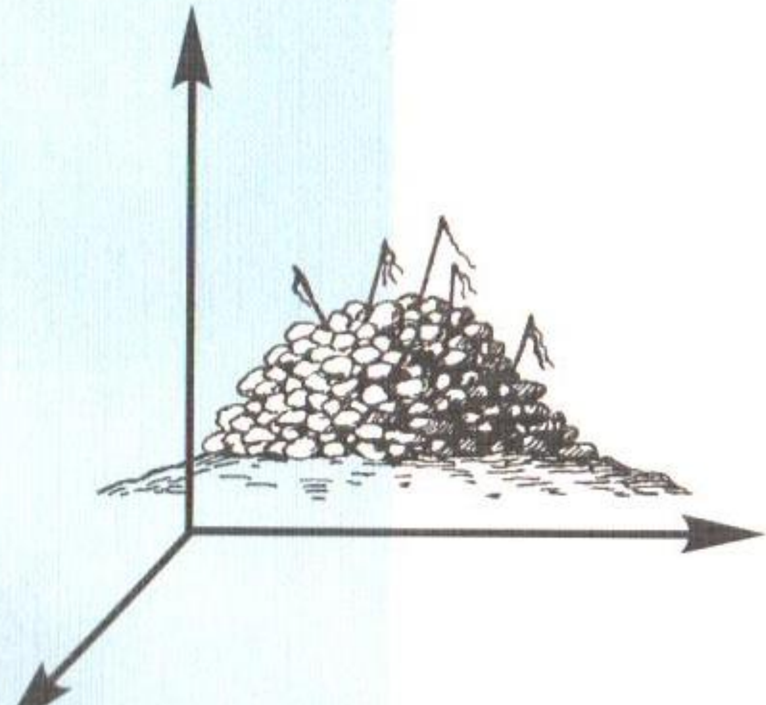
АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ 3



НОВОСИБИРСК
2001

Novosibirsk State Technical University

Algebra and Model Theory 3

Collection of papers
edited by A.G. Pinus and K.N Ponomaryov

Novosibirsk
2001

УДК 512(06)
А 35

А 35 Algebra and Model Theory. Collection of papers. Edited by A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov. Novosibirsk State Technical University, 2001/ – 162 p.

ISBN 5-7782-0175-3

The papers in this book are devoted to some problems of algebra and model theory.

Technical editor I. D. Tchernykh.

ISBN 5-7782-0175-3 УДК 512(06)

Introduction

Algebra and Model theory 3

The Fourth Summer School "Intermediate problems of Model Theory and Universal Algebra was held on 25-29 June 2001 in the camping center "Erlogol"on Altai mountains. The School was organized by Algebra and Math Logic department of Novosibirsk State Technical University (NSTU). It was supported by Russian Fund of Basic Researches. Forty six participants of the conference were investigators, PhD and graduate students from Britain, Brazil, Czech republic, Estonia, France, Kirghizia, Netherlands, Russia and Turkey.

The book is composed from some articles of the participants. Organizing Committee of the conference thanks director of Institute of Distant Education doc. V.Yu.Kalpus for financial support of this edition.

Chairmen of Organizing Committee:

prof. A.G. Pinus (NSTU, Novosibirsk, Russia).

Organizing Committee:

prof. V.D. Mazurov (Math. Institute, Novosibirsk, Russia)
prof. E.A. Palyutin (Math. Institute, Novosibirsk, Russia)
prof. K.N. Ponomarev (NSTU, Novosibirsk, Russia)
dr. S.V. Sudoplatov (NSTU, Novosibirsk, Russia)

Erlogol 2001

INTERMEDIATE PROBLEMS OF MODEL THEORY AND UNIVERSAL ALGEBRA (JUNE, 24–30)

June 25. Chairman Yu.L. Ershov

A. Glass (*Queens' College, Cambridge, England*),
N.Ja. Medvedev (*Altai State University, Barnaul, Russia*).
Conjugacy and Undecidability in Automorphisms Groups.

I. Chajda (*University of Olomouc, Olomouc, Czech Republic*).
Ternary Deductive Systems in Universal Algebra.

F. Wehrung (*University of Caen, Caen, France*).
Recent Results on Congruence Lattice Representations of Lattices.

Chairman K.N. Ponomarev

Yu.L. Ershov (*Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*).
Model Theory of Multiply Valued Fields.

A.S. Morozov (*Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*).
On Computable Automorphisms of the Rational Ordering.

K. Kaarli (*University of Tartu, Tartu, Estonia*).
Endoprimal Algebras.

R. Halas (*University of Olomouc, Olomouc, Czech Republic*).
Ortomodular Implication Algebras.

V.M. Kopytov (*Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*),
I. Rachunek (*University of Olomouc, Olomouc, Czech Republic*).
The Largest Proper Variety of m-groups.

June 26. Chairman A. Glass

N.Ya. Medvedev (*Altai State University, Barnaul, Russia*).
Orders on Artin Braid Groups and Groups of Automorphisms.

S.V. Sudoplatov (*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*).
Powerful Types in Stable Theories.

K.N. Ponomarev (*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*).
On the Notion of Centroid for Near-rings.

Chairman A.S. Morozov

E. Hoogland (*University of Amsterdam, Amsterdam, Netherlands*).
A General Picture of Definability.

V.D. Mazurov (*Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*).
Frobenius groups.

I. Rachunek (*University of Olomouc, Olomouc, Czech Republic*).
Connections Between Non-commutative Generalizations of MV-algebras and l-groups.

M. Terziler (*Ege University, Izmir, Turkey*).
On the Additive Group Structure of Non-standard Models of the Theory of Integers.

A.V. Kravchenko (*Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*).
New Results on Q-universal Quasivarieties and Varieties.

June, 27. Chairman K. Kaarli

A. Grishkov (*University of San Paolo, San Paolo, Brasil*).
Modular Algebras and Algebras with Triality.

A.G. Pinus (*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*).
Elementary Equivalence of Derived Structures and Second Order Equivalence of Cardinals.

B.M. Vernikov (*Ural State University, Ekaterinburg, Russia*).
Quasy-identities in Lattices of Semigroup Varieties.

Chairman M. Terziler

E.I. Timoshenko (*Novosibirsk State University of Architecture and Construction, Novosibirsk, Russia*).

On the Test Rang of Some Free Polynilpotent Groups.

A.M. Nurakunov (*Academy of Sciences of Kyrgizia, Bishkek, Kyrgizsia*).

Varieties and Quasivarieties Defined by Non-embedding of Finite Lattices.

A.V. Chekhonadskikh (*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*).

On Matrix Diophantine Equations with Polynomial Elements: Robustness and Optimization of Solutions.

S.I. Mardaev (*Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*).

Fixed Points in Preorderes Models.

A. Yushenko (*Omsk State University, Omsk, Russia*).

Lie Algebras over Rings.

June, 29. Chairman E.I. Timoshenko

A. Glass (*Queens' College, Cambridge, England*).

Central Orders of Linear Groups.

V.G. Puzarenko (*Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*).

Some Results on Model Theory of HF-language.

A. Protopopov (*Altai State University, Barnaul, Russia*).

On Convex Subgroups of Partial Right Ordered Groups.

N.V. Bayanova, N.Ya. Medvedev (*Altai State University, Barnaul, Russia*).

Free Vector Lattices with Two Generators.

A.V. Zenkov (*Altai State University, Barnaul, Russia*).

Partial Orders of Groups of Automorphisms of Ratioanls.

Chairman S.V. Sudoplatov

A.M. Ivleva-Popova, I.D. Tchernykh (*Novosibirsk State Technical University, Novosibirk, Russia*).

Units of Integral Group Rings.

S.V. Zhurkov (*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*).

On the Structure of the Computability Scales of n-element Algebras.

A.I. Stukachyov (*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*).

Σ-sets and Σ-regular Families.

M.V. Semenova (*Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*).

Irredundant Decompositions in Complete Lattices.

ГРУППА АВТОМОРФИЗМОВ СВОБОДНОЙ ВЕКТОРНОЙ РЕШЕТКИ

Н.В.Баянова*

Математический факультет,
Алтайский государственный
университет,
Барнаул, 656099, Россия
e-mail: bayanova@math.dcn-asu.ru

Н.Я.Медведев

Математический факультет,
Алтайский государственный
университет,
Барнаул, 656099, Россия
e-mail: medvedev@math.dcn-asu.ru

1 Введение

Традиционно, через $\mathbf{R}$ мы обозначаем множество действительных чисел. Все неопределяемые в работе понятия теорий решеточно упорядоченных групп, групп и векторных решеток можно найти в книгах [2], [3] и [4] соответственно.

Конусом в $\mathbf{R}^n$ называется подмножество K из $\mathbf{R}^n$, содержащее начало координат и инвариантное относительно умножения на положительные действительные числа. Замкнутым полиэдральным конусом назовем подмножество K из $\mathbf{R}^n$, если оно является положительным замыканием конечного множества векторов из $\mathbf{R}^n$, т.е., $K = \mathbf{R}^+u_1 + \cdots + \mathbf{R}^+u_t$. Такой конус назовем симплициальным, если вектора $u_1, \ldots, u_t$ линейно независимы. Число t в этом случае называют размерностью конуса. Комплексом симплициальных конусов в $\mathbf{R}^n$ называется конечное множество Σ симплициальных конусов в $\mathbf{R}^n$ такое, что

1) если $K \in \Sigma$, то любая грань A также лежит в Σ;

2) если $K_1, K_2 \in \Sigma$, то $K_1 \bigcap K_2$ является общей гранью для K_1 и K_2.

Для $0 \le k \le n$, через $\Sigma(k)$ обозначим множество k-размерных конусов из Σ. Комплекс Σ назовем полным, если $\bigcup\{K | K \in \Sigma\} = \mathbf{R}^n$ (см. [5]).

Функция $f : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ называется кусочно-линейной если f является непрерывной и существует конечное число линейных функционалов $f_1, f_2, \ldots, f_s : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$, и полный комплекс Σ такой, что $\Sigma(n) = \{K_1, \ldots, K_s\}$ и $(\bar{x})f = (x)f_i$ для всех $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K_i \subset \mathbf{R}^n$.

*Работа поддержана Фондом РФФИ (грант 99-01-00156)

Рассмотрим множество $PWL(n)$ всех непрерывных кусочно-линейных действительно-значных функций, определенных на $\mathbf{R}^n$. Определим на множестве $PWL(n)$ операции $+, -, 0, \vee, \wedge$, полагая:

1) $(\bar{x})(f + g) = (\bar{x})f + (\bar{x})g$;

2) $(x)(f \vee g) = max((x)f, (\bar{x})g)$;

3) $(\bar{x})(f \wedge g) = min((\bar{x})f, (\bar{x})g)$;

4) $(\bar{x})(\alpha f) = \alpha(\bar{x})f$, для любого $\alpha \in \mathbf{R}$.

Непосредственная проверка показывает, что множество $PWL(n)$ с определенными операциями является векторной решеткой и порождается координатными проекциями $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, где

$$(\bar{x})\pi_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\pi_1 = x_1,$$

$$(x)\pi_2 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\pi_2 = x_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(x)\pi_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\pi_n = x_n.$$

Хорошо известно, что свободная векторная решетка $FVL(n)$ с n порождающими, где n- произвольное натуральное число, совпадает векторной решеткой $PWL(n)$ (см. [6, 7, 8]).

Функцию g, отображающую $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}^n$ назовем ℓ-отображением, если существуют $w_1, w_2, \ldots, w_n \in FVL(n)$ такие, что

$$(\bar{x})g = (x_1, x_2, \ldots, x_n)g = ((x)w_1, (\bar{x})w_2, \ldots, (x)w_n).$$

Предложение 1.1 *Всякое ℓ-отображение g представимо в виде $((K_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (K_m, \mathcal{A}_m))$, где $\mathcal{A}_i$ – линейное преобразование, действующее на симплициальном конусе K_i размерности n и $\bigcup_{i=1}^m K_i = \mathbf{R}^n$, кроме того $\mathcal{A}_{i+1} \neq \mathcal{A}_i$ $(i = 1, \ldots, m-1)$.*

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 1.1 работы [1]. □

Доказательство следующего утверждения проводится непосредственно.

Предложение 1.2 *Если $g = ((K_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (K_m, \mathcal{A}_m))$ взаимно однозначное ℓ-отображение, то обратное отображение g^{-1} также является ℓ-отображением и представимо в виде*

$$g^{-1} = (((K_1)\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1^{-1}), \ldots, ((K_m)\mathcal{A}_m, \mathcal{A}_m^{-1})). \ \square$$

Если $\mathcal{A}_\alpha$ – линейное преобразование $\mathbf{R}^n$, такое, что $(x)\mathcal{A}_\alpha = \alpha x$ $(\alpha \in \mathbf{R})$ для любого $x \in \mathbf{R}^n$, то ℓ-отображение $(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}_\alpha)$ будем обозначать g_α.

2 Представление ℓ-автоморфизмов свободной векторной решетки $FVL(n)$

Следующее утверждение является уточнением более общего утверждения, доказанного ранее В.Бейноном [9] (предложение 2.1) и проводится непосредственно.

Предложение 2.1 *Пусть φ – ℓ-автоморфизм свободной векторной решетки $FVL(n)$, тогда для любого $w \in FVL(n)$ $(w)\varphi = \hat{\varphi} \circ w$, где $\hat{\varphi}$– обратимое ℓ-отображение, определяемое ℓ-автоморфизмом φ. Обратно, для любого обратимого ℓ-отображения $\hat{\varphi}$, отображение $\varphi : FVL(n) \mapsto FVL(n)$, определенное по правилу $\varphi : w \mapsto \hat{\varphi} \circ w$ является ℓ-автоморфизмом свободной векторной решетки $FVL(n)$.* □

Несложно заметить, что множество GIM обратимых ℓ-отображений является группой относительно операции суперпозиции.

Предложение 2.2 *Группа ℓ-автоморфизмов $Aut(FVL(n))$ свободной векторной решетки $FVL(n)$ антиизоморфна группе GIM обратимых ℓ-отображений.*

Доказательство. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in Aut(FVL(n))$ и ω - произвольный элемент $FVL(n)$, по предложению 2.1 имеет место равенстю $(\omega)\varphi_1 = \hat{\varphi}_1 \circ \omega$. Тогда

$$(\bar{x})(\omega)\varphi_1 \circ \varphi_2 = (\bar{x})((\omega)\varphi_1)\varphi_2 = (\bar{x})\hat{\varphi}_2 \circ ((\omega)\varphi_1) =$$

$$(\bar{x})\hat{\varphi}_2 \circ ((\hat{\varphi}_1) \circ \omega) = (x)\hat{\varphi}_2 \circ \hat{\varphi}_1 \circ \omega.$$

Следовательно, $(\omega)\varphi_1 \circ \varphi_2 = (\hat{\varphi}_2 \circ \hat{\varphi}_1) \circ \omega$.□

Следующее утверждение, по-видимому, хорошо известно и доказывается непосредственно.

Предложение 2.3 *Пусть $A \in GL_n(\mathbf{R})$ и A не является скалярной матрицей. Тогда множество $A^{GL_n(\mathbf{R})}$ матриц, сопряженных с матрицей A в группе $GL_n(\mathbf{R})$ бесконечно.*

Теорема 2.4 *Центр группы ℓ-автоморфизмов $Aut(FVL(n))$ свободной векторной решетки $FVL(n)$ изоморфен мультипликативной группе положительных действительных чисел $\mathbf{R}^+$.*

Доказательство. По предложению 2.2, группа $Aut(FVL(n))$ антиизоморфна группе обратимых ℓ-отображений GIM. Покажем, что центр $C(GIM)$ изоморфен $\mathbf{R}^+$. По предложению 1.2 любое обратимое ℓ-отображение представимо в виде

$$g = ((K_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (K_m, \mathcal{A}_m)),$$

где $\mathcal{A}_i$ – невырожденное линейное преобразование, действующее на симплициальном конусе K_i размерности n и $\bigcup_{i=1}^m K_i = \mathbf{R}^n$. Матрицы A_i соответствующих линейных преобразований обратимы, поэтому для любого i справедливо $A_i \in GL_n(\mathbf{R})$. Пусть $g \in C(GIM)$ покажем, что в этом случае $g = (\mathbf{R}^n, \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ – линейное преобразование, матрица которого скалярна. Предположим, что существует хотя бы один индекс i $(1 \leq i \leq m)$, такой , что матрица A_i не является скалярной. Рассмотрим элемент $h = (\mathbf{R}^n, \mathcal{B}) \in GIM$, причем матрица B линейного преобразования $\mathcal{B}$ не является скалярной и $A_i^B \neq A_j$, для всех $j = 1, \ldots, m$. Выбор такого линейного преобразования $\mathcal{B}$ возможен в силу предложения 2.3. Тогда $g^h = g$, однако

$$g^h = (((K_1)\mathcal{B}^{-1}, \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}_1\mathcal{B}), \ldots, ((K_m)\mathcal{B}^{-1}, \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}_m\mathcal{B})) \neq$$

$$\neq ((K_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (K_m, \mathcal{A}_m)) = g.$$

Таким образом, показано, что если $g \in C(GIM)$, то матрицы линейных преобразований $\mathcal{A}_i$ скалярны. В силу непрерывности ℓ-отображения g следует, что $A_1 = \cdots = A_m$. Таким образом, если $g \in C(GIM)$, то $g = (\mathbf{R}^n, \mathcal{A})$ и матрица линейного преобразования $\mathcal{A}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \alpha \end{pmatrix} = A_\alpha, \ \alpha \in \mathbf{R}.$$

Отсюда $g = g_\alpha$.

Теперь покажем, что $g \notin C(GIM)$ при $\alpha < 0$. Определим ℓ-отображение $h = ((K_1, \mathcal{A}_1), (K_2, \mathcal{A}_2))$, где $K_1 = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R} |\ x_n \geq 0\}$ и $K_2 = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R} |\ x_n \leq 0\}$ и в стандартной системе координат матрицы линейных преобразований $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ t & 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

где $t \in \mathbf{R}$, $t > 0$,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K_1$. Тогда

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)h \circ g_\alpha = ((x_1, x_2, \dots, x_n)A_1)g_\alpha =$$

$$= ((x_1 + t \cdot x_n, x_2, \dots, x_n))g_\alpha =$$

$$= (x_1 + t \cdot x_n, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= (\alpha x_1 + t \cdot \alpha x_n, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Поскольку $\alpha < 0$, то $(\alpha x_1 + t \cdot \alpha x_n, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \in K_2$. С другой стороны

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)g_\alpha \circ h = ((x_1, x_2, \dots, x_n)A)h =$$

$$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)h = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Так как $\alpha < 0$, то $(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \in K_2$ и h действует на конусе K_2 тождественно. Таким образом показано, что $h \circ g_\alpha \neq g_\alpha \circ h$. Поэтому, если $\alpha < 0$, то $g_\alpha \notin C(GIM)$. Непосредственная проверка показывает, что при $\alpha > 0$ элемент g_α перестановочен с любым элементом группы GIM. Значит, центр $C(GIM)$ группы GIM, и, следовательно, центр группы ℓ-автоморфизмов $Aut(FVL(n))$ изоморфен $\mathbf{R}^+$. □

Список литературы

[1] *Н.В. Баянова, Н.Я. Медведев*, Векторные решетки с двумя порождающими, Алгебра и логика (в печати).

[2] *В.М.Копытов*, Решеточно упорядоченные группы. М., Наука, 1984.

[3] *М.И.Каргаполов, Ю.И.Мерзляков*, Теория групп. М., Наука, 1977.

[4] *Г.П.Акилов, С.С.Кутателадзе*, Упорядоченные векторные решетки, Новосибирск, Наука, 1978.

[5] *G.Panti*, Prime ideals in free ℓ–groups and free vector lattices, Journal of Algebra, **219**, 1999, 173-200.

[6] *K.Baker*, Free vector lattices, Canad. J. Math., **20**, 1968, 58-66.

[7] *W.Beynon*, Combinatorial aspects of piecewise linear functions , J. London. Math. Soc., **(2)**, 1974, 719-727.

[8] *R.Bleier*, Archimedean vector lattices generaded by two elements, Proc. Amer. Math. Soc.,**1(39)**, 1973, 1-9.

[9] *W.Beynon*, Duality theorems for finitely generated vector lattices, Proc. London Math. Soc., **(3)31**, 1975, 114-128.

[10] *K.Baker*, Topological methods in the algebraic theory of vector lattices, Doctoral Dissertation, Harvard University, 1966.

[11] *R.Bleier*, Free vector lattices, Trans. Amer. Math. Soc.,**176**, 1973, 73-87.

TERNARY DEDUCTIVE SYSTEMS

Ivan Chajda

Dept. of Algebra and Geometry
Palacký University Olomouc
Tomkova 40
779 00 Olomouc
Czech Republic
e-mail: chajda@risc.upol.cz

The concept of deductive system was introduced for Hilbert algebras by A.Diego [6]. It was shown by W.Dudek that deductive systems and ideals coincide in Hilbert algebras. This particular case was generalized in [2] for universal algebras, where the concept of deductive system was defined in a quite general setting and was shown that in any algebra of a weakly regular variety deductive systems and congruence kernels coincide. The machinery of deductive systems was generalized in [1] for solving the problem whether a given subset of an algebra $\mathcal{A}$ is a class of some congruence on $\mathcal{A}$. However, the concept used in [1] can be extend in universal algebra as it will be shown below.

It is well-known that the most productive inherence rule in the classical propositional calculus is Modus Ponens:

if A is "$TRUE$" and $A \Rightarrow B$ is "$TRUE$" then also B is "$TRUE$".

This paradigma was used to introduce deductive systems in algebras with a constant value 1: A *deductive system* of an algebra $\mathcal{A}$ is a subset D such that $1 \in D$ and $b \in D$ whenever $a \in D$ and $d_i(a,b) \in D$ for prescribed term functions $d_1, \ldots, d_n$ of $\mathcal{A}$. If one more rule concerning the substitution property is added and $\{d_1, \ldots, d_n\}$ forms the so called Gödel equivalence system (see [2]) then these deductive systems coincide with congruence kernels $[1]_\Theta$ for $\Theta \in Con\,\mathcal{A}$.

However, one can mention that also another inherence rule based on a ternary term function is valid in a Boolean algebra which is an algebraic counterpart of the classical propositional calculus. Namely, denote by $\oplus$ the so called *symmetrical difference*, i.e. the term function defined as follows:

$$x \oplus y := (x \wedge y') \vee (x' \wedge y).$$

Consider the ternary term function $t(x,y,z) = x \oplus y \oplus z$. Now, let B be a Boolean algebra and $H = [z]_\Theta$ for some $\Theta \in Con\,B$. One can easily check the following properties:

- if $a \in H$ and $t(a,b,z) \in H$ then $b \in H$
- if $a \in H$ then $t(z,a,z) \in H$
- if $t(a,b,z) \in H$ and σ is a unary polynomial of B then $t(\sigma(a),\sigma(b),z) \in H$.

The aformentioned situation motivated us to introduce the following two concepts:

Let $\mathcal{A} = (A,F)$ be an algebra and $\mathcal{T}$ be a non-void subset of ternary term functions of $\mathcal{A}$.

Definition 1. By a $\mathcal{T}$*-translation* of an algebra $\mathcal{A} = (A,F)$ is meant every unary function $\sigma(x) : A \to A$ such that either

(i) $\sigma(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ for some n-ary $f \in F$ and $a_1, \ldots, a_n \in A$, or

(ii) $\sigma(x) = t(x,a,b)$ or $\sigma(x) = t(a,x,b)$ or $\sigma(x) = t(a,b,x)$ for some $t \in \mathcal{T}$ and $a, b \in A$.

Now, we can introduce our crucial concept:

Definition 2. Let $\mathcal{T}$ be a non-void subset of ternary term functions of an algebra $\mathcal{A} = (A,F)$. A non-void subset $H \subseteq A$ is called a *ternary* $\mathcal{T}$*-deductive system at* z if it satisfies the following conditions:

(i) $z \in H$;

(ii) $a \in H$ and $t(a,b,z) \in H$ for each $t \in \mathcal{T}$ then $b \in H$;

(iii) $a \in H$ implies $t(z,a,z) \in H$ for each $t \in \mathcal{T}$;

(iv) $t(a,b,z) \in H$ implies $t(\sigma(a),\sigma(b),z) \in H$ for each $t \in \mathcal{T}$ and every $\mathcal{T}$-translation σ.

To every subset $\mathcal{T}$ of ternary term function of $\mathcal{A} = (A,F)$ and every subset $\emptyset \neq H \subset A$ with $z \in H$ we can assign a binary relation:

Definition 3. A binary relation Θ_H on A defined by the setting

$$\langle a,b\rangle \in \Theta_H \text{ if and only if } t(b,a,z) \in H \text{ for each } t \in \mathcal{T} \qquad (*)$$

is called $\mathcal{T}$*-induced by* H.

At first we show that the z-class of $\mathcal{T}$-induced congruence is a ternary $\mathcal{T}$-deductive system at z:

Theorem 1. *Let $\mathcal{T}$ be a non-void subset of ternary term functions of an algebra $\mathcal{A} = (A,F)$, let $z \in A$, $\emptyset \neq H \subseteq A$ and $z \in H$. If the $\mathcal{T}$-induced by H relation Θ_H is a congruence on $\mathcal{A}$ and $H = [z]_{\Theta_H}$ then H is a ternary $\mathcal{T}$-deductive system at z.*

Proof. Suppose $\Theta_H \in Con\,\mathcal{A}$ and $H = [z]_{\Theta_H}$. Then clearly H satisfies (i) of Definition 2. Prove (ii): let $a \in H$ and $t(a,b,z) \in H$ for each $t \in \mathcal{T}$. Since $H = [z]_{\Theta_H}$, we have $\langle a,z\rangle \in \Theta_H$ and, by $(*)$, also $\langle b,a\rangle \in \Theta_H$. Hence also $\langle b,z\rangle \in \Theta_H$ proving $b \in [z]_{\Theta_H} = H$.

