \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, а умножение, определено следующим образом:

$$\begin{array}{rcll} A_lA_m & = & 2G_{l-m} & l > m, \\ G_lA_m & = & A_{m+l} - A_{m-l}, & \\ G_lG_m & = & 0. & \end{array}$$

Эту алгебру обозначим через O. В [4] было показано, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Алгебра O изоморфна алгебре Ли над полем $\mathbb{K}$ с порождающими A, B и определяющими соотношениями*

$$\begin{array}{rcl} A(A(AB)) & = & 4AB; \\ B(B(BA)) & = & 4BA. \end{array}$$

Изоморфизм определяется следующим образом:

$$A \to A_0; \qquad B \to A_1.$$

Таким образом, алгебра Онсагера — это двупорожденная алгебра Ли с двумя определяющими соотношениями.

Упорядочим слова алфавита $\{A, B\}$, положив $A < B$ и распространив этот порядок на множество всех ассоциативных слов, считая, что из двух слов разной длины больше то, у которого больше длина, а если длины слов равны, то упорядочиваем слова лексикографически. Полученный порядок носит название deg-lex порядка. Наконец, следуя [1], определим правильные неассоциативные слова от букв A и B.

Для нахождения базиса Гребнера — Ширшова будет использоваться метод, описанный в [5]. Для этого сначала найдем линейный базис алгебры Онсагера, состоящий из правильных слов.

Так как в правильных неассоциативных словах расстановка скобок определяется однозначно, здесь и далее мы будем опускать некоторые скобки для улучшения визуального восприятия. Кроме того, введем обозначения:

$$\begin{aligned} [u]\circ[v]^n &= (\dots(([u]\underbrace{[v])[v])\dots[v])}_{n \text{ раз}}; \\ [u]^n\circ[v] &= (\underbrace{[u]\dots([u]([u]}_{n \text{ раз}}[v]))\dots), \end{aligned}$$

где $[u]$ и $[v]$ — правильные неассоциативные слова.

Теорема 3. *Линейный базис алгебры O состоит из следующих слов*

1. A;
2. BA;
3. $B\circ(BA)^n$, $n\geqslant 0$;
4. $(BA)^n\circ(BAA)$, $n\geqslant 0$;
5. $B((BA)^n\circ(BAA))$, $n\geqslant 0$.

Выражая попарные произведения элементов линейного базиса алгебры O в виде линейных комбинаций элементов этого базиса, найдем базис Гребнера — Ширшова алгебры.

Теорема 4. *Базис Гребнера — Ширшова алгебры O образуют следующие соотношения:*

1. $BAAA=4BA$;
2. $BBBA=4BA$;
3. $\big(B((BA)^n\circ(BAA))\big)\big(BA\big)=0$, $n\geqslant 0$;
4. $\big(B((BA)^n\circ(BAA))\big)\big(B((BA)^m\circ(BAA))\big)=0$, $n>m\geqslant 0$;
5. $(B\circ(BA)^n)(B\circ(BA)^{n+1})=4(-1)^nB((BA)^{2n-1}\circ(BAA))$, $n\geqslant 1$;
6. $((BA)^{n+1}\circ(BAA))((BA)^n\circ(BAA))=4(-1)^{n+1}B((BA)^{2n+1}\circ(BAA))$, $n\geqslant 0$;
7. $(B\circ(BA)^n)(B((BA)^{2m}\circ(BAA)))=B\circ(BA)^{n+2m+2}+4(-1)^n(BA)^{n+2m}\circ(BAA)$, $n>2m\geqslant 0$, $m\geqslant 0$;
8. $\big(B\circ(BA)^n\big)\big(B((BA)^{2m+1}\circ(BAA))\big)=B\circ(BA)^{n+2m+3}$, $n>2m+1\geqslant 0$.

Список литературы

[1] А. И. Ширшов, Подалгебры свободных лиевых алгебр, Мат. сб., 33(75), 2, 1953, 441-452.

[2] B. Hartwig, P. Terwilliger, The tetrahedron algebra, The Onsager algebra, and the $\mathfrak{sl}_2$ loop algebra, Preprint, `arXiv:math-ph/0511004v1`.

[3] L. Onsager, Crystal statistics I, A two-dimensional model with an order-disorder transition, Phys. Rev. (2) 65, 1944, 117–149.

[4] J. H. H. Perk, Star-triangle relations, quantum Lax pairs, and higher genus curves, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 49, 341–354, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[5] E. Poroshenko, Gröbner–Shirshov bases for the Kac–Moody algebras of the type $\mathrm{A}_n^{(1)}$, Comm. in Algebra, 30(6), 2002, 2617–2637.

(P, a)-СТАБИЛЬНЫЕ И (P, a)-НЕСТАБИЛЬНЫЕ ГРУППЫ

М.А. Русалеев*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Ак. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: rusma@ngs.ru

1 Введение

Стабильные теории были введены С.Шелахом [1] для построения теории классификации и являются обобщением понятия тотально трансцендентной теории, введенного М. Морли [2]. С. Шелах доказал (см.[3]), что стабильность теории равносильна определимости любого полного типа. Это свойство играет фундаментальную роль в исследовании стабильных теорий. В статье [4] Е.А.Палютин ввел понятие E^*-стабильности и доказал определимость типов для E^*-стабильных теорий. Следствием этого результата кроме определимости типов для стабильных теорий, доказанной Шелахом, является также определимость типов над любыми P-множествами в P-стабильных теориях, которая была ранее установлена Т.Нурмагамбетовым и Б.Пуаза [5] для типов над P-моделями. Понятие E^*-стабильности представляет собой новую шкалу стабильности, основным параметром которой является некоторое отображение типов полной теории в типы другой теории.

В [6] Русалеевым был исследован случай $(P, 1)$-стабильности, одного из простейших частных случаев E^*-стабильности. Для класса $(P, 1)$-стабильный теорий была дана полная характеризация, как класса теорий, каждая из которых определимо интерпретируется в некоторой теории языка, состоящего только из одноместных предикатов. В этой работе исследуется другой частный случай — (P, A)-стабильность, и делается попытка доказать некий аналог результата для $(P, 1)$-стабильных теорий.

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 09-01-00336-а.

2 Определения

Для наших целей более удобно заранее не ограничиваться мощностью множества (предметных) переменных. Будем считать, что в формулах все связанные переменные берутся из фиксированного счетного множества $U = \{u_i | i \in \omega\}$, свободные переменные не принадлежат этому множеству и, когда не говорится противное, будем считать, что переменные не входят в множество U. Выводимость рассматривается в исчислении предикатов с указанными условиями разделения связанных и свободных переменных.

Зафиксируем некоторое счетное множество переменных $V = \{v_i | i \in \omega\}$. Через $S_n(T)$ обозначается множество $S_{\mathbf{v}}(T)$, где $\mathbf{v} = \langle v_0, \ldots, v_{n-1} \rangle$. Пусть $S_\omega(T) = \bigcup\{S_{\mathbf{v}}(T) | \mathbf{v} \in V\}$. Множество формул языка L от переменных из кортежа $\mathbf{v} = \langle v_0, \ldots, v_{n-1} \rangle$ обозначим $F_n(L)$.

Определение 1. *Пусть даны языки L, L^* и полная теория T языка L. Отображение $E : S_\omega(T) \to S_\omega^{\subseteq}(L^*)$ называется* представлением типов теории T в языке L^*, *если выполнены следующие условия:*

(1) абстрактность *(если w - перестановка множества переменных V, то $E(w(t)) = w(E(t))$ для любого $t \in S_\omega(T)$);*

(2) сохранение равенства *(если $t \in S_\omega(T)$, $x, y \in V$ и $x = y \in t$, то $x = y \in E(t)$);*

(3) консервативность *(если $t \in S_n(T)$ и $t \subseteq t' \in S_\omega(T)$, то $E(t) = (E(t') \cap F_n(L^*))$);*

(4) непрерывность *(если $t \in S_\omega(T)$ и $\varphi \in E(t)$, то существует формула $\Phi \in t$ такая, что $\varphi \in E(t')$ для любого $t' \in S_\omega(T)$ с условием $\Phi \in t'$);*

В дальнейшем представление типов теории T в языке L^* будем обозначать E^*.

Определение 2. *Расширим отображение E^* на типы от любого множества переменных следующим образом.*

(a) Если $\mathbf{x}$ - произвольный кортеж переменных длины n и $t \in S_{\mathbf{x}}(T)$, то полагаем $E^*(t) = (E^*((t)^{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}})^{\mathbf{v}}_{\mathbf{x}}$, где $\mathbf{v} = \langle v_0, \ldots, v_{n-1} \rangle$.

(b) Если X — произвольное множество переменных и $t \in S_X(T)$, то полагаем $E^*(t) = \bigcup\{E^*(t \upharpoonright \mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\}$

Корректность последнего определения (т.е. что это отображение удовлетворяет абстрактности, консервативности, непрерывности, сохраняет равенство, а образ типа $t \in S_X(T)$ при таком отображении является типом из $S_X^{\subseteq}(L^*)$) показана в [4].

Определение 3. *Пусть E^* — представление типов полной теории T. Теория T называется E^*-*стабильной в мощности λ *, если для каждого множества переменных X с условием $|X| \leq \lambda$ и каждого $t \in S_X(T)$ тип $E^*(t)$ имеет не более λ пополнений из множества $S_X(L^*)$. Теория T называется E^*-стабильной, если она E^*-стабильна в некоторой бесконечной мощности λ.*

Определение 4. *Пусть L — некоторый язык, X — множество переменных, $t \in S_X^{\subseteq}(L)$. Пусть $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ — некоторые множества кортежей переменных из X длины n. Будем говорить, что пара $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$* отделима *в типе t над X, если существует формула $\Phi(\mathbf{z}; \mathbf{x}^0)$ языка L такая, что $l(\mathbf{z}) = n$, $\mathbf{x}^0 \in X$ и множество формул*

$$\{\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) | \mathbf{x} \in \mathbf{X}\} \cup \{\neg\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) | \mathbf{x} \in \mathbf{Y}\}$$

совместно с типом t. При этом формула $\Phi(\mathbf{z}; \mathbf{x}^0)$ отделяет $\mathbf{X}$ *от* $\mathbf{Y}$ *в $t(X)$.*

Мы будем использовать следующую теорему из статьи [4].

Теорема 5. *Пусть T — полная теория языка L, и E^* — представление типов теории T в языке L^*. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) теория T является E^*-стабильной;

(2) для любых множества переменных X и полного типа $t \in S_X(T)$, каждая пара $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$ множеств кортежей переменных из X одинаковой длины, отделимая в типе $E^*(t)$ над X, является отделимой в t над X.

Пусть задан язык L. Тогда расширение языка L с помощью одноместного предиката будем обозначать $L^P = L \cup \{P(x)\}$.

Для полной теории T языка L зададим представление типов в языке L^P. $E^{(P,a)}(t(X))$ — замыкание относительно выводимости множества формул $t \cup \{P(x) | x \in X\}$ с множеством формул, не зависящих от выбора типа t, выражающих, что для любой модели $\mathfrak{A}$ языка L^P множество $P(\mathfrak{A})$ является алгебраически замкнутым подмножеством.

Определение 6. *Теория T называется (P,a)-стабильной, если она $E^{(P,a)}$-стабильна.*

3 Примеры (P,a)-стабильных и (P,a)-нестабильных абелевых групп

Введем обозначения:

$L = \{+, 0, 1\}$ — язык, содержащий двухместный функциональный символ сложения и два символа констант;

$L^P = L \cup \{P(x)\}$ получен из L добавлением одноместного предиката P;

$L_c = L \cup \{c_\alpha | \alpha < 2^\omega\}$ получен из L добавлением континуального множества констант;

$L_c^P = L^P \cup L_c$ получен объединением языков L_c и L^P.

Пример 1. *Теория* $T = \mathrm{Th}(\langle \mathbb{Q}, + \rangle)$ *аддитивной группы рациональных чисел* (P, a)*-стабильна.*

Достаточно показать, что если T_1 — полная теория языка L_c, такая, что $T \subseteq T_1$, то T_1^P имеет не более 2^ω пополнений, где $T_1^P = T_1 \cup \{P$ алгебраически замкнут в языке $L_c\}$.

Пусть $T^P = T \cup \{P$ алгебраически замкнут в языке $L\}$.

Очевидно, что T^P имеет не более 2^ω пополнений, поскольку $|L^P| < \omega$ и существует не более 2^ω различных полных теорий языка L^P.

Покажем, что если T_2 — полная теория языка L^P, такая, что $T^P \subseteq T_2$, то $T_3 = T_1^P \cup T_2$ — полная теория. То есть число пополнений T_1^P совпадает с числом пополнений T^P.

Предположим противное. Пусть T_3 не полна. Тогда существует предложение φ языка L_c^P, такое, что $T_3 \cup \{\varphi\}$ совместно, и $T_3 \cup \{\neg\varphi\}$ совместно.

Возможны два случая:

1) $\forall x P(x) \in T_2$

2) $\exists x \neg P(x) \in T_2$.

Случай 1. В этом случае все вхождения подформул вида $P(t)$, где t — терм, заменим на $t = t$. И так как $\varphi_1 \in L_c$, то либо $\varphi_1 \in T_1$ либо $\neg\varphi_1 \in T_1$. Противоречие.

Случай 2. Покажем, что в этом случае имеет место илиминация кванторов. Пусть дана формула ψ языка L_c^P. Покажем, что она эквивалентна относительно T_3 бескванторной формуле ψ'.