(iii) is immediate: if $a \in H$ then $\langle a, z\rangle \in \Theta_H$ and, by $(*)$, also $t(z, a, z) \in H$ for each $t \in \mathcal{T}$.

(iv): if $t(a, b, z) \in H$ for $t \in \mathcal{T}$ then, by $(*)$, $\langle b, a\rangle \in \Theta_H$ thus also $\langle \sigma(b), \sigma(a)\rangle \in \Theta_H$ for every $\mathcal{T}$-translation σ. Applying $(*)$ once more, one get $t(\sigma(a), \sigma(b), z) \in H$ for every $t \in \mathcal{T}$. □

To prove the converse, we need specify the set $\mathcal{T}$:

Definition 4. A non-void subset $\mathcal{T}$ of ternary term functions of an algebra $\mathcal{A} = (A, F)$ is called a *symmetrical difference system* whenever the following two conditions are satisfied:

(a) $t(a, a, z) = z$ for each $t \in \mathcal{T}$ and all $a, z \in A$;

(b) $t(x, y, z) \in \mathcal{T}$ yields $t(y, x, z) \in \mathcal{T}$.

Let us note that if $t(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$ as mentioned in the introduction then $\mathcal{T} = \{t\}$ is a symmetrical difference system for any Boolean algebra.

Theorem 2. *Let $\mathcal{T}$ be a symmetrical difference system of an algebra $\mathcal{A} = (A, F)$, let $z \in H \subseteq A$. If H is a ternary $\mathcal{T}$-deductive system at z then $\Theta_H \in Con\,\mathcal{A}$ and $H = [z]_{\Theta_H}$.*

Proof. The condition (a) of Definition 4 gives immediately that the $\mathcal{T}$-induced by H relation Θ_H is reflexive. Moreover, by (b), Θ_H is symmetric. Prove transitivity of Θ_H: Suppose $\langle x, y\rangle \in \Theta_H$ and $\langle y, z\rangle \in \Theta_H$. Then $t(y, x, z) \in H$ and $t(z, y, z) \in H$ for each $t \in \mathcal{T}$. For a given $t \in \mathcal{T}$ we define the $\mathcal{T}$-translation $\sigma_t(w) = t(z, w, z)$. By (iv) of Definition 2 we have $t(t(z, y, z), t(z, x, z), z) = t(\sigma_t(y), \sigma_t(z), z) \in H$ and, by (ii), we infer $t(z, x, z) \in H$, i.e. also $\langle x, z\rangle \in \Theta_H$.

Since Θ_H is reflexive and transitive, the condition (iv) implies that Θ_H is also compatible with respect to each $f \in F$. Together, we have shown $\Theta_H \in Con\,\mathcal{A}$.

Suppose $a \in H$. By (iii) we have $t(z, a, z) \in H$ for each $t \in \mathcal{T}$ thus $\langle a, z\rangle \in \Theta_H$, i.e. $a \in [z]_{\Theta_H}$. Conversely, if $a \in [z]_{\Theta_H}$ then $\langle a, z\rangle \in \Theta_H$ and, by $(*)$, $t(z, a, z) \in H$ for each $t \in \mathcal{T}$. Applying (i) and (ii) we obtain $a \in H$. Thus $H = [z]_{\Theta_H}$. □

Remark. If $\mathcal{T}$ is a symmetrical difference system of an algebra $\mathcal{A} = (A, F)$ and $\Theta_H \in Con\,\mathcal{A}$ for some $H \subseteq A$ with $[z]_{\Theta_H} = H$, then Θ_H is the greatest congruence on $\mathcal{A}$ having the class H. Namely, let $\Phi \in Con\,\mathcal{A}$ and $[z]_\Phi = H$. Suppose $\langle a, b\rangle \in \Phi$. Then $\langle t(b, a, z), z\rangle = \langle t(b, a, z), t(b, b, z)\rangle \in \Phi$ for each $t \in \mathcal{T}$ which yields $t(b, a, z) \in [z]_\Phi = H$. However, $(*)$ implies $\langle a, b\rangle \in \Theta_H$ proving $\Phi \subseteq \Theta_H$.

Let us recall that an algebra $\mathcal{A} = (A, F)$ is *regular* if $[a]_\Theta = [a]_\Phi \Rightarrow \Theta = \Phi$ for any $\Theta, \Phi \in Con\,\mathcal{A}$ and $a \in A$. A variety $\mathcal{V}$ is *regular* if each $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ has this property.

Recall the following result by B. Csákány [5]:

Proposition. *Let $\mathcal{V}$ be a variety.*

(a) $\mathcal{V}$ is regular if and only if there exist ternary terms $t_1, \dots, t_n$ $(n \geq 1)$ such that $t_1(x, y, z) = \dots = t_n(x, y, z) = z$ if and only if $x = y$.

(b) If $\mathcal{V}$ is regular and $\mathcal{A} = (A, F) \in \mathcal{V}$, then

$$\Theta(a, b) = \Theta(t_1(a, b, z), z) \vee \dots \vee \Theta(t_n(a, b, z), z)$$

for every $a, b, z \in A$ where $t_1, \dots, t_n$ are the terms of (a).

Due to the importance of Csákány result, the set $\{t_1, \dots, t_n\}$ of ternary terms satisfying (a) of the Proposition will be called the *Csákány system of* $\mathcal{V}$. Hence, a variety $\mathcal{V}$ is regular if and only if $\mathcal{V}$ has a Csákány system.

Theorem 3. *Let $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_n\}$ be a Csákány system of a variety $\mathcal{V}$, let $\mathcal{A} = (A, F) \in \mathcal{V}$, $z \in A$ and $z \in H \subset A$. Then H is a ternary $\mathcal{T}$-deductive system at z if and only if the $\mathcal{T}$-induced by H relation Θ_H is a congruence on $\mathcal{A}$ and $[z]_{\Theta_H} = H$.*

Proof. Suppose that H is a ternary $\mathcal{T}$-deductive system at z. Since $t_i(x, x, z) = z$ for $i = 1, \dots, n$, the $\mathcal{T}$-induced by H relation Θ_H is reflexive. The proof of transitivity of Θ_H is word for word the same as that in the proof of Theorem 2. Since Θ_H is reflexive and transitive, (iv) of Definition 2 gives immediately that Θ_H is compatible with each $f \in F$. However, every regular variety is n-permutable for some $n \geq 2$ and, by [3], Θ_H is a congruence on $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$. To prove that $[z]_{\Theta_H} = H$ we can use the same reasoning as in the proof of Theorem 2.

The converse implication is done by Theorem 1. □

Corollary. *Let $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_n\}$ be a Csákány system of a variety $\mathcal{V}$, let $\mathcal{A} = (A, F) \in \mathcal{V}$ and $H \subseteq A$. The following conditions are equivalent:*

(1) H is a congruence class of some $\Theta \in Con\,\mathcal{A}$

(2) H is a ternary $\mathcal{T}$-deductive system at z for some $z \in H$.

Let us note that a particular case of a variety of so-called generalized MV-algebras was already treated by a similar machinery in [4]. In this case, the assigned Csákány system consists of exactly four ternary terms.

References

[1] Bělohlávek R., Chajda I.: *Relative deductive systems and congruence classes*, Multiple Valued Logic, **5**(200), 259–266.

[2] Chajda I.: *Congruence kernels in weakly regular varieties*, Southeast Asian Bull. of Math., **24**(200), 15–18.

[3] Chajda I., Rachunek J.: *Relational characterization of permutable and n-permutable varieties*, Czech. Math. J. **33**(1983), 505–508.

[4] Chajda I., Dorfer G. Halaš R.: *Regularity of generalized MV-algebras*, Demonstratio Mathem., **34**(2001), 25–32.

[5] Csákány B.: *Characterization of regular varieties*, Acta Sci. Math (Szeged), **31**(1971), 187–189.

[6] Diego A.: *Sur les algêbres de Hilbert*, Collection de Logique Math. Ser. A (Ed. Hermann, Paris), **21**(1967), 177–189.

CENTRAL ORDERS ON LINEAR GROUPS

A.M.W. Glass

Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics
Centre for Mathematical Sciences
Wilberforce Rd.
Cambridge CB3 0WB
England
e-mail: amwg@dpmms.cam.ac.uk

At the Conference at Erlogol in June 2001, I gave two talks. Since these were based on papers that were submitted elsewhere, I have instead submitted a paper to the Proceedings that is a direct consequence of discussions at the meeting. For the record, here is a very brief summary of my talks.

1 Conjugacy and Undecidability in automorphism groups

In my first talk I gave examples of how to *simultaneously* conjugate one finite set of elements of $Aut(\mathbb{R}, <)$ to another (under appropriate hypotheses). I mentioned the importance of this to establish both the existence of finitely presented algebras with insoluble word problem and the undecidability of the isomorphism problem for such algebras. In particular, this technique works for the class of groups and the class of lattice-ordered groups (please see [7], [8], [3, Section 8.8] & [4]). It can also be used (please see [2]) to show that the automorphism group of $Aut(\mathbb{R}, <)/L(\mathbb{R})$ is induced by the automorphisms of $Aut(\mathbb{R}, <)$, where $L(\mathbb{R}) = \{g \in Aut(\mathbb{R}, <) : (\exists\alpha)(\beta g = \beta \text{ if } \beta > \alpha)\}$; hence there are no outer automorphisms of $Aut(\mathbb{R}, <)/L(\mathbb{R})$.

The following standard notation was introduced: If G is a group and X is a subset of G, then $C(X)$ denotes the centraliser of X in G; (that is, $C(X) = \{g \in G : (\forall x \in X)(xg = gx)\}$. And if G is a subgroup of $Aut(\mathcal{M})$ and $g \in G$, then $supp(g) = \{\alpha \in |\mathcal{M}| : \alpha g \neq \alpha\}$ where $|\mathcal{M}|$ is the set on which the model $\mathcal{M}$ is built. Throughout, $Th(G)$ will denote the first order theory of a group G.

I proved

Lemma 1.1 [1] *Let M be an infinite set and $G < Sym(M)$. Let $g \in G$ be a non-identity element that satisfies*

(i) $supp(g^n) = supp(g)$ for all $n \in \mathbb{Z}_+$;

(ii) $C(g)$ is transitive on $supp(g)$; and

(iii) for all $h \in CC(g)$, if $\alpha \in M$ with $\alpha h \notin O(\alpha, g)$, then there is $f \in C(g)$ with $fh^{-1} \in G_\alpha \backslash G_{\alpha h}$.

Then $CC(g) = \langle g \rangle$.

and, by interpreting the addition and multiplication of natural numbers in $CC(g) = \langle g \rangle$ for appropriate $g \in G$, I deduced

Theorem A [1] *Let M be an infinite set and $G < Sym(M)$. Let $g \in G \backslash \{1\}$ satisfy (i), (ii) & (iii) above, and*

(iv) g is conjugate to all its positive powers.

Then $Th(G)$ is undecidable.

I then showed that this easy approach leads to a uniform method to show that many automorphism groups have undecidable theory. E.g.: $Sym(\mathbb{N})$, $Aut(\mathbb{R}, <)$, $Homeo(\mathbb{Q}, <)$, $Diff(\mathbb{R})$, $Aut(\mathbb{P}, <)$, $Aut(\Gamma, \sim)$ all have undecidable theories, where $Diff(\mathbb{R})$ is the group of all monotonic differentiable real-valued functions with domain $\mathbb{R}$ (under composition), $(\mathbb{P}, <)$ is the countable universal poset and $(\Gamma, \sim)$ is the random graph. Please see [1] for the details and other examples.

Finally I pointed out that the following problem remains unsolved:

If T is a first order theory that has infinite models, then is there a model $\mathcal{M}$ of T such that the theory of the group $Aut(\mathcal{M})$ is undecidable?

2 Centrally ordered groups

Let G be a group and $<$ be a total order on G. If, further, $f < g$ in $(G, <)$ implies that $xfy < xgy$ for all $x, y \in G$ then we call $(G, <)$ an *ordered group* (or simply write that G is an ordered group).

If C is a subset of an ordered group G, then C is said to be *convex* if $c_1 \leq g \leq c_2$ with $c_1, c_2 \in C$ and $g \in G$ imply $g \in C$.

Let C and D be convex subgroups of an ordered group. Then $C \subseteq D$ or $D \subseteq C$ [3, Lemma 3.1.2]. Hence if G is an ordered group then for each non-identity element $g \in G$, there is a maximal convex subgroup C_g not containing g, viz. the union of all convex subgroups not containing g. The

intersection C_g^* of all convex subgroups of G containing g is such a convex subgroup. Moreover $C_g \lhd C_g^*$ and is called a *convex jump*. In group-theoretic terminology, every ordered group has a *series* of convex jumps; that is, each $g \in G$ belongs to a convex jump (namely, $C_g^* \backslash C_g$) and the intersection of all the C_g (as g ranges over all non-identity elements of G) is just $\{1\}$.

If every convex jump is *central* (i.e., $[C_g^*, G] \subseteq C_g$ for all $g \in G \backslash \{1\}$), then G is said to be *weakly Abelian* or *centrally ordered*.

Note that if G is centrally ordered, then $C_g \lhd G$ for all $g \in G \backslash \{1\}$. Since every convex subgroup C is the intersection of all C_g for which $g \notin C$, we have that every convex subgroup in a centrally ordered group is normal.

In the talk, I outlined a proof of

Theorem B [5] *Let $(\mathcal{AN})$ be the statement: If every order on a finitely generated Abelian-by-nilpotent orderable group G is central, then G is nilpotent.*

Then $(\mathcal{AN})$ implies: if every order of a finitely generated soluble-by-finite group is central, then the group is nilpotent.

The proof is motivated (and modelled on) the work of Philip Hall [6].

In the talk I stated that we had proved:

If every order on a finitely generated metabelian orderable group is central, then the group is nilpotent. $(*)$

Caution: As I write, there is still some work required to complete the proof.

Finally, I used the Tits Dichotomy to establish:

Theorem C [5] *If every order on every two-generator subgroup (of an orderable linear group G) is central, then G is locally nilpotent.*

Note: Since my talk, Akbar Rhemtulla has further extended the ideas to prove:

Theorem D [5] *Suppose that $(*)$ holds and that every order on a finitely generated nilpotent-by-Abelian orderable group G is central. Then G is nilpotent.*

Acknowledgements

I am most grateful to Professors A. G. Pinus and K. Ponomaryov for their invitation to attend and speak at the IVth Conference in Algebra and Model Theory at Erlogol (in the Altai Region of Siberia), and to Professors N. Ya. Medvedev and V. M. Kopytov for helping make it possible. To all, and to all the participants, I wish to express my thanks for making the meeting so enjoyable and memorable. I am also grateful to my college (Queens' College, Cambridge CB3 9ET) for generously providing travel support.

References

[1] M. Giraudet, A. M. W. Glass & J. K. Truss, *Undecidability of Automorphism Groups*, (submitted).

[2] M. Giraudet & Truss, *On distinguishing quotients of ordered permutation groups*, Quart J. Math. **45** (1994), 181-209.

[3] A. M. W. Glass, **Partially Ordered Groups**, Series in Algebra **7**, World Scientific Pub. Co., Singapore, 1999.

[4] A. M. W. Glass & Y. Gurevich, *The word problem for lattice-ordered groups*, Trans. American Math. Soc. **280** (1983), 127-138.

[5] A. M. W. Glass & A. H. Rhemtulla, *Ordered groups in which all convex jumps are central*, (submitted).

[6] P. Hall, *Finiteness conditions for soluble groups*, J. London Math. Soc. **4** (1954), 419-436.

[7] R. McKenzie & R. J. Thompson, *An elementary construction of unsolvable word problems in group theory*, in **Word Problems**, N. Holland, Amsterdam 1973 (ed. W. W. Boone et al.).

[8] R. J. Thompson, *Embeddings into finitely generated simple groups which preserve the word problem*, in **Word Problems II**, N. Holland, Amsterdam 1980 (ed. S. I. Adian et al.).

CONVEX SUBLATTICE SUBGROUPS OF FREE ABELIAN LATTICE-ORDERED GROUPS

A.M.W. Glass

Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics
Centre for Mathematical Sciences
Wilberforce Rd
Cambridge CB3 0WB
England
e-mail: amwg@dpmms.cam.ac.uk

At the Conference at Erlogol in June 2001, I was surprised to discover from V. M. Kopytov & N. Ya. Medvedev that it was unknown if a non-trivial proper convex sublattice subgroup of a finitely generated free Abelian lattice-ordered group could ever be a free Abelian lattice-ordered group. The purpose of this note is to prove that the answer is "no".

Theorem A *If A_n is the free Abelian lattice-ordered group on n generators and $H \neq A_n, \{0\}$ is a convex sublattice subgroup of A_n, then H is not a free Abelian lattice-ordered group.*

This answers a question of Bleier [4] (number 3.45 of the list compiled by Kopytov & Medvedev [6]). The proof is simple and uses simplicial geometry. I can only surmise that the question has been outstanding for so long because those who knew of it were wedded to the more algebraic approach of Weinberg and Conrad, and those who know of the connection with simplicial geometry (the Baker-Beynon Duality) were unaware of the question.

The Baker-Beynon Duality can be summarised as follows — for more details, please see [1], [2] and [3], or [5, Sections 5.1 & 5.2].

The free Abelian lattice-ordered group A_n on n generators (n finite) is obtained as follows. Let G_n be the subgroup of the additive group of all continuous maps $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ from $\mathbb{R}^n$ into $\mathbb{R}$ generated by the n projections $\pi_1, \ldots, \pi_n$ from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}$. Put the pointwise order on $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$: $f \geq g$ iff $f(\mathbf{x}) \geq g(\mathbf{x})$ (in $\mathbb{R}$) for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. This is a lattice ordering and $f > g$ implies that $f + h > g + h$ for all $h \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Then A_n is the sublattice subgroup of $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ generated by $\pi_1, \ldots, \pi_n$ (please see [1]). Moreover, each element of A_n is a finite meet of a finite join of elements from G_n. If $w \in A_n$, write $|w|$ for $w \vee -w$; so $|w|(\mathbf{x}) = \max\{w(\mathbf{x}), -w(\mathbf{x})\}$. Thus $|w|(\mathbf{x}) \geq 0$ for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; i.e., $|w| \geq 0$ for all $w \in A_n$.

Let C be a sublattice subgroup of A_n. Then C is said to be *convex* if $c_1, c_2 \in C$ and $g \in A_n$ with $c_1 \leq g \leq c_2$ implies that $g \in C$. The convex sublattice subgroups of A_n are precisely the kernels of ℓ-homomorphisms (homomorphisms that preserve both the group and lattice operations).

If $w \in G_n$, then $Z(w \vee 0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : w(\mathbf{x}) \leq 0\}$, the zero set of $w \vee 0$, is half of a hyperspace; and if $w \in A_n$, then $Z(|w|)$ is the union of an intersection of such sets; i.e., $Z(|w|)$ is a union of closed convex polyhedral cones with integer coefficients and vertex the origin ([1]).

If $w \in A_n$ with $w \geq 0$ and $C(w)$ is the convex sublattice subgroup of A_n generated by w ($C(w)$ is the intersection of all convex sublattice subgroups of A_n that contain w), then the quotient $A_n/C(w)$ is ℓ-isomorphic to the restriction of A_n to the closed polyhedral cone, $Z(w)$. Moreover, if $w \in A_n$ and $u \in A_m$, then $A_m/C(|u|)$ is ℓ-isomorphic to $A_n/C(|w|)$ if and only if there is a piecewise linear homeomorphism (with integer coefficients) between $Z(|u|)$ and $Z(|w|)$ ([3]). This is the *Baker-Beynon Duality*.

In the special case that $w = 0$ and $u = 0$ it is also shown that A_m can be ℓ-embedded in A_n iff there is a piecewise linear homeomorphism with integer coefficents from $\mathbb{R}^m$ into $\mathbb{R}^n$. But $\theta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ is a piecewise linear homeomorphism with integer coefficents iff there are $u_1, \ldots, u_n \in A_m$ such that $\theta(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), \ldots, u_n(\mathbf{x}))$ for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ (please see [2]). Hence

$$A_m \text{ can be } \ell\text{-embedded in } A_n \text{ iff } m \leq n.$$

Proof of Theorem: Let H be as in the hypotheses of Theorem A.

If H were a free Abelian lattice-ordered group on m generators (m possibly infinite), then either (i) $m \leq n$ or (ii) H contains a sublattice subgroup H^* that is a free Abelian lattice-ordered group on $n+1$ generators. We easily dispose of (ii): in this case, the identity map is an ℓ-embedding of H^* into A_n. By the Baker-Beynon Duality, there is a piecewise linear homeomorphism of $\mathbb{R}^{n+1}$ into $\mathbb{R}^n$ with integer coefficients. This is impossible by the Beynon embedding result (please see above).

If $m \leq n$, let $h_1, \ldots, h_m$ be the free generators of H (as an Abelian lattice-ordered group); so $H = L$ where L is the sublattice subgroup of A_n generated by $\{h_1, \ldots, h_m\}$. If $m = n$, then $Z(|h_1| \vee \cdots \vee |h_m|) = \{\mathbf{0}\}$ by the Baker-Beynon Duality. Hence $\pi_1, \ldots, \pi_n \in H$. Consequently, $H = A_n$, a contradiction to the hypothesis.

Thus $m < n$ and $Z(|h_1| \vee \cdots \vee |h_m|)$ has dimension $n - m > 0$ in $\mathbb{R}^n$. So $Z(\pi_j)$ is incomparable with $Z(|h_1| \vee \cdots \vee |h_m|)$ for some $j \in \{1, \ldots, n\}$. For any such j we have $0 < g = |\pi_j| \wedge (|h_1| \vee \cdots \vee |h_m|) \in H$, yet $g \notin L$: since the elements of A_n are piecewise linear, there are $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ such that $h_1, \ldots, h_m$ are linear on the line segment joining $\mathbf{x}$ & $\mathbf{y}$, and $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in Z(|h_1| \vee \cdots \vee |h_m|)$ but $g(\mathbf{x}) = \pi_j(\mathbf{x}) = 0 \neq g(\mathbf{y})$. Therefore $H \neq L$, the desired contradiction. //

Acknowledgements

This article is based on information obtained at the meeting at Eriogol. I am most grateful to V. M. Kopytov & N. Ya. Medvedev for bringing it to my attention, and to the organisers of the conference for making my participation possible and so enjoyable.

References

[1] K. Baker, *Free vector lattices*, Canadian J. Math. **20** (1968), 58-66.

[2] W. M. Beynon, *Duality theorems for finitely generated vector lattices*, Proc. London Math. Soc. **31** (1975), 114-128.

[3] W. M. Beynon, *Applications of duality in the theory of finitely generated lattice-ordered groups*, Canadian J. Math. **29** (1977), 243-254.

[4] R. D. Bleier, *Free vector lattices*, Trans. American Math. Soc. **176** (1973), 73-78.

[5] A. M. W. Glass, **Partially Ordered Groups**, Series in Algebra **7**, World Scientific Pub. Co., Singapore, 1999.

[6] V. M. Kopytov & N. Ya. Medvedev, (Article in progress, to be submitted to Uspechi Math. Nauk).

WEAK AUTOMORPHISMS IN GENERAL ALGEBRAS – A SHORT SURVEY

Kazimierz Głazek

University of Zielona Góra,
Poland
e-mail: K.Glazek@im.pz.zgora.pl

Let A be a non-empty set, and let $\mathbb{O}(A)$ and $\mathbb{O}^{(n)}(A)$ be the sets of all and of all n-ary operations on A, respectively. Subsets $\mathbb{C} \subset \mathbb{O}(A)$ are called *clones* (in the sense of P. Hall) whenever they contain all projections and are closed under compositions of operations.

Every permutation (bijection) σ of the set A induces a bijection $\bar{\sigma}$ of $\mathbb{O}^{(n)}(A)$ in the following way:

$$\bar{\sigma} : f \mapsto g \;:\Leftrightarrow\; g(x_1,\ldots,x_n) = \bar{\sigma}(f)(x_1,\ldots,x_n) = \sigma(f(\sigma^{-1}(x_1),\ldots,\sigma^{-1}(x_n))).$$

The mapping $\bar{\sigma}$ can be extended to a bijection of the set $\mathbb{O}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{O}^{(n)}(A)$ in an obvious way (it will be denoted by the same symbol $\bar{\sigma}$). The mapping $\bar{\sigma}$ preserves so-called direct compositions. So, it is an automorphism of the *Menger algebra* of n-ary operations on A and of the n-clone in the sense of T. Evans. The mapping $\bar{\sigma}$ (on $\mathbb{O}(A)$ into itself) preserves also so-called tensor compositions, and so, it is so-called an inner automorphism of the *iterative* or *preiterative Post algebras* (in the sense of A.I. Mal'cev). If $\bar{\sigma}(f) = g$, then an operation g is called *dual* to f with respect to σ. Such operations are often used in many investigations (for example, in the theory of functional equations). If $\bar{\sigma}(f) = f$, then f is called *self-dual*. A clone $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{O}(A)$ is self-dual if $\bar{\sigma}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Self-dual functions (operations) and self-dual clones play important rôle in multiple-valued logics and in the theory of clones.

Let $\mathfrak{A} = (A;\mathbb{F})$ be a general algebra with the set $\mathbb{F}$ of fundamental operations, and $\mathbb{T}(\mathfrak{A}) = \langle \mathbb{F} \rangle$ and $\mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{A})$ be the sets of all *term operations* and all n-ary term operations, respectively, of the algebra $\mathfrak{A}$. Then, of course, $\mathbb{T}(\mathfrak{A})$ is a clone of operations in the sense of P. Hall. Then a mapping σ is said

to be *weak automorphisms* of the algebra $\mathfrak{A}$ if $\bar{\sigma}(\mathbb{T}(\mathfrak{A})) = \mathbb{T}(\mathfrak{A})$ (see [28]). This notion is a special case of the *weak isomorphism* defined by A. Goetz ([21]). Equivalently, in another terminology, σ is a *cryptoautomorphism* (as a special case of the cryptomorphism in the sense of G. Birkhoff). Moreover, if σ is a weak automorphism, then algebras $\mathfrak{A} = (A;\mathbb{F})$ and $\mathfrak{A}' = (A;\bar{\sigma}(\mathbb{F}))$ are *term equivalent* (and *rational equivalent* in the sense of A.I. Mal'cev). One can observe (see [11], [15], [16], and [20]) that the relation

$$\sigma\Theta\mathbb{C} :\Longleftrightarrow \bar{\sigma}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$$

between $\sigma \in S_A$ and clones on A determines a Galois correspondence (in the sense of O. Ore):

$$G \mapsto \hat{\mathcal{F}}(G) = \{\mathbb{C} \in \mathcal{L}(A) \mid (\forall \sigma \in G)[\sigma\,\Theta\,\mathbb{C}]\},$$

$$\mathcal{F} \mapsto \hat{G}(\mathcal{F}) = \{\sigma \in S_A \mid (\forall C \in \mathcal{F})[\sigma\,\Theta\,C]\}.$$

Clones from $\hat{\mathcal{F}}(G)$ are called G-clones.

It is obvious that for any algebra $\mathfrak{A} = (A;\mathbb{F})$ the set of all weak automorphism forms a group with respect to the superposition of mappings. It will be denoted by $\mathrm{WAut}(\mathfrak{A})$. As it was observed independently by J.R. Senft and E. Płonka (see [28] and [5]), the group $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ is a normal subgroup of $\mathrm{WAut}(\mathfrak{A})$. In [4] it was proved that for every group $\mathfrak{G} = (G;\cdot)$ there exist a unary algebra $\mathfrak{A}$ on the set G such that $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}) = L(\mathfrak{G}) \simeq \mathfrak{G}$ and $\mathrm{WAut}(\mathfrak{A}) \simeq \mathrm{Hol}(\mathfrak{G})$, where $\mathrm{Hol}(\mathfrak{G})$ is the holomorph of $\mathfrak{G}$ and $L(\mathfrak{G})$ is the group of left translations of $\mathfrak{G}$. So, if $\mathfrak{G}$ is a complete group (i.e. $\mathfrak{G}$ is without center and all automorphism of $\mathfrak{G}$ are inner), then there exists a unary algebra $\mathfrak{A}$ on the set G such that $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}) \simeq \mathfrak{G}$ and $\mathrm{WAut}(\mathfrak{A}) \simeq \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$. Let now $\mathrm{WA}_n(\mathfrak{A})$ be a subset of $\mathrm{WAut}(\mathfrak{A})$ of all σ such that $\bar{\sigma}(f) = f$ for all $f \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{A})$. Then we have

$$\mathrm{WA}_{n+1}(\mathfrak{A}) \trianglelefteq \mathrm{WA}_n(\mathfrak{A}) \trianglelefteq \mathrm{WAut}(\mathfrak{A})$$
$$\text{and } \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{WA}_n(\mathfrak{A}) \trianglelefteq \mathrm{WAut}(\mathfrak{A}).$$

J. Sichler proved in [29] that for an arbitrary group $\mathfrak{G} = (G;\cdot)$ and its normal subgroup $\mathfrak{N} = (N;\cdot)$, there exists a unary algebra with

$$\mathrm{card}(G) + \mathrm{card}(G_{/N})$$

of fundamental operations such that

$$\mathrm{WAut}(\mathfrak{A}) \simeq \mathfrak{G} \text{ and } \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}) \simeq \mathfrak{N}.$$

Moreover, for any chain

$$G \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_2 \trianglerighteq \dots \trianglerighteq G_n \trianglerighteq \dots$$

of normal subgroups, A.W. Higgins constructed in [22] an algebra with infinitely many fundamental operations such that

$$\mathrm{WAut}(\mathfrak{A}) \simeq \mathfrak{G} = (G; \cdot) \text{ and } \mathrm{WA}_i(\mathfrak{A}) = \mathfrak{G}_i = (G_i; \cdot).$$

Therefore,

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{WA}_n(\mathfrak{A}) \simeq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{G}_n.$$

One can observe that the factor group $\mathrm{WAut}(\mathfrak{A})$ by the normal subgroup $\mathrm{WA}_n(\mathfrak{A})$ is isomorphic to a subgroup of the group of all automorphism of the Menger algebra (or the n-clone, in another terminology) on the set $\mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{A})$.

Examples:

1. Let $A = \{0, 1\}$, and $x \mapsto x'$ be the complementation in the two-element Boolean algebra on A (i.e. the complementation is the permutation $\sigma = (01)$). Then there exist exactly eight (seven) clones $\mathbb{C}$ on A such that σ is an essential weak automorphism (automorphism, respectively) of the algebra $(A; \mathbb{C})$ (see [13] and [15]).

2. If $\mathcal{A}$ is a linear space with the caries A, then $\sigma: A \mapsto A$ is a weak automorphism if it is a bijective semi-linear mapping of $\mathcal{A}$. This result have been generalized to so-called quasilinear algebras, endoalgebras, and reduced algebras (see [4], [5], [6], [8], [14], and [15]).

3. Let $\mathcal{R}(\langle e\rangle) = (R; +, -, 0, \cdot, e)$ be an integral domain with 2, 3, 4 or ∞ elements. Then a mapping $\sigma : R \to R$ is a weak automorlism of $\mathcal{R}(\langle e\rangle)$ if and only if $\sigma(e), \sigma(0) \in \langle e\rangle$ (the subring generated by e), $(\sigma(e) - \sigma(0)) \in U(\langle e\rangle)$ (the set of units of $\mathcal{R}$), and the following equalities hold:

(i) $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y) - \sigma(0)$,

(ii) $\sigma(xy) = (\sigma(x)\sigma(y) - \sigma(0)(\sigma(x) + \sigma(y)) + \sigma(e)\sigma(0))(\sigma(e) - \sigma(0))^{-1}$

for all $x, y \in R$.

4. The above result is not true for other finite integral domains (see [7], [10]). For instance, let us define new additions and multiplications for some finite fields F:

(iii) $x \oplus y = x + y + 3x^2y^2(x+y)$ in $GF(5)$,

(iv) $x \oplus y = x + y + 5x^2y^2(x^3+y^3) + 3x^3y^3(x+y)$ in $GF(7)$,

(v) $x \oplus y = x + y + x^3y^3(x^2+y^2)$ in $GF(8)$,

(vi) $x \oplus y = x + y + x^2y^2(x^5+y^5) + 2x^4y^4(x+y)$ in $GF(9)$.

Moreover for $GF(11)$ we put:

(vii) $x \oplus y = x + y + 3x^4y^4(x^3+y^3)$,

(viii) $x \oplus y = x + y + 2x^2y^2(x^7+y^7) + 7x^3y^3(x^5+y^5) + 10x^5y^5(x+y)$,

and

(ix) $x \oplus y = x + y + 9x^2y^2(x^7+y^7) + 3x^3y^3(x^5+y^5) + 7x^4y^4(x^3+y^3) + 5x^5y^5(x+y)$.

Then the algebras $(F; \oplus, \cdot)$ for suitable fields $GF(p^n)$, where $p^n = 5, 7, 8, 9$ and 11, are fields isomorphic to $(F; +, \cdot)$. Moreover, if we define new operations $\oplus$, $\circ$ in $GF(7)$ as follows:

(x) $x \oplus y = x + y + x^2y^2 + 3x^5y^5 + 6x^3y^3(x+y) + 5xy(x^2+y^2) + 2x^2y^2(x^3+y^3)$

and

(xi) $x \circ y = 3x^4y^4 + 3x^4y + 3xy^4 + xy$,

then $(F; \oplus, \circ) \simeq (F; +, \cdot)$.

One can observe that the mappings $\sigma: F \to F$ defined respectively by $x \mapsto x^3$ in $GF(5)$, $x \mapsto x^5$ in $GF(7)$, $x \mapsto x^6 (x \mapsto x^5$, or $x \mapsto x^3)$ in $GF(8)$, $x \mapsto x^7$ (or $x \mapsto x^5$) in $GF(9)$, and $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^7$ and $x \mapsto x^9$ in $GF(11)$ are weak automorphisms of suitable fields and define above new operations. Moreover, the mapping $\sigma(x) = x^5 + 2x^2$ is also a weak automorphisms and determines new operations (x) and (xi) in $GF(7)$ (see [10] and [15]).

For more results on weak automorphisms and related topics, see References below.

References

[1] B. Banaschewski, On the weak automorphisms of certain algebras, Algebra Universalis **26** (1989), 307-310.

[2] G. Birkhoff, *Lattice Theory* (3rd edition), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1967.

[3] G. Birkhoff, *Some applications of universal algebra*, p. 107-128 in: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, vol. **29** ("Universal Algebra"), North-Holland, Amsterdam 1982.

[4] J. Dudek and K. Głazek, *Some remarks on weak automorphisms*, p. 73-81 in: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, vol. **17** ("Contributions to Universal Algebra"), North-Holland, Amsterdam 1977.

[5] J. Dudek and E. Płonka, *Weak automorphisms of linear spaces*, Colloq. Math. **22** (1971), 201-208.

[6] S. Fajtlowicz, K. Głazek and K. Urbanik, *Separable variable algebras*, Colloq. Math. **15** (1966), 161-171.

[7] K. Głazek, *Weak automorphisms of integral domains*, Colloq. Math. **22** (1970), 41-49.

[8] K. Głazek, *On weak automorphisms of quasi-linear algebras*, Colloq. Math. **23** (1971), 191-197.

[9] K. Głazek, *Weak homomorphisms of general algebras and related topics*, Math. Seminar Notes (Kobe) **8** (1980), 1-36.

[10] K. Głazek, *On weak automorphisms of finite fields*, p. 275-300 in: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, **28** ("Finite Algebras and Multiple-Valued Logic"), North-Holland, Amsterdam, 1981.

[11] K. Głazek, *Weak automorphisms and some Galois connection*, p. 11 in: "Abstracts of Short Communications", International Congress of Mathematicians, Kyoto (Japan) 1990.

[12] K. Głazek, *Semigroup of weak endomorphisms of universal algebras*, p. 85-102 in: Proceedings of the International Symposium on the Semigroup Theory (Kyoto 1990)", Matsue (Japan), 1990.

[13] K. Głazek, *On weak automorphisms of some finite algebras*, Contemp. Math. **131** (1992), 99-110.

[14] K. Głazek, *Morphisms of general algebras without fixed fundamental operations*, p. 89-112 in: "General Algebra and Applications", Heldermann-Verlag, Berlin, 1993.

[15] K. Głazek, *Algebras of Algebraic Operations and Morphisms of Algebraic Systems* (Polish), Acta Univ. Wratislaviensis, no. **1602,** Wyd. Uniw. Wroclawskiego, Wrocław, 1994.

[16] K. Głazek, *A certain Galois connection and weak automorphisms*, Acta Univ. Palack. Olomouc. Fac. Rerum Natur. Math. **36** (1997), 15-26.

[17] K. Głazek, T. Hecht and T. Katriňák, *On weak homomorphisms of Stone algebras*, p. 145-159 in: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, vol. **17** ("Contributions to Universal Algebra"), North-Holland, Amsterdam 1977.

[18] K. Głazek and T. Katriňák, *Weak homomorphisms of dystrybutive p-algebras*, p. 383-390 in: Banach Center Publ., vol. **9** ("Universal Algebra and Applications"), PWN - Polish Sci. Publ., Warszawa 1982.

[19] K. Głazek and J. Michalski, *Weak homomorphisms of general algebra*, Comment. Math. **19** (1977), 211-228.

[20] K. Głazek and S. Niwczyk, *On certain Galois connections in general algebras*, to appear.

[21] A. Goetz, *On weak isomorphisms and weak homomorphisms of abstract algebras*, Colloq. Math. **14** *(1966), 163-167.*

[22] A.W. Higgins, *A representation theorem for weak automorphisms of a universal algebra*, Algebra Universalis **20** (1985), 179-193.

[23] E. Marczewski, *Independence in abstract algebras. Results and problems*, Colloq. Math. **14** (1966), 169-188.

[24] K. Menger, *The algebra of functions: Past, present, future*, Rend. Mat. Appl. **20** (1961), 409-430.

[25] E. Płonka, *Note on weak automorphismsof algebras having a basis*, Colloq. Math. **24** (1971), 7-10.

[26] R. Pöschel, *Cryptomorphisms of non-indexed algebras and relational systems*, p. 365-404 in: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, vol. **43** ("Lectures in Universal Algebra"), North-Holland, Amsterdam 1985.

[27] D. Schweigert, *On weak isomorphisms and equational theories*, Contribut. General Algebra **3** (1985), 335-340.

[28] J.R. Senft, *On weak automorphisms of universal algebra*, Dissertationes Math. **74** (1970), 1-35.

[29] J. Sichler, *Weak automorphisms of universal algebra*, Algebra Universalis **3** (1973), 1-7.

[30] L. Szabo, *On weakly homogeneous clones*, Beiträge Algebra Geom., to appear.

[31] T. Traczyk, *Weak isomorphisms of Boolean and Post algebras*, Colloq. Math. **13** (1965), 159-164.

[32] K. Urbanik, *Remarks on congruence relations and weak automorphisms in abstract algebras*, Colloq. Math. **20** (1969), 1-5.

[33] M. Żabka, *Weak automorphisms of permutation groups S_n*, Publ. Math. (Debrecen) **43** (1993), 1-8.

ON SOME CONNECTIONS BETWEEN PETRI NETS AND SEMIRINGS

Waldemar Korczyński*

Faculty of Management and Administration
Holy Cross Academy
ul. Mielczarskiego 45, 25-709 Kielce, Poland
e-mail: korwald@pu.kielce.pl

Kazimierz Głazek

Institute of Mathematics
University of Zielona Góra
ul. Podgórna 50, 65-246 Zielona Góra, Poland
e-mail: K.Glazek@im.pz.zgora.pl

1 Introduction

In the last hundred years one can sometimes observe many surprising connections between "quite different" mathematical objects and new approaches to objects which are quite well known. Lots of "old" structures (theories) receive quite new interpretations. Perhaps one of the revolutions has occurred in algebra. For many years it has been seen as a kind of a "number theory", and even Galois's work has not changed this image as strong as the last fifty years of revolution in computer science. Algebra has become a language of computer science, the methods of this discipline have been imported by other branches of science e.g. medicine or management. Consequently algebra as a language has started to be used in these areas. This leads to quite new applications of many well-known algebraic notions. For applications of General Algebra in Computer Science the monoids of processes and/or words are very useful tools. In the paper we want to focus on a connection between two relatively well known objects: Petri nets and semirings. The first ones have their roots in computer science, more precisely in problems connected with some questions concerning concurrence (independence) in dynamic systems. The second ones originate from investigation on the border of algebra and number theory (see R. Dedekind [39], [37], [38] and H.S. Vandiver [105], [106]). The notion of semiring can be seen as a common generalization of the notion of ring and distributive lattice. R. Bombeli in XVI century was prob-

*This paper has been supported by Holy Cross Academy Grant No BS/116/2000.

ably the first person who shaped the arithmetics of positive rational numbers as semiring (see Bochner [18]).

The paper consists of two parts. In the first one we recall the notions of Petri net and semiring. In the second one, some examples of connections between both notions are described.

In the article the symbols $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ denote the sets of natural, real, and positive real number respectively. By a *multiset* of a set A we mean any function $\mathcal{M} : A \to \mathbb{N}$. The class of all multisets defined on a set A will be denoted by $\mathcal{M}(A)$. By $\mathbb{B}$ we denote the two element Boolean algebra.

2 Petri nets and semirings

2.1 Petri nets

There exists a lot of presentations of *Petri nets*. Perhaps the most well known defines them as quadruples of the form

$$N = (P, T, \rho, \theta),$$

where P, T are sets and $\rho, \theta \subseteq T \times P$ are binary relations. Traditionally the elements of the sets P and T are called *places* and *transitions*, respectively, the relations ρ and θ are called *pre-* and *postcondition relation* and are denoted by *pre* and *post*, respectively. By the *marking* of a net one understands any function

$$m : P \longrightarrow \mathbf{A},$$

where $\mathbf{A}$ is an algebraic system. If $m(p) = a$ then we also say that the place p is *occupied* by the object a. A transition $t \in T$ *transforms a marking* m *into a marking* m', written $m[\, t > m'$, iff

$$m' = m - pre(t) + post(t).$$

A marking m' is *reachable* from a marking m iff there exists a sequence $t_1, t_2, ..., t_n$ of transitions such that

$$m[\, t_1 > m_1[\, t_2 > ... m_{n-1}[\, t_n > m'$$

for some markings $m_1, m_2, ..., m_{n-1}$.

The structures of algebraic systems mentioned above can be very different. In the simplest case, $\mathbf{A}$ is simply a set or it is the two-element Boolean algebra. In the last case such nets are called *Condition-Event* systems because the places can be seen as some conditions which may be satisfied or not. An event (i.e. an occurrence of a transition) can change the logical values of them. Somewhat more complicated are the so called ***Place-Transition*** nets (*PT-nets* for short), which may be marked by sets of *markers* (i.e. indivisible, indistinguishable *tokens*). Markings of such nets are functions of the form

$$m : P \longrightarrow \mathbb{N}.$$

More complicated nets have markings with the so-called "individual tokens". In this case, the place of a net may be occuppied by a multiset of distinguishable things called in this context *individual tokens*. So, at every "moment" t_0 in a place, say p, we have a function of the form

$$m_0(p) : A \longrightarrow \mathbb{N}.$$

A marking is in this case a function

$$m : P \longrightarrow \mathcal{M}(A)$$

i.e. $m \in (\mathbb{N}^A)^P$

The Petri net model of a process is a directed acyclic labeled graph. Its vertices denote process-components i.e. occurrences of places and transitions of a net. Two such components are *dependent* if they belong to a common chain; *independent* in other cases.

Perti nets have been described in many books and papers (see e.g. [84], [92], [97], [102]).

2.2 Semirings

The name "semiring" was firstly used by H.S. Vandiver in 1934 but implicitly semirings had appeared earlier in studies of the theory of ideals of rings (starting from R. Dedekind's work [37]) and in studies of axiomatization of natural numbers and non-negative rational numbers (starting from works by D. Hilbert [71] and E. V. Huntington [72]). By a *semiring* $(S, +, \cdot)$ we understand a general algebra with two binary associative operations fullfiling two following distributive laws

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ and } (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

for all $x, y, z \in S$.

Usually the term "semiring" is used in a narrow sense: when the addition is commutative (see the monographs by U. Hebisch and H. J. Weinert [69] and [70]). Moreover, the monographs by J. Berstel and Ch. Reutenauer [15], V. V. Chermnykh [25], S. Eilenberg [40], [41], J. S. Golan [57], [59], [60], and W. Kuich and A. Salomaa [86] contain some additional assumptions concerning semirings, e.g. the existence of neutral elements of the operations "+" and/or "·".

By a *left ideal* of a semiring R we mean any subsemiring $I \subseteq R$ with the additional property that for any $x \in I$ and $y \in R$ $yx \in I$. A *right ideal* is defined similarly. If a subset $I \subseteq R$ is a left and righ ideal then it is called *ideal* (see [57] and [59], p. 65).

If the addition is commutative and has a neutral element 0 (i.e. if $(S, +, 0)$ is a commutative monoid), which is an annihilating (or absorbing) element, that is

$$x + y = y + x, \quad x + 0 = x = 0 + x, \quad x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$$

for arbitrary $x, y \in S$, then $(S, +, \cdot)$ is said to be *hemiring* (in the terminology used by K. Iizuka [73]; see the monographs by J. S. Golan [57] and [59]). The above conditions are incorporated into the definition of semiring by several authors (e.g. P.J. Allen [1]). J.S. Golan [57] and [59] reserves the term "semirings" for hemirings with unity (i.e. with the identity element $1 \neq 0$ such that $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$). If for some a it holds $a + a = a$ $(a \cdot a = a)$ then a is called *+-idempotent* (*·-idempotent* respectively). A semiring is called *+-idempotent* (*·-idempotent*) if all its elements are +-idempotent (·-idempotent). Semirings with idempotent commutative addition can be treated as *m-semilattice* or *gerbier* in other terminology (i.e. semilattice with (associative) multiplication; see e.g. [17]). Therefore such semirings possess a partial order which is, of course, a semilattice order. By an ideal of a partial order $(X, \leq)$ it is meant any set $I \subseteq X$ satisfying the condition

$$x \leq y \mathbin{\&} y \in I \Longrightarrow x \in I$$

for all $x, y \in X$.

Moreover, the well known number semirings with usual operations possess a naturally defined (linear) order. Similarly one can define a partial order in any hemring satisfying the condition

$$x + y = 0 \Longrightarrow x = y = 0$$

for all $x, y \in S$. All semirings appearing in what follows can be treated as semirings with a kind of partial order compatible with multiplication. Very often a +-idempotent semiring is called *idempotent* or *dioid* (in the sense of J. Kuntzmann [87]; see also M. Gondran and R. Minoux [67], B.A. Carré [23]). Semirings of this kind are very usefull for the so called idempotent analysis (see V.N. Kolokoltsov and V.P. Maslov [77], J. Gunawardena (ed.) [68]). Important examples of additive idempotent semirings or dioïds are the following number semirings:

$\mathcal{R} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}; max, +)$ (sometimes called *schedule algebra*),
Mascle semiring $(\mathbb{N} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}; \max, +)$, with the convention $(-\infty) + (+\infty) = (-\infty)$,
Tropical semiring $(\mathbb{N} \cup \{+\infty\}; \min, +)$,
Polar semiring $(\mathbb{N} \cup \{-\infty\}; \max, +)$,
Fuzzy semiring $(\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \min, \max)$,
General fuzzy semiring (or *K-fuzzy semirings*) $(k \cup \{+\infty\}; \min, \max)$, where k denotes some subset of $\mathbb{R}$.

In all above semirings the addition has the property

$$a + b \in \{a, b\}$$

for all $a, b \in S$. In general such semirings are called *extremal semirings* (*extremal algebras*).

For referrences and further examples see, e.g., [10], [33], [35], [48], [55] - [57], [59], [62], [94], [95], [115] - [118]

3 Applications of semirings in the theory of Petri nets

In this short survey we concentrate only on some interesting applications of semirings to the so called "high level Petri nets". Various structures in the set of markings of a net have been described, e.g., in [26], [61], [79], [85], [92], [97].

1. In many cases there is a special algebraic structure on the set of tokens. For instance, these tokens may be added, subtracted and multiplied. The structures obtained in this way are usually semiring structures. Having such a structure in the set of tokens one can define in the set of markings the structure of semiring in an obvious way

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \textit{and} \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

In the real world we always meet many various constraints concerning the capacity or threshold of many "stores" seen as places of Petri nets. These constraints are modeled by some special markings. Let us chose a fixed marking $k \in R^P$ (e.g. $R = \mathbb{B}$, $\mathbb{N}$ or $\mathcal{M}(A)$, depending on the concrete situation). Define a marking $m : P \longrightarrow R$ to be *admissible* iff $m \leq k$ in the sense of suitable order in the considered semiring. The set of all admissible markings is an ideal generated by k in the partial order $(R^P, \leq)$. The most often considered questions concerning the set R^P are questions about various kinds of reachability. (see, e.g., [102], [97])

2. The above considerations regard the set of markings, as a *dynamical* part of a net. Semirings are also used as a part of the *static* structure of a net.

In many types of nets one uses some *annotations* of arrows, i.e. elements of the relations *pre* and *post*. Such an annotation is a function with values in a set. The nature of its elements may be various, e.g., natural numbers or multisets (of terms). The interpretations of these elements give names of some types of nets, e.g., "timing nets", "stochastic nets", "datalog nets", etc.. In almost all interesting cases these sets are endowned with some semiring structures.

Let us consider the so called *timing nets*, i.e. nets with annotation interpreted as a kind of "time". A typical problem when considering this type of nets is the calculation of the shortest possible time of the realization of a process. The problem can by seen as a generalization of the well know "critical path" problem in PERT[1]-like nets. One of the most common presentations of projects are the so called "Gantt charts[2]". Such a chart can be seen, e.g., as a function of the form

$$\gamma : A \times B \longrightarrow C$$

or, perhaps better, of the form

$$\gamma : A \times B \longrightarrow D$$

where A, B, C and D denote a set of tasks, a time and sets of performers or resources, respectively. The fundamental assumption of this model is that every task at any moment uses **only one** resource. Consequently Gantt charts can be pictured by figures like that from Figure 1 (see explanations below).

[1]PERT is an abreviation for Program Evaluation and Retrieval Techniques – a method of finding the shortest possible time of the realizations of a project. By a PERT-project one understands a direct acyclic Berge graph with arrows labeled by nonnegative numbers interpreted as a time of realization of activities denoted by these arrows.

[2]Henry Lawrence Gantt (1861-1919) - american manager, one of pioneers of scientific methods of production organization.