Индукция по числу кванторов. Можно считать, что ψ имеет вид

$$\exists x (\bigwedge_{i<n} (t_i^0(x, \mathbf{y}) = t_i(x, \mathbf{y}))) \wedge (\bigwedge_{j<m} \neg(t_{n+j}^0(x, \mathbf{y}) = t_{n+j}(x, \mathbf{y}))) \wedge$$

$$\wedge (\bigwedge_{k<l_1} P(t_{n+m+k}(x, \mathbf{y}))) \wedge (\bigwedge_{k<l_2} \neg P(t_{n+m+l_1+k}(x, \mathbf{y}))).$$

По коммутативности и ассоциативности сложения и существования обратного элемента можно считать, что все равенства в ψ имеют вид

$\underbrace{x+\ldots+x}_{n_i\ \text{раз}}=t_i(\mathbf{y})$, $i<n$, а атомарные подформулы с предикатами имеют вид $P(t_s(\mathbf{y})+\underbrace{x+\ldots+x}_{n_s\ \text{раз}})$, $n\leqslant s<n+m+l$. То есть формула ψ имеет вид

$$\exists x(\bigwedge_{i<n}(\underbrace{x+\ldots+x}_{n_i\ \text{раз}}=t_i(\mathbf{y})))\wedge$$

$$\wedge(\bigwedge_{j<m}\neg(\underbrace{x+\ldots+x}_{n_{n+j}\ \text{раз}}=t_{n+j}(\mathbf{y})))\wedge$$

$$\wedge(\bigwedge_{k<l_1}P(t_{n+m+k}(\mathbf{y})+\underbrace{x+\ldots+x}_{n_{n+m+k}\ \text{раз}})))\wedge(\bigwedge_{k<l_2}\neg P(t_{n+m+l_1+k}(\mathbf{y})+\underbrace{x+\ldots+x}_{n_{n+m+l_1+k}\ \text{раз}}))).$$

Пусть d — наименьшее общее кратное $\{n_0,\ldots,n_{n+m+l_1+l_2}\}$. Тогда формула ψ эквивалентна ψ_1, имеющей следующий вид:

$$\exists x(\bigwedge_{i<n}(\underbrace{x+\ldots+x}_{d\ \text{раз}}=\underbrace{t_i(\mathbf{y})+\ldots+t_i(\mathbf{y})}_{\frac{d}{n_i}\ \text{раз}}))\wedge$$

$$\wedge(\bigwedge_{j<m}\neg(\underbrace{x+\ldots+x}_{d\ \text{раз}}=\underbrace{t_{n+j}(\mathbf{y})+\ldots+t_{n+j}(\mathbf{y})}_{\frac{d}{n_{n+j}}\ \text{раз}}))\wedge$$

$$\wedge(\bigwedge_{k<l_1}P(\underbrace{t_{n+m+k}(\mathbf{y})+\ldots+t_{n+m+k}(\mathbf{y})}_{\frac{d}{n_{n+m+k}}\ \text{раз}}))+\underbrace{x+\ldots+x}_{d\ \text{раз}})))\wedge$$

$$\wedge(\bigwedge_{k<l_2}\neg P(\underbrace{t_{n+m+l_1+k}(\mathbf{y})+\ldots+t_{n+m+l_1+k}(\mathbf{y})}_{\frac{d}{n_{n+m+l_1+k}}\ \text{раз}}))+\underbrace{x+\ldots+x}_{d\ \text{раз}}))).$$

Далее заменим $\underbrace{x+\ldots+x}_{d\ \text{раз}}$ на z, а $\underbrace{t_s(\mathbf{y})+\ldots+t_s(\mathbf{y})}_{\frac{d}{n_s}\ \text{раз}}$ на $t'_s(\mathbf{y})$, $s<n+m+l_1+l_2$. Получим формулу ψ_2, эквивалентную ψ и имеющую вид

$$\exists z(\bigwedge_{i<n}(z=t'_i(\mathbf{y})))\wedge(\bigwedge_{j<m}\neg(z=t'_{n+j}(\mathbf{y})))\wedge$$

$$\wedge(\bigwedge_{k<l_1}P(t'_{n+m+k}(\mathbf{y})+z))\wedge(\bigwedge_{k<l+2}\neg P(t'_{n+m+l_1+k}(\mathbf{y})+z))$$

Если $n>0$, то подставим вместо z $t'_0(\mathbf{y})$, получим эквивалентную формулу без квантора.

Если $n = 0$, то если $l_1 > 0$, то заменим $t'_m(\mathbf{y}) + z$ на z', получим эквивалентную формулу такого же вида, но одним из её конъюнктивных членов будет $P(z)$. Так как в T^P выводится $(P(x) \wedge P(y)) \rightarrow P(x, y)$ и $(P(x) \wedge \neg P(y)) \rightarrow \neg P(x + y)$, то можно все конъюнктивные члены вида $P(t + z')$ заменить на $P(t)$, а $\neg P(t + z')$ на $\neg P(t)$. После этого исключить z и убрать квантор.

Если $n = l_1 = 0$, то формула тождественно истинная в T_3 (в силу бесконечности множества решений $\neg P(x)$, которая следует из алгебраической замкнутости P).

Итак, в силу элиминации кванторов, предложение φ эквивалентно бескванторному предложению φ', в котором все термы t состоят только из констант (не содержат переменных). А значит $T_1^P \vdash P(t)$. Поэтому все подформулы в φ' вида $P(t)$ можно заменить на $t = t$. Полученное предложение φ'' будет эквивалентно φ и не будет содержать предиката P. А значит (в силу полноты T_1) либо $\varphi'' \in T_1$ либо $\neg\varphi'' \in T_1$. Противоречие с выбором φ и условием $T_1 \subseteq T_3$. $\square$

Пример 2. *Пусть* $G = \bigoplus_{i \in \omega} G_i$, *где* $G_i \simeq \mathbb{Z}_4$ *— циклической группе порядка 4, для* $i \in \omega$. *Теория* $T = \mathrm{Th}(G)$ *не* (P, a) *стабильна.*

Действительно, возьмём в качестве $t(X)$ тип, реализуемый множеством всех элементов порядка 2. Поскольку каждый из этих элементов имеет бесконечное число делителей на 2, то элементы порядка 4 не попадают в алгебраическое замыкание множества элементов порядка 2. Более того, любые два множества элементов порядка 4 алгебраически независимы над множеством элементов порядка 2.

В силу вышесказанного, формула $\exists y P(y) \wedge (y + y = x)$ отделяет любые два подмножества множества X над типом t, и по теореме 5 теория T не является (P, a) стабильной.

Список литературы

[1] *S.Shelah,* Stable theories, Israel J. Math. 7 (1969) 187-202.

[2] *M.D.Morley,* Categoricity in power, Trans. A.M.S., 114 (1965) 514-538.

[3] *S.Shelah,* Classification theory and the number of non-isomorphic models, Amsterdam: North-Holland, 1978.

[4] *Е. А. Палютин,* "E^*-стабильные теории", Алгебра и логика, т.42, N 2(2003), с. 194-210.

[5] *Т. Нурмагамбетов, Б.Пуаза,* О числе элементарных пар над множествами, Труды Французско-казахстанского коллоквиума по теории моделей, Алматы, 1995, с. 73-82.

[6] *М.А.Русалеев,* "Характеризация $(p,1)$-стабильных теорий", Алгебра и логика, 46, №3(2007),436-459.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СРАВНЕНИЯ БЕРНСАЙДОВЫХ ГРУПП $B(2,5)$ И $B_0(2,5)$

А.А. Кузнецов **А.К.Шлёпкин***

Красноярский государственный аграрный университет,
пр. Мира 90, Красноярск, 660049, Россия
e-mail: alex_kuznetsov80@mail.ru e-mail: ak_kgau@mail.ru

Введение

На основе проделанных вычислений по алгоритму из [1, 2] в работе [3] был проведен сравнительный анализ бернсайдовых групп $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$. Было показано, что указанные группы поэлементно совпадают до слов длины 27, включительно (речь идет о мининимально возможной длине слова, представляющего данный элемент группы, относительно заданного отношения порядка). Также были вычислены коммутаторы специального вида, которые являются критериями конечности группы $B(2,5)$.

В настоящей работе вычисления продолжены до слов длины 30, а также предложен дополнительный параметр сравнения данных групп по элементам подгрупп индекса 5^{10}.

1 Группа $B_0(2,5)$

Для группы $B_0(2,5)$ был вычислен объект $K_0^{(30)}(2,5)$ в терминах работы [1]. Количество соотношений $C_0^{(30)}(2,5)$, а также количество слов на каждой длине в $P_0^{(30)}(2,5)$ приведены в табл. 1,2.

†Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента России (код проекта МК-2494.2008.1), а также при поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (код проекта 2.1.1/3023).

Таблица 1: Кол-во соотношений в $C_0^{(30)}(2,5)$.

Длина	Кол-во	Длина	Кол-во	Длина	Кол-во	Длина	Кол-во
0	0	8	2	16	10	24	372
1	0	9	0	17	22	25	569
2	0	10	2	18	29	26	973
3	0	11	4	19	67	27	1353
4	0	12	7	20	93	28	2088
5	0	13	5	21	115	29	2922
6	0	14	8	22	136	30	4336
7	0	15	4	23	224	31	?
$\lvert C_0^{(30)}(2,5)\rvert = 13341$							

Таблица 2: Кол-во слов в $P_0^{(30)}(2,5)$.

Длина	Кол-во слов	Длина	Кол-во слов	Длина	Кол-во слов	Длина	Кол-во слов
0	1	8	214	16	37290	24	6364536
1	2	9	410	17	70914	25	12097646
2	4	10	784	18	134856	26	22994736
3	8	11	1495	19	256394	27	43706981
4	16	12	2847	20	487422	28	83074644
5	30	13	5417	21	926592	29	157900622
6	58	14	10303	22	1761409	30	300121658
7	112	15	19604	23	3348267	31	?
$\lvert P_0^{(30)}(2,5)\rvert = 633325272 \sim 5^{12}$							

2 Группа $B(2,5)$

Для группы $B(2,5)$ был вычислен объект $K^{(30)}(2,5)$. Количество соотношений $C^{(30)}(2,5)$, а также количество слов на каждой длине в $P^{(30)}(2,5)$ приведены в табл. 3,4.

Таблица 3: Кол-во соотношений в $C^{(30)}(2,5)$.

Длина	Кол-во	Длина	Кол-во	Длина	Кол-во	Длина	Кол-во
0	0	8	2	16	10	24	372
1	0	9	0	17	22	25	569
2	0	10	2	18	29	26	973
3	0	11	4	19	67	27	1353
4	0	12	7	20	93	28	2088
5	0	13	5	21	115	29	2922
6	0	14	8	22	136	30	4334
7	0	15	4	23	224	31	?
$\lvert C^{(30)}(2,5)\rvert = 13339$							

Таблица 4: Кол-во слов в $P^{(30)}(2,5)$.

Длина	Кол-во слов	Длина	Кол-во слов	Длина	Кол-во слов	Длина	Кол-во слов
0	1	8	214	16	37290	24	6364536
1	2	9	410	17	70914	25	12097646
2	4	10	784	18	134856	26	22994736
3	8	11	1495	19	256394	27	43706981
4	16	12	2847	20	487422	28	83074644
5	30	13	5417	21	926592	29	157900622
6	58	14	10303	22	1761409	30	300121660
7	112	15	19604	23	3348267	31	?
$\lvert P^{(30)}(2,5)\rvert = 633325274 \sim 5^{12}$							

3 Методы сравнения $B_0(2,5)$ и $B(2,5)$

3.1 Сравнение элементов и соотношений

В результате проверки (табл. 1–4) было получено взаимно однозначное соответствие элементов и соотношений в группах $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$, представимых множеством упорядоченных слов, длины которых ≤ 29. Другими словами, группы $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$ совпадают на элементах, представимых в виде слов, не превосходящих по длине 29 в терминах [1, 2]. Однако, длина 30 (табл. 1–4) явилась своеобразной „точкой расхождения“ групп $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$ при поэлементном сравнении данных групп на фиксированной длине. Ниже приведены два имеющиеся в группе $B_0(2,5)$ соотношения, доказать справедливость которых в $B(2,5)$ по алгоритму из [1, 2], при применении соотношений, левая и правая части которых ≤ 30, невозможно.

$$122121121221121212211212212112 = 212121122112212121122112212121,$$

$$121212211221121212211221121212 = 211212212112212121122121121221.$$

Интересно отметить, что второе соотношение получается из первого под действием следующего автоморфизма порядка 2 группы $B(2,5)$ $\phi: \ 1 \to 2, \ 2 \to 1$, т.е. из справедливости первого соотношения будет следовать справедливость второго, и наоборот.

3.2 Сравнение по ступени нильпотентности

Для группы $B(2,5)$ определим коммутаторы специального вида. Пусть

$$K_N^{(1)} = [1,2] = 1^{-1}2^{-1}12 = 1111222212,$$
$$K_N^{(m)} = [K_N^{(m-1)}, x] = K_N^{(m-1)^{-1}} x^{-1} K_N^{(m-1)} x, \ m > 1,$$

$x = 1$ для четных m и $x = 2$ для нечетных m.

Если группа $B(2,5)$ конечна, то будет верно следующее соотношение

$$K_N^{(12)} = e,$$

где e — единица группы (пустое слово) $B(2,5)$, 12 — ступень нильпотентности группы $B_0(2,5)$ [4]. Если же $B(2,5)$ бесконечна, то $K_N^{(12)} = v$, где v – непустое слово, инвариантное относительно соотношений в группе $B(2,5)$.

В [3] данный коммутатор был вычислен, и с учетом полученных соотношений на словах длиною ≤ 27, его длина была сокращена от 19990 (без учета соотношений) до 16325. Новые полученные соотношения на словах с длинами 28–30 не изменили данный коммутатор.

3.3 Сравнение по энгелевому индексу

Пусть, как и в [4]

$$K_E^{(1)} = [1,2] = 1^{-1}2^{-1}12 = 1111222212,$$
$$K_E^{(m)} = [K_E^{(m-1)}, 2] = K_E^{(m-1)^{-1}} 2^{-1} K_E^{(m-1)} 2, \ m > 1.$$

В том случае, если группа $B(2,5)$ конечна, то будет верно следующее соотношение

$$K_E^{(6)} = e,$$

где e — единица группы $B(2,5)$, 6 — энгелев индекс группы $B_0(2,5)$ [4]. Если же $B(2,5)$ бесконечна, то $K_E^{(6)} = w$, где w – непустое слово, инвариантное относительно соотношений в группе $B(2,5)$. В [3] данный коммутатор был вычислен, и с учетом полученных соотношений на словах длиною ≤ 27, его длина была сокращена от 320 (без учета соотношений) до 280. Новые полученные соотношения на словах с длинами 28–30 не изменили данный коммутатор.

3.4 Сравнение по элементам подгрупп индекса 5^{10}.

В работе [5] было получено, что в группе $B_0(2,5)$ имеется абелева нормальная подгруппа H_0 индекса 5^{10}, элементы которой в терминах нормальных слов имеют вид $h = 10^{\alpha_{10}} 11^{\alpha_{11}} \cdots 34^{\alpha_{34}}$, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{10} = 0$.