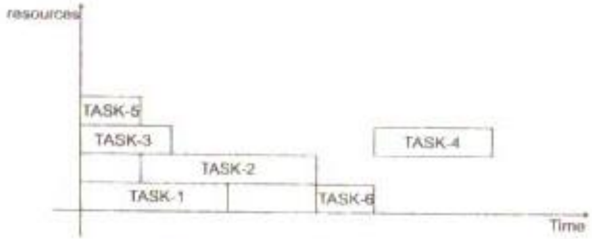


Рис. 1: The typical form of a Gantt chart

Such a chart consists of some rectangles corresponding to tasks. The projection of such a task, say τ, on the Time-axis (it is always a closed interval) represents the time in which this task is performed and uses the resource visualized by the projection of it on the Resource-axis (see Figure 2).

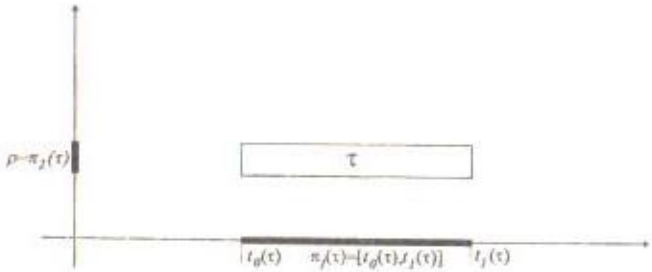


Рис. 2: A task and its resource and a realization time

In the above Figure 2 the time when the task is performed is the interval

$$\pi_1(\tau) = [\, t_0(\tau), t_1(\tau)]$$

and the **only** used resource is

$$\rho = \pi_2(\tau).$$

Unfortunately, it is very seldom satisfied in the practice of planning as every task uses only one resource. Usually tasks use many different resources. Consideration of real processes on such a high description level causes the loss of the possibility of making the whole realization time of a project shorter. Assume that tasks τ_1 and τ_2 use resources ρ_1, ρ_2 and ρ_3 in the way pictured in Figure 3 below.

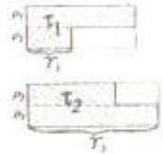


Рис. 3: Tasks consuming more then one resource

These tasks can be scheduled as follows

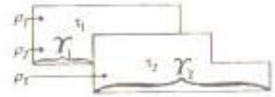


Рис. 4: A scheduling of tasks

and realized in the time

$$\Upsilon_1 + \Upsilon_2$$

where Υ_1 is the time in which τ_1 occupies the resource ρ_2 and Υ_2 the time in which τ_2 occupies ρ_3. It is **less** then the time of totall sequential realization of both tasks seen as using single resources $\overline{\rho_1} = \{\rho_1, \rho_2\}$ and $\overline{\rho_2} = \{\rho_2, \rho_3\}$. See Figure 5 below

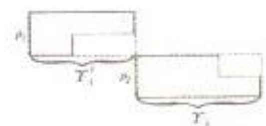


Рис. 5: Sequential realization of tasks

In the above picture Υ_1' denotes the time in which τ_1 occupies the resource ρ_1. So, the lower the description level, the better the precision of estimating the shortest possible time of the realization of a project. Generalizations of Gantt charts by means of the above "refinement" of resources are called "heaps of pieces" (see [46], [48], [52], [53]). They are used as a kind of semantics for some special type of timed Petri nets. The most important property of such a heap of pieces is the fact that one can **compute** the shortest possible time of its realization.

The calculation exploits the so called $\mathcal{R}_{(max,+)}$ automata, structures based on the semiring $\mathcal{R}_{(max,+)} = (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}, max, +)$. Heaps of pieces, although new, have a relatively well developed theory and seems to be a very effective modeling tool for management.

3. Heaps of pieces describe the (shortest possible) realization-time of a project. In some situations, we are interested not only in the realization time but also in the maximal encumbrance of the system by a **concrete realization** of a project. Such a concrete realization can be seen as a restriction of the (maximal) independence of project-components (i.e. its actions and events). This realization can be written in the form of a polynomial

$$\Pi = \Pi_{i=1}^{k} \Sigma_{j=1}^{r_i} a_{ij} = (a_{11} + \ldots + a_{1r_1})(a_{21} + \ldots + a_{2r_2})\ldots(a_{k1} + \ldots + a_{kr_k}),$$

were a_{ij} are *actions* (*activities*) of the project. Note that the algebra

$$(A, +, \cdot),$$

where A is the set of activities of the project, is usually not a semiring, because the multiplication is not distributiv with respect to addition. The "sums"

$$s_1 = a_{11} + \ldots + a_{1r_1},\ s_2 = a_{21} + \ldots + a_{2r_2}, \ldots, s_k = a_{k1} + \ldots + a_{kr_k}$$

correspond to the so called "maximal fronts of activities". Now having a given function (of weight)

$$w : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

one can firstly compute "sums"

$$w(s_i) = \Sigma_{j=1}^{r_i} w(a_{ij})$$

and next the maximum

$$Max(M) = \max_{i \leq k} w(s_i).$$

The operations max and + can be treated as the semiring operations (in $\mathcal{R}_{(\max,+)}$). The number $Max(M)$ describes the maximal encumbrance of the system by the appropriate realization of a project. It can be seen as the minimal "power" (e.g. electrical power) needed for its realization, minimal financing or minimal possibility to utilize the garbage produced by the project. This aspect of projects has been considered e.g. in [82], [83].

Semirings as the codomain of annotation of nets, usually not explicitly, are used in almost all papers devoted to high level Petri nets. One can mention here, for example, the books: [74], [75], [85], [92], [97], and the papers [4], [21], [30], [32], [49], [50], [53], [58], [61], [64] - [82], [110].

4 Some open problems

Looking at Petri nets from the "semirings point of view" leads to several (in our opinion) interesting questions. Let us list some of then.

1. As we have said in Point 1. of Section 3 the admissible markings of a safe net $N = (P, T, \rho, \theta)$ determine an ideal $\mathcal{M}_N$ in the set of all markings of this net partially ordered by the natural order in the semiring $(\mathcal{M}(P), \max, +)$. This ideal describes the behavior of the net. Now one can try to characterize this behavior by means of the properties of this ideal.

2. Analogously the lower limitation of the class of admissible markings (i.e. the minimal admissible allocation of tokens at the places) determines a filter of $\mathcal{M}_N$. So, the second question is now to characterize this behaviors by means of this filter.

3. Possible markings of a net constitute an equivalence class of the "for-and-backwards" reachability in the net. Markings $m, m' \in \mathcal{M}_N$ are in this relation iff m is reachable from m' or conversely. This relations induces an equivalence on the set $\mathcal{M}_N$ of all markings of N. Now we have a number of questions connected with the congruences of $\mathcal{M}_N$, for instance which congruences of $\mathcal{M}_N$ can be characterized by the reachability relation of N, that means, how to find a Petri net having a given structure of its behaviors. To be more precise here, we ask about nets with a given set of admissible markings being of the form

$$M_N \in [m_0] \in \mathcal{M}_N / \backsim$$

with $\backsim \subseteq \mathcal{M}_N$ being a given congruence of $\mathcal{M}_N$.

5 Concluding remarks

In this article we only want to signal that semirings are a good tool for describing many typical properties and applications of Petri nets. "Semiring point of view" of Petri nets enables us to see some new properties or make some considerations simpler.

References

[1] Allen, P. J., *A fundamental theorem of homomorphism for semirings*, Proc. Amer. Math. Soc. **21** (1969), 412-416.

[2] Arbib, M.A., and Manes, E.G., *Algebraic Approaches to Program Semantics*, Springer-Verlag, Berlin 1986.

[3] Avdoshin, S.M., *Linear programming in semirings with operators*, Russian J. Math. Phys. **1** (1993), 127-130.

[4] Baccalli, F.L., *Ergodic theory of stochastic decision free Petri nets*, p. 1521-1527 in: "Proc. of the 28th IEEE Conf. on Decision and Control", (Tampa USA, 1989), vol. **2**, IEEE Press, NewYork 1989.

[5] Baccalli, F.L., *Ergodic Theory of Stochastic Petri Networks*, INRIA Rapport de Recherche No. 1037, Rocquencourt 1989.

[6] Baccalli, F.L., *Ergodic theory of stochastic Petri networks*, Ann. Probab. **20** (1992), 375-396.

[7] Baccalli, F.L., Bambos, N., and Walramd, J., *Flow analysis of Stochastic Marked Graph*, p. 1528-1531 in: "Proc. of the 28th IEEE Conference on Decision and Control", (Tampa FL, USA, 1989), vol. **2**, IEEE Press, New York 1989.

[8] Baccalli, F.L., and Canales, M., *Parallel simulation of stochastic Petri nets using recursive equations*, INRIA Rapport de Recherche No. 1520, Rocquencourt 1991.

[9] Baccalli, F.L., Cohen, G., and Gaujal, B., *Recursive Equation and Basic Properties of Timed Petri Nets*, J. Discrete Event Dynam. Systems **2** (1992), 415-439.

[10] Baccalli, F.L., Cohen, G., Olsder, G.J., and Quadrat, J.P., *Synchronization and Linearity*, Wiley, Chichester, 1992.

[11] Baccalli, F.L., Foss, S., and Gaujal, B., *Free Choice Petri nets - an algebraic approach*, IEEE Trans. on Automatic Control **41** (1996), 1751-1778.

[12] Benson, D.B., and Main, M.G., *Functional behaviour of nondeterministic programs*, p. 290-301 in: Lecture Notes in Comput. Sci., no. **158** ("Foundations of Computation Theory"), Springer-Verlag, Berlin 1983.

[13] Benson, D.B., and Main, M.G., *Functional behaviour of nondeterministic and concurrent programs*, Inform. and Control. **62** (1984), 144-189.

[14] Benson, D.B., and Main, M.G., *Free semiring-representations and nondeterminism*, J. Comput. System Sci. **30** (1985), 318-328.

[15] Berstel, J., and Reutenauer, Ch., *Rational Series and Their Languages*, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[16] Black, D.L., and Main, M.G., *Semantic models for total correctness and fairness*, Theoret. Comput. Sci. **107** (1993), 305-332.

[17] Blyth, T. S., *Modules et matrices sur un gerbier*, Bull. Soc. Royal Sci. Liége **39** (1970), 451-469.

[18] Bochner, S., *The emergence of analysis in the Renaissance and after*, Rice Univ. Stud. **64** (1978), no. **2-3**, p. 11-56.

[19] Brown, C., and Gurr, D., *A categorical linear framework for Petri nets*, p. 208-218 in: "Fifth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science", IEEE Comput. Soc. Press, Los Alamitos, CA, 1990.

[20] Brown, C., and Gurr, D., *Refinement and simulation of nets - a categorical characterization*, p. 76-92 in: Lecture Notes in Comput. Sci., no. **616** ("Application and Theory of Petri Nets, 1992"), Springer-Verlag, Berlin 1992.

[21] Brown, C., and Gurr, D., *Timing Petri nets categorically*, p. 571-582 in: Lecture Notes in Comput. Sci., no. **623** ("Automata, Languages and Programming"), Springer-Verlag, Berlin 1992.

[22] Brown, C., and Gurr, D., *A categorical linear framework for Petri nets*, Inform. and Comput. **122** (1995), 268-285.

[23] Carré, B.A., *Graphs and Networks*, Clarendon Press and Oxford University Press, New York - Oxford 1979.

[24] Cassandras, Ch.S., Lafortune, S., and Olsder, G.J., *Introduction to modelling, control and optimization of discrete event systems*, p. 217-291 in: "Trends in Control (Rome, 1995)", Springer-Verlag, Berlin 1995.

[25] Chermnykh (Černnyh), V. V., *Semirings* (Russian), Vyatsk. Gos. Ped. Univ., Kirov 1997.

[26] Ciobanu, G., *An algebraic approach to concurrency by mutual exclusion*, An. Ştiint. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi Sect. Ia Mat. **33** (1987), 349-356.

[27] Ciobanu, G., *A model for λ-calculus extended for dataflow computation*, An. Ştiint. Univ. "Al.I. Cuza" Iaşi Sect. Inform. (N.S.) **1** (1992), 57-67.

[28] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J.P., and Viot, M., *A linear-system theoretic view of discrete-event processes and its use for performance evaluation in manufacturing*, IEEE Trans. Automat. Control **30** (1985), 210-220.

[29] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J.P., *Asymptotic Throughput of Continuous Timed Petri Nets*, p. 2029-2034 in: "Proc. of the 34th Conf. on Decision and Control", (New Orlean LA, 1995), IEEE Press, New York 1995.

[30] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J.P., *Algebraic system analysis of timed Petri nets*, p. 145-170 in: "Idempotency", Cambridge Univ. Press, Cambridge 1998.

[31] Cohen, G., Gaubert, S., Nikoukhah, and Quadrat, J.P., *Convex analysis and spectatral theory of event graphs, p.* 1515-1520 in: "Proc. of 28th IEEE Confer. on Decision and Control", (Tampa 1989), IEEE Press, New York 1989.

[32] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J.P., *Timed-event graphs with multipliers and homogeneous min-plus systems*, IEEE Trans. Automat Control **43** (1998), 1296-1302.

[33] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J.P., *Max plus algebra and system theory - where we are and where to go now?*, Annual Rev. in Control **23** (1999), 207-219.

[34] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J.P., and Viot, M., *Algebraic tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems*, Proc. IEEE **77** (1989), 39-58.

[35] Cuninghame-Green, R.A., *Minimax algebra*, Springer Verlag, Berlin, 1979.

[36] Czaja, L., *Cause-efect structures - Structural and semantic properties revisited*, Fund. Inform. **33** (1998), 17-42.

[37] Dedekind, R., *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen*, Suppl. XI (p. 434-657) to the book "Volesungen über Zahlentheorie" by L. Dirichlet, Druck u. Verlag Braunschweig 1894.

[38] Dedekind, R., *Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler*, Fortstschrift Techn. Hochschule Braunschweig 1897

[39] Dedekind, R., *Gesammelte mathematische Werke*, vol. **II** and **III**, Vieweg, Braunschweig 1931, 1932.

[40] Eilenberg, S., *Automata Languages and Machines*, vol. **A**, Academic Press, New York 1974.

[41] Eilenberg, S., *Automata, Languages and Machines*, vol. **B**, Academic Press, New York 1976.

[42] Engberg, U., and Winskel, G., *Petri nets as models of linear logic*, p. 147-161 in: Lecture Notes in Comput. Sci., no. **431**, ("CAAP'90, Copenhagen 1990"), Springer, Berlin 1990.

[43] Engberg, U., and Winskel, G., *Linear logic and Petri nets*, p. 176-229 in: Lecture Notes in Comput. Sci., no. **803**, ("A decade of concurrency, (Nordwijkerhout 1993)"), Springer, Berlin 1994.

[44] Engberg, U., and Winskel, G., *Computeness results for linear logics on Petri nets*, Ann. Pure App. Logic **86**, no. **2** (1997), 101-135.

[45] Gaubert, S., *An algebraic method for optimizing resources in timed Petri nets*, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., no. **144**, Springer, Berlin 1990.

[46] Gaubert, S., *Performance evaluation of (max, +) automata*, IEEE Trans. Automat. Control **40** (1995), 2014-2025.

[47] Gaubert, S., *Systemes dynamiques à evenements discrete*, INRIA Rocquencourt, La Chesnay 1996.

[48] Gaubert, S., *Two lectures on max-plus algebra*, 81-146 in: "Proc. of the 26th School of Theoretical Informatics", INRIA Rocquencourt, La Chesnay 1998.

[49] Gaubert, S., and Giua, A., *Deterministic weak-and-marked Petri net languages are regular*, IEEE Trans. Automat. Control **41** (1996), 1802-1803.

[50] Gaubert, S., and Giua, A., *Petri net languages and infinite subsets of* $\mathbb{N}^m$, J. Comp. System Sci. **59** (1999), 373-391.

[51] Gaubert, S., and Kliman, C., *Rational computation in dioid algebra and its application to performance evaluation of discrete event systems*, in: Lectures Notes in Control and Inform. Sci., no. **165** ("Algebraic Computing in Control, (Paris 1991)"), Springer, Berlin 1991.

[52] Gaubert, S., and Mairese, J., *Task resource models and (max, +) automata*, p. 133-144 in: "Idempotency", Cambridge University Press, Cambridge 1998.

[53] Gaubert, S., and Mairesse, J., *Modeling and analysis of timed Petri nets using heaps of pieces*, IEEE Trans. Automat. Control **44** (1999), 683-697.

[54] Gaujal, B., *Parallélisme et simulation des systèmes à événements discretes*, Ph.D. Thesis, Universite de Nice, Sophia-Antipolis 1994.

[55] Głazek, K., *Importance of semirings with idepotent addition* (a survey) in: "Proc. of the Skornyakov Conf., Volgograd. Ped. Univ. 1999", Izd. "Peremena", Volgograd 2000.

[56] Głazek, K., *A Short Guide to the Literature on Semirings ana Their Applications in Mathematics and Computer Science*, preprint (435 pp.), Zielona Góra 2000 (a revised and completted version is accepted for publication in Kluwer Publishing Co.).

[57] Golan, J.S., *The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science*, Longman Scientific & Technical, Harlow 1992.

[58] Golan, J.S., *A framework for consideration of fuzzy Petri nets*, Proceedings of FUZZY '97, Israel Ministry of Science, Tel Aviv 1997.

[59] Golan, J.S., *Semirings and Their Applications*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1999.

[60] Golan, J.S., *Power Algebras Over Semirings. With Applications in Mathematics and Computer Science*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1999.

[61] Golan, J.S., *Semiring-valued Korczyński nets*, Demonstratio Math. **33** (2000), 21-28.

[62] Golan, J.S., *Power algebras over semifields and their applications*, Discuss. Math. - General Algebra and Applications **20** (2000), 267-286.

[63] Golan, J.S., and Korczyński, W., *Generalized ε-nets over semirings*, preprint (2000).

[64] Golan, J.S., and Korczyński, W., *On a generalization of the notion of Petri nets*, Miscellanea Algebraicae **2** (2001), 43-53.

[65] Golan, J.S., Mateescu, A., and Vaida, D., *Towards a unified theory of sequential parallel and semi-parallel processes*, preprint (1995; submitted for publication).

[66] Golan, J.S., Mateescu, A., and Vaida, D., *Semirings and parallel composition of processes*, J. Autom. Lang. Comb. **1** (1996), 199-217.

[67] Gondran, M., and Minoux, M., *Linear algebra in dioïds: a survey of recent results*, Ann. Discrete Math. **19** (1984), 147-164.

[68] Gunawardena, J., (ed.), *Idempotency*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1998.

[69] Hebisch, U., and Weinert, H.J., *Halbringe Algebraische Theorie und Anwendungen in der Informatik*, Teubner, Stuttgart 1993.

[70] Hebisch, U., and Weinert, H. J., *Semirings. Algebraic Theory and Applications in Computer Science*, World Scientific, Singapore,1998.

[71] Hilbert, D., *Über den Zahlbergriff*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein **8** (1899), 180-184.

[72] Huntington, E.V., *Complete sets of postulates for the theories of positive integral and positive rational numbers*, Trans. Amer. Math. Soc. **3** (1902), 280-284.

[73] Iizuka, K., *On the Jacobson radical of a semiring*, Tôhoku Math. J. (2) **11** (1959), 409-421.

[74] Jensen, K., *Coloured Petri Nets*, vol. **1**, Springer-Verlag, Berlin 1992.

[75] Jensen, K., *Coloured Petri Nets*, vol. **2**, Springer-Verlag, Berlin 1995.

[76] Kanovich, M.I., *Petri nets, Horn programs, linear logic and vector games*, Ann. Pure Appl. Logic **75** (1995), 107-135.

[77] Kolokol'tsov, V. N., and Maslov V. P., *Idempotent Analysis and Its Applications*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1997.

[78] Korczyński, W., *On an algebraization of Petri nets*, Arch. Inform. Teor. Stos. **6** (1994), 21-38.

[79] Korczyński, W., *On a notion of concurrency*, Fund. Inform. **25** (1996), 79-98.

[80] Korczyński, W., *On a model of concurrent systems*, Demonstratio Math. **30** (1997), 809-828.

[81] Korczyński, W., *Petri nets and power graphs - a comparison of two concurrence-models*, Demonstratio Math. **31** (1998), 179-192.

[82] Korczyński, W., *Mathematical Foundations of Some Net Methods* (Polish), Wyd. WSP, Kielce 2000.

[83] Korczyński, W., *Net Methods - Elements of Approach Philosophy* (Polish), Wyd. WSP, Kielce 2000.

[84] Kotov, V.E., *An algebra for parallelism based on Petri nets*, p. 39-55 in: Lecture Notes in Comput. Sci., no. **64** ("Mathematical Foundations of Computer Science 1978"), Springer-Verlag, Berlin 1978.

[85] Kotov, V.E., *Petri Nets* (Russian), Izd. "Nauka", Moscow 1984.

[86] Kuich, W., and Salomaa, A., *Semirings, Automata, Languages*, Springer-Verlag, Berlin 1986.

[87] Kuntzmann, J., *Théorie des réseaux (Graphes)*, Dunod, Paris 1972.

[88] *Linear System Theory for Discrete Event Systems*, Proc. of the 23rd IEEE Conf. on Decision and Control, IEEE, Las Vegas 1984.

[89] Marti-Oliet, N., and Meseguer, J., *From Petri nets to linear logic*, Math. Struct. Comput. Sci. **1** (1991), 69-101.

[90] Mazurkiewicz, A., *Concurrency, Modularity and Synchronization*, in: Lecture notes in Comput. Sci., no. **379** ("Mathematical Foundations of Computer Science 1989"), Springer-Verlag, Berlin 1989.

[91] Olsder, G.J., *Course notes: Max algebra approach to discrete event systems*, Notas de Matematica, preprint No. **191**, Universidad de los Andes, Merida-Venezuela 1999.

[92] Peterson, J.L., *Petri Net Theory and Modeling of Systems*, Pretice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1981.

[93] Plotkin, G., and Winskel, G., *Bistructures, bidomains and linear logic*, p. 352-363 in: Lectures Notes in Comput. Sci., no. **820** ("Automata, Languages and Programming, (Jerusalem 1994)"), Springer, Berlin.

[94] Puzyrev, V.A., and Tsaregorodtsev, S.A. (Tsaryogorodtsyev, Carjogorodcev), *Max-algebra and discrete event systems* (Russian), Zarub. Radio-Elektron., 1992, no. **1**, p. 3-30.

[95] Quadrat, J.P., *Semi-anillos en matematica aplicade*, Universidad Nacional de Rosario, Fac. Cien. Exact. Ingen. Agrim. Rosario 1999 (85 pp.).

[96] Raczunas, M., *Remarks on the equivalence of c-e structures and Petri nets*, Inform. Process. Lett. **45** (1993), 165-169.

[97] Reisig, W., *Petri Nets. An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin 1985.

[98] Rytter, W., *On efficient parallel computations of costs of paths on a grid graph*, Inform. Process. Lett. **29** (1988), 71-74.

[99] Shimbel, A., *Applications of matrix algebra to communication nets*, Bull. Math. Biophysics **13** (1951), 165-178.

[100] Shimbeł, A., *Structural parameters of communication networks*, Bull. of Math. Biophysics **15** (1953), 501-507.

[101] Shimbel, A., *Structure in communication nets*, p. 119-203 in: "Proceedings of the Symposium on Information Networks", Polytechnic Inst. of Brooklyn, Brooklyn, NY, 1954.

[102] Starke, P.H., *Petri Netze*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, DDR, Berlin, 1980.

[103] Ştefănescu, G., *Network Algebra*, Springer, Berlin 2000.

[104] Troelstra, A.S., *Lecture on Linear Logic*, CSLI, Stanford, CA, 1992.

[105] Vandiver, H.S., *Note on a simple type of algebra in which calculation law of addition does hold*, Bull. Amer. Math. Soc. **40** (1934), 914-920.

[106] Vandiver, H.S., *On some simple types of semirings*, Amer. Math. Monthly **46** (1939), 22-26.

[107] Voevodin (Voyevodin), V.V., *Parallel structures of algorithms and programs* (Russian), preprint, Acad. Nauk SSR, Otdel. Vychisl. Mat., Moscow 1987.

[108] Wechler, W., *Hoare algebras versus dynamic algebras*, p. 835-847 in: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, vol. **42** ("Algebra, Combinatorics and Logic in Computer Sciences"), North-Holland, Amsterdam 1986.

[109] Winkowski, J., *On algebraic characterization of the behaviour of non-sequential systems*, Inform. Process. Lett. **6** (1977), no. **4**, p. 105-109.

[110] Winkowski, J., *An algebraic description of processes of time Petri nets*, p. 213-219 in: Lecture Notes in Control and Inform. Sci., no. **199** ("Discrete Event Systems, Sophia-Antipolis 1994"), Springer, London 1994.

[111] Winkowski, J., *Concatenable weighted pomsets and their applications to modelling processes of Petri nets*, Fund. Inform. **28** (1996), 403-421.

[112] Winkowski, J., *A representation of processes of Petri nets by matrices*, Fund. Inform. **30** (1997), 97-107.

[113] Winkowski, J., *An algebra of data flows*, Fund. Informat. **42** (2000), 75-104.

[114] Winskel, G., *Event structures*, p. 325-392 in: Lecture Notes in Comput. Sci., no. **255** ("Advances in Petri Nets"), Springer, Berlin 1987.

[115] Zimmermann, K., *Einige Aufgaben auf dem extremalen Vektorraum*, Unternehmensforschung und angewandte Statistik **55** (1976), T284-T286.

[116] Zimmermann, K., *Extremal Algebra* (Czech), Report No. 46 (121 pp.), Ekonom. Ustav ČSAV, Prague 1976.

[117] Zimmermann, U., *Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures*, Ann. Discrete Math., vol. **10**, North-Holland, Amsterdam 1981.

[118] Zimmermann, U., *Some remarks on algebraic path problems*, (extended abstract), Methods Oper. Res. **38** (1981).

ON A TOPOLOGICAL PRESENTATION OF HYPERGRAPHS

Waldemar Korczyński

Akademia Świętokrzyska w Kielcach
Wydział Zarządzania i Administracji
ul Mielczarskiego 45, PL-25709, Kielce, Poland
e-mail: korwald@pu.kielce.pl

1 Introduction.

1. Presentations of graphs There exist a lot of presentations (theories) of (hyper)graphs. In this paper only two of them will be considered. The first one is well known, the second one is the definition of graphs as one-sorted algebras.

Definition 1.1 *By a graph we mean any quadruple $\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}}, d_0^{\mathcal{G}}, d_1^{\mathcal{G}})$ where $V^{\mathcal{G}}$ and $E^{\mathcal{G}}$ are sets (of vertices and arrows resp.) and $d_0^{\mathcal{G}}, d_1^{\mathcal{G}} : E^{\mathcal{G}} \longrightarrow V^{\mathcal{G}}$ are functions, called the incidence functions of $\mathcal{G}$.* □

We write simply V and E instead of $V^{\mathcal{G}}$ and $E^{\mathcal{G}}$, and d_0, d_1 for $d_0^{\mathcal{G}}, d_1^{\mathcal{G}}$ if there is no risk of confusion. Graphs in the sense of definition 1.1 are often called *directed multigraphs*. Homomorphisms of such graphs are defined in the standard way. By a *homomorphism* from a graph $G = (V, E, d_0, d_1)$ into a graph $G' = (V', E', d_0', d_1')$ we mean any pair $f = (f_V, f_E)$ of functions $f_V: V \longrightarrow V'$ and $f_E : E \longrightarrow E'$ satisfying the conditions $d_i'(f_E(e)) = f_V(d_i(e))$ ($for\ i = 0, 1$) for each arrow e of the graph G. Another presentation of graphs defines them as algebras with one carrier set and a finite set of defining axioms.

Definition 1.2 *By a graph algebra is meant any triple $\mathcal{A} = (X^{\mathcal{A}}, s^{\mathcal{A}}, t^{\mathcal{A}})$ with $X^{\mathcal{A}}$ being a set called the underlying set of $\mathcal{A}$ and $s^{\mathcal{A}}, t^{\mathcal{A}} : X^{\mathcal{A}} \to X^{\mathcal{A}}$ being unary operations in $X^{\mathcal{A}}$ satisfying the conditions*

$$s^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(x)) = t^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(x)) = s^{\mathcal{A}}(x) \& s^{\mathcal{A}}(t^{\mathcal{A}}(x)) = t^{\mathcal{A}}(t^{\mathcal{A}}(x)) = t^{\mathcal{A}}(x)$$

for each $x \in X^{\mathcal{A}}$. □

We will write simply X or $|\mathcal{A}|$ instead of $X^{\mathcal{A}}$, and $\mathbf{s}$ and $\mathbf{t}$ for $\mathbf{s}^{\mathcal{A}}$, $\mathbf{t}^{\mathcal{A}}$ if there is no risk of confusion. Homomorphisms of graph algebras are defined as homomorphisms of algebras with unary operations.

The passage from this definition to the two-sorted presentation mentioned above and in the opposite direction is via the equations

$$\begin{aligned} V^{\mathcal{G}} &= \{x \in X : \mathbf{s}(x) = x\} = fixpoints(\mathbf{s}) = fixpoints(\mathbf{t}) = \mathbf{s}(X) = \mathbf{t}(X) \\ E^{\mathcal{G}} &= X \setminus V^{\mathcal{G}}, d_0^{\mathcal{G}} = \mathbf{s}_{|E^{\mathcal{G}}}, d_1^{\mathcal{G}} = \mathbf{t}_{|E^{\mathcal{G}}} \end{aligned}$$

(from triples $\mathcal{A} = (X, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ to quadruples $\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}}, d_0^{\mathcal{G}}, d_1^{\mathcal{G}})$) and

$$X(\mathcal{G}) = V^{\mathcal{G}} \cup E^{\mathcal{G}}, \mathbf{s} = d_0^{\mathcal{G}} \cup id_{V^{\mathcal{G}}}, \mathbf{t} = d_1^{\mathcal{G}} \cup id_{V^{\mathcal{G}}}$$

(backwards).

The class of homomorphisms of such graphs is richer than the class of "classical" homomorphisms of graphs. If one wants to use graph homomorphisms as a model of "aggregation of arrows into vertices" then one has to choose between the simple two-sorted definition of graphs and complicated definition of their homomorphisms, or a "non- typical" definition of graphs (in this case of the above one-sorted presentation) and typical algebraic definition of their homomorphisms. In this paper the second possibility has been chosen. It seems that in this case, in contrast e.g. to programming, it is easier to work with one-sorted than with two-sorted algebras.

The origins of the one-sorted definition of graphs come probably from the "French school of category theory" (cf. [6] or [7] where some references can be found).

3. Hypergraphs Arrows in a graph have a well defined "direction" determined by their unique beginning and end points. However in some cases one considers systems with elements having not necessarily two "links" to its environment only. Mathematical models of such systems are called *hypergraphs*. Let us define them formally.

Definition 1.3 *For any set I by a hypergraph of the type I we mean any pair*

$$\mathbb{HG} = (V, A, (d_i)_{i \in I})$$

such that A, V are sets and for any $i \in I$, $d_i : A \to V$ is a function. The elements of the set A are called hyperarrows and those of V nodes of $\mathbb{HG}$ □

In other words a hypergraph is any two sorted unary algebra with carrier sets A and V and operations of the form $A \to V$. If $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ then we write the corresponding hypergraph as the sequence $\mathbb{HG} = (V, A, d_0, d_1, \ldots, d_n)$

Remark 1.4 *In what follows the set I will be fixed. Saying hypergraph I always have in mind hypergraph of the type I.*

Remark 1.5 *Hypergraphs are usually defined in another ways. By a hypergraph it is meant*

a) any pair $\mathbb{HG} = (V, A)$ with $A \subseteq pow(V)$ (see for example [1])

b) a sequence $\mathbb{HG} = (V, A, s)$ with A and V as above[1] *and $s : A \to V^*$.*

It is evident that the second point can be seen as a generalization of the first one. Let us note that the definition 1.3 above is equivalent to the notion mentioned in the point b) above. In fact it is sufficient to define for any $\alpha \in A$ $d^w = s(\alpha)$ for a suitable word $w \in I^*$ and $d = (d_i)_{i \in I}$[2]. Conversely having a triple (V, A, s) one can define the family (d_i) putting for $\alpha \in A$ and $i \in I$, $d_r(\alpha) = a_{i_r}$ providing $s(\alpha) = a_{i_1} a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$. Homomorphisms of hypergraphs are, similar to homomorphisms of graphs, pairs of functions. More precisely by a homomorphism from a hypergraph $\mathbb{HG} = (V, A, (d_i)_{i \in I})$ into a hypergraph $\mathbb{HG}' = (V', A', (d_i')_{i \in I})$ it is meant any pair (f_A, f_V) such that for any $i \in I$ and $\alpha \in A$ it holds $f_V(d_i(\alpha)) = d_i'(f_A(\alpha))$. Analogously as for graphs the above definition can be easily transformed into a one sorted one.

Definition 1.6 *For any set I by a hypergraph of the type I we mean any pair*

$$\mathbb{H} = (X, (\delta_i)_{i \in I})$$

such that X is a set, for any $i \in I$ $\delta_i : X \to X$ is a function and the family $(\delta_i)_{i \in I}$ of functions satisfies the condition

$$\delta_i \circ \delta_j = \delta_i$$

for any $i, j \in I$. □

This presentation of hypergraphs will be called *X-hypergraphs*. Homomorphisms of X-hypergraphs are defined as homomorphisms of algebras with unary operations. The passage from two into one sorted presentation of hypergraphs and back is completely analogous to the corresponding passage for graphs. All constructions on graphs can be applied to hypergraphs. The detailed description of them will be omitted.

[1] Usually one assumes here that these sets are disjoint.

[2] Let us recall, for any sequence $\alpha = (a_i)_{i \in I}$ (that means any function of the form $\alpha : I \to A$) and any word $w \in I^*$, $w = i_1 i_2, \ldots, i_k$ by α^w we denote the sequence $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$

2 Topologies induced by relations

Let X be a set and $R : X \longrightarrow X$ be a relation in X satisfying the condition $R^2 = R \circ R = R$ i.e. R is transitive and dense. For any $A \subseteq X$ we define $C(A) = A \cup R(A)$

Fact 2.1 *The operation $C : Pow(X) \longrightarrow Pow(X)$ is a topological closure operation in the set X.*

The topology, closure and interior operations determined in a set X by a transitive and dense relation $R : X \longrightarrow X$ will be called *induced* by R and denoted by τ_R, C_R and I_R respectively. We will drop the index R if it does not cause any confusion. Let X be a set, $R : X \longrightarrow X$ be a transitive and dense relation in X, C be the closure operation induced by the relation R, and R_{fix} be the set of all fix points of R. Proofs of the following fact consists of simply calculation.

Fact 2.2 *For $x \in X$ the set $\{x\}$ is closed iff $x \in R_{fix}$.*

Corollary 2.1 *For $x \in X$ the set $\{x\}$ is open iff $x \notin R(X \backslash \{x\})$*

Proof. Let us consider the set $X \backslash \{x\}$ We have $C(X \backslash \{x\}) = (X \backslash \{x\}) \cup R(X \backslash \{x\}) = X \backslash \{x\}$, i.e. $X \backslash \{x\}$ is a closed set. So, $\{x\}$ as the complement of a closed set is open. ■

Fact 2.3 *For $A \subseteq X$ and $x \in A$ if $C(\{x\}) = \{x\} \neq A$ then $C(A \backslash \{x\}) = C(A)$.*

The topological space (X, τ_R) determined by relations seltom satisfy typical separation conditions. In the paper we consider spaces located in a sense "between" spaces being of the types T_0 and T_1.

Definition 2.2 *A topological space (X, τ) will be called $T_{1/2}$ space iff any one element set is either open or closed.* □

Topological spaces of the type $\mathrm{T}_{1/2}$ "represent" hypergraphs. To be more precise hypergraphs are represented by the so called "hypertopological spaces" being pairs of the form $(X, \tau_{R_i})_{i \in I}$ consisting of a set X and a family $(\tau_{R_i})_{i \in I}$, $i \in I$ of topologies in X. Such a hypertopological space is of the type $\mathrm{T}_{1/2}$ if any element of the family $(\tau_{R_i})_{i \in I}$ is a $\mathrm{T}_{1/2}$ space. One element subsets of X are elements of the corresponding hypergraphs. If such a set, say $\{x\}$, is open then it represents an (hyper)arrow, if it is closed, a vertex of the hypergraph. The closure operations determine the assignments $\delta_i : X \to X$., i.e. for any $i \in I$ and $x \in X$ we have $\delta_i(x) = R_i(x)$. In order to illustrate a problem arising in this construction let us consider an example.

Example 2.3 *Let us consider a set $X = \{x, y, z\}$ and relations $en, ex \subseteq X \times Y$ given by equalities*
$en(x) = ex(x) = \{y, z\}$, $en(y) = ex(y) = \{y, z\}$, $en(z) = ex(z) = \{y, z\}$.
Now we have
$en(en(x)) = ex(en(x)) = en(x) = \{y, z\}$, $ex(en(y)) = en(en(z)) = en(y) = \{y, z\}$,
$en(en(z)) = ex(en(z)) = en(x) = \{y, z\}$, $ex(en(x)) = ex(en(x)) = ex(x) = \{y, z\}$,
$en(ex(y)) = ex(ex(z)) = ex(y) = \{y, z\}$, $ex(en(z)) = ex(ex(z)) = ex(zy) = \{y, z\}$.
i.e. the triple (X, en, ex) is a relational generalization of a graph seen as a one sorted algebra. But this graph has a very special property. It has no vertices. In fact there exists no element $x \in X$ with $\mathrm{s}(x) = x$, i.e. such that $en(x) = \{x\}$.

We have obtained this problem because we have dropped in the definition of graph the assumption that the relations en and ex are functions. However such an assumption is in general too strong limitation.

Definition 2.4 *A relation $R : X \to X$ is called nonextendable in a subset $X_0 \subseteq X$ iff $R \circ (R \backslash id_{X_0}) = \emptyset$. A family $(R_i)_{i \in I}$ of relations $R_i : X \to X$ is nonextendable in X_0 iff for any $i, j \in I$ it holds $R_i \circ (R_j \backslash id_{X_0}) = \emptyset$.* □

Let us characterize the nonextendability of a relation in terms of its fix-points.

Fact 2.4 *A relation $R : X \to X$ is nonextendable in the set $R(X)$ iff $R(X)$ is the set of all fix points of R.*

Proof. $\Longrightarrow$) Let us assume R is nonextendable in $R(X)$ and let $x \in R(X)$. If it was $R(\{x\}) \neq \{x\}$, then there would exist an element $y \in X$, such that $y \in R(\{x\})$ & $y \neq x$ (because $DomR = X$). On the other hand there exists $x_0 \in X$ such that $x_0 R x$ (because $x \in R(X)$). Now we would have $x_0 R x$ & $x R y$ & $x \neq y$ i.e. $x_0 (R \circ (R \backslash id_X)) y$ which contradicts the assumption that $R \circ (R \backslash id_X) = \emptyset$
$\Longleftarrow$) Let $R(X)$ be the set of all fix points of R. So for every $x \in R(X)$ we have

$$xRy \text{ iff } x = y$$

for any $y \in X$, i.e. $R \circ (R \backslash id_X) = \emptyset$ ■

Corollary 2.5 *Any transitive and dense function is nonextendable.*

Proof. Let $f : X \to X$ be a transitive and dense function and $x \in f(X)$. So $x = f(y)$ for an element $y \in X$. Immediately from the definition of transitivity and density we obtain $f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$, i.e. x is a fixpoint of f. The converse implication is evident ■

Corollary 2.6 *Any hypergraph determines a multitopological space of the type $T_{1/2}$*

We have shown a passage from hypergraphs to topological spaces. Now let's go back. Similarly to the above considerations we start with "standard" topological spaces, i.e. sets with one topology only.

Definition 2.7 *For any $T_{1/2}$-space (X,τ) and any points $x,y \in X$ we define*

$$xR_\tau y \Leftrightarrow y \in C(\{x\}) \ \& \ C(\{y\}) = \{y\}.$$

□

Fact 2.5 *The relation R_τ is transitive, dense and nonextendable.*

Proof. Let $x,y \in X$. We have
$xR_\tau^2 y \Leftrightarrow xR_\tau z \ \& \ zR_\tau y$ for some $z \in X$ [by the def. of superposition]
$\Leftrightarrow z \in C(\{x\}) \ \& \ C(\{z\}) = \{z\} \ \& \ y \in C(\{z\}) \ \& \ C(\{y\}) = \{y\}$ [def. of R_τ]
$\Rightarrow z \in C(\{x\}) \ \& \ y = z \ \& \ C(\{z\}) = \{z\}$ [$y \in C(\{z\}) \ \& \ C(\{z\}) = \{z\} \Rightarrow y = z$]
$\Rightarrow y \in C(\{x\}) \ \& \ C(\{y\}) = \{y\}$
$\Rightarrow xR_\tau y$ [$y = z$]
So we have shown that $R_\tau^2 \subseteq R_\tau$. Now
$xR_\tau y \Leftrightarrow y \in C(\{x\}) \ \& \ C(\{y\}) = \{y\}$ [def. of R_τ^2]
$\Rightarrow y \in C(\{x\}) \ \& \ C(\{y\}) = \{y\} \ \& \ y \in C(\{y\}) \ \& \ C(\{y\}) = \{y\}$ [$p \wedge q \Rightarrow p \wedge q \wedge q$]
$\Rightarrow xR_\tau y \ \& \ yR_\tau y$ [def. of R_τ]
$\Rightarrow \exists_z xR_\tau z \ \& \ zR_\tau y$ [$P(x_0) \Rightarrow \exists_x P(x)$]
$\Leftrightarrow x(R_\tau \circ R_\tau)y.$
which completes the proof of the first part of proposition.
b) If it was $xR_\tau \circ (R_\tau \backslash id_x)y$ for some $x,y \in X$ than
$xR_\tau \circ (R_\tau \backslash id_x)y \Leftrightarrow \exists_z \ xR_\tau z \ \& \ z(R_\tau \backslash id_x)y$ [def. of superposition of relations]
Let $xR_\tau z_0 \ \& \ z_0(R_\tau \backslash id_x)y$. Now we have
$z_0 \in C(\{x\}) \ \& \ C(\{z_0\}) = \{z_0\} \ \& \ y \in C(\{z_0\}) \ \& \ y \neq z_0$ [def of R_τ]
$\Rightarrow z_0 = y \ \& \ z_0 \neq y$ [$C(\{z_0\}) = \{z_0\} \ \& \ y \in C(\{z_0\})$].
Thus it must be $R_\tau \circ (R_\tau \backslash id_x) = \emptyset$. ■

Let R and R' be transitive and dense relations in the sets X and X' respectively and $f : X \to X'$ be a function transforming R in $R' \cup id_{X'}$.

Fact 2.6 *The triple $f : (X, \tau_R) \to (X', \tau_{R'})$ is a continuous mapping from the topological space (X, τ_R) into $(X', \tau_{R'})$.*

Proof. If $(f \times f)(R) \subseteq R'$, i.e. if $R \circ f \subseteq f \circ (R' \cup id_{X'})$ than we have
$f(C(A)) = f(A \cup R(A))$ [by def. of the closure op.]
$= f(A) \cup f(R(A))$ [$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$]
$= f(A) \cup (R \circ f)(A)$ [$f(R(A)) = (R \circ f)(A)$]
$\subseteq f(A) \cup (f \circ (R' \cup id_{X'}))(A)$ [$R \circ f \subseteq f \circ (R' \cup id_{X'})$]
$= f(A) \cup (f \circ R')(A) \cup (f \circ id_{X'})(A) = f(A) \cup R'(f(A)) \cup f(A)$
$= f(A) \cup R'(f(A))$
$= C'(f(A))$ [by def. of the closure operation]
■

Lemma 2.8 *For any $T_{1/2}$ space (X,τ) and any points $x,y \in X$ it holds*

(a) $x \neq y \ \& \ \{x\} \in \tau \ \& \ y \in C(\{x\}) \Rightarrow C(\{y\}) = \{y\}$

(b) $x \neq y \ \& \ y \in C(x) \Longrightarrow \{x\} \in \tau$

(c) $x \neq y \ \& \ y \in C(\{x\}) \Rightarrow C(\{y\}) = \{y\}$

Proof. (a) Let us assume $x \neq y \ \& \ \{x\} \in \tau \ \& \ y \in C(\{x\})$. >From the property $C(\{x\}) = \{x\} \cup Fr(\{x\})$ we infer that $y \in Fr(\{x\})$ that means for any $A \in \tau$ with $y \in A$ we have $A \cap \{x\} \neq \emptyset$. If the set $\{y\}$ would not be closed then it had to be open and from the fact that (X,τ) is of the type $T_{1/2}$ and $x \neq y$ we obtain $y \in \{y\} \in \tau \ \& \ \{y\} \cap \{x\} = \emptyset$ which contradicts the property $y \in Fr(\{x\})$.

(b) If it was $x \neq y \ \& \ y \in C(x) \ \& \ \{x\} \notin \tau$ then it would be $C(\{x\}) = \{x\}$ because Υ is $T_{1/2}$ space. Now it would be $y \in \{x\} = C(\{x\})$ & $y \neq x$ which is impossible.

(c) Straightforward. ■

Fact 2.7 *For any $T_{1/2}$ spaces $T = (X,\tau)$ and $T' = (X',\tau')$ and any continuous mapping $f : T \to T'$ we have*

$$xR_\tau y \Rightarrow f(x)R_{\tau'}f(y) \text{ or } f(x) = f(y)$$

for all $x,y \in X$.

Proof. Let $x,y \in X$ and let $xR_\tau y$. So we have $y \in C(\{x\}) \ \& \ C(\{y\}) = \{y\}$. From the continuity of f we obtain

$$f(y) \in f(C(\{x\})) \subseteq C'(f(\{x\})) \ \& \ f(C(\{y\})) = \{f(y)\}.$$

Let us consider the set $\{f(y)\}$. If it is closed then $C'(\{f(y)\}) = \{f(y)\}$ and $f(x)R_{\tau'}f(y)$. If it is open then $f(x) = f(y)$ by corollary 2.3 above. ■

For any $T_{1/2}$ space $\Upsilon = (X, \tau)$ let $\Gamma(\Upsilon) = (X, R_\tau)$ and for any continuous mapping $f : \Upsilon \to \Upsilon'$ let $\Gamma(f) : \Gamma(\Upsilon) \to \Gamma(\Upsilon')$ be given by the assignment $\Gamma(f)(x) = f(x)$ for any $x \in X$. Then Γ :$\mathbf{Top}_{1/2} \to$**TDNRel** is a functor from the category $\mathbf{Top}_{1/2}$ of $\mathbf{T}_{1/2}$ spaces into the category **TDNRel** of.transitive, dense and nonextendable relations Analogously assigning to any pair $\mathcal{R} = (X, R)$ with X being a set and R a transitive, dense and nonextendable relation in X the topological space (X, τ_R) and to any triple $f : (X, R) \to (X'R')$ with (X, R) and $(X'R')$ being transitive, dense and nonextendable relations in X and $X'$and $f : X \to X'$ being a function transforming R into R' the triple $f : (X, \tau_R) \to (X', \tau_{R'})$ one obtains a functor Δ : **TDNRel** $\to$ $\mathbf{Top}_{1/2}$ from the category **TDNRel** into the category $\mathbf{Top}_{1/2}$.

Corollary 2.9 *Categories* ***TDNRel*** *and* $\boldsymbol{Top}_{1/2}$ *are equivalent*

Proof. It is an immediate consequence of the fact 2.6 and 2.7 above.

In order to formulate the proposition on topological presentation of hypergraphs we need two new notion. ■

Definition 2.10 *By an hypertopological space of the type I we mean any pair*

$$T = (X, (\tau_i)_{i \in I}).$$

such that:

1. *for any* $i \in I, \tau_i \subseteq Pow(X)$ *is a topology in the set* X,
2. *a one element set* $\{x\}$ *is closed (open) in the topology* τ_i *iff it is closed (open) in the topology* τ_j *for any* $i, j \in I$. □

Definition 2.11 *A triple* $f : T_1 \to T_2$ *with* T_1, T_2 *being hypertopological spaces* $T_1 = (X_1, \tau_1^1, ..., \tau_n^1)$, $T_2 = (X_2, \tau_1^2, \tau_2^2, ..., \tau_n^2)$ *and* $f : X_1 \to X_2$ *being a function will be called an hypercontinuous of type I mapping from* T_1*into* T_2 *iff* $f : X_1 \to X_2$ *is a continuous mapping from* (X_1, τ_i^1) *into* (X_2, τ_i^2) *for any* $i \in I$. □

Proposition 2.12 *The category of hypergraphs with finite sets of operations is equivalent to the category of n-topological spaces.*

Proof. It is an immediate consequence of the corollary 3.12 and facts 3.16 and 3.17 above ■

3 Concluding remarks

There exists a lot of various "translations" of the language of relations (functions) into that of (families of) sets. Perhaps the most well known examples are the principle of abstraction or the relationships between tolerance relations and covering families of a set[3]. There are also known some connections between relational systems and topology, e.g. topological spaces generated by semi- or partial orders. The result presented in the paper is of the same kind. The only essential difference here is the type of considered spaces; they are not "similar" to the "classical" topological spaces with a very "geometrical" origin. On the another side the origin of graphs is of a geometric character. In this sense the result of the paper can be seen as an illustration of the fact that various generalization of some geometrical ideas may leads to "non-geometric" notions. It may also be interesting how the properties of hyperpologies are related to the properties of hypergraphs and vice versa, e.g. how one can characterize the convergence in the language of graphs. The results of this paper can be, of course, applied to the "standard" graphs with two operations (source and target) as well.

[3] This relationship play an important role in various theories of concurrency, e.g. in the theory of Petri nets. The sets of concurrent (independent) actions are exactly classes of a special tolerancy relation (the relation of mutual independence).

References

[1] Berge, C., *Graphs and hypergraphs*, North-Holland Mathematical Library **6**, 1976.

[2] Kelly, J.C., *Bitopological Spaces*, Proc. London Math. Soc. **13**, 1963

[3] Korczyński, W., *On a notion of Petri net morphisms*, Archiwum Informatyki Teoretycznej i Stosowanej, tom 8 (1996), z. 3-4, pp 383-399

[4] Korczyński, W., *On a model of concurrent systems*, Demonstratio Mathematica, Vol. 30, No 4, 1997

[5] Korczyński, W., *On a definition of graph*, To form the world with our own doing. In memory of Professor Tadeusz Prucnal, 1999, MAT&MET Kielce, s. 39-54

[6] Mac Lane, S., *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verlag, New York, 1971

[7] Hasse, M., and Michler, L., *Theorie der Kategorien*, Akademie-Verlag, Berlin 1976

О МНОГООБРАЗИЯХ ГРУПП МОНОТОННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Копытов В.М.*

Россия, 630090
Новосибирск
Морской проспект 64, кв. 2
тел. 644398

Рахунек Й.