Пусть H – подгруппа из $B(2,5)$ такая, что при гомоморфизме $\psi : B(2,5) \to B_0(2,5)$, H_0 является гомоморфным образом H, т.е. $B(2,5)/H \cong B_0(2,5)/H_0$. Очевидно, если H абелева подгруппа, то $B(2,5) = B_0(2,5)$. В связи с этим, интересно посмотреть как ведет себя подгруппа H на предмет абелевости, т.е. если $h_1 \neq h_2 \in H$, следует ли отсюда равенство $h_1 h_2 = h_2 h_1$ (конечно, h_1 и h_2 не лежат в одной циклической подгруппе)?

В терминах [1, 2] элементы из H впервые встречаются на длине 30. Всего таких элементов на указанной длине 180. При помощи несложных вычислений было получено, что среди них нет элементов, принадлежащих одной циклической подгруппе. Пусть $h_i,\ h_j \in H$ $(i,j = 1,2,\ldots,180)$. В группе $B(2,5)$ доказать соотношения $h_i h_j = h_j h_i$ при $i \neq j$ пока не удается, однако, в группе $B_0(2,5)$ указанные соотношения имеют место. Приведем самое короткое по длинам слов соотношение указанного вида (длина каждого слова равна 47), справедливость которого означала бы наличие в группе $B(2,5)$ абелевой нециклической подгруппы порядка 5^2.

$$\begin{aligned} &12221211122122112112221211121221221121121222121 = \\ &= 21221121121222121112221211121212221211122122112 \end{aligned}$$

4 Выводы

В настоящее время расчет элементов и соотношений в группах $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$ по алгоритму из [1, 2] ведется на словах длиною > 30 с привлечением высокопроизводительных кластерных технологий. Приведенные выше результаты сравнения данных групп на словах с длинами ≤ 30, по мнению авторов, отдают предпочтение предположению о бесконечности группы $B(2,5)$.

Список литературы

[1] **Кузнецов А.А., Шлёпкин А.К., Тарасов С.А.** Об одном алгоритме получения соотношений в свободной бернсайдовой группе $B(m,n)$ // Дискретные модели в теории управляющих систем: сб. тр. VI Междунар. конф. / МГУ им. М. В. Ломоносова. М., 2004. С. 175–178.

[2] **Кузнецов А.А.** Некоторые комбинаторные вопросы в периодических группах: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 2006. 102 с.

[3] **Кузнецов А.А.** Сравнительный анализ бернсайдовых групп $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$ // Труды ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 21–25.

[4] **Кострикин А.И.** Вокруг Бернсайда. М.: Наука, 1986. 232 с.

[5] **Havas G., Wall G., Wamsley J.** The two generator restricted Burnside group of exponent five // Bull. Austral. Math. Soc. 1974. Vol. 10. P. 459–470.

ФАКТОРИЗАЦИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПО МНОЖЕСТВАМ СЛОВАРНЫХ ТОЖДЕСТВ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

И.В. Шулепов

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: salvodore@mail.ru

Одним из основных классов, изучаемых в теории моделей, является класс счетных моделей, для которого исследуется его структурная классификация. В книге [1] показано, что любая счетная модель малой теории (т.е. теории со счетным числом типов над пустым множеством) проста над некоторым кортежом или предельна, т.е. представляется в виде объединения счетной цепи простых над кортежами моделей и не изоморфна никакой простой модели ни над каким конечным множеством. В этой же книге приведена конструкция, позволяющая сводить изучение основных характеристик малых теорий, т.е. пар (система типов изоморфизма простых над кортежами моделей, функция распределения числа предельных моделей) к изучению факторизаций символьных последовательностей по множествам словарных тождеств.

В настоящей работе исследуются различные факторизации последовательностей по множествам словарных тождеств с целью построения заданного числа предельных моделей, определяемого числом компонент связности неорграфа на соответствующем фактор-множестве.

В работе без пояснений используется терминология из книг [1]–[3].

1. Основные определения

Рассмотрим множество всех числовых последовательностей ω^ω и полугруппу $S_0 = \langle W; \hat{\ } \rangle$, состоящую из всех *непустых* слов алфавита ω и операции $\hat{\ }$ конкатенации. Если w_1 и w_2 — слова из W, формула $w_1 \approx w_2$ как обычно будет называться *тождеством*. Для данного множества I тождеств $w_1^j \approx w_2^j$, $j \in J$, содержащего множество I_0 всевозможных тождеств вида $w \approx w$, определим множество тождеств, выводимых из

I. Тождество $w_1 \approx w_2$ называется *выводимым* из I, если существует конечная последовательность тождеств $w_1^1 \approx w_2^1, \ldots, w_1^t \approx w_2^t$ такая, что $w_1^t = w_1$, $w_2^t = w_2$ и любое тождество из этой последовательности принадлежит I или получается из предыдущих тождеств применением одного из следующих правил вывода:

1) $\dfrac{w_1 \approx w_2}{w_2 \approx w_1}$, где $w_1, w_2 \in W$;

2) $\dfrac{w_1 \approx w_2;\ w_2 \approx w_3}{w_1 \approx w_3}$, где $w_1, w_2, w_3 \in W$;

3) $\dfrac{w_1 \approx w_2;\ w_1' \approx w_2'}{w_1 w_1' \approx w_2 w_2'}$, где $w_1, w_1', w_2, w_2' \in W$;

4) $\dfrac{w_1 w_2 \approx w_1 w_2'}{w_2 \approx w_2'}$, где $w_1, w_2, w_2' \in W$.

В дальнейшем будут рассматриваться множества тождеств $I \supseteq I_0$, замкнутые относительно выводимости. Любое множество тождеств I биективно полугруппе $S_I = \langle W; \hat{}\rangle / I$, которая является результатом факторизации полугруппы S_0 по следующему отношению конгруэнции $\sim_I$:

$$w_1 \sim_I w_2 \Leftrightarrow (w_1 \approx w_2) \in I.$$

Определим факторизации множества ω^ω, соответствующие множествам тождеств I. Две последовательности f_0 и f_1 из ω^ω называются *почти одинаковыми* (*одинаковыми*), если существуют такие числа $l_0, l_1 \in \omega$ ($l_0 = l_1 = 0$), что $f_0(n + l_0) = f_1(n + l_1)$ для любых $n \in \omega$. Последовательности f_0 и f_1 называются *безусловно сильно I-эквивалентными* (соответственно *сильно I-эквивалентными*), если f_i одинакова (почти одинакова) со счетной конкатенацией слов $w_i^m \in W$, $m \in \omega$, $i = 0, 1$, где тождество $w_0^m \approx w_1^m$ принадлежит I, $m \in \omega$. Последовательности f и f' называются (*безусловно*) *I-эквивалентными*, если существует последовательность $f_0, f_1, \ldots, f_n \in \omega^\omega$, в которой $f_0 = f$, $f_n = f'$, f_i и f_{i+1} (безусловно) сильно I-эквивалентны для любого $i = 0, \ldots, n-1$.

Очевидно, что если последовательности безусловно (сильно) I-эквивалентны, то эти последовательности (сильно) I-эквивалентны.

На множестве M всех классов $\tilde{f}$ почти одинаковых последовательностей определим неорграф $G(I)$, соответствующий множеству тождеств I. Два класса $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 \in M$ будем называть *смежными*, если некоторые последовательности $g_0 \in \tilde{f}_0$ и $g_1 \in \tilde{f}_1$ сильно I-эквивалентны. Для каждой компоненты связности C графа $G(I)$ через $d(C)$ будем обозначать ее диаметр.

Напомним, что *кликой* графа G называется подмножество множества вершин графа G, у которого все различные вершины являются смежными.

Последовательность $f \in \omega^\omega$ называется *периодической* с периодом w и обозначается через (w), если $f = w\,\hat{}\,w\,\hat{}\,w\,\hat{}\,\ldots$.

Замечание. Если множество тождеств I нетривиально, т.е. содержит тождество $w_0 \approx w_1$, $w_0 \neq w_1$, то класс из $G(I)$, содержащий последовательность (w_0), принадлежит континуальной клике. Действительно, если в последовательности (w_0) заменить некоторые копии w_0 на w_1, то получится сильно эквивалентная к (w_0) последовательность. Считая, что m-я копия w_0 кодируется нулем, а результат ее замены на w_1 кодируется единицей, получаем всевозможные последовательности нулей и единиц, определяющие попарно различные смежные вершины из $G(I)$.

Обозначим через $c(I)$ мощность $|\omega^\omega/I|$, и это значение будем называть *числом компонент связности* на множестве ω^ω по множеству тождеств I.

2. Факторизации с условиями конечности

Рассмотрим множества тождеств I, для которых любые две последовательности безусловно сильно I-эквивалентны. Очевидно, что в этом случае $c(I) = 1$ и диаметр d единственного класса равен 1. Мы установим критерий для безусловной сильной I эквивалентности любых двух последовательностей и покажем, что существует множество тождеств I, для которого любые две последовательности сильно I-эквивалентны, но некоторые последовательности не являются безусловно сильно I-эквивалентными.

Предложение 2.1. *Для любого множества тождеств I следующие условия эквивалентны:*

(1) *любые две последовательности $f_0, f_0' \in \omega^\omega$ безусловно сильно I-эквивалентны;*

(2) *для любых последовательностей $f_0, f_0' \in \omega^\omega$ существуют такие непустые кортежи v, v' и последовательности $f_1, f_1' \in \omega^\omega$, что $f_0 = v\hat{}f_1$, $f_0' = v'\hat{}f_1'$ и $(v \approx v') \in I$.*

Доказательство импликации (1) $\Rightarrow$ (2) очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (1). Рассмотрим произвольные последовательности $f, f' \in \omega^\omega$ и покажем, что они сильно I-эквивалентны. Найдем по индукции систему тождеств из I которая гарантирует сильную I-эквивалентность f и f'. На начальном шаге, воспользовавшись условием, выберем непустые кортежи v_0, v_0' и последовательности $f_0, f_0' \in \omega^\omega$ такие, что $f = v_0\hat{}f_0$,

$f' = v_0'\hat{\ }f_0'$ и $(v_0 \approx v_0') \in I$. Если непустые кортежи $v_0, v_0', \ldots, v_n, v_n'$ с условиями $(v_i \approx v_i') \in I$, $i = 0, \ldots, n$, уже найдены и $f = v_0\hat{\ }\ldots\hat{\ }v_n\hat{\ }f_n$, $f' = v_0'\hat{\ }\ldots\hat{\ }v_n'\hat{\ }f_n'$, то выберем непустые кортежи v_{n+1}, v_{n+1}' и последовательности $f_{n+1}, f_{n+1}' \in \omega^\omega$ такие, что $f_n = v_{n+1}\hat{\ }f_{n+1}$, $f_n' = v_{n+1}'\hat{\ }f_{n+1}'$ и $(v_{n+1} \approx v_{n+1}') \in I$. Таким образом получаются равенства $f = v_0\hat{\ }\ldots\hat{\ }v_n\hat{\ }\ldots$, $f' = v_0'\hat{\ }\ldots\hat{\ }v_n'\hat{\ }\ldots$, что означает сильную I-эквивалентность последовательностей f и f'. $\square$

Обозначим через $I_{\{0,1\}}$ множество тождеств, выводимых из тождеств

$$1 \approx m, \tag{1}$$

$m \geq 1$.

Заметим, что для любого множества тождеств $I \supseteq I_{\{0,1\}}$ в графе $G(I)$ каждый класс смежен с классом, содержащим последовательность, состоящую лишь из нулей и единиц. Кроме того, следствиями тождеств (1) являются всевозможные тождества, связывающие каждое слово $w \in W$ со словом w', которое получается из w заменой всех ненулевых координат на единицы. Тем самым, любая последовательность $f \in \omega^\omega$ безусловно сильно I-эквивалентна последовательности, состоящей лишь из нулей и единиц.

Пример 1. Рассмотрим множество тождеств $I \supseteq I_{\{0,1\}}$, задаваемое следующей системой тождеств:

$$11 \approx 01, \tag{2}$$

$$000 \approx 111, \tag{3}$$

$$10 \approx 00. \tag{4}$$

В силу тождеств (2) — (4) все последовательности из 2^ω будут сильно I-эквивалентны, а так как $I \supseteq I_{\{0,1\}}$, сильно I-эквивалентными будут и все последовательности из ω^ω. Вместе с тем, последовательность $f = 0\hat{\ }(1)$ не является безусловно сильно I-эквивалентной последовательности $f' = (10)$, поскольку нет тождеств вида $1 \approx 0$. $\square$

Заметим, что любого множества $I \supseteq I_{\{0,1\}}$ и порождаемого тождествами $(w \approx w') \notin I_{\{0,1\}}$, где w и w' не содержат чисел из $\omega \setminus \{0,1\}$, в графе $G(I)$ выполняется следующее условие $(*)$:

любые две вершины $\widetilde{f_0}$ и $\widetilde{f_1}$ смежны тогда и только тогда, когда смежны вершины $\widetilde{f_0'}$ и $\widetilde{f_1'}$,

где f_0', f_1' — последовательности из 2^ω, получаемые соответствующими заменами ненулевых элементов из f_0, f_1 на единицы.

Тем самым, структура графа $G(I)$ определяется его ограничением на множество классов $\tilde{f}$, $f \in 2^\omega$, а также ограничением самих классов на множество 2^ω. Полученное ограничение обозначим через $G_{\{0,1\}}(I)$.

Поскольку каждая последовательность $f \in 2^\omega$, имеющая бесконечно много единиц, сильно I-эквивалентна всем последовательностям, полученным заменой единиц на произвольные ненулевые числа из ω, и число таких последовательностей континуально, множество всех этих последовательностей образует континуальную клику. Так как каждая континуальная клика изоморфна полному 2^ω-вершинному графу K_{2^ω}, граф $G^0(I)$, получаемый из $G(I)$ удалением класса $\widetilde{(0)}$, изоморфен композиции графа $G^0_{\{0,1\}}(I)$, получаемого из $G_{\{0,1\}}(I)$ удалением класса $\widetilde{(0)}$, и графа K_{2^ω}:

$$G^0(I) = G^0_{\{0,1\}}(I)[K_{2^\omega}].$$

Следующие примеры и утверждения демонстрируют возможности для структуры графов $G_{\{0,1\}}(I)$, а значит, и для структуры графов $G(I)$.