ČR, 77700
Olomouc, Polska 36

1 Введение

Со всяким линейно упорядоченным множеством $\langle X, \leq \rangle$ естественно связаны две группы преобразований этого множества

- Группа $\mathbf{Aut}(X)$ всех автоморфизмов X, то есть множество всех взаимнооднозначных отображений g множества X на себя, сохраняющих отношение порядка на X. Иными словами, каждый элемент g из $\mathbf{Aut}(X)$ обладает свойством:
  - неравенство $\xi \leq \eta$ в X влечет $\xi g \leq \eta g$.
- Группа $\mathbf{Mon}(X)$ всех монотонных отображений X, то есть множество всех взаимнооднозначных отображений g множества X на себя, каждое из которых обладает одним из следующих свойств:
  - для всех ξ, η из X неравенство $\xi \leq \eta$ в X влечет $\xi g \leq \eta g$,
  - для всех ξ, η из X неравенство $\xi \leq \eta$ в X влечет $\xi g \geq \eta g$.

Группа $\mathbf{Aut}(x)$ и ее алгебраические свойства в течение последних ста лет изучалась достаточно интенсивно сначала с связи с изучением линейно упорядоченных полей и групп. затем теория групп автоморфизмов линейно упорядоченных множеств выделилась в отдельную теорию, тесно связанную с теорией решеточно упорядоченных групп.

*Эта работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ, грант 99-01-00-156

Хотя исследование группы $\mathbf{Mon}(X)$ имеет также довольно давнюю историю, однако ее развитие и глубина значительно уступает теории группы $\mathbf{Aut}(x)$. Неоднократно делались различные попытки построить адекватную алгебраическую характеризацию таких групп. В частности, непосредственно связаны с группами монотонных преобразований полуоднородно упорядоченные группы, введенные Лоренценом в [1, 2] и изучавшиеся Клиффордом [3], Конторовичем и Кокориным [4], Блудовым и Кокориным [5], другими авторами. Однако глубина изучения таких групп значительно уступала развитым теориям линейно упорядоченных, решеточно упорядоченных и правоупорядоченных групп и групп автоморфизмов линейно упорядоченных множеств. Значительный сдвиг в изучении групп монотонных преобразований произошел после работы Жироде и Люка [6], в которой было дано несколько отличающееся по форме, но по сути то же самое, определение полуупорядоченной группы, установлена связь таких групп с группами монотонных преобразований линейно упорядоченных множеств, и достаточно подробно исследованы связанные с ними решеточно упорядоченные группы. Предложенная концепция оказалась особенно продуктивной за счет расширения сигнатуры решеточно упорядоченной группы и введения новой универсальной алгебры – m-группы.

Классы решеточно полуупорядоченных групп и m-групп в точности описывают в алгебраических терминах группы монотонных преобразований линейно упорядоченных множеств и находятся в такой же связи, как решеточно упорядоченные группы и l-группы. Очень удобно оказалось исследовать такие группы в терминах теории многообразий. Основные свойства многообразий m-групп и их связь с теорией многообразий l-групп были исследованы Жироде и Рахунеком в [7]. Большое число вопросов возникло о строении и свойствах таких групп. Многие из них были решены, но значительное число вопросов этой теории, главным образом связанных с особенностями дополнительной операции m-групп, остались открытыми. Одним из ключевых нерешенных вопросов теории многообразий m-групп был вопрос о существовании в многообразии всех m-групп наибольшего собственного подмногообразия. Соответствующая теорема для решеточно упорядоченных групп была доказана в знаменитой работе Холланда [8] в 1976 году. В предлагаемой работе напоминаются основные определения и результаты о решеточно полуупорядоченных группах и о m-группах и приводятся новые результаты о многообразиях m-групп, в частности теорема, аналогичная упомянутой выше теореме Холланда о нормальнозначных l-группах.

Все используемые здесь понятия теории l-групп и терминология в основном соответствуют книгам [9] и [10]. В разделе 2 мы напоминаем

основные результаты по теории l-групп и теории m-групп, используемые в этой работе.

2 Полуупорядоченные группы и m-группы

Мы приведем здесь определение частично полуупорядоченной группы симметричное определению Жироде-Люки. Разумеется, все результаты этих (и других авторов по полуупорядоченным группам и m-группам остаются справедливыми и для предложенного определения, равно как и все результаты о группах с нашим определение остаются верными и для более раннего определения. Нам кажется более удобным использовать нашу версию определения Жироде-Люка только из тех соображений, что по нашему мнению удобнее писать знак оператора, действующего на множестве, справа.

Пусть G частично левоупорядоченная группа с порядком $\leq$ и положительным конусом P. С этим частичным порядком на G связано два подмножества в G:

$$G\uparrow = \{x \in G | \forall a, b \in G \quad (a \leq b) \Rightarrow ax \leq bx\},$$

$$G\downarrow = \{x \in G | \forall a, b \in G \quad (a \leq b) \Rightarrow ax \geq bx\}.$$

Группа G называется *частично полуупорядоченной группой*, если на ней задан частичный левый порядок $\leq$ такой, что $G = G\uparrow \bigcup G\downarrow$. Не опасаясь недоразумений, будем называть частично полуупорядоченными группами только те из введенных групп, для которых $G\downarrow \neq \emptyset$. Ясно, что в этом случае множество $G\uparrow$ является подгруппой индекса 2 в G, $G\uparrow$ является частично упорядоченной группой, элементы $G\uparrow$ и $G\downarrow$ попарно несравнимы, а частично упорядоченные множества $G\uparrow$ и $G\downarrow$ изоморфны и антиизоморфны.

Если частичный порядок на группе $G\uparrow$ решеточный, то группа G называется *решеточно полуупорядоченной*. Как доказано в [6], всякая решеточно полуупорядоченная группа содержит нетривиальный элемент $\mathbf{i}$ второго порядка, сопряжение которым индуцирует на решеточно упорядоченной подгруппе $G\uparrow$ инволютивный автоморфизм группы $G\uparrow$, являющийся антиавтоморфизмом решеток $G\uparrow$ и $G\downarrow$. Там же установлено,что всякая линейно полуупорядоченная группа абелева. Поэтому изучение решеточно полуупорядоченных групп эквивалентно изучению решеточно упорядоченных групп $G\uparrow$, на которых дополнительно задано отображение $*$, являющееся автоморфизмом порядка два группы $G\uparrow$ и антиавтоморфизмом решетки $G\uparrow$.

Итак, одно из основных понятий рассмотренной Жироде-Люкой концепции – понятие m-группы: *m-группой* называем алгебраическую систему G сигнатуры $\mathbf{m} = \{\cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, _{*}\}$ такую, что $\langle G; \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge\rangle$ является l-группой, а одноместная операция $_{*}$ является автоморфизмом группы $\langle G; \cdot, e, ^{-1}\rangle$ порядка 2 и антиавтоморфизмом решетки $\langle G; \vee, \wedge\rangle$, то есть $_{*}$ является взаимнооднозначным отображением G на себя, причем выполнены соотношения

$$(xy)_{*} = x_{*}y_{*}, \quad (x_{*})_{*} = x, \quad (x \vee y)_{*} = x_{*} \wedge y_{*}, \quad (x \wedge y)_{*} = x_{*} \vee y_{*}.$$

Так же как класс $\mathcal{L}$ всех l-групп является многообразием сигнатуры $\mathbf{l}$, так и класс $\mathcal{M}$ всех m-групп является многообразием сигнатуры $\mathbf{m}$. Среди всех многообразий m-групп можно выделить многообразия, задаваемые тождествами только лишь сигнатуры $\mathbf{l}$. Разумеется, такими многообразиями не исчерпываются все многообразия m-групп. Например, многообразие $\mathcal{I}$ m-групп, порожденное бесконечной циклической группой $\mathbf{Z}$, с естественным линейным порядком и операцией $_{*}$: $x_{*} = x^{-1}$ является наименьшим собственным многообразием m-групп и не совпадает с многообразием всех абелевых m-групп.Тем не менее, очень многие многообразия m-групп, играющие ключевую роль в теории многообразий m-групп задаются именно с помощью тождеств сигнатуры l. В частности, важную роль в теории m-групп играет *многообразие $\mathcal{N}_m$, m-групп с субнормальными скачками*. Это многообразие задается в классе всех m-групп тождеством

$$(x \vee e)^{-1}(y \vee e)^{-1}(x \vee e)^2(y \vee e)^2 \wedge e = e$$

сигнатуры $\mathbf{l}$ и состоит из таких m-групп, которые являются l-группами с субнормальными скачками, или, иначе, нормальнозначными l-группами. Это такие l-группы, у которых все скачки системы выпуклых l-подгрупп субнормальны и, следовательно, факторы этих скачков являются архимедовыми линейно упорядоченными группами. Многообразие нормальнозначных l-групп обозначается $\mathcal{N}_l$. Оно замечательно следующим своим свойством, установленным Холландом (см. например [9] теорема 8.2.2 или [10] теорема 12.2.2).

Теорема Холланда *Многообразие $\mathcal{N}_l$ не совпадает с многообразием всех l-групп и содержит всякое собственное многообразие l-групп.*

Далее через $\mathcal{N}_l(G)$ обозначаем нормальнозначный радикал m-группы или l-группы G, то есть выпуклую l-подгруппу G порожденную всеми выпуклыми l-подгруппами G, принадлежащими $\mathcal{N}_l$. Как следует из результатов Холланда, $\mathcal{N}_l(G)$ во всякой l-группе является l-идеалом G и

сам принадлежит $\mathcal{N}_l$. В [7] отмечено, что во всякой m-группе G ее нормальнозначный радикал $\mathcal{N}_l(G)$ является m-идеалом, то есть выпуклой нормальной m-подгруппой.

Основным результатом предлагаемой работы является подтверждение того факта, что многообразие $\mathcal{N}_m$ является наибольшим собственным многообразием m-групп.

Доказательство проводится, следуя в основном схеме используемой Холландом, хотя для m-групп имеются значительные отличия, связанные со спецификой дополнительной операции. Одним из основных понятий, используемых в доказательстве, является понятие представления l-группы автоморфизмами линейно упорядоченного множества и представления m-группы монотонными преобразованиями линейно упорядоченного множества. Остановимся подробнее на этих понятиях и зафиксируем обозначения, которые будем без оговорок использовать в этой работе.

Пусть $\langle X; \leq\rangle$ линейно упорядоченное множество. Как отмечено выше, с ним связаны две группы:группа $\mathbf{Aut}(X)$ всех автоморфизмов X и группа $\mathbf{Mon}(X)$ всех монотонных отображений X.

Очевидно что $\mathbf{Aut}(X) \subseteq \mathbf{Mon}(X)$, причем $\mathbf{Aut}(X) \neq \mathbf{Mon}(X)$ тогда и только тогда, когда существует хотя бы один антиавтоморфизм $\mathbf{i}$ множества X, то есть такое взаимнооднозначное отображение множества X на себя, что неравенство $x \leq y$ влечет $x\mathbf{i} \geq y\mathbf{i}$. В этом случае X обладает инволютивным антиавтоморфизмом $\mathbf{i}$, $\mathbf{i}^2 = e$.

Хорошо известно, что для всякого линейно упорядоченного множества X группа $\mathbf{Aut}(X)$ является l-группой относительно естественных операций: $\xi(x \vee y) = \max\{\xi x, \xi y\}$, $\xi(x \wedge y) = \min\{\xi x, \xi y\}$ для x, y из $\mathbf{Aut}(X)$, ξ из X. Как отмечено в [6], группа $\mathbf{Mon}(X)$ является полуупорядоченной l-группой относительно естественных операций $\vee, \wedge$ и, если зафиксировать какой-либо инволютивный антиавтоморфизм $\mathbf{i}$ множества X, то l-подгруппа $\mathbf{Aut}(X)$ полуупорядоченной l-группы $\mathbf{Mon}(X)$ превращается в m-группу, для которой операция $_{*}$ задается равенством: $\xi y_{*} = \xi \mathbf{i} y \mathbf{i}$ при $\xi \in X$. Мы будем обозначать эту полуупорядоченную l-группу $\mathbf{Mon}(X)$ с выделенным инволютивным антиавтоморфизмом $\mathbf{i}$ через $(\mathbf{Mon}(X), \mathbf{i})$.

Как обычно, *представлением l-группы G* называем всякий l-гомоморфизм φ l-группы G в l-группу $\mathbf{Aut}(X)$. Это означает, что φ является гомоморфизмом группы G в группу $\mathbf{Aut}(X)$ и таким, что справедливы равенства $(x \vee y)\varphi = x\varphi \vee y\varphi$, $(x \wedge y)\varphi = x\varphi \wedge y\varphi$. Как доказано Холландом, всякая l-группа имеет точное представление автоморфизмами подходящего линейно упорядоченного множества.

Следуя [6], *представлением m-группы G* называем всякое представление φ l-группы G в l-подгруппу $\mathbf{Aut}(X)$ группы $(\mathbf{Mon}(X), \mathbf{i})$ для некоторого линейно упорядоченного множества X с выделенным инволютивным антиавтоморфизмом $\mathbf{i}$, причем для всякого элемента g из G выполнено соотношение $g_*\varphi = \mathbf{i} \cdot g\varphi \cdot \mathbf{i}$. Вместе с подгруппой $G\varphi$ в $\mathbf{Mon}(X)$ мы иногда будем рассматривать подгруппу $G\varphi \cdot \langle \mathbf{i} \rangle$, являющуюся, очевидно, полупрямым произведением группы $G\varphi$ и циклической группы $\langle \mathbf{i} \rangle$ второго порядка. В [6] доказано, что всякая m-группа имеет точное представление в группе $(\mathbf{Mon}(X), \mathbf{i})$ для подходящего линейно упорядоченного множества X и некоторого инволютивного антиавтоморфизма $\mathbf{i}$.

Множество $\mathcal{R}(G : V)$ правых смежных классов G по выпуклой l-подгруппе V является решеткой относительно порядка: $Vx \le Vy$ тогда и только тогда, когда найдется элемент v из V, для которого справедливо неравенство $vx \le y$. Если этот порядок на $\mathcal{R}(G : V)$ является линейным порядком, то V называется *спрямляющей* l-подгруппой. Множество $\Gamma(G)$ всех спрямляющих l-подгрупп l-группы является корневой системой в решетке $\mathcal{L}(G)$ всех выпуклых l-подгрупп G, то есть для любой подгруппы H из $\Gamma(G)$ множество всех подгрупп F из $\Gamma(G)$, содержащих H, линейно упорядочено по включению и, если $H \in \Gamma(G)$, $F \in \mathcal{L}(G)$, $H \subseteq F$, то $F \in \Gamma(G)$. Для любого неединичного элемента a из G выберем выпуклую l-подгруппу V_a, не содержащую a и максимальную с этим свойством. Тогда $V_a \in \Gamma(G)$ и V_a называется *значением* элемента a в $\Gamma(G)$. Множество всех значений неединичных элементов из G обозначается $\Gamma_0(G)$. Для каждой подгруппы V из $\Gamma_0(G)$ существует единственная выпуклая l-подгруппа $\overline{V}$ наименьшая среди тех выпуклых l-подгрупп, которые строго содержат V. Основополагающим для теории нормальнозначных l-групп является следующее утверждение, являющееся переформулировкой результата С.Вольфенштейна (см. например [9] теорема 8.2.1 или [10] теорема 9.2.1).

Теорема Вольфенштейна *Решеточно упорядоченная группа G тогда и только тогда является l-группой с субнормальными скачками, когда всякая выпуклая l-подгруппы V из $\Gamma_0(G)$ нормальна в $\overline{V}$.*

Если $V \in \Gamma(G)$, то рассмотрим линейно упорядоченное множество $\mathcal{R}(G : V)$ и отображение R группы G в $\mathbf{Aut}(\mathcal{R}(G : V))$, задаваемое правилом $Vx \cdot R(g) = Vxg$ при $Vx \in \mathcal{R}(G : V)$, $g \in G$. Отображение R является транзитивным представлением l-группы G, при котором $R(g)$ является неединичным элементом в $\mathbf{Aut}(\mathcal{R}(G : V))$, если $g \notin V$. Всякое транзитивное представление l-группы получается таким способом с помощью подходящей спрямляющей подгруппы.

Решеточно упорядоченная группа G автоморфизмов линейно упорядоченного множества X называется *o-2-транзитивной*, если для любых элементов ξ, η, ξ', η' из X таких, что $\xi \le \eta$, $\xi' \le \eta'$, найдется элемент g из G, для которого выполнено $\xi g = \xi'$, $\eta g = \eta'$. Решеточно упорядоченная группа G называется *o-примитивной*, если на X нет нетривиальной выпуклой конгруенции, то есть такого отношения эквивалентности θ, что классы эквивалентности на X являются выпуклыми неединичными собственными подмножествами X и отношение $\xi\theta\eta$ влечет $\xi g\theta\eta g$ для всех ξ, η из X, g из G.

Доказательство основного результата этой работы использует следующие два факта.

Во-первых, это **Классификационная Теорема Макклири** (см., например, [9] теорема 4.5.2 или [10] теорема 4.5.2), описывающую строение транзитивных o-примитивных групп автоморфизмов линейно упорядоченных множеств.

Во-вторых, это следующий результат, доказанный в работе [7].

Теорема Жироде-Рахунека *Пусть φ - представление m-группы G в группе $\mathbf{Mon}(X)$. Если подгруппа $G\varphi \cdot \langle \mathbf{i} \rangle$ группы $(\mathbf{Mon}(X), \mathbf{i})$ является 2-транзитивной группой отображений множества X, то m-группа G порождает многообразие $\mathcal{M}$ всех m-групп.*

3 Основные результаты

Основная теорема. *Всякая m-группа G, не лежащая в $\mathcal{N}_m$, порождает многообразие $\mathcal{M}$ всех m-групп.*

Прежде, чем излагать схему доказательства, приведем некоторые определения. Будем говорить, что m-подгруппа V m-группы G является *нестабильной*, если V – максимальная выпуклая l-подгруппа в G и V не нормальна в G. Всякую m-группу, обладающую нестабильной m-подгруппой называем *аномальной*. Если m-группа G сигнатуры $\mathbf{m} = \{\cdot, e, {}^{-1}, \vee, \wedge, {}_*\}$ является прямым произведением своих l-подгрупп A, B, причем $A_* = B$, то называем G *разложимой* m-группой. Доказательство основного результата этой работы состоит в том, что в многообразии $\mathcal{X}_m$, порожденном m-группой G, не лежащей в $\mathcal{N}_l$, мы находим аномальную m-группу, либо разложимую m-группу, не принадлежащую $\mathcal{N}_m$, а затем устанавливаем, что всякая m-группа такого типа порождает многообразие всех m-групп.

Главную нагрузку в доказательстве основной теоремы несут следующие три утверждения, позволяющие свести рассмотрение многообразия, порожденного не нормальнозначной m-группой, к уже исследованным случаям.

ЛЕММА 1. *Пусть V – спрямляющая l-подгруппа m-группы G не являющаяся m-подгруппой. Тогда в G имеется выпуклая l-подгруппа H,* *являющаяся разложимой m-группой.*

Притом, если $\mathcal{N}_l(G) = E$, то и $\mathcal{N}_l(H) = E$.

Пусть теперь G – m-группа и V – ее спрямляющая l-подгруппа. Рассмотрим представление R l-группы G автоморфизмами линейно упорядоченного множества $\mathcal{R}(G : V)$: $VxR(g) = Vxg$. Для удобства введем линейно упорядоченное множество X, порядково изоморфное множеству $\mathcal{R}(G : V)$ и зафиксируем некоторый порядковый изоморфизм τ множества $\mathcal{R}(G : V)$ на X и обозначим через ϑ образ V под действием τ. Тогда можно рассмотреть представление ρ l-группы G в $\mathbf{Aut}(X)$ положив

$$\xi \cdot g\rho = \xi\tau^{-1}R(g)\tau \quad \text{при} \quad \xi \in X, \quad g \in G.$$

ЛЕММА 2. *Пусть V – спрямляющая m-подгруппа m-группы G. Тогда отображение $\mathbf{i} = (\tau^{-1})_{*}\tau$ является антиавтоморфизмом множества $X = \mathcal{R}(G : V)\tau$ и отображение $\rho = \tau^{-1}R\tau$ является представлением m-группы G в $\mathbf{Mon}(X)$ с выделенным инволютивным антиавтоморфизмом $\mathbf{i}$.*

ЛЕММА 3. *Всякая разложимая m-группа G, не лежащая в $\mathcal{N}_m$ порождает многообразие $\mathcal{M}$ всех m-групп.*

Доказательство этих лемм мы здесь не приводим, а даем только изложение пути, который и устанавливает основной результат.

Схема доказательства основной теоремы.

Пусть G – m-группа и $G \not\in \mathcal{N}_l$. Не ограничивая общности можем считать, что $\mathcal{N}_l(G) = E$, то есть в G нет выпуклых l-подгрупп из $\mathcal{N}_l$. Так как G не нормальнозначна, то по теореме Вольфенштейна в G найдется выпуклая спрямляющая l-подгруппа V из $\Gamma_0(G)$ такая, что V не нормальна в накрывающей V выпуклой l-подгруппе $\overline{V}$.

Если $V_{*} \neq V$, то по лемме 1 m-группа G содержит разложимую выпуклую m-подгруппу $H = A \times A_{*}$. Так как в G нет выпуклых l-подгрупп из $\mathcal{N}_l$, то $H \not\in \mathcal{N}_m$. По лемме 3 многообразие m-групп, порожденное H совпадает с многообразием $\mathcal{M}$ всех m-групп и, следовательно G порождает $\mathcal{M}$.

Пусть $V_{*} = V$. Тогда для накрывающей выпуклой l-подгруппы $\overline{V}$ выполнено $\overline{V}_{*} = \overline{V}$, то есть $\overline{V}$ является m-группой. Пусть $\tau : \mathcal{R}(\overline{V} : V) \to X$ – порядковый изоморфизм линейно упорядоченного множества $\mathcal{R}(\overline{V} : V)$, $V\tau = \vartheta$. По лемме 2 представление ρ: $\xi \cdot g\rho = \xi\tau^{-1}g\tau$ l-группы $\overline{V}$ автоморфизмами линейно упорядоченного множества X является представлением m-группы $\overline{V}$ в m-группе $(\mathbf{Mon}(X), \mathbf{i})$, где $\mathbf{i}$: $\xi\mathbf{i} = (\xi\tau^{-1})_{*}\tau$ – инволютивный антиавтоморфизм множества X. Тогда $V\rho$ является стабилизатором точки ϑ в $\overline{V}\rho$. Так как V – максимальная выпуклая l-подгруппа в $\overline{V}$, то по известному результату Холланда (см., например,

[9] теорема 4.5.1 или [10] теорема 4.5.1) $\overline{V}\rho$ является o-примитивной подгруппой в $\mathbf{Aut}(X)$. По классификационной теореме Макклири $\overline{V}\rho$ является либо o-2-транзитивной подгруппой в $\mathbf{Aut}(X)$, либо $\overline{V}\rho$ является l-группой периодических автоморфизмов множества X, причем стабилизатор $St_{\overline{V}_\rho}(\alpha)$ каждой точки α из X действует точно и o-2-транзитивно на каждой из своих неединичных орбит. Рассмотрение каждой из этих возможностей и завершит доказательство.

Если $\overline{V}\rho$ – o-2-транзитивна на X, то $\overline{V}\rho \cdot \langle\mathbf{i}\rangle$ является 2-транзитивной группой преобразований множества X. Так как $\overline{V}\rho$ транзитивная подгруппа в $\mathbf{Mon}(X)$, то достаточно доказать, что стабилизатор точки ϑ в $\overline{V}\rho \cdot \langle\mathbf{i}\rangle$ транзитивен на множестве $X \setminus \{\vartheta\}$. Но $St_{\overline{V}\rho\cdot\langle\mathbf{i}\rangle}(\vartheta) = V\rho \cdot \langle\mathbf{i}\rangle$. Пусть $\alpha, \beta \in X$, $\alpha \neq \vartheta \neq \beta$. Если $\alpha, \beta < \vartheta$ или $\alpha, \beta > \vartheta$, то существование элемента g в V такого, что $\alpha \cdot g\rho = \beta$ следует из o-2-транзитивности $G\rho$. Если же $\alpha < \vartheta < \beta$ то $\alpha, \beta\mathbf{i} < \vartheta$ и найдется элемент g из V для которого выполнено $\alpha = \beta\mathbf{i} \cdot g\rho$. Итак, в этом случае $\overline{V}\rho \cdot \langle\mathbf{i}\rangle$ является 2-транзитивной группой и, по теореме Жироде-Рахунека, m-группа $\overline{V}\rho$, а тогда и m-группа G, порождает многообразие $\mathcal{M}$.

Если $\overline{V}\rho$ является m-подгруппой в $(\mathbf{Mon}(X), \mathbf{i})$ и l-группой периодических автоморфизмов множества X с периодом $t, t > e$ из $\mathbf{Aut}(\overline{X})$, где $\overline{X}$ – дедекиндово пополнение множества X, то l-группа $V\rho$ действует точно и o-2-транзитивно на множестве $X' = \{\xi \in X | \vartheta < \xi < \vartheta t\}$.

Рассмотрим ограничение ρ' представления ρ l-группы V на X'. Пусть W – полный прообраз в V стабилизатора $W\rho'$ в $V\rho'$ некоторой точки $\vartheta' = \vartheta \cdot a\rho$ из X', где a – некоторый элемент из $\overline{V}$, $W = \{w \in V | \vartheta' \cdot w\rho = \vartheta' \cdot w\rho' = \vartheta'\}$. Очевидно, что $W = V \cap a^{-1}Va$. Так как $V\rho'$ – o-2-транзитивна на X', то W является максимальной выпуклой l-подгруппой m-группы V и W не является нормальной подгруппой в V.