Пример 2. Определим множества тождеств I, для которых $c(I) = 1$ и $d(C) = 1$, где C — единственная компонента связности. Проведем отождествление по всем словам w_0^k, w_1^k одинаковой длины $k > 0$: множество тождеств I_k зададим всевозможными тождествами $w_0^k \approx w_1^k$.

Заметим, что если $(k_m)_{m\in\omega}$ — последовательность положительных натуральных чисел, где k_m делит k_{m+1}, $m \in \omega$, то $I_{k_m} \supset I_{k_{m+1}}$, $m \in \omega$. Это означает, что нет минимального по включению множества тождеств I, для которого $c(I) = 1$ и $d(C) = 1$.

Предложение 2.2. *Если $k_1, \ldots, k_n$, $n \geq 2$ — попарно различные слова из множества W, I — множество тождеств, выводимых из тождеств*

$$(wk_1 \approx w'k_1), \ldots, (wk_n \approx w'k_n),$$

где w, w' — произвольные слова алфавита ω, то в графе $G(I)$ компонента связности, содержащая класс $\widetilde{(k_1)}$, имеет диаметр 2 и состоит из всех классов, имеющих последовательности с бесконечным числом повторов хотя бы одного слова k_i.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $f = (k_1\hat{}\ \ldots\hat{}\ k_n)$, порождаемую соединением кодов, и заметим, что любая последовательность с бесконечным числом повторов слова k_i сильно I-эквивалентна последовательности f. Каждая последовательность f_{ij} с бесконечным числом повторов слова k_i и без бесконечного числа повторов слова k_j не будет сильно I-эквивалентна никакой последовательности f_{ji} с бесконечным числом повторов слова k_j и без бесконечного числа повторов слова k_i. Вместе с тем любая последовательность, не содержащая бесконечного числа повторов ни одного из слов k_i, не связана маршрутами с последовательностью f. □

Следствие 2.3. *Если в условиях предложения выполняется $I \supset I_{\{0,1\}}$ и последовательность $k_1, \ldots, k_n$ содержит все кортежи из $\{0,1\}^m$ для некоторого m, то $c(I) = 1$ и $d(C) = 2$ для единственной компоненты связности C.*

Доказательство. Достаточно заметить, что любая последовательность из 2^ω имеет бесконечно много повторов некоторой последовательности из $\{0,1\}^m$. □

Следующий пример на основании следствия представляет множество тождеств I с условием $c(I) = 1$ и значением $d(C) = 2$ для единственной компоненты связности C.

Пример 3. Рассмотрим последовательности состоящие из “0” и “1”, отождествляемые по правилам:

$$w00 \approx w'00, \tag{5}$$

$$w11 \approx w'11, \tag{6}$$

$$0011 \approx 0101, \tag{7}$$

где w и w' — произвольные числовые слова.

Покажем, что класс, содержащий последовательность (0011), является центральной вершиной в графе $G(I)$. Действительно, если в последовательности f бесконечно много раз встречаются 00, то в соответствии с тождеством (5) класс $\tilde{f}$ сильно I-эквивалентен классу $\widetilde{(0011)}$. Аналогично, если в последовательности f бесконечно много раз встречаются 11, то в соответствии с тождеством (6) класс $\tilde{f}$ также сильно I-эквивалентен классу $\widetilde{(0011)}$. Рассмотрим последний случай, когда в последовательности f не встречается бесконечно много раз ни 00, ни 11. Тогда $\tilde{f} = \widetilde{(0101)}$ и в силу тождества (7) вершина $\tilde{f}$ смежна вершине $\widetilde{(0011)}$. Осталось заметить, что вершины $\widetilde{(0000)}$, $\widetilde{(1111)}$, $\widetilde{(0011)}$ попарно не смежны.

В соответствии с замечанием все вершины графа $G(I)$ составляют три континуальные клики.

Если к множеству I добавить тождество

$$1111 \approx 0101, \tag{8}$$

то получится множество тождеств с одной компонентой связности, имеющей диаметр два, и графом, состоящим из двух континуальных клик. □

Пример 4. Построим пример с $c(I) = 1$ и $d(C) = 3$. Для этого воспользуемся примером 3 и поменяем (7) на

$$1111 \approx 0101. \tag{9}$$

Тогда вершина $\widetilde{(01)}$ будет смежна с вершиной $\widetilde{(1)}$ и не смежной с $\widetilde{(0)}$ и с $\widetilde{(0011)}$, что обеспечит $d(C) = 3$. □

Лемма 2.4. *Для любого непустого слова $w \in \omega^{<\omega}$ и наименьшего подслова w_0 такого, что $w = w_0 \dots w_0$, длина слова w_0 является верхней оценкой для числа попарно несмежных вершин $\widetilde{(w')}$ в графе $G(I)$, смежных с вершиной $\widetilde{(w)}$, где каждое слово w' отождествлено с некоторой циклической перестановкой слова w.*

Доказательство. Если число рассматриваемых вершин $\widetilde{(w'_1)}, \dots, \widetilde{(w'_n)}$, смежных с вершиной $\widetilde{(w)}$, превосходит длину слова w_0, то какие-то два слова $w'_i, w'_j, i \neq j$, отождествляются с одной и той же циклической перестановкой слова w и по правилу вывода 2) получим $w'_i \approx w'_j$. Тогда вершины $\widetilde{(w'_i)}$ и $\widetilde{(w'_j)}$ оказываются смежными. □

Следующий пример показывает, что при увеличении длин отождествляемых слов возрастают степени свободы (т.е. количество вариантов для компонент связности, диаметров этих компонент и некоторых других характеристик) для построения графа $G(I)$.

Пример 5. Рассмотрим систему тождеств

$$w000 \approx w'000, \tag{10}$$

$$w111 \approx w'111, \tag{11}$$

где w и w' — произвольные числовые слова. В силу предложения тождества (10) и (11) задают несмежные вершины $\widetilde{f_0}$ и $\widetilde{f_1}$, где $f_0 \rightleftharpoons (0)$, $f_1 \rightleftharpoons (1)$, связанные ребрами с вершиной $\widetilde{f_3}$, где $f_3 = (000111)$. Заметим, что все последовательности, в которых бесконечно много раз повторяются 000 или 111, определяют вершины, смежные с $\widetilde{f_0}$, $\widetilde{f_1}$ или $\widetilde{f_3}$. Рассмотрим варианты слов w из $\{0,1\}^6$, для которых последовательности (w) не содержат подслов 000 и 111:

1) 101010, 2) 010101,
3) 100100, 4) 001001, 5) 010010,
6) 011011, 7) 110110, 8) 101101,
9) 110010, 10) 100101, 11) 001011, 12) 010110, 13) 101100, 14) 011001,
15) 001101, 16) 011010, 17) 110100, 18) 101001, 19) 010011, 20) 100110.

Заметим, что слова 1) и 2) определяют почти одинаковые последовательности. Это же относится к словам 3)–5), 6)–8), 9)–14), 15)–20), поскольку указанные группировки слов получаются из любого представителя циклическими перестановками. В силу леммы наименьший период последовательности (w) определяет наибольшее число попарно несмежных вершин $\widetilde{(w')}$, $w' \in \{0,1\}^6$, смежных с вершиной $\widetilde{(w)}$ после отождествления некоторых циклических перестановок слов w с циклическими перестановками слов w'. Следовательно, слово 1) определяет вершину, смежную не более чем с двумя такими вершинами, слова 3) и 6) — не более чем с тремя, а слова 9) и 15) — не более чем с шестью. Исходя из этих вариантов отождествлениями циклических перестановок слов w из $\{0,1\}^6$ можно получить граф Γ с восемью вершинами $\widetilde{(w)}$ и произвольным (с учетом ограничений степеней вершин) распределением ребер. Максимальное число компонент связности такого графа равно шести, а максимально возможный диаметр (при наличии одной компоненты связности) — семь. Остальные вершины графа $G_{\{0,1\}}(I)$ присоединяются к вершинам уже построенного графа Γ с помощью следующих тождеств:

$$w\hat{\ } w_i \approx w_i, \tag{12}$$

где w_i, $i = 1, \dots, 20$, — слово из приведенного списка, а w не содержит подслов w_j, где $j > i$. В соответствии с тождествами (12), каждая вершина, определяемая последовательностью f, будет смежна вершине $\widetilde{(w_i)}$ из Γ, где w_i встречается в последовательности f бесконечно много раз. □

Теорема 2.5. *Для любого конечного неорграфа G, имеющего заданное число $c(G)$ компонент связности и заданные величины диаметров $\{d_i \mid i < c(G)\}$ по соответствующим компонентам связности, существует множество тождеств I такое, что (происходит вложение графов) граф $G_{\{0,1\}}(I)$ также содержит c компонент связности, имеет те же диаметры d_i, $i < c(G)$, по всем компонентам связности, и каждая компонента связности графа G изоморфно вкладывается в соответствующую компоненту связности графа $G_{\{0,1\}}(I)$, причем разные компоненты переходят в разные.*

Доказательство. На основе рассмотренных примеров можно построить множества тождеств для произвольного количества компонент связности с заданными диаметрами для каждой компоненты связности. Опишем механизм построения примеров множеств I с $c(I) = n$ и натуральными положительными значениями $d(C_1) = d_1, \dots, d(C_n) = d_n$ для всех соответствующих компонент связности $C_1, \ldots, C_n$. Возьмём за основу последовательность $f_m = (\underbrace{00\ldots0}_{m \text{ раз}}\underbrace{11\ldots1}_{m \text{ раз}})$, $m \geq 2$, и тождества

$$w\underbrace{00\ldots0}_{m \text{ раз}} \approx w'\underbrace{00\ldots0}_{m \text{ раз}}, \tag{13}$$

$$w\underbrace{11\ldots1}_{m \text{ раз}} \approx w'\underbrace{11\ldots1}_{m \text{ раз}}. \tag{14}$$

В силу предложения 2.2 тождества (13) и (14) задают несмежные вершины $\widetilde{f_0}$ и $\widetilde{f_1}$, где $f_0 \rightleftharpoons (0)$, $f_1 \rightleftharpoons (1)$, связанные ребрами с вершиной $\widetilde{f_m}$.

С возрастанием m можем набрать достаточно много слов w длины $2m$, у которых нет собственных подслов w_0 таких, что $w = w_0 \ldots w_0$, и последовательности (w) не содержат подряд ни m нулей, ни m единиц. Можно, например, рассматривать начальные сегменты длины $2m$ последовательностей вида

$$01\hat{}w\hat{}101\hat{}w\hat{}0101\hat{}w\hat{}10101\ldots$$

или

$$10\hat{}w\hat{}01\hat{}w\hat{}101\hat{}w\hat{}010\ \ldots,$$

где w — произвольное слово алфавита $\{0,1\}$, длина которого не превосходит $m-3$. Посредством отождествлений циклических перестановок слов w множество полученных последовательностей (w) можно превращать в произвольный конечный граф, содержащий заданный конечный граф, с сохранением числа компонент связности и диаметров компонент. $\square$

3. Факторизации с условиями счетности

Лемма 3.1. *Если $f_0 = (m_0)$, $f_1 = (m_1)$, $f_2 = (m_2)$ — периодические последовательности, $(m_0)^{k_1} \approx (m_1)^{l_1} \in I$ и $(m_0)^{k_2} \approx (m_2)^{l_2} \in I$, то вершины $\widetilde{f_0}$, $\widetilde{f_1}$, $\widetilde{f_2}$ графа $G(I)$ смежны.*

Доказательство. Вершины $\widetilde{f_0}$ и $\widetilde{f_i}$, $i = 1, 2$, смежны по определению. Смежность вершин $\widetilde{f_1}$ и $\widetilde{f_2}$ вытекает из тождеств $(m_0)^{k_1 \cdot k_2} \approx (m_1)^{l_1 \cdot k_2} \in I$ и $(m_0)^{k_2 \cdot k_1} \approx (m_2)^{l_2 \cdot k_1} \in I$. $\square$

Следствие 3.2. *Для периодических последовательностей число попарно несмежных вершин, смежных с данной вершиной, конечно.*

Пример 3.1. Для построения подграфа графа $G(I)$ со счетным количеством попарно несмежных вершин достаточно рассмотреть последовательность

$$f = a_1\hat{\ }a_2\hat{\ }a_1\hat{\ }a_3\hat{\ }a_2\hat{\ }a_1\hat{\ }a_4\hat{\ }a_3\hat{\ }a_2\hat{\ }a_1\hat{\ }\dots$$

и систему тождеств

$$a_i \approx wa_i,$$

$a_i \in \omega$, $a_i \neq a_j$, $i, j \in \omega^\omega$. Тогда каждая вершина $\widetilde{(a_i)}$ графа будет сильно I-эквивалентна вершине $\widetilde{f}$, причем $\widetilde{(a_i)}$ не смежна с $\widetilde{(a_j)}$, $i \neq j$.

Теорема 3.3. *Для любого счетного неорграфа G, имеющего заданное число α компонент связности и заданные величины диаметров $\{d_i \mid i < \alpha\}$ по соответствующим компонентам связности, существует множество тождеств I такое, что граф $G_{\{0,1\}}(I)$ также содержит α компонент связности, имеет те же диаметры d_i, $i < \alpha$, по всем компонентам связности, и каждая компонента связности графа G изоморфно вкладывается в соответствующую компоненту связности графа $G_{\{0,1\}}(I)$, причем разные компоненты переходят в разные.*

Доказательство. На основе примера 3.1 рассмотрим последовательность вида

$$f_a = a_1\hat{\ }a_2\hat{\ }a_1\hat{\ }a_3\hat{\ }a_2\hat{\ }a_1\hat{\ }a_4\hat{\ }a_3\hat{\ }a_2\hat{\ }a_1\hat{\ }\dots$$

и за счёт тождеств $a_i \approx wa_i$ данная последовательность будет сильно I-эквивалентна последовательности вида

$$f_{aa} = a_1\hat{\ }a_{22}\hat{\ }a_1\hat{\ }a_{33}\hat{\ }a_{22}\hat{\ }a_1\hat{\ }a_{44}\hat{\ }a_{33}\hat{\ }a_{22}\hat{\ }a_1\hat{\ }\dots,$$

причем a_i отлично от a_ii. Аналогичным образом последовательность f_aa будет сильно I-эквивалентна последовательности вида

$$f_{aaa} = a_{22}\hat{\ }a_{333}\hat{\ }a_{22}\hat{\ }a_{444}\hat{\ }a_{333}\hat{\ }a_{22}\hat{\ }a_{555}\hat{\ }a_{444}\hat{\ }a_{333}\hat{\ }a_{22}\hat{\ }\dots,$$

причем a_{ii} отлично от a_{iii}.