Если $W_{*} \neq W$, то по лемме 1 V содержит разложимую выпуклую m-подгруппу B. Так как $\mathcal{N}_l(G) = E$, а B – выпуклая l-подгруппа G, то $\mathcal{N}_l(B) = E$ и $B \not\in \mathcal{N}_l$. Применив лемму 3 получаем, что m-группа B, а тогда и G, порождает многообразие $\mathcal{M}$.

Если $W_{*} = W$, то V является аномальной m-группой и ρ' – представление l-группы V в $\mathbf{Aut}(X')$. Как хорошо известно и проверяется непосредственно, линейно упорядоченное множество X' порядково изоморфно множеству $\mathcal{R}(V : W)$ с каноническим изоморфизмом τ' : $Wx\tau' = \vartheta' \cdot x\rho'$ для всякого x из V. Притом справедливо соотношение $\xi \cdot v\rho = \xi\tau'^{-1}v\tau'$ для всяких элементов ξ из X', v из V. По лемме 2 отображение $\mathbf{i}'$: $\xi\mathbf{i}' = (\xi\tau'^{-1})_{*}\tau'$, является антиавтоморфизмом второго порядка множества X' и ρ' задает представление m-группы V в $(\mathbf{Mon}(X'), \mathbf{i})$ такое, что $\xi \cdot v_{*}\rho' = \xi \cdot \mathbf{i}' \cdot v\rho' \cdot \mathbf{i}'$.

Вспомним, что m-подгруппа $V\rho'$ в $(\mathbf{Mon}(X'), \mathbf{i}')$ является o-2-

транзитивной l-группой. Тогда, как отмечено выше, такая m-группа является 2-транзитивной группой преобразований множества X' и, по теореме Жироде-Рахунека, $V\rho'$ порождает многообразие $\mathcal{M}$ всех m-групп. Так как $V\rho'$ является m-гомоморфным образом выпуклой m-подгруппы исходной m-группы G, то и в этом случае m-группа G порождает многообразие $\mathcal{M}$ всех m-групп, что и завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. *Многообразие N_m всех нормальнозначных m-групп является наибольшим собственным подмногообразием в решетке всех m-многообразий.*

Список литературы

[1] *Lorenzen P.* Über Halbgeordnete Gruppen, Arh.Math.,2,№1-2 (1949),66-70.

[2] *Lorenzen P.* Über Halbgeordnete Gruppen, Math.Z., 52, №5 (1949), 483-526.

[3] *Clifford A.H.* Partially ordered groups of the second and third kinds, Proc.Amer.Math.Soc., 17(1966), 219-225.

[4] *Конторович П.Г., Кокорин А.И.* Об одном типе частично упорядоченных групп, Матем.зап. Уральск. ун-та, 3, №3 (1962), 27-31.

[5] *Блудов В.В., Кокорин А.И.* Полуоднородно упорядочиваемые группы, в сб. "Алгебраические системы", Иркутск, 1976, 3-16.

[6] *Giraudet M, Lucas F.* Groupes á motié ordonnés, Fund.Math., 139 (1991), 75-89.

[7] *Giraudet M, Rachunek J.* Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains, Czechoslovak Math.J., 49 (1999), 743-766.

[8] *Holland W.Ch.* The largest proper variety of lattice-ordered groups, Proc.Amer.Math.Soc., 57, №1 (1976), 25-28.

[9] *Копытов В.М.* Решеточно упорядоченные группы, М, Наука, 1984.

[10] *Kopytov V.M., Medvedev N.Ja.* The theory of lattice-ordered groups, Dordrecht a.o., Kluwer Academic Publishers, 1994.

ON $\aleph_0$–CATEGORICAL WEAKLY O-MINIMAL THEORIES OF CONVEXITY RANK 1

B.Sh. Kulpeshov

Informatics and Control Problems Institute
Ministry of Education and Science
480100, ul. Pushkina 125,
Almaty, Kazakhstan
e-mail: kbsh@ipic.kz, kulpesh@mail.ru

Let L be a countable first-order language. Everywhere in this paper we consider L-structures and assume that L contains a binary relation symbol $<$ that is interpreted as a linear ordering in these structures. For arbitrary subsets A, B of a structure M we write $A < B$ if $a < b$ whenever $a \in A$ and $b \subset B$. If $A \subset M$ and $x \in M$ then we write $A < x$ if $A < \{x\}$ For an arbitrary complete type p we denote by $p(M)$ the set of realizations of the type p in M.

Definition 1 Let $A \subseteq M$, where M is a linearly ordered structure. The set A is said to be *convex* if for any $a, b \in A$ and $c \in M$ such that $a < c < b$ we have $c \in A$.

Definition 2 [1] A linearly ordered structure M is said to be *o-minimal* if any definable (with parameters) subset of M is a finite union of intervals in M.

Definition 3 [2] A linearly ordered structure M is said to be *weakly o-minimal* if any definable (with parameters) subset of M is a finite union of convex sets in M.

In [3] we have introduced the following notion: rank of convexity of a formula with one free variable.

Definition 4 [3] Let T be a weakly o-minimal theory, M be a sufficiently saturated model of T, and let $\phi(x, \bar{a}), \bar{a} \in M$ be an arbitrary formula with one free variable.

$RC(\phi(x, \bar{a}))$ is defined as follows:

1) $RC(\phi(x,\bar{a})) = -1$ if $M \models \neg\exists x\phi(x,\bar{a})$.
2) $RC(\phi(x,\bar{a})) \geq 0$ if $M \models \exists x\phi(x,\bar{a})$.
3) $RC(\phi(x,\bar{a})) \geq 1$ if $|\phi(M,\bar{a})| \geq \omega$.
4) $RC(\phi(x,\bar{a})) \geq \alpha+1$ if there is a parametrically definable equivalence relation $E(x,y)$ such that there are $b_i, i \in \omega$ which satisfy the following:

- For every $i,j \in \omega$, whenever $i \neq j$ then $M \models \neg E(b_i,b_j)$
- For every $i \in \omega$ $RC(\phi(x,\bar{a})\& E(x,b_i)) \geq \alpha$
- For every $i \in \omega$ $E(M,b_i)$ is a convex subset of $\phi(M,\bar{a})$

5) $RC(\phi(x,\bar{a})) \geq \delta$ if $RC(\phi(x,\bar{a})) \geq \alpha$ for all $\alpha \leq \delta$ (δ is limit)

If $RC(\phi(x,\bar{a})) = \alpha$ for some α we say that $RC(\phi(x,a))$ is defined. Otherwise (i.e. if $RC(\phi(x,\bar{a})) \geq \alpha$, for all α) we put $RC(\phi(x,\bar{a})) = \infty$.

Fact 5 *Let T be an o-minimal theory. Then $RC(x=x) = 1$.*

Definition 6 [4] Let M be $|A \bigcup B|^+$-saturated. By a *neighbourhood* of B in the type p we shall call the following set:

$$V_p(B) := \{\gamma \in M \mid \text{there is a formula } H(x,b,\bar{a}), b \in B, a \subset A,$$

so that $\gamma \in H(M,\bar{b},\bar{a})$ and there are $\gamma_1, \gamma_2 \in p(M)$ such that

$$\gamma_1 < H(M,\bar{b},\bar{a}) < \gamma_2\}.$$

Definition 7 [4] Let M be $|A|^+$-saturated. We will say p is *almost orthogonal* to q ($p \perp^a q$) if there is $\alpha \in p(M)$ such that $V_p(\alpha) = \emptyset$.

Definition 8 [4] Let M be $|A|^+$-saturated. We will say p is *weakly orthogonal* to q ($p \perp^w q$) if for any A-definable formula $H(x,y)$ for any $\alpha \in p(M)$ the following holds:

$$[\, H(M,\alpha) \bigcap q(M) \neq \emptyset \Rightarrow q(M) \subseteq H(M,\alpha)\,]$$

Definition 9 [4] We will say a weakly o-minimal theory T is *almost o-minimal* if for any $M \models T$ for any $A \subseteq M$ for any non-algebraic types $p,q \in S_1(A)$ the following holds:

$$p \perp^a q \Leftrightarrow p \perp^w q.$$

Fact 10 *Any o-minimal theory is almost o-minimal.*

A. Pillay and Ch. Steinhorn [5] have described all $\aleph_0$-categorical o-minimal theories. Their description implies binarity of these theories. In [6] the author generalizes their result on $\aleph_0$-categorical almost o-minimal theories of convexity rank 1. Observe that there are $\aleph_0$-categorical binary weakly o-minimal theories of convexity rank 1 which are not almost o-minimal. Here we present for each natural $n \geq 3$ an example of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theory of convexity rank 1 which is n-ary non n-1-ary.

Example 11 Let $M = \langle M, <, =, U_1^1, U_2^1, \ldots, U_n^1, R^n\rangle$ in which the underlying order is dense. The universe M is a disjoint union of $U_1, U_2, \ldots, U_n$ so that whenever $a_1 \in U_1, a_2 \in U_2, \ldots, a_n \in U_n$ we have $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ and each predicate $U_i, 1 \leq i \leq n$, hasn't endpoints in M. The n-ary predicate $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ satisfies the following properties:

(1) $M \models \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (R(x_1,x_2,\ldots,x_n) \to U_1(x_1) \wedge U_2(x_2) \wedge \ldots \ldots \wedge U_n(x_n))$

(2) $M \models \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_{n-1}((U_1(x_1) \wedge U_2(x_2) \wedge \ldots \wedge U_{n-1}(x_{n-1})) \to \to \exists z_1 \exists z_2 [R(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},z_1) \wedge \neg R(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},z_2) \wedge U_n(z_2)])$

(3) $M \models \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_{n-1} \forall z_1 \forall z_2 ((R(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},z_1) \wedge \wedge \neg R(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},z_2) \wedge U_n(z_2)) \to z_1 < z_2)$

$(4)_i$ $M \models \forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} \forall x_{i+1} \ldots \forall x_{n-1} \forall z (U_1(x_1) \wedge \ldots \wedge U_{i-1}(x_{i-1}) \wedge \wedge U_{i+1}(x_{i+1}) \wedge \ldots \wedge U_{n-1}(x_{n-1}) \wedge U_n(z) \to \exists x_i R(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_{n-1},z))$, $1 \leq i \leq n-1$

$(5)_i$ For any $\bar{a}_i := \langle a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{n-1}\rangle \in U_1 \times \cdots \times U_{i-1} \times U_{i+1} \times \ldots \times U_{n-1}$ function $f_{\bar{a}_i}(x_i) := \sup R(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_{n-1},M)$ is strictly monotonically increasing on $U_i, 1 \leq i \leq n-1$

(6) For any $\langle a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\rangle \in U_1 \times U_2 \ldots \times U_{n-1}$ $R(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},M)$ hasn't endpoints in M

It is obvious that $Th(M)$ admits elimination of quantifies. It can prove that $Th(M)$ is an $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theory of convexity rank 1. It is easily to see that $Th(M)$ is n-ary non n-1-ary.

Definition 12 Let $A, B_1, \ldots, B_s \subseteq M$, where M is a linearly ordered structure.

1. We will say that $\{B_1,\ldots,B_s\}$ is *weakly orthogonal over* A if every s-tuple $\langle a_1,\ldots,a_s\rangle \in B_1 \times \ldots \times B_s$ satisfies the same type over A.
2. We will say that $\{B_1,\ldots,B_s\}$ is *orthogonal over* A if for every sequence $\langle n_1,\ldots,n_s\rangle \in \omega^s$ each properly ordered $(n_1+\ldots+n_s)$-tuple

$$\langle a_1^1, a_2^1, \ldots, a_1^{n_1}; \ldots; a_s^1, a_s^2, \ldots, a_s^{n_s}\rangle \in (B_1)^{n_1} \times \ldots \times (B_s)^{n_s}$$

satisfies the same type over A.

Lemma 13 *Let T be an $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theory of convexity rank 1, $M \models T$, $A \subseteq M$, M be $|A|^+$-saturated, $p_1, p_2, \dots, p_s \in S_1(A)$ be non-algebraic. Suppose that $\{p_1(M), \dots, p_s(M)\}$ is weakly orthogonal over A. Then it is orthogonal over A.*

Proof of Lemma 13 is analogous with the proof of Lemma 6.6 [5].

Fact 14 *Let T be an $\aleph_0$-categorical binary weakly o-minimal theory of convexity rank 1, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p_1, p_2, \dots, p_s \in S_1(A)$ be non-algebraic pairwise weakly orthogonal types. Then $\{p_1(M), p_2(M), \dots, p_s(M)\}$ is orthogonal over A.*

The following theorem completely characterizes $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories of convexity rank 1 that are binary.

Theorem 15 *Let T be an $\aleph_0$-categorical binary weakly o-minimal theory of convexity rank 1, $M \models T$, $|M| = \aleph_0$. Then there exist*
(i) a finite $C = \{c_0, \dots, c_n\} \subseteq M$ ($M \bigcup \{-\infty, +\infty\}$, if M does not have a first or last element), consisting of all of the $\emptyset$-definable elements in M (with the possible exceptions of $-\infty, +\infty$), such that $M \models c_i < c_j$ for all $i < j \leq n$ and for each $j \in \{1, \dots, n\}$ either $M \models \neg(\exists x) c_{j-1} < x < c_j$ or $I_j = \{\, x \in M : M \models c_{j-1} < x < c_j \,\}$ is a dense linear order without endpoints and there is $k_j \in \omega$ such that I_j is partitioned on k_j complete over $\emptyset$ infinite sets;
(ii) equivalence relations E_1, $E_2 \subseteq (\{s : 1 \leq s \leq k\})^2$, where $\{U_s \mid s \leq k < \omega\}$ is an arbitrary enumeration of all complete over $\emptyset$ infinite sets, such that

- *for each $(i,j) \in E_1$ there is a unique $\emptyset$-definable monotonic bijection $f_{i,j} : U_i \to U_j$ so that $f_{i,i} = id_{U_i}$ and $f_{j,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}$ for all $(i,j), (j,k) \in E_1$;*
- *for each $(i,j) \in E_2$ there is a unique $\emptyset$-definable formula $R_{i,j}(x,y)$ such that*
  - *for any $a \in U_i$ $R_{i,j}(M,a)$ is convex and open, $R_{i,j}(M,a) \subset U_j$, $R_{i,j}(M,a)^- = U_j$*
  - *$g_{i,j}(y) := \sup R_{i,j}(M,y)$ is strictly monotonic on U_i*
  - *if $g_{i,j}$ is increasing then $R_{j,i}(x,y) \equiv \forall t [R_{i,j}(y,t) \to x < t] \wedge U_i(x)$, otherwise $R_{j,i}(x,y) \equiv R_{i,j}(y,x)$*

  so that for any $(i,j), (j,k) \in E_2$ we have:
  if $g_{j,k}$ is increasing then $R_{i,k}(x,y) := \exists z [R_{i,j}(z,y) \wedge R_{j,k}(x,z)]$, otherwise $R_{i,k}(x,y) := \forall z [R_{i,j}(z,y) \to R_{j,k}(x,z)]$ and $g_{i,i} = id_{U_i}$

- *for each $(i,j) \in E_1$ we have $(i,j) \in E_2$ and $R_{i,j}(x,y) \equiv x < f_{i,j}(y)$*

so that T admits elimination of quantifiers down to the language $\{=, <\} \bigcup \{\underline{c}_i : i \leq n\} \bigcup \{\underline{U}_s : s \leq k\} \bigcup \{\underline{f}_{i,j} : (i,j) \in E_1\} \bigcup \{\underline{R}_{i,j} : (i,j) \in E_2 \setminus E_1\}$, where the $\underline{c}_i$ are interpreted in M by c_i, $\underline{U}_s$ by U_s, $\underline{f}_{i,j}$ by $f_{i,j}$ for $(i,j) \in E_1$, $\underline{R}_{i,j}$ by $R_{i,j}(M,M)$ for $(i,j) \in E_2 \setminus E_1$.
Moreover to any ordering with distinguished elements as in (i) and any suitable equivalence relations E_1, E_2 as in (ii), there corresponds an $\aleph_0$-categorical binary weakly o-minimal theory of convexity rank 1 as above.

Proof of Theorem 15 by use of Lemma 13 and Fact 14 is analogous to the proof of Theorem 6.1 [5].

In conclusion the author thanks B.S. Baizhanov for useful discussion and valuable remarks.

References

[1] L. van den Dries, *"Remarks on Tarski's problem concerning $(R, +, *, exp)$"*, **Logic Colloquium '82** (G. Lolli, G. Longo, and A. Marcja, editors), North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 97–121.

[2] M.A. Dickmann, *"Elimination of quantifiers for ordered valuation rings"*, **Proceedings of the 3rd Easter model theory conference at Gross Koris**, Berlin, 1985.

[3] B.Sh. Kulpeshov, *"Weakly o-minimal structures and some of their properties"*, **The Journal of Symbolic Logic**, vol. 63 (1998), pp. 1511–1528.

[4] B.S. Baizhanov, *"One-types in weakly o-minimal theories"*, **Proceedings of Informatics and Control Problems Institute**, (M. Aidarkhanov and B. Baizhanov, editors), Almaty, 1996, pp. 75–88.

[5] A. Pillay, Ch. Steinhorn, *"Definable sets in ordered structures I"*, **Transactions of The American Mathematical Society**, vol. 295 (1986), pp. 565–592.

[6] B.Sh. Kulpeshov, *"On $\aleph_0$ categorical almost o-minimal theories of convexity rank 1"*, **Proceedings of Informatics anf Control Problems Institute**, (M. Aidarkhanov and B. Baizhanov, editors), Almaty, 1998, pp. 67–73

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ В ПРЕДУПОРЯДОЧЕННЫХ МОДЕЛЯХ КРИПКЕ

С.И.Мардаев[*]

Институт математики СО РАН
Новосибирск, Россия
e-mail: mardaev@math.nsc.ru

В статье исследуется определимость неподвижных точек в предупорядоченных моделях Крипке. Наименьшие неподвижные точки позитивных операторов могут быть не определимы даже в частично упорядоченных моделях. Поэтому интересно указать подкласс моделей, в которых определимость есть. В [5] был указан некоторый класс частично упорядоченных моделей, в которых наименьшие неподвижные точки позитивных операторов определимы, при этом определяющая формула получается итерацией исходной формулы. Здесь этот результат обобщается, указан класс предупорядоченных моделей, расширяющий класс из [5]. Расширение идет в двух направлениях: от частично упорядоченных переходим к предупорядоченным и при этом допускаем конечное число перемен истинности. Оказывается, что для доказательства достаточно техники из [5], нужно только внести некоторые модификации.

Модальные пропозициональные формулы составляются из пропозициональной константы $\bot$ (ложь) и пропозициональных переменных $p, q, r, \ldots$ с помощью бинарных связок $\wedge$ и $\vee$ и унарных связок $\neg$ и $\Box$.

Шкала Крипке $\langle W, R\rangle$ состоит из непустого множества W и бинарного отношения R на W. *Модель Крипке* $\langle W, R, v\rangle$ состоит из шкалы Крипке $\langle W, R\rangle$ и означивания v. *Означивание* v — это функция, которая каждой переменной q ставит в соответствие подмножество $v(q)$ множества W. Это подмножество $v(q)$ называется *значением* переменной q. Значение переменной q_i будем обозначать соответствующей прописной буквой Q_i. Функция v естественным образом продолжается на формулы: константе $\bot$ всегда соответствует пустое множество, связкам $\neg, \wedge, \vee, \Box$ соответствуют дополнение, пересечение, объединение множеств и следующая операция на множествах: $\Box A = \{x \mid \forall y(xRy \Rightarrow y \subset A)\}$. Таким образом, значение формулы всегда является подмножеством множества W. Значение формулы $\alpha(q_1, \ldots, q_n)$ будем обозначать через $\alpha(Q_1, \ldots, Q_n)$.

[*]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда, проект № 00-03-00108

Пусть дана формула $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ от переменных $p, q_1, \ldots, q_n$. Рассмотрим модель Крипке $\langle W, R, v\rangle$, в которой заданы значения $Q_1, \ldots, Q_n$ переменных $q_1, \ldots, q_n$, а значение переменной p не задано. Формула $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ определяет на модели Крипке $\langle W, R, v\rangle$ оператор $F_\varphi(P) = \varphi(P, Q_1, \ldots, Q_n)$, который каждому множеству P сопоставляет множество $\varphi(P, Q_1, \ldots, Q_n)$. Т.е. переменной p придается значение P и рассматривается значение формулы φ при этом означивании. Такие операторы назовем *формульными*.

Пусть дана шкала $\langle W, R\rangle$. Рассмотрим оператор F, не обязательно формульный, который каждому подмножеству A множества W сопоставляет некоторое подмножество $F(A)$ множества W. Множество P называется *неподвижной точкой* оператора F, если выполняется $P = F(P)$. Таким образом, неподвижная точка формульного оператора F_φ является решением уравнения $P = \varphi(P, Q_1, \ldots, Q_n)$. Неподвижная точка P называется *наименьшей* неподвижной точкой оператора F, если для любой другой неподвижной точки P' этого оператора выполняется $P \subseteq P'$.

Если неподвижная точка P совпадает в модели со значением некоторой формулы $\omega(q_1, \ldots, q_n)$, то эта формула ω *определяет* неподвижную точку P в данной модели. Называем эту формулу *определяющей*.

Если каждое вхождение переменной p в формулу $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ позитивное, то назовем эту формулу *позитивной* по p, а оператор F_φ назовем *позитивным*.

Рассмотрим оператор F и последовательность множеств в шкале $\langle W, R\rangle$, k — натуральное,

$$P^0 = \varnothing,$$
$$P^{k+1} = F(P^k).$$

Определим последовательность формул

$$\varphi^0(q_1, \ldots, q_n) = \bot,$$
$$\varphi^{k+1}(q_1, \ldots, q_n) = \varphi(\varphi^k(q_1, \ldots, q_n), q_1, \ldots, q_n).$$

Ясно, что для всех k множество P^k является значением формулы φ^k. Если φ позитивна по p и для некоторого k выполняется $P^k = P^{k+1}$ (например, так всегда бывает в конечной модели), то P^k является наименьшей неподвижной точкой оператора F_φ и определяется формулой φ^k.

Как обычно, отношение R называется *предпорядком*, если R рефлексивно и транзитивно. В этом случае вместо R обычно пишем $\leqslant$, а шкалу

$\langle W, \leqslant\rangle$ называем *предупорядоченной*. Антисимметричный предпорядок называется *частичным порядком*.

Примеры показывают, что наименьшие неподвижные точки позитивных операторов могут быть не определимы в частично упорядоченных моделях.

Пример 1 *Рассмотрим формулу $\varphi = \Box(p \vee q) \vee \Box(p \vee \neg q)$ и соответствующий ей позитивный оператор. Модель состоит из двух экземпляров N и N' (см. рис.) множества натуральных чисел с линейным порядком*

$$0 \leqslant 1 \leqslant 2 \leqslant \cdots \leqslant 2' \leqslant 1' \leqslant 0'.$$

Значением Q переменной q является множество всех четных чисел со штрихами и без. Нетрудно убедиться, что

$$P^1 = \{0'\},$$
$$P^2 = \{1', 0'\},$$
$$\dots$$

Наименьшей неподвижной точкой оператора F_φ является N'. Эта точка не определима никакой формулой от переменной q. Достаточно заметить, что для любой такой формулы найдется $i \in N'$ такое, что на всех элементах модели, лежащих ниже i, значение формулы будет совпадать со значением q, $\neg q$, $\bot$ либо $\top$. Можно также взять формулу $\varphi = \Box(q \vee \Box(p \vee \neg q))$. Наименьшая неподвижная точка будет та же.

Другая модель состоит из пар $\langle i, j\rangle$, где $i \leqslant j$, i и j натуральные. Частичный порядок задается соотношениями: $\langle i, i\rangle \leqslant \langle j, j\rangle$ при $i \leqslant j$, $\langle i, n\rangle \leqslant \langle j, n\rangle$ при $j \leqslant i$. Множество Q состоит из всех пар $\langle i, j\rangle$ с четным i. Нетрудно убедиться, что множество P^ω состоит из всех пар (i, j) при $i < j$. Проще говоря, надо отбросить ствол дерева. Множество P^ω является наименьшей неподвижной точкой. Она не определима никакой формулой от q, т.к. любая такая формула обладает следующим свойством: существует n такое, что на всех парах $\langle i, j\rangle$, у которых $i \geqslant n$ и $j \geqslant n$, значение формулы совпадает со значением $q, \neg q, \bot$ или $\top$. Эта шкала является частично упорядоченным деревом. △

Рассмотрим модель $\langle W, R, v\rangle$ и значение формулы α в ней. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — конечная цепь, т.е. $x_i R x_{i+1}$ для всех i. Сосчитаем число таких i, что истинность формулы α на элементах x_i и x_{i+1} различна, т.е. α на x_i истинна, а на x_{i+1} ложна, или наоборот. Максимум таких чисел

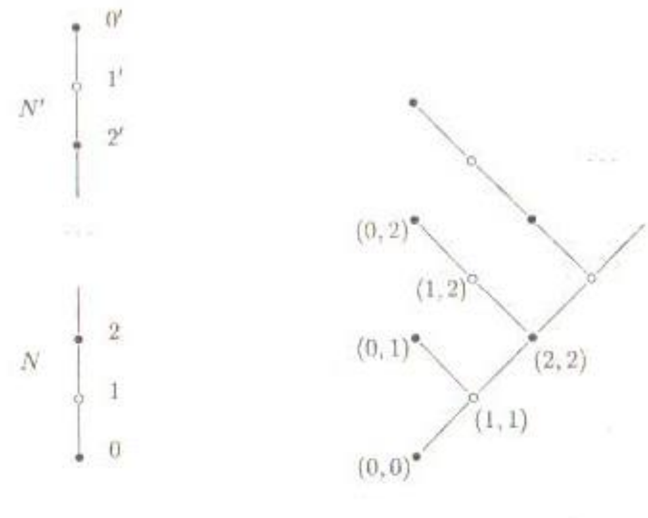


Рис. 6:

(он может быть равен бесконечности) по всем конечным цепям назовем *числом перемен истинности формулы* α. Например, если значение α меняется внутри сгустка, то это число равно бесконечности. Максимум чисел перемен истинности по всем переменным назовем *числом перемен истинности в модели*. В обеих моделях из примера 1 число перемен истинности переменной q равно бесконечности, а значит и число перемен истинности в моделях равно бесконечности.