Для построения единственной компоненты связности счетного неорграфа требуется задать вершину $\tilde{f}_a$, и за счет тождеств вида $a_i \approx wa_i$ образовать требуемое количество попарно несмежных вершин $\tilde{a}_i$, затем присоединять вершины $\widetilde{f\underbrace{a\dots a}_{j+1 \text{ раз}}}$, $j \in \omega$, способом описанным выше. Таким образом можно задать необходимое число компонент связности (задав α вершин $\tilde{f}_k$, где $k = 1, \dots, \alpha$) с заданными величинами диаметров соответственно. $\square$

4. Предельные модели

Итак, число компонент связности неорграфа при рассмотренных выше факторизациях последовательностей по множествам словарных тождеств позволяют говорить о числе предельных моделей. Фактор-множество ω^ω/I множества ω^ω по отношению I-эквивалентности биективно теориям, полученным попарными отождествлениями цепей для всех тождеств из множества заданных тождеств. Вследствие чего число компонент связности неорграфа является числом предельных моделей над некоторым типом.

Модель M *предикатно подобна* модели N, если M получается из N некоторой перестановкой предикатных символов.

Пример 4.1. Рассмотрим множество тождеств I. Каждая из последовательностей $f_0 = (0)$ и $f_1 = (1)$ образует компоненту связности (предельную модель). Если заменить все 0 в f_0 на 1, то последовательности совпадут. В этом случае очевидно, что две неизоморфные предельные модели, соответствующие последовательностям f_0 и f_1, будут предикатно подобны.

Приведённые в книге [1] конструкции теорий с заданным конечным числом счётных моделей основаны на факторизациях, сводящих число предельных моделей над типом к числу неэквивалентных константных последовательностей. Аналогично примеру 4.1 получается предикатное подобие всех предельных моделей над заданным типом.

Остается вопрос о влиянии предикатного подобия на взаимосвязь предельных моделей и, в частности, вопрос о числе классов эквивалентности предельных моделей над заданным типом по отношению предикатного подобия.

Список литературы

[1] *Судоплатов С. В.* Проблема Лахлана. — Новосибирск: НГТУ, 2009.

[2] *Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В.* Дискретная математика: Учебник. — М.: ИНФРА-М, Новосибирск: НГТУ, 2007. — 256 с.

[3] *Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В.* Математическая логика и теория алгоритмов: Учебник. — М.: ИНФРА-М, Новосибирск: НГТУ, 2008. — 224 с.

О СВОЙСТВЕ КОНЕЧНЫХ ЗАМЫКАНИЙ В СЛИЯНИЯХ ГЕНЕРИЧЕСКИХ КЛАССОВ

С.В. Судоплатов*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: sudoplat@math.nsc.ru, sudoplat@ngs.ru

В работе [1] Е.Хрушовский определил механизм слияния двух генерических теорий для получения сильно минимальной теории, имеющей структуру с полями двух разных характеристик. Его техника получила в последнее время существенное развитие в связи с вопросами существования слияний полей и слияний векторных пространств, имеющих различные заданные свойства [2]–[7]. Рассмотренные в работе [8] совмещения и раскраски моделей в случае их счетности и однородности можно проинтерпретировать как частные случаи слияния соответствующих генерических классов.

Как известно (см. [9], [10]), каждый самодостаточный генерический класс порождает операцию самодостаточного замыкания на своей генерической модели. При слиянии генерических классов эти операции посредством транзитивного замыкания расширяются до операции самодостаточного замыкания на генерической модели этого слияния. Тем самым возникает система конечных замыканий, порождающая новую, более общую операцию конечных замыканий. Такие системы замыканий с теоретико-решеточной точки зрения изучались в работах [11]–[15].

Поскольку насыщенность генерической модели обусловлена формульной определимостью операции самодостаточного замыкания $\overline{A}$ каждого конечного множества A, возникает естественный вопрос о возможности построения слияния генерических теорий, имеющих формульно определимые операции самодостаточных замыканий, с условием формульной определимости результирующей операции самодостаточного замыкания.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 09-01-00336-а, а также Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ, проект НШ-344.2008.1.

В настоящей работе мы дадим точную формулировку обозначенной проблемы слияния генерических классов и приведем достаточные условия существования таких слияний, при которых все модели имеют конечные замыкания.

В дальнейшем без пояснений мы будем использовать терминологию из работ [9], [10], а также стандартные понятия и обозначения из теории графов [16].

Пусть $(\mathbf{T};\leqslant)$ — генерический класс. Будем говорить, что $(\mathbf{T};\leqslant)$ обладает *свойством конечных замыканий*, если конечные замыкания имеет любая модель $(\mathbf{T};\leqslant)$-генерической теории.

Следующая теорема представляет характеризацию свойства конечных замыканий для генерических классов, использующую отношение доминирования [10].

ТЕОРЕМА 1. *Генерический класс $(\mathbf{T};\leqslant)$ сигнатуры Σ обладает свойством конечных замыканий тогда и только тогда, когда $(\mathbf{T};\leqslant)$ доминируется некоторым генерическим классом $(\mathbf{T}';\leqslant')$ сигнатуры Σ, удовлетворяющим следующим условиям:*

1) *каждый тип $\Phi(A)$ из класса $\mathbf{T}'$ содержит описание некоторого своего минимального самодостаточного расширения и ограничивается до типа над A из класса $\mathbf{T}$;*

2) *каждый тип $p(\bar{x}) \in S(\varnothing)$ $(\mathbf{T}';\leqslant')$-генерической теории расширяется до некоторого типа $q(\bar{y}) \in S(\varnothing)$, содержащего некоторый тип $[\Phi(A)]^A_Y$, где Y — множество координат кортежа $\bar{y}$, $\Phi(A) \in \mathbf{T}'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что класс $(\mathbf{T};\leqslant)$ обладает свойством конечных замыканий. Тогда каждое конечное множество в модели $(\mathbf{T};\leqslant)$-генерической теории T расширяется до самодостаточного множества. Из счетности множества всех типов $[\Phi(A)]^A_X$, соответствующих типам $\Phi(A) \in \mathbf{T}$, вытекает, что всевозможные попарно несовместные расширения типов $\Phi(A)$ до типов $\Psi(A)$, содержащих описания их самодостаточных расширений, формируют искомый генерический класс $(\mathbf{T}';\leqslant')$, в котором отношение $\leqslant'$ наследует отношение $\leqslant$.

Обратно, предположим, что генерический класс $(\mathbf{T};\leqslant)$ доминируется некоторым генерическим классом $(\mathbf{T}';\leqslant')$ той же сигнатуры и таким, что каждый тип $\Phi(A)$ из класса $\mathbf{T}'$ содержит описание некоторого своего минимального самодостаточного расширения и ограничивается до типа над A из класса $\mathbf{T}$, а каждый тип $p(\bar{x}) \in S(\varnothing)$ $(\mathbf{T}';\leqslant')$-генерической теории T расширяется до некоторого типа $q(\bar{y}) \in S(\varnothing)$, содержащего некоторый тип $[\Phi(A)]^A_{\cup\bar{y}}$, где $\Phi(A) \in \mathbf{T}'$. Тогда $(\mathbf{T}';\leqslant')$-генерическая модель является $(\mathbf{T};\leqslant)$-генерической. Поскольку в каждом типе $p \in S(T)$ содержится информация о существовании самодостаточных расширений его реализаций, имеет место свойство конечных замыканий для генерического класса $(\mathbf{T};\leqslant)$. $\square$

На основании условия 2 теоремы 1 из наличия свойства конечных замыканий для класса $(\mathbf{T};\leqslant)$ вытекает счетность числа ограничений типов $q(\bar{y})\in S(\varnothing)$ на типы $[\Phi(A)]^A_{\cup\bar{y}}$.

Генерический класс $(\mathbf{T}';\leqslant')$, о котором идет речь в теореме 1, называется *генерическим классом, свидетельствующем о свойстве конечных замыканий для класса* $(\mathbf{T};\leqslant)$. Подобное добавление внешней информации о свойствах типов данного генерического класса $(\mathbf{T};\leqslant)$, образующее *обогащение* генерического класса, будем также называть *свидетельством* о соответствующем свойстве.

Пусть $(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)$, $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)$ и $(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$ — генерические классы сигнатур Σ_0, Σ_1 и Σ_2 соответственно, $\Sigma_0=\Sigma_1\cap\Sigma_2$, $\leqslant_0\,=\,\leqslant_1\,\cap\,\leqslant_2$. *Слиянием* или *сплавом* классов $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)$ и $(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$ над классом $(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)$ называется генерический класс $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)$ сигнатуры $\Sigma_1\cup\Sigma_2$, для которого $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)\upharpoonright\Sigma_i=(\mathbf{T}_i;\leqslant_i)$, $i=1,2$. При этом $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)$-генерическая модель (теория) называется *слиянием* или *сплавом* $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)$-генерической и $(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$-генерической моделей (теорий).

Слияния генерических классов $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)$ и $(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$ над $(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)$ будем обозначать через

$$(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)\,\mathcal{F}_{(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)}\,(\mathbf{T}_2;\leqslant_2).$$

Слияние $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)$-генерической модели $\mathcal{M}_1$ (теории T_1) и $(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$-генерической модели $\mathcal{M}_2$ (теории T_2) над $(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)$-генерической моделью $\mathcal{M}_0$ (теорией T_0) обозначается через $\mathcal{M}_1\,\mathcal{F}_{\mathcal{M}_0}\,\mathcal{M}_2$ $(T_1\,\mathcal{F}_{T_0}\,T_2)$.

Очевидно, что слияние классов $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)$ и $(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$ может не существовать (если, например, цепь самодостаточных замыканий данного множества относительно $\leqslant_1$ и $\leqslant_2$ не стабилизируется), а если существует, то, вообще говоря, определяется неоднозначно. При этом наличие свойства конечных замыканий или однородного t-амальгамирования для каждого из классов $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)$ и $(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$ не влечет выполнение соответствующего свойства для слияния.

Кроме того заметим, что свойство конечных замыканий может выполняться как при наличии единых оценок мощностей замыканий в зависимости от мощностей исходных конечных множеств, так и в случае отсутствии этих оценок при условии, что мощность и структура замыкания описана в типе любого данного конечного множества. Генерические классы, имеющие указанные мощностные оценки будем называть PE-*классами*, а генерические классы без таких оценок — NPE-*классами*.

PE-Классами являются все примеры генерических классов, подобных примерам Хрушовского, порождаемых неотрицательными предразмерностными функциями δ и имеющих насыщенные генерические модели (см. обзоры [17], [18], [19]), а генерические классы свободных ациклических и кубических теорий, являющиеся NPE-классами, описаны в работах [20] и [21].

На основании теоремы 1 свойство конечных замыканий для слияний генерических классов очевидным образом характеризуется в терминах обогащений генерических классов.

Пусть $\mathcal{M}_i$ — $(\mathbf{T}_i;\leqslant_i)$-генерические модели, $i=0,1,2$, $\mathcal{M}_3$ — $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)\,\mathcal{F}_{(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)}\,(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$-генерическая модель, где $(\mathbf{T}_i;\leqslant_i)$ и $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)\,\mathcal{F}_{(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)}\,(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$ — самодостаточные генерические классы.

Очевидно, что модель $\mathcal{M}_0$ элементарно вложима в модели $\mathcal{M}_1\upharpoonright\Sigma_0$ и $\mathcal{M}_2\upharpoonright\Sigma_0$, а модели $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — в модели $\mathcal{M}_3\upharpoonright\Sigma_1$ и $\mathcal{M}_3\upharpoonright\Sigma_2$ соответственно. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\mathcal{M}_0$ — элементарная подмодель моделей $\mathcal{M}_1\upharpoonright\Sigma_0$ и $\mathcal{M}_2\upharpoonright\Sigma_0$, а $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ в свою очередь являются элементарными подмоделями моделей $\mathcal{M}_3\upharpoonright\Sigma_1$ и $\mathcal{M}_3\upharpoonright\Sigma_2$, и при этом $\mathcal{M}_3=\mathcal{M}_1\,\mathcal{F}_{\mathcal{M}_0}\,\mathcal{M}_2$.

Обозначим через Cl_i операции самодостаточных замыканий в моделях $\mathcal{M}_i$, $i=1,2,3$.

Очевидно, что для любого конечного множества $A\subseteq M_3$ справедливо соотношение $\mathrm{Cl}_3(A)\supseteq\bigcup\limits_{n\in\omega}A_n$, где $A_0=A$, $A_{n+1}=\mathrm{Cl}_1(\mathrm{Cl}_2(A_n))$. Более того, в силу конечности множества $\mathrm{Cl}_3(A)$ цепь множеств A_n, $n\in\omega$, стабилизируется, начиная с некоторого n. Это число будем называть *итерационным числом* и обозначать через $n_A(\mathcal{M}_3)$ или просто n_A.

При наличии равенства $\mathrm{Cl}_3(A)=\bigcup\limits_{n\in\omega}A_n$ для любого $A\subseteq_{\rm fin}M_3$ будем говорить, что операция Cl_3 *порождается* операциями Cl_1 и Cl_2 и писать $\mathrm{Cl}_3=\langle\mathrm{Cl}_1,\mathrm{Cl}_2\rangle$.

Заметим, что условия совпадения или несовпадения операторов Cl_3 и $\langle\mathrm{Cl}_1,\mathrm{Cl}_2\rangle$ свидетельствуются некоторым обогащением данного слияния генерических классов.

Слияния генерических классов в стиле Хрушовского (*сплавы Хрушовского*) [2]–[7], определяемые неотрицательными линейными предразмерностными функциями δ_i классов $(\mathbf{T}_i;\leqslant_i)$, $i=0,1,2$, с неотрицательными линейными предразмерностными функциями слияния

$$\delta(A)=\delta_1(A)+\delta_2(A)-\delta_0(A),$$

(где $\delta_i(A)=|A|-\alpha_i\cdot|R_i(A)|$, $\alpha_i\in\mathbb{R}^+$, $R_i(A)$ — число кортежей, связанных предикатами на A, $i=0,1,2$) вообще говоря, не имеют замыкания вида $\langle\mathrm{Cl}_1,\mathrm{Cl}_2\rangle$, поскольку замкнутые относительно Cl_1 и Cl_2 множества (с неуменьшаемыми значениями $\delta_1(A)$ и $\delta_2(A)$) могут быть незамкнуты относительно Cl_3 (суммарное число весов связей относительно $\delta_1(A)$ и $\delta_2(A)$ может превосходить число элементов учитываемых при подсчете $\delta(A)$). При этом, итерационные числа n_A могут быть неограниченными: $\sup\{n_A\} = \infty$.

Теории графов Хервига [22] и теории двудольных орграфов из работы [23] с линейными предранговыми функциями

$$y(\mathcal{A}) = |A| - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot e_k(\mathcal{A}),$$

(где $e_k(\mathcal{A})$ — число I_k-дуг в графе $\mathcal{A}$, α_k — веса I_k-дуг, $0 < \alpha_{k+1} \ll \alpha_k < 1$) также можно рассматривать как сплавы Хрушовского. При этом, счетная графовая сигнатура, снабженная весами ребер или дуг, позволяет проинтерпретировать эти теории T как слияния счетного множества теорий T_k сигнатур $\{I_k^{(2)}\}$, $k \in \omega$, удовлетворяющих условию $\mathrm{Cl}_T \neq \langle \mathrm{Cl}_k \rangle_{k\in\omega}$, где Cl_T — самодостаточное замыкание в генерической модели теории T, а Cl_k — самодостаточные замыкания в генерических моделях теорий T_k, $k \in \omega$.

Соотношение $\mathrm{Cl}_3 = \langle \mathrm{Cl}_1, \mathrm{Cl}_2 \rangle$ не имеет места и при слияниях нетривиальных несовпадающих генерических классов свободных ациклических теорий [20] (кубических теорий CCEC-моделей [21]), образующих генерические классы свободных ациклических теорий (кубических теорий CCEC-моделей) с транзитивными группами автоморфизмов. Действительно, любые два элемента a и b, связанные кратчайшими маршрутами с ребрами, совокупность цветов которых не лежит ни в Σ_1, ни в Σ_2, образуют множество, замкнутое относительно Cl_1 и Cl_2, а $\mathrm{Cl}_3(\{a, b\})$ включает все элементы кратчайших (a, b)-маршрутов. При этом итерационные числа всех конечных множеств равны 1.

Несущественные совмещения $\mathcal{M}_3$ моделей $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ [8] с тождественными замыканиями Cl_1 и Cl_2 порождают тождественное замыкание Cl_3.

Другой пример слияния генерических классов с условием $\mathrm{Cl}_3 = \langle \mathrm{Cl}_1, \mathrm{Cl}_2 \rangle$ представлен в работе [20] (параграф 3), где Cl_1 — тождественная операция замыкания для c-графов (конечных подструктур генерического властного орграфа), а Cl_2 — операция замыкания для c_a-графов (конечных подструктур свободного ациклического графа).

В дальнейшем мы будем рассматривать операции замыкания Cl_3, порожденные операциями Cl_1 и Cl_2. Зафиксируем некоторое слияние генерических классов

$$(\mathbf{T}_3; \leqslant_3) \rightleftharpoons (\mathbf{T}_1; \leqslant_1)\, \mathcal{F}_{(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)}\, (\mathbf{T}_2; \leqslant_2).$$

Следующее утверждение представляет очевидную (в силу теоремы компактности) характеризацию сохранения свойства конечных замыканий при переходе от классов $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)$ и $(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$ к классу $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Генерический класс* $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)$ *не обладает свойством конечных замыканий тогда и только тогда, когда в* $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)$*-генерической модели найдется последовательность* A_n*,* $n\in\omega$*, равномощных конечных множеств, у которых замыкания* $\mathrm{Cl}_3(A_n)$ *получаются применением не менее* n *итераций относительно* Cl_1 *и* Cl_2*, и описание неограниченного числа итераций для указанных множеств совместно с* $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)$*-генерической теорией.*

В качестве иллюстрации приведем пример слияния $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)$ генерических классов, для которого выполняется $\mathrm{Cl}_3=\langle\mathrm{Cl}_1,\mathrm{Cl}_2\rangle$ и не имеет место свойство конечных замыканий.

ПРИМЕР. Пусть $(\mathbf{T}_i;\leqslant_i)$ — генерические классы графовых сигнатур $\{Q_i^{(2)}\}$, $i=1,2$, типы которых описывают попарно непересекающиеся ребра так, что каждая вершина либо изолирована, либо принадлежит ровно одному ребру, не являющемуся петлей, $i=1,2$. При этом потребуем, чтобы выполнялись следующие условия:

1) число ребер и число изолированных вершин не ограничены;

2) каждый конечный граф с заданным числом ребер и с заданным числом изолированных вершин представлен некоторым типом из $\mathbf{T}_i$;

3) если вершина a принадлежит множеству A, где $\Phi(A)\in\mathbf{T}_i$ и в описании $\Phi(A)$ указано, что a принадлежит ребру $[a,b]$, то $b\in A$;

4) $A\leqslant_i B$ тогда и только тогда, когда $A\subseteq B$ и для любой вершины $a\in A$, если $(a,b)\in Q_i$ и $b\in B$, то $b\in A$, $i=1,2$.

Заметим, что самодостаточное замыкание любого конечного множества A в $(\mathbf{T}_i;\leqslant_i)$-генерической модели получается добавлением к каждому концу ребра, лежащему в A, другого конца этого ребра.

Определим теперь слияние генерических классов $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)$ и $(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$, позволив каждой вершине быть либо изолированной, либо принадлежать одному ребру, либо принадлежать двум ребрам разных цветов (Q_1 и Q_2), так, чтобы в описаниях типов содержалась информация лишь о *конечных* цепях, но имеющих любую заданную длину.

Самодостаточными множествами $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)$-генерической модели являются конечные множества, замкнутые относительно добавления противоположных концов ребер. Вместе с тем, наличие неограниченных цепей означает существование счетной модели $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)$-генерической теории, имеющей бесконечную цепь. Никакой элемент этой цепи не содержится в самодостаточном множестве, которое по определению должно быть конечным. □

При практическом построении операции Cl_3 с нетождественными замыканиями Cl_1 и Cl_2 и сохранением свойства конечных замыканий уместно пользоваться *принципом минимизации итераций*, или MI-*принципом*, при котором итерационные числа n_A минимальны. Эта минимизация может *мажорироваться* оценками f чисел n_A в зависимости от мощностей $|A|$: $n_A \leq f(|A|)$. Если существует *мажорирующая оценка числа итераций* f для всех множеств A, входящих в самодостаточные типы $\Phi(A) \in \mathbf{T}_3$, сохраняющаяся при переходе к самодостаточным амальгамам в классе $\mathbf{T}_3$, то эта оценка будет иметь место во всех моделях $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$-генерической теории. Из наличия мажорирующей оценки для генерического класса $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$ вытекает свойство конечных замыканий для этого класса. Тем самым, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть класс* $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$ *совпадает с генерическим классом* $(\mathbf{T}_1; \leqslant_1)\, \mathcal{F}_{(\mathbf{T}_0; \leqslant_0)}\, (\mathbf{T}_2; \leqslant_2)$, $\mathrm{Cl}_3 = \langle \mathrm{Cl}_1, \mathrm{Cl}_2 \rangle$, *классы* $(\mathbf{T}_i; \leqslant_i)$ *обладают свойством конечных замыканий,* $i = 1, 2$, *и существует мажорирующая оценка числа итераций для класса* $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$. *Тогда класс* $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$ *обладает свойством конечных замыканий.*

Укажем достаточное условие существования минимальной мажорирующей оценки ($n_A \equiv 1$) для слияния

$$(\mathbf{T}_3; \leqslant_3) \rightleftharpoons (\mathbf{T}_1; \leqslant_1)\, \mathcal{F}_{(\mathbf{T}_0; \leqslant_0)}\, (\mathbf{T}_2; \leqslant_2),$$

при котором замыкания Cl_1 и Cl_2 могут быть одновременно нетождественными.

Предположим, что на носителе $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$-генерической модели $\mathcal{M}_3$ можно определить (не обязательно формулой) отношение эквивалентности E, удовлетворяющее следующим условиям для любого конечного множества $A \subseteq M_3$:

1) $\mathrm{Cl}_1(A) = \bigcup\limits_{a \in A} \mathrm{Cl}_1(A \cap E(a))$;

2) $\mathrm{Cl}_2(C) = C$ для любого множества C, удовлетворяющего условию $\mathrm{Cl}_2(A) \subseteq C \subseteq \bigcup\limits_{a \in \mathrm{Cl}_2(A)} E(a)$.

Тогда будем говорить, что $(\mathrm{Cl}_1, \mathrm{Cl}_2)$ — E-*ступенчатая специальная система замыканий с условием минимальности*, или ESSM-*система.*

Покажем, что при наличии ESSM-системы $(\mathrm{Cl}_1, \mathrm{Cl}_2)$ существует минимальная мажорирующая оценка числа итераций для самодостаточного класса $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$. Действительно, пусть A — конечное множество в модели $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$-генерической теории. Тогда множество $B \rightleftharpoons \mathrm{Cl}_1(\mathrm{Cl}_2(A))$

Cl_1-замкнуто, поскольку операция Cl_1 транзитивна, а Cl_2-замкнутость множества B вытекает из того, что $B \subseteq \bigcup\limits_{a\in \mathrm{Cl}_2(A)} E(a)$.

Следующее обобщение понятия ESSM-системы гарантирует существование мажорирующей оценки числа итераций для слияния $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$.

Предположим, что на носителе $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$-генерической модели $\mathcal{M}_3$ можно определить (не обязательно формулой) отношение эквивалентности E, удовлетворяющее следующим условиям для любого конечного множества $A \subseteq M_3$, где $\mathcal{M}_3 \models \Phi(A)$ для некоторого типа $\Phi(A) \in \mathbf{T}_3$:

1) $\mathrm{Cl}_1(A) = \bigcup\limits_{a\in A} \mathrm{Cl}_1(A \cap E(a))$;

2) если $C \subseteq \bigcup\limits_{a\in \mathrm{Cl}_2(A)} E(a)$ и $\mathrm{Cl}_2(C) \subseteq \bigcup\limits_{a\in \mathrm{Cl}_2(A)} E(a)$, то $\mathrm{Cl}_2(C) = C$;

3) существует конечное число m_A E-классов $E_1, \ldots, E_{m_A}$, описанное некоторой формулой из $\Phi(A)$ и такое, что $\mathrm{Cl}_3(A) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m_A} E_i$.

Тогда будем говорить, что $(\mathrm{Cl}_1, \mathrm{Cl}_2)$ — E*-ступенчатая специальная система замыканий*, или ESS-*система*.

Покажем, что при наличии ESS-системы $(\mathrm{Cl}_1, \mathrm{Cl}_2)$ существует минимальная мажорирующая оценка числа итераций для самодостаточного класса $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$. Действительно, пусть A — конечное множество в модели $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$-генерической теории. Тогда число итераций ограничивается значением $m_A + 1$, поскольку каждая итерация определяет подмножество $\bigcup\limits_{i=1}^{m_A} E_i$, а при стабилизации числа E-классов, содержащих результат двух последовательных итераций, в силу условий 1 и 2 получается одновременно Cl_1- и Cl_2-замкнутое множество.

Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. *Пусть класс* $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$ *совпадает с генерическим классом* $(\mathbf{T}_1; \leqslant_1)\,\mathcal{F}_{(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)}\,(\mathbf{T}_2; \leqslant_2)$, $(\mathrm{Cl}_1, \mathrm{Cl}_2)$ — ESS-*система, и классы* $(\mathbf{T}_i; \leqslant_i)$, $i = 1, 2$, *обладают свойством конечных замыканий. Тогда класс* $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$ *обладает свойством конечных замыканий.*

Генерический класс $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$, о котором идет речь в теореме 2, обозначим через $(\mathbf{T}_1; \leqslant_1)\,\mathcal{F}^{\mathrm{ESS}}_{(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)}\,(\mathbf{T}_2; \leqslant_2)$.

Пусть $(\mathbf{T}_i; \leqslant_i)$, $(\mathbf{T}'_i; \leqslant'_i)$, $i = 1, \ldots, n$, — генерические классы, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $(\mathbf{T}'_1; \leqslant'_1) = (\mathbf{T}_1; \leqslant_1)$;

2) $(\mathbf{T}'_{i+1}; \leqslant'_{i+1}) = (\mathbf{T}'_i; \leqslant'_i)\,\mathcal{F}^{\mathrm{ESS}}_{(\mathbf{T}'_i;\leqslant'_i)\cap(\mathbf{T}_i;\leqslant_i)}(\mathbf{T}_i; \leqslant_i)$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Генерический класс $(\mathbf{T}'_n; \leqslant'_n)$ обозначим через $(\mathcal{F}^{\mathrm{ESS}})_{i=1}^{n}(\mathbf{T}_i; \leqslant_i)$.

Из теоремы 2 вытекает, что свойство конечных замыканий сохраняется при конечном итерировании процессов построения генерических классов на основе ESS-систем, т.е. при переходе от классов $(\mathbf{T}_i;\leqslant_i)$, $i=1,\ldots,n$, к классу $(\mathcal{F}^{\mathrm{ESS}})_{i=1}^n(\mathbf{T}_i;\leqslant_i)$.

СЛЕДСТВИЕ. *Любой класс вида* $(\mathcal{F}^{\mathrm{ESS}})_{i=1}^n(\mathbf{T}_i;\leqslant_i)$ *обладает свойством конечных замыканий.*

Список литературы

[1] *Hrushovski E.* Strongly minimal expansions of algebraically closed fields // Israel J. Math. 1992. V. 79, No. 2–3. P. 129–151.

[2] *Holland K.* An introduction to fusions of strongly minimal sets: The geometry of fusions // Archive for Math. Logic. 1995. V. 34, No. 6. P. 395–413.

[3] *Holland K.* Strongly minimal fusions of vector spaces // Ann. Pure and Appl. Logic. 1997. V. 83, No. 1. P. 1–22.

[4] *Hasson A., Hils M.* Fusion over sublanguages // J. Symbolic Logic. 2006. V. 71, No. 2. P. 361–398.

[5] *Baudisch A., Martin-Pizarro A., Ziegler M.* Hrushovskis Fusion // Frieder Haug, Benedikt Lowe, Torsten Schatz (eds.). Algebra, Logic, Set Theory, Festschrift fur Ulrich Felgner zum 65. Geburtstag; College Publications, Studies in Logic, Vol. 4, London 2007. P. 15–31.

[6] *Baudisch A., Martin-Pizarro A., Ziegler M.* Fusion over a vector space // J. Math. Logic. 2006. V. 6, No. 2. P. 141–162.

[7] *Ziegler M.* Fusion of structures of finite Morley rank / Preprint. Mathematisches Institut, Freiburg, 2006.

[8] *Судоплатов С.В.* Несущественные совмещения и раскраски моделей // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44, №5. С. 1132–1141.

[9] *Baldwin J.T., Shi N.* Stable generic structures // Ann. Pure and Appl. Logic. 1996. V. 79, No. 1. P. 1–35.

[10] *Судоплатов С.В.* Синтаксический подход к построению генерических моделей // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, №2. С. 244–268.

[11] *Горбунов В.А.* Алгебраическая теория квазимногообразий. — Новосибирск: Научная книга, 1999.

[12] *Adaricheva K.V., Gorbunov V.A., Tumanov V.I.* Join-semidistributive lattices and convex geometries // Adv. in Math. 2003. V. 173. P. 1–49.

[13] *Caspard N., Monjardet B.* The lattices of closure systems, closure operators, and implicational systems on a finite set: a survey // Disc. Appl. Math. 2003. V. 127, No. 2. P. 241–269.

[14] *Nation J.B.* Closure operators and lattice extensions // Order. 2004. V. 21. P. 43–48.

[15] *Adaricheva K.V., Nation J.B.* Largest extension of a finite convex geometry // Algebra Universalis. 2004. V. 52. P. 185–195.

[16] *Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В.* Дискретная математика: Учебник. — М.: ИНФРА-М, Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005, 2007, 2009.

[17] *Baldwin J.T.* Problems on 'Pathological' Structures / Preprint. University of Illinois at Chicago, 1997.

[18] *Baldwin J.T.* Stable amalgamation. Dedicated to the memory of A.I.Maltsev / Preprint. Univ. of Illinois at Chicago, 2000.

[19] *Poizat B.* Amalgames de Hrushovski. Une tentative de classification // Tits buildings and the model theory of groups (Würzburg, 2000). London Math. Soc. Lecture Notes Ser., 291. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002. — P. 195–214.

[20] *Судоплатов С.В.* Полные теории с конечным числом счетных моделей. II // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, №3. С. 314–353.

[21] *Судоплатов С.В.* Модели кубических теорий // Статья сдана в журнал "Алгебра и логика" в 2009 г.

[22] *Herwig B.* Weight ω in stable theories with few types // J. Symbolic Logic. 1995. V. 60, No. 2. P. 353–373.

[23] *Судоплатов С.В.* Малые стабильные генерические графы с бесконечным весом. Двудольные орграфы // Матем. труды. 2006. Т. 9, № 2. С. 154-171.

ТЕОРЕМА О СВОБОДЕ ДЛЯ ЦЕНТРАЛЬНО-РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Н.С. Романовский

Институт математики им.
С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: rmnvski@math.nsc.ru

Е.И. Тимошенко*

Новосибирский государственный
архитектурно-строительный
университет,
Россия, 630008, г. Новосибирск,
ул. Ленинградская, 113
e-mail: etim@sibstrin.ru

1. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА О СВОБОДЕ.

Обозначим через $\mathbf{Ç}_p$ многообразие центрально p-разрешимых групп, $p \geq 2$, то есть многообразие всех групп G, удовлетворяющих тождеству $[G^{(p)}, G] = 1$, где $G^{(p)}$ p-ый коммутант группы G.

Пусть $F(\mathbf{Ç}_p)$ свободная группа этого многообразия ранга $n \geq 2$. Известно ([1], следствие 8.6), что периодическая часть группы $F(\mathbf{Ç}_p)$ содержится в центре. Она является вполне характеристической и, следовательно, вербальной подгруппой. Значит фактор группа $F(\mathbf{Ç}_p)$ по ее периодической части является свободной группой некоторого многообразия, которое мы обозначим через $\Re_p$.

Группа $F(\Re_p)$ имеет представление матрицами порядка три [2],[3]. Напомним это представление. Пусть $\{x_1, ..., x_n\}$ базис группы $F(\Re_p)$. Обозначим через A свободную разрешимую группу ранга n ступени разрешимости $p-1$ с базисом $\{a_1, ..., a_n\}$. Пусть T свободный правый $\mathbf{Z}A$-модуль с базисом $\{t_1, ..., t_n\}$, $\overline{T}$ свободный $\mathbf{Z}A$-модуль с базисом $\{\overline{t_1}, ..., \overline{t_n}\}$, $T \otimes \overline{T}$ их тензорное произведение. Обозначим

$$M(A, T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{T} & A & 0 \\ T \otimes \overline{T} & T & 1 \end{pmatrix}$$

Отображение

†Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 09-01-00099

$$\kappa : x_i \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{t_i} & 1 & 0 \\ 0 & t_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, ..., n,$$

задает вложение группы $F(\Re_p)$ в группу матриц $M(A, T)$. Обозначим чертой антиавтоморфизм группы A, отображающий элемент $a \in A$ в обратный $\overline{a} = a^{-1}$. Отображение $t_i \to \overline{t_i}$ вместе с вышеуказанным антиавтоморфизмом определяют антиавтоморфизм $\mathbf{Z}A$-модулей T и $\overline{T}$. Для элемента $t \in T$ обозначим через $\bar{t}$ его образ при этом антиавтоморфизме . Легко проверить, что если унитреугольная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ * & u' & 1 \end{pmatrix},$$

где $u \in \overline{T}, u' \in T$, представляет некоторый элемент из $F(\Re_p)$, то $u = \overline{u'}$.

При доказательстве обобщенной теоремы о свободе [4] фактически получено доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть F свободная группа с базисом $\{f_1, ..., f_n\}, \quad r_1, ..., r_m$ некоторые элементы из $F, \quad n \geq m, \quad p$ целое положительное число. Существует $p-$ ступенно разрешимая группа B и гомоморфизм $\varphi : F \to B$, обладающие следующими свойствами:

(1) Группа B обладает разрешимым рядом длины p с абелевыми факторами без кручения.

(2) Элементы $r_1, ..., r_m$ лежат в ядре гомоморфизма φ.

(3) Среди элементов $\{f_1\varphi, ..., f_n\varphi\}$ можно выбрать $n - l$ элементов $(nl \leq m)$ так, что они порождают свободную группу многообразия $p-$ ступенно разрешимых групп ранга $n - l$.

(4) Пусть для определенности элементы $b_j = f_j\varphi, \quad j = l + 1, ..., n$, порождают свободную $p-$ ступенно разрешимую группу. Обозначим через T' свободный $\mathbf{Z}B-$ модуль с базой $\{\tau_1, ..., \tau_n\}$ и рассмотрим гомоморфизм Магнуса

$$f_i \to \begin{pmatrix} b_i & 0 \\ \tau_i & 1 \end{pmatrix}, i = 1, ..., n.$$

Образом нормальной подгруппы $< r_1, ..., r_m >^F$ является подгруппа

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U & 1 \end{pmatrix}, i = 1, ..., n,$$

где U является $\mathbf{Z}B-$ подмодулем из T'.

Тогда объединение максимальной линейно независимой системы элементов из U с элементами $\{\tau_{l+1},...,\tau_n\}$ дает максимальную линейно независимую систему элементов из T'.

Заметим, что в силу (1) кольцо $\mathbf{Z}B$ обладает условиями Оре и потому вкладывается в (правое) тело частных. Из теоремы 1 можно получить следующее

Следствие. Пусть A свободная $(p-1)-$ ступенно разрешимая группа, $p \geq 2$, с базисом $\{a_1,...,a_n\}$, $r_1,...,r_m$, $m \leq n$, элементы из свободной группы $F(\Re_p)$ и $\{x_1,...,x_n\}$ ее базис. Тогда существует группа B, порожденная элементами $\{b_1,...,b_n\}$ и гомоморфизм $\phi : A \to B$, при котором $a_i\phi = b_i$, обладающие следующими свойствами:

1) Группа B обладает разрешимым рядом длины $p-1$ с абелевыми факторами без кручения.

(2) Среди элементов $\{b_1,...,b_n\}$ можно выбрать $n-l$ элементов $(l \leq m)$ так, что они порождают свободную группу многообразия $(p-1)-$ ступенно разрешимых групп ранга $n-l$.

(3) Пусть для определенности элементы $b_{l+1},...,b_n$ порождают свободную группу ранга $n-l$ из многообразия $(p-1)-$ разрешимых групп. Обозначим через E свободный правый $\mathbf{Z}B-$ модуль с базой $\{e_1,...,e_n\}$, а через $\overline{E}$ свободный правый $\mathbf{Z}B-$ модуль с базой $\{\overline{e_1},...,\overline{e_n}\}$. Антиавтоморфизм между E и $\overline{E}$ индуцируется отображениями $e_i \to \overline{e_i}$, $b \to b^{-1}$, $b \in B$. Группа матриц

$$M(B,E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{E} & B & 0 \\ E \otimes \overline{E} & E & 1 \end{pmatrix}$$

является гомоморфным образом группы $M(A,T)$ при гомоморфизме, индуцированном $A \to B$, $t_i \to e_i$, $\overline{t_i} \to \overline{e_i}$. Образами элементов r_j из $F(\Re_p)$ в группе матриц $M(B,E)$ являются матрицы вида

$$r_j\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{u_j} & 1 & 0 \\ * & u_j & 1 \end{pmatrix}, \ j = 1,...,m.$$

Пусть U правый $\mathbf{Z}B-$ подмодуль из E, порожденный элементами $\{u_1,...,u_m\}$, $\overline{U}$ его антиизоморфный образ в $\overline{E}$, то есть левый $\mathbf{Z}B-$ подмодуль из $\overline{E}$, порожденный элементами $\{\overline{u_1},...,\overline{u_m}\}$. Тогда максимальная линейно независимая система элементов из U $(\overline{U})$, дополненная элементами $\{e_{l+1},...,e_n\}$ $(\{\overline{e_{l+1}},...,\overline{e_n}\})$, составляет максимальную линейно независимую систему элементов модуля $E(\overline{E})$.

Теорема 2. Пусть $G =< x_1, ..., x_n | r_1, ..., r_m, \ \Re_p >, \ n > m, \ n-$ порожденная группа с m определяющими соотношениями в многообразии $\Re_p, \ p \geq 2$. Тогда некоторые $n-m$ элементов из множества $\{x_1, ..., x_n\}$ порождают $\Re_p-$ свободную подгруппу ранга $n-m$.

Доказательство. Пусть R нормальное замыкание в $F(\Re_p)$ свободной группе ранга n многообразия $\Re_p$ элементов $r_1, ..., r_m$. Группу $F(\Re_p)$ вложим в группу матриц $M(A, T)$, используя вложение κ. Гомоморфно отобразим группу $M(A, T)$ на группу $M(B, E)$, как это указано в следствии, оставляя за гомоморфизмом обозначение ϕ.

Обозначим через $\mathbf{P}$ (правое) тело частных кольца $\mathbf{Z}B$. Тогда $E_{\mathbf{P}} = E \otimes \mathbf{P}$ правое векторное пространство над $\mathbf{P}$, а $\overline{E_{\mathbf{P}}} = \mathbf{P} \otimes \overline{E}$ левое векторное пространство над телом $\mathbf{P}$. Группу $M(B, E)$ вложим в группу

$$M(\mathbf{P}, B, E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{E_{\mathbf{P}}} & B & 0 \\ E_{\mathbf{P}} \otimes \overline{E_{\mathbf{P}}} & E_{\mathbf{P}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Подмодуль U порождает в $E_{\mathbf{P}}$ правое подпространство $U_{\mathbf{P}}$, а $\overline{U}$ левое подпространство $\overline{E_{\mathbf{P}}}$, которое обозначим $\overline{U_{\mathbf{P}}}$. На основании следствия можно утверждать, что $E_{\mathbf{P}} = U_{\mathbf{P}} \oplus E_{1\mathbf{P}}$, где $E_{1\mathbf{P}}$ правое подпространство, порожденное в $E_{\mathbf{P}}$ элементами $\{e_{l+1}, ..., e_n\}$. Аналогично, $\overline{E_{1\mathbf{P}}} = \overline{U_{\mathbf{P}}} \oplus \overline{E_{1\mathbf{P}}}$.

Рассмотрим гомоморфизмы $E_{\mathbf{P}} \to E_{1\mathbf{P}}$ и $\overline{E_{\mathbf{P}}} \to \overline{E_{1\mathbf{P}}}$ с ядрами $U_{\mathbf{P}}$ и $\overline{U_{\mathbf{P}}}$, соответственно.

С их помощью определим гомоморфизм матричных групп

$$\psi : M(\mathbf{P}, B, E) \to M(\mathbf{P}, B, E_1),$$

где

$$M(\mathbf{P}, B, E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{E_{1\mathbf{P}}} & B & 0 \\ E_{1\mathbf{P}} \otimes \overline{E_{1\mathbf{P}}} & E_{1\mathbf{P}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что гомоморфизм $\phi\psi : M(A, T) \to M(\mathbf{P}, B, E_1)$ является вложением на подгруппе, порожденной элементами $\{x_{l+1}, ..., x_n\}$.

Пусть R_1 обозначает нормальную подгруппу из $M(B, E_1)$, порожденную элементами $r_1\phi, ..., r_m\phi$.

Предположим, что элемент h принадлежит пересечению подгрупп $\{x_{l+1}, ..., x_n\}$ и R. Тогда $h\phi \in R_1$. Так как пересечение подпространств $U_{\mathbf{P}}$ и $E_{1\mathbf{P}}$ тривиально, то $h\phi$ элемент из центральной подгруппы $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ E_{\mathbf{P}} \otimes \overline{E_{\mathbf{P}}} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент из R_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{u} & 1 & 0 \\ * & u & 1 \end{pmatrix},$$

где $u = u_1\lambda_1 + ... + u_m\lambda_m, \ \lambda_j \in \mathbf{Z}B$, а $\overline{u}$ антиизоморфный образ элемента u в модуле $\overline{E}$. Как мы только что заметили, для матриц из $R_1 \cap < x_{l+1}, ..., x_n > \phi$ элементы u и $\overline{u}$ равны нулю.

Множество последовательностей $(\lambda_1, ..., \lambda_m), \ \lambda_j \in \mathbf{Z}B$, для которых $u_1\lambda_1 + ... + u_m\lambda_m = 0$ образуют правый $\mathbf{Z}B-$ модуль Λ. Тривиализация $\varepsilon : \mathbf{Z}B \to \mathbf{Z}$ индуцирует гомоморфизм Λ на $\mathbf{Z}-$ модуль $\Lambda\varepsilon \leq \mathbf{Z}^m$. Так как группа B обладает разрешимым рядом с абелевыми факторами без кручения, то любая линейно независимая система элементов $\mathbf{Z}-$ модуля $\Lambda\varepsilon$ поднимается до линейно независимой системы элементов $\mathbf{Z}B-$ модуля Λ. Так как $dim(U_{\mathbf{P}}) = l$ и $dim(U_{\mathbf{P}}) + dim(\Lambda_{\mathbf{P}}) = m$, то максимальная линейно независимая система элементов из $\Lambda\varepsilon$ содержит не более $m - l$ элементов.

Пусть $(\lambda_{j1}, ..., \lambda_{jm}), \ j = 1, ..., m - l$, такая система элементов из Λ, что их образы в $\mathbf{Z}^m$ при тривиализации ε порождают $\mathbf{Z}-$ модуль $\Lambda\varepsilon$.

Так как $[r_i\phi, r_j\phi] \in ker\psi \cap \mathbf{C}$, то

$$h\phi \equiv (r_1\phi)^{\lambda_1} ... (r_m\phi)^{\lambda_m} \ \ (mod \ \ ker\psi \cap \mathbf{C}).$$

Так как $h\phi \in \mathbf{C}$, то $(\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \Lambda$.

Определим элементы $y_1, ..., y_{m-l}$ из группы $M(\mathbf{P}, B, E_1)$ следующим образом

$$y_j = (r_1\phi\psi)^{\varepsilon(\lambda_{j1})} ... (r_m\phi\psi)^{\varepsilon(\lambda_{jm})}, \ \ j = 1, .., m - l.$$

Матрица y_j имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ v_j & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \ j = 1, ..., m - l,$$

где v_j элементы из тензорного $E_{1\mathbf{P}} \otimes \overline{E_{1\mathbf{P}}}$.

На тензорном произведении $E_{1\mathbf{P}} \otimes \overline{E_{1\mathbf{P}}}$ можно задать структуру правого векторного пространства над телом $\mathbf{P}$ следующим образом. Каждый элемент абелевой группы $E_{1\mathbf{P}} \otimes \overline{E_{1\mathbf{P}}}$ однозначно записывается в виде суммы элементов вида $e_i \otimes \alpha\overline{e_j}$, где $1 \leq i, \ j \leq n - l, \ \alpha \in \mathbf{P}$. Умножение такого элемента на элемент $\beta \in \mathbf{P}$ определим по правилу

$(e_i \otimes \alpha\overline{e_j})\beta = e_i \otimes \alpha\beta\overline{e_j}$. Так определенное векторное пространство имеет над $\mathbf{P}$ базу $e_i \otimes \overline{e_j},\ \ 1 \le i,\ \ j \le n-l$.

Элементы $v_1, ..., v_{m-l}$ порождают подпространство V пространства $E_{1\mathbf{P}} \otimes \overline{E_{1\mathbf{P}}}$.

Среди индексов $\{l+1, ..., n\}$ можно выбрать $n-m$ индексов, например, $\{m+1, ..., n\}$ как, что элементы

$$e_i \otimes \overline{e_j},\ \ m+1 \le i,\ \ j \le n$$

линейно независимы по модулю подпространства V.

Обозначим через π канонический гомоморфизм

$$\pi : M(\mathbf{P}, B, E_1) \to M^*(\mathbf{P}, B, E_1),$$

где

$$M^*(\mathbf{P}, B, E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{E_{1\mathbf{P}}} & B & 0 \\ (E_{1\mathbf{P}} \otimes \overline{E_{1\mathbf{P}}})/V & E_{1\mathbf{P}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что отображение $\phi\psi\pi : M(a, T) \to M^*(\mathbf{P}, B, E_1)$ является вложением на подгруппе $H =< x_{m+1}, ..., x_n >$.

Пусть $r \in H \cap R$. Как было отмечено ранее тогда

$$r\phi\psi \equiv (r_1\phi\psi)^{\lambda_1}...(r_m\phi\psi)^{\lambda_m} \equiv (r_1\phi\psi)^{\varepsilon(\lambda_1)}...(r_m\phi\psi)^{\varepsilon(\lambda_m)} \equiv y_1^{\alpha_1}...y_{m-l}^{\alpha_{m-l}}\ \ (mod\ ker\psi \cap \mathbf{C})$$

для некоторых $\alpha_j \in \mathbf{Z}$. Так как

$$y_1^{\alpha_1}...y_{m-l}^{\alpha_{m-l}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ v_1\alpha_1 + ... + v_{m-l}\alpha_{m-l} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то $r\phi\psi\pi = 1$, что противоречит $ker(\phi\psi\pi) \cap H = 1$. Теорема доказана.

2. ТЕОРЕМА О СВОБОДЕ ДЛЯ ГРУПП С ОДНИМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ СООТНОШЕНИЕМ.

В [3] была доказана первым авторам следующая теорема о свободе для групп с одним определяющим соотношением.

Теорема 3. Пусть Пусть Φ свободная разрешимая группа с базисом $\{y_1, ..., y_n\}, n \ge 3$. Пусть $r \in \Phi^{(l-1)} \setminus \Phi^{(l)}$ и $\widehat{r}$ получается из r вычеркиванием y_1. Если (и только если) r не сопряжено с $\widehat{r}$ по модулю $\Phi^{(l)}$, то элементы $\{y_2, ..., y_n\}$ порождают по модулю соотношения $r = 1$ свободную разрешимую группу той же ступени, что и Φ.

Покажем, что для многообразия $\Re_p$ теорема о свободе для групп с одним определяющим соотношением неверна, точнее, в группе $G = F_m(\Re_p)$, $m \geq 3$ с базисом $\{x_1, ..., x_n\}$ мы выберем элемент $r \in G^{(p-1)} \backslash G^{(p)}$ такой, что элементы r и $\widehat{r}$ (получается вычеркиванием x_1) не сопряжены по модулю $G^{(p)}$, но группа, порожденная элементами $\{x_2, ..., x_n\}$ не является свободной в многообразии $\Re_p$ по модулю соотношения $r = 1$.

При построении элемента r мы будем использовать следующий факт, доказанный в [3]:

Пусть u элемент из $G^{(p-1)} \backslash G^{(p)}$ α, β элементы из кольца $\mathbf{Z}(G/G^{(p-1)})$, черта означает инволюцию $x \to x^{-1}$, $x \in G$. Продолжим инволюцию на кольцо $\mathbf{Z}(G/G^{(p-1)})$. В группе G выполняется $[u^\alpha, u^\beta] = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha\overline{\beta} = \beta\overline{\alpha}$.

Выберем элемент u из $G^{(p-1)} \setminus G^{(p)}$, не зависящий от x_1. В качестве r рассмотрим элемент $r = u^{x_1} u^{x_1^{-1}} u^{x_2}$.

Покажем, что элементы r и $\widehat{r}$ не сопряжены по модулю $G^{(p)}$, то есть не сопряжены в свободной разрешимой группе $F/F^{(p)}$. Предположим обратное, то есть $r = \widehat{r}^g$ для некоторого $g \in F/F^{(p)}$. Но тогда в кольце $\mathbf{Z}F/F^{(p-1)}$ выполняется равенство $(x_1 + x_1^{-1} + x_2)g = 2 + x_2$, которое на самом деле невозможно при любом $g \in F/F^{(p-1)}$.

Рассмотрим элемент $[r, u]$ из нормальной подгруппы, порожденной элементом r. Докажем, что этот элемент не равен 1. Так как $[r, u] = [u^{x_1 + x_1^{-1} + x_2}, u]$, то достаточно проверить, что условие $\alpha\overline{\beta} = \beta\overline{\alpha}$ не выполняется. Действительно, $\alpha\overline{\beta} = x_1 + x_1^{-1} + x_2$ $\beta\overline{\alpha} = x_1 + x_1^{-1} + x_2^{-1}$ и, следовательно, $\alpha\overline{\beta} \neq \beta\overline{\alpha}$.

Осталось только заметить, что неединичный элемент $[r, u]$ не содержит x_1. Действительно

$$[r, u] = [u^{x_1 + x_1^{-1} + x_2}, u] = [u^{x_1 + x_1^{-1}}, u][u^{x_2}, u].$$

Но $[u^{x_1 + x_1^{-1}}, u] = 1$, так как $\overline{x_1 + x_1^{-1}} = x_1 + x_1^{-1}$, то есть элемент r удовлетворяет всем условиям для контрпримера к теореме о свободе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю.В. Кузьмин, Гомологическая теория групп, Москва, Факториал Пресс, (2006), Advanced Studies in Mathematics, выпуск 1.

[2] Ю.В. Кузьмин, Строение свободных групп некоторых многообразий, Мат. сборник, 125(167), №1(9) (1984), 128-142.

[3] Е.И. Тимошенко, Использование производных Фокса для исследования групп вида $F/[R', F]$, Алгебра и логика, 45, №1 (2006), 114-125.

[4] Н.С. Романовский, Свободные подгруппы в конечно порожденных группах, Алгебра и логика, 16(1977) 88-97.

[5] Н.С. Романовский, Теорема о свободе для групп с одним определяющим соотношением в многообразиях разрешимых и нильпотентных групп данной ступени, Мат. сборник, 89(131), №1(9) (1972), 93-99.

Abstracts

K.A. Baikalova. *On Some Hypergraphs Of Prime Models And Limit Models Generated By That Hypergraphs.*

Hypergraphs of prime models of elementary theories are considered. An existence of hypergraphs of minimal prime models for arbitrary given diameter is stated. Hypergraphs of prime models for series of concrete classes of theories, as well as limit models, generated by that hypergraphs, are described.

A.N. Borodin. *On i-Decomposition Of n-Groupoids.*

A criterion of i-decomposibility of n-grouppoids is given.

O.V. Bryukhanov. *Matrix Representability Of Finitely Generated Groups.*

The paper gives a criterion for linearity over the field for finitely generated groups. The criterion based on they are super-residually matrix groups of fixed degree over some commutative associative rings.

A.V. Chekhonadskikh. *Critical root zones and reduction of simplex graphs of real polynomials.*

We consider geometric and graph structures which reflect location of real polynomial roots in complex space. This allows to apply optimization to the problem of placing of roots in technical applications. Numerical approximation of location of characteristic roots allows us to partition their set such that in each part we can define real coordinates for roots. The appearing structure of root simplex is analogue of geometrical complex. Structure of areas and bounds of simplex is described with direct and indirect graphs. Relocation of roots to the desired area is made by minimization of that bound as an objective function depends of regulator parameters. Critical areas are described by reduced graphs.

V.A. Churkin. *The crystallographic group with 2^n pseudo-euclidean lattices.*

Let G be a crystallographic group of pseudo-euclidean space $R^{3,3}$ isometries generated by a pair of distinct pseudo-euclidean lattices of rank 6. We show that G contains exactly two pseudo-euclidean lattices (theorem 1). We describe all the automorphisms of the group G and the group $\operatorname{Aut} G$ (theorem 2). We prove that G^n contains exactly 2^n pseudo-euclidean lattices (theorem 3).

E.V. Ovchinnikova. 1-*Homogeneous Extensions Of Finite Predicate Systems.*

It is shown that any finite m-element predicate system, where any two one-element subsystems are isomorphic, is embeddable into a system of cardinality at most $4m^2 - 6m + 3$ with a transitive automorphism group.

E.A. Palyutin. *Non-Commutative Stable Theories Of Frechet-Powers Are Non-Classifiable.*

The basic result of the work is the theorem that if an axiomatizable class K of structures is closed under reduced powers by the Frechet filter and it has the stable non-commutative theory, then the class of all graphs is interpretable in the class K. It follows, that there is no hope to get for such classes any deep classifiable results.

A.G. Pinus. *On Geometrically Close Algebras.*

We introduce a few notions that capture a relation of nearly of algebraic geometries of universal algebras along with a know notion of geometrical equivalence. We give an analysis of relations of these notions.

A.M. Popova, E.V. Grachev. *Authomorphisms Group Of Ring* $ZSL_2(3)$.

We present the description of the group of automorphisms of the ring $ZSL_2(3)$ in the terms of semi-direct products.

E.N. Poroshenko. *Gröbner—Shirshov Basis For The Onsager Algebra.*

In this paper, a Gröbner—Shirshov basis for the Onsager algebra is constructed.

M.A. Rusaleev. (P, a)-*Stable And* (P, a)-*Unstable Groups.*

The work is devoted to investigation of properties of E^*-stable theories, in particular it contains examples of (P, a)-stable and (P, a)-unstable groups.

A.A. Kuznetsov, A.K. Shlepkin. *On A Method Of Comparison Of Bernside Groups* $B(2, 5)$ *and* $B_0(2, 5)$.

We consider a method of comparison of Bernside groups $B(2, 5)$ and $B_0(2, 5)$.

I.V. Shulepov. *Quotients Of Sequences By Sets Of Word Identities And Limit Models.*

Quotients of sequences by sets of word identities are investigated for the construction of given number of limit models, that defined by the number of connected components of undirected graph on the correspondent factor-set.

S.V. Sudoplatov. *On The Finite Closure Property For Fusions Of Generic Classes.*

The problem on existence of fusion for generic classes with finite closures, for which all models have finite closures, is investigated. Sufficient conditions for positive solution of that problem are found.

N.S. Romanovskii and E.I. Timoshenko. *A Freiheitssatz For Centre-By-Soluble Groups.*

We say that the generalized Freiheitssatz holds in a variety $\mathbb{M}$ if in any group $G =< x_1, ..., x_n; r_1, ..., r_m, \mathbb{M} >$, with $n > m$, some subset consisting of $n - m$ elements of the set $\{x_1, ..., x_n\}$ generates a free $\mathbb{M}-$group. We proved that the generalized Freiheitssatz is true for centre-by-soluble groups.

Contents