Теорема 1 *Для любого позитивного оператора F_φ и натурального числа b существует число m такое, что формула φ^m определяет наименьшую неподвижную точку этого оператора в любой предупорядоченной модели Крипке, число перемен истинности в которой не превосходит b.*

В [5] класс состоял из частично упорядоченных моделей, в которых значения переменных $q_1, \dots, q_n$ являлись верхними конусами (подмножество $K \subseteq W$ называется *верхним конусом*, если $\forall x, y((xRy \wedge x \in K) \Rightarrow y \in K)$). Ясно, что в таких моделях число перемен истинности переменных $q_1, \dots, q_n$ не превосходит единицы. Поэтому класс моделей, рассматриваемый в теореме 1, расширяет класс из [5].

Доказательство теоремы 1 проводится аналогично доказательству теоремы 1 в [5]. Дополнительно нужна

Lemma 16 *Существует число f ограничивающее сверху число перемен истинности всех формул, приписанных элементам механизмов.*

Доказательство В данной модели число перемен истинности любой формулы ограничено, это легко докажем по индукции. Константа $\perp$ не меняет истинности, число перемен истинности переменных ограничено числом b. Если число перемен истинности формул α и β ограничено числом m, то число перемен истинности формулы $\neg\alpha$ ограничено числом m, формул $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$ ограничено числом $2m$. Формулы $\Box\alpha$ и $\Diamond\alpha$ меняют истинность не более одного раза. Приписанных формул конечное число. Поэтому существует число f, ограничивающее сверху число перемен истинности всех приписанных формул. △

Сохраняются все определения из доказательства теоремы 1 в [5]: полного дерева, усеченного дерева, полного механизма, усеченного механизма, морфизма, конфигурации.

Число всех различных приписанных формул обозначим c. Пусть даны частично упорядоченное множество и его элементы $\mu \leqslant \nu$. *Интервалом* называется множество $\{x \mid \mu \leqslant x \leqslant \nu\}$. Рассмотрим интервалы в полных деревьях такие, что нижний конец интервала совпадает с наименьшим элементом дерева, а верхний конец является ответвляющим элементом. Количество различных таких интервалов обозначим r. Положим $d = (fc+1)r + 1$ и $m = d(l+1)$.

Следующая лемма является аналогом леммы 4 из [5]. Она доказывается так же как и лемма 4 [5], нужно только внести некоторые изменения.

Lemma 17 *Для данных m и d выполняется $P(d) \subseteq \varphi^m(Q_1, \ldots, Q_n)$.*

Доказательство Два абзаца доказательства на с.174 [5] нужно изложить так.

ШАГ. Рассмотрим некоторое полное дерево высоты d. В нем рассмотрим ответвляющий элемент, не лежащий в I. Рассмотрим путь от этого элемента вниз до самого нижнего элемента структуры. Он проходит через d деревьев. Рассмотрим некоторое полное дерево, через которое проходит этот путь. Отрезок пути, лежащий в этом дереве, является интервалом. На этом пути встретится не менее $fc + 2$ некоторых одинаковых интервалов. Выберем из них самый нижний интервал и $fc + 1$ интервалов, лежащие выше. Докажем, что на элементе модели, являющимся образом нижнего конца некоторого из этих $fc+1$ интервалов, ложны все формулы, приписанные элементам этого интервала.

Возьмем один из рассматриваемых интервалов. Допустим, что на образе нижнего конца этого интервала истинна некоторая формула, приписанная элементу этого интервала. На образе соответствующего элемента интервала эта формула ложна. Произошло изменение истинности этой формулы. Каждая из формул может изменить свою истинность не более f раз. Формул, приписанных элементам интервала, имеется не более c. Поэтому таких изменений вдоль пути не может быть более fc, а интервалов имеется $fc+1$. Значит, найдется интервал, на образе нижнего конца которого ложны все формулы, приписанные элементам этого интервала.

В остальном доказательство аналогичное. △

Доказательство теоремы также в остальном аналогичное. △

Известно [4, 1, 3], что логика **S4** характеризуется классом всех предупорядоченных шкал. Поэтому получаем

Corollary 18 *Для любой формулы $\varphi(p, \Box q_1, \ldots, \Box q_n)$, позитивной по p, существует число m такое, что логика* **S4** *содержит формулу*

$$\varphi^{m+1}(\Box q_1, \ldots, \Box q_n) \leftrightarrow \varphi^m(\Box q_1, \ldots, \Box q_n).$$

С помощью перевода пропозициональных формул в модальные нетрудно получается следствие для интуиционистской пропозициональной логики.

Corollary 19 *Для любой позитивной по p пропозициональной формулы $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ существует число m такое, что логика* **Int** *содержит формулу*

$$\varphi^{m+1} \leftrightarrow \varphi^m.$$

Эти следствия извлечены также в [5]. Следствие 19 вытекает также из следующего результата В. Руитенбурга [2]. Для формулы $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ определяется последовательность формул

$$\varphi^0(p, q_1, \ldots, q_n) = p,$$
$$\varphi^{k+1}(p, q_1, \ldots, q_n) = \varphi(\varphi^k(p, q_1, \ldots, q_n), q_1, \ldots, q_n).$$

Это определение отличается от нашего определения $\varphi^k(q_1, \ldots, q_n)$.

Теорема 2 [2] *Для любой пропозициональной формулы $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ существует число m такое, что логика* **Int** *содержит формулу*

$$\varphi^{m+2}(p, q_1, \ldots, q_n) \leftrightarrow \varphi^m(p, q_1, \ldots, q_n).$$

Список литературы

[1] A. Chagrov, M. Zakharyaschev, *Modal Logic*, Oxford Logic Guides, vol. 35, Clarendon Press, 1997.

[2] W. Ruitenburg, *On the period of sequences $(A^n(p))$ in intuitionistic propositional calculus*, The Journal of Symbolic Logic **49** (1984), №3, 892–899.

[3] V. V. Rybakov, *Admissibility of Logical Inference Rules*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 136, Elsevier Science Publishers B.V., 1997.

[4] K. Segerberg, *An Essay in Classical Modal Logic*, Filosofiska Studier, № 13, Uppsala Universitet, Uppsala, 1971.

[5] С. И. Мардаев, *О сходимости позитивных схем в $S4$ и Int*, Алгебра и логика **33** (1994), №2, 166–178, перевод: S. I. Mardaev, *Convergence of Positive Schemes in $S4$ and Int*, Algebra and Logic **33** (1994), №2, 95–101.

НЕ ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫЙ МОНОИД, НАД КОТОРЫМ КЛАСС РЕГУЛЯРНЫХ ПОЛИГОНОВ ПОЛОН, НО НЕ МОДЕЛЬНО ПОЛОН

Е. В. Овчинникова*

Новосибирский государственный
технический университет,
Россия
e-mail: algebra@nstu.ru

В настоящей работе продолжается исследование полных классов регулярных полигонов, начатое в [1, 2].

Из замкнутости класса регулярных полигонов относительно дизъюнктных объединений следует, что для любого моноида модельная полнота класса регулярных полигонов влечет его полноту. Известно, что в случаях, когда моноид коммутативен [3] или содержит конечное число идемпотентов [1], полнота класса регулярных полигонов эквивалентна модельной полноте. В работе [2] приведен пример линейно упорядоченного моноида глубины 3, показывающий, что в общем случае полнота класса регулярных полигонов не совпадает с его модельной полнотой.

В данной статье строится пример не линейно упорядоченного моноида глубины 2, над которым класс всех регулярных полигонов полон, но не модельно полон.

Всюду, если не оговорено противное, через S будем обозначать моноид, через 1 — единицу моноида. S-*полигоном* называется алгебраическая система ${}_SA = \langle A, \{s \mid s \in S\}\rangle$ с одноместными операциями, в которой для любых $a \in A$, $s_1, s_2 \in S$ выполняется $1a = a$ и $s_1(s_2a) = (s_1s_2)a$. Если для элементов $a \in {}_SA$ и $b \in {}_SB$ существует изоморфизм $\varphi : {}_SSa \to {}_SSb$ такой, что $\varphi(a) = b$, то этот факт будем обозначать через ${}_SSa \overline{\rightarrow} {}_SSb$.

S-полигон ${}_SA$ называется *регулярным* [4], если для любого $a \in A$ существует идемпотент $e \in S$ такой, что ${}_SSa \overline{\rightarrow} {}_SSe$. Через ${}_ST$ будем

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00571).

обозначать наибольший регулярный подполигон полигона ${}_S S$, через ${}_S\mathfrak{R}$ — класс всех регулярных полигонов над S.

Факт 1 [3]. *Класс ${}_S\mathcal{R}$ регулярных S-полигонов аксиоматизируем тогда и только тогда, когда*

1) моноид S удовлетворяет условию минимальности для правых идеалов rS таких, что $r \in T$ и $rS = eS$ для некоторого идемпотента $e \in S$;

2) для любых $n \geq 1$, $s_i, t_i \in S$ $(1 \leq i \leq n)$ множество

$$\left\{x \in T \mid \bigwedge_{i=1}^{n} s_i x = t_i x\right\}$$

пусто или конечно порождено как правый идеал полугруппы T.

Факт 2 [3]. *Пусть класс ${}_S\mathcal{R}$ аксиоматизируем. Класс ${}_S\mathcal{R}$ модельно полон тогда и только тогда, когда для любых идемпотентов $e, g \in T$ выполняются следующие условия:*

1) множество $\{Sa \mid Sa \subseteq Se\}$ линейно упорядочено по включению;

2) если $Sa \subset Se, e \notin \cup\{a_i S \mid 1 \leq i \leq m\}$, где $a, a_i \in S$, $1 \leq i \leq m$, то найдутся идемпотенты $e_j \in T$ $(j \in \omega)$ такие, что $e_j \neq e_k$, $Sa = Se_j$, $e_j \in eS \setminus \cup\{a_i S \mid 1 \leq i \leq m\}$ для любых $j, k \in \omega$, $j \neq k$;

3) $|eSg| \geq \omega$.

Полугруппа S называется *линейно упорядоченной* [5], если для любого $b \in S$ множество $\{Sa \mid Sa \subseteq Sb\}$ линейно упорядочено по включению.

Отметим, что в терминах линейной упорядоченности условие 1 факта 2 можно переформулировать следующим образом: полугруппа $T(S)$ является линейно упорядоченной.

Если $\{{}_S A_i \mid i \in I\}$ — семейство попарно непересекающихся S-полигонов, то через $\bigsqcup_{i \in I} {}_S A_i$ будем обозначать дизъюнктное объединение S-полигонов ${}_S A_i$. Заметим, что класс ${}_S\mathfrak{R}$ замкнут относительно дизъюнктных объединений и перехода к подсистемам.

Следующие определения взяты из [5]. Под *разложением полугруппы* S понимается разбиение её в объединение непересекающихся полугрупп S_α $(\alpha \in \Omega)$. Полугруппа S называется *прямоугольной связкой групп*, если $S = \bigcup\{S_{ij} \mid i \in I, j \in J\}$ — разложение полугруппы S на группы S_{ij} и при этом $S_{ij} \cdot S_{kl} \subseteq S_{il}$.

Обозначим через $E(S)$ множество всех идемпотентов полугруппы S. *Глубиной* моноида S называется наибольшая длина цепи главных левых идеалов.

Для доказательства полноты классов полигонов мы будем пользоваться следующим утверждением:

Факт 3 [6]. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — алгебраические системы сигнатуры Σ. Системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда для любого $n \in \omega$ и любой конечной сигнатуры $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ существуют непустые множества $F_1(\Sigma_1, n), \ldots, F_n(\Sigma_1, n)$ конечных частичных изоморфизмов $\mathcal{A}|_{\Sigma_1}$ в $\mathcal{B}|_{\Sigma_1}$ со следующим свойством:*

если $f \in F_i(\Sigma_1, n)$, $1 \leq i < n$, то для любых $a \in A$, $b \in B$ существуют $g_1, g_2 \in F_{i+1}(\Sigma_1, n)$, для которых $a \in \operatorname{dom} g_1$, $b \in \operatorname{rang} g_2$, $f \subseteq g_1 \cap g_2$.

Теорема. *Существует не линейно упорядоченный моноид глубины 2, над которым класс всех регулярных полигонов полон и не модельно полон.*

Доказательство. Для абелевой группы $\mathcal{G} = \langle G, + \rangle$, непустых множеств I, J и функции $\varphi : I \times J \to G$ назовем $\langle \mathcal{G}, I, J, \varphi\rangle$-*связкой* полугруппу $\langle \mathcal{G} \times I \times J, * \rangle$, в которой операция $*$ определяется по следующему правилу:

$$\langle a, i, j\rangle * \langle b, k, l\rangle \rightleftharpoons \langle a + b + \varphi(k, j), i, l\rangle.$$

Ассоциативность операции $*$ следует из коммутативности операции $+$:

$$(\langle a, i, j\rangle * \langle b, k, l\rangle) * \langle c, m, p\rangle = \langle a + b + \varphi(k, j), i, l\rangle * \langle c, m, p\rangle =$$

$$= \langle a + b + \varphi(k, j) + c + \varphi(m, l), i, p\rangle = \langle a + b + c + \varphi(m, l) + \varphi(k, j), i, p\rangle =$$

$$= \langle a, i, j\rangle * \langle b + c + \varphi(m, l), k, p\rangle = \langle a, i, j\rangle * (\langle b, k, l\rangle * \langle c, m, p\rangle).$$

Для произвольных элементов $i \in I$ и $j \in J$ обозначим через S_{ij} множество $\{\langle a, i, j\rangle \mid a \in G\}$. Тогда алгебра $\mathcal{S}_{ij} = \langle S_{ij}, * \rangle$ является подгруппой $\langle \mathcal{G}, I, J, \varphi\rangle$-связки с идемпотентом $\langle -\varphi(i, j), i, j\rangle$ в качестве единичного элемента. Так как $S_{ij} * S_{kl} \subseteq S_{il}$, то $\langle \mathcal{G}, I, J, \varphi\rangle$ является прямоугольной связкой групп, которую будем обозначать через $\mathrm{RB}\langle \mathcal{G}, I, J, \varphi\rangle$.

Для произвольной группы G с единицей e и ординала α через G^α обозначим *прямую степень* группы G, т.е. множество всех функций $f : \alpha \to G$ таких, что множество $\{x \mid f(x) \neq e\}$ конечно.

Рассмотрим группу $\mathbf{Z}_2^\omega$, где $\mathbf{Z}_2 = \langle \{0, 1\}, + \rangle$. Элементы группы $\mathbf{Z}_2^\omega$ будем обозначать через $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$, полагая, что $\bar{a} = (a_0, a_1, \ldots)$, $\bar{b} = (b_0, b_1, \ldots)$, ноль группы $\mathbf{Z}_2^\omega$ через $\bar{0}$. Для произвольного элемента $\bar{a} \in \mathbf{Z}_2^\omega$ введем следующие обозначения:

$$h(\bar{a}) \rightleftharpoons \begin{cases} (0), & \text{если } \bar{a} = \bar{0}, \\ (a_0, \ldots, a_{n-1}), & \text{если } a_{n-1} = 1 \text{ и } a_k = 0 \text{ для всех } k \geq n, \end{cases}$$

$$l(\bar{a}) \rightleftharpoons \begin{cases} 0, & \text{если } \bar{a} = \bar{0}, \\ n, & \text{если } h(\bar{a}) = (a_0, \ldots, a_{n-1}), \end{cases}$$

$$r(\bar a) \rightleftharpoons \sum_{i=0}^{l(\bar a)} a_i \cdot 2^i.$$

Если $a = \langle \bar a, i, j \rangle \in S$, то полагаем $l(a) \rightleftharpoons l(\bar a)$, $r(a) \rightleftharpoons r(\bar a)$.

Очевидным является следующее

Замечание 1. *Для любых $\bar a, \bar b \in \mathbf{Z}_2^\omega$ выполняется соотношение $l(\bar a + \bar b) \leq \max\{l(\bar a), l(\bar b)\}$. Более того,*

если $l(\bar a) > l(\bar b)$, то $l(\bar a + \bar b) = l(\bar a)$,

если $l(\bar a) = l(\bar b)$, то $l(\bar a + \bar b) < l(\bar a)$.

2. *Если $l(\bar a) > l(\bar b)$, то $r(\bar a) > r(\bar b)$.*

3. *Функция r является биекцией из $\mathbf{Z}_2^\omega$ на ω.*

Определим функцию ψ из ω в $\mathbf{Z}_2^\omega$ по следующему правилу:

$$\psi(n) = r^{-1}\left(\left[\sqrt{n}\right]\right)$$

(здесь $[x]$ означает целую часть действительного числа x).

Зададим операцию умножения элементов группы $\mathbf{Z}_2^\omega$ на 0 и 1 следующим образом:

$$\bar a \cdot 0 \rightleftharpoons \bar 0,$$

$$\bar a \cdot 1 \rightleftharpoons \bar a.$$

Положим $\mathcal{G} \rightleftharpoons \mathbf{Z}_2^\omega$, $I \rightleftharpoons \omega$, $J \rightleftharpoons \{0, 1\}$, $\varphi(i, j) \rightleftharpoons \psi(i) \cdot j$.

Определим моноид S равенством

$$S = \langle \mathrm{RB}(\mathcal{G}, I, J, \varphi) \cup \mathbf{Z}_2^\omega, * \rangle,$$

где действие операции $*$ между элементами одной природы определяется естественным образом, а между элементами из $\mathrm{RB}(\mathcal{G}, I, J, \varphi)$ и $\mathbf{Z}_2^\omega$ по правилу:

$$\langle \bar a, i, j \rangle * \bar b = \bar b * \langle \bar a, i, j \rangle = \langle \bar a + \bar b, i, j \rangle.$$

В силу перестановочности элементов из $\mathbf{Z}_2^\omega$ с остальными элементами из S, очевидно, выполняется закон ассоциативности на S. Единицей моноида S является элемент $\bar 0$.

Так как все элементы из $\mathbf{Z}_2^\omega \setminus \{\bar 0\}$ имеют второй порядок, то для всех $i \in I$, $j \in J$ выполнимо $\varphi(i, j) = -\varphi(i, j)$, и все идемпотенты моноида S образуют множество

$$E(S) = \{\langle \varphi(i, j), i, j \rangle \mid i \in I, j \in J\} \cup \{\bar 0\}.$$

Моноид S является объединением групп, изоморфных $\mathbf{Z}_2^\omega$, следовательно, справедливо равенство $T = S$.

Лемма 1. *Класс ${}_S\mathfrak{R}$ аксиоматизируем.*

Для доказательства леммы воспользуемся фактом 1. Заметим сначала, что для главных правых идеалов, порожденных идемпотентами, выполняются следующие соотношения:

$$\begin{array}{ll} \langle \bar 0, i, 0 \rangle * S = \langle \bar 0, i, 1 \rangle * S \subseteq \bar 0 * S \text{ для } i \in I; & \\ \langle \bar 0, i, 0 \rangle S \cap \langle \bar 0, j, 0 \rangle S = \emptyset \text{ для } i, j \in I, i \neq j. & (*) \end{array}$$

Так как наибольшая длина цепи главных идеалов равна двум, то выполняется условие 1 факта 1.

Покажем теперь, что для любых $s, t \in S$ множество $X_{st} = \{x \mid s * x = t * x\}$ пусто или конечно порождено как правый идеал.

Допустим сначала, что $s = \bar a$, $t = \bar b$, и тогда $X_{st} = \{x \mid \bar a * x = \bar b * x\}$.

Если $x = \bar x \in \mathbf{Z}_2^\omega$, то равенство $\bar a * \bar x = \bar b * \bar x$ эквивалентно равенству $\bar a + \bar x = \bar b + \bar x$, и уравнение $\bar a * \bar x = \bar b * \bar x$ имеет решение тогда и только тогда, когда $\bar a = \bar b$.

Если $x = \langle \bar x, i, j \rangle \in \mathrm{RB}(\mathcal{G}, I, J, \varphi)$, то равенство $\bar a * \langle \bar x, i, j \rangle = \bar b * \langle \bar x, i, j \rangle$ эквивалентно равенству $\langle \bar a + \bar x, i, j \rangle = \langle \bar b + \bar x, i, j \rangle$, и, следовательно, и уравнение $\bar a * \langle \bar x, i, j \rangle = \bar b * \langle \bar x, i, j \rangle$ имеет решение тогда и только тогда, когда $\bar a = \bar b$.

Значит, если $s = \bar a$, $t = \bar b$, то множество X_{st} непусто тогда и только тогда, когда $\bar a = \bar b$. Таким образом, если $s = \bar a$, $t = \bar b$, то $X_{st} = \emptyset$ при $s \neq t$, и $X_{st} = S = \bar 0 * S$ при $s = t$, т.е. непустое множество X_{st} является конечно порожденным правым идеалом.

Допустим теперь, что $s = \bar a$, $t = \langle \bar b, i, j \rangle$. Покажем, что $X_{st} \cap \mathbf{Z}_2^\omega = \emptyset$. Действительно, если $x \in X_{st} \cap \mathbf{Z}_2^\omega$, то $x = \bar x$ и

$$s * \bar x = \bar a * \bar x = \bar a + \bar x \in \mathbf{Z}_2^\omega,$$

но

$$t * \bar x = \langle \bar b, i, j \rangle * \bar x = \langle \bar b + \bar x, i, j \rangle \in \mathrm{RB}(\mathcal{G}, I, J, \varphi),$$

что противоречит условиям $s * x = t * x$ и $\mathbf{Z}_2^\omega \cap \mathrm{RB}(\mathcal{G}, I, J, \varphi) = \emptyset$.

Пусть x — элемент из X_{st}, т.е. по доказанному x имеет вид $\langle \bar x, n, m \rangle$. Тогда

$$s * x = \bar a * \langle \bar x, n, m \rangle = \langle \bar a + \bar x, n, m \rangle,$$

$$t * x = \langle \bar b, i, j \rangle * \langle \bar x, n, m \rangle = \langle \bar b + \bar x + \varphi(n, j), i, m \rangle,$$

и равенство $s * x = t * x$ эквивалентно выполнению условий

$$\bar a + \bar x = \bar b + \bar x + \varphi(n, j) \text{ и } n = i,$$

т.е.

$$\bar{a} = \bar{b} + \varphi(n, j) \text{ и } n = i.$$

Таким образом, если множество X_{st} непусто, то для s и t выполняется условие $\bar{a} = \bar{b} + \varphi(n, j)$ и

$$X_{st} = \{\langle \bar{x}, i, m\rangle \mid \mathbf{Z}_2^{\omega}, m \in J\} = \langle \bar{0}, i, 0\rangle * S,$$

т.е. X_{st} — конечно порожденный правый идеал.

Допустим наконец, что $s = \langle \bar{a}, i, j\rangle$, $t = \langle \bar{b}, k, l\rangle$. Если существует элемент $x = \bar{x} \in \mathbf{Z}_2^{\omega} \cap X_{st}$, то $\langle \bar{a} + \bar{x}, i, j\rangle = \langle \bar{b} + \bar{x}, k, l\rangle$ и, следовательно, $\bar{a} = \bar{b}$, $i = k$, $j = l$, т.е. $s = t$ и $X_{st} = S = \bar{0} * S$. Если $\mathbf{Z}_2^{\omega} \cap X_{st} = \emptyset$, то любой элемент $x \in X_{st}$ имеет вид $x = \langle \bar{x}, n, m\rangle$. Тогда

$$s * x = \langle \bar{a}, i, j\rangle * \langle \bar{x}, n, m\rangle = \langle \bar{a} + \bar{x} + \varphi(n, j), i, m\rangle,$$

$$t * x = \langle \bar{b}, k, l\rangle * \langle \bar{x}, n, m\rangle = \langle \bar{b} + \bar{x} + \varphi(n, l), k, m\rangle,$$

и, следовательно, равенство $s * x = t * x$ эквивалентно условиям

$$i = k \text{ и } \bar{a} + \varphi(n, j) = \bar{b} + \varphi(n, l).$$

Отсюда получаем

$$\bar{a} + \bar{b} = j \cdot \psi(n) + l \cdot \psi(n).$$

Если $j = l$, то $\bar{a} + \bar{b} = \bar{0}$ и, следовательно, $\bar{a} = \bar{b}$. Учитывая условие $i = k$, заключаем, что $s = t$ и $X_{st} = S = \bar{0} * S$.

Если $j \neq l$, то $\bar{a} + \bar{b} = \psi(n)$. Используя определение функции ψ, получаем $r(\bar{a} + \bar{b}) = [\sqrt{n}]$. Тогда

$$\left(r(\bar{a} + \bar{b})\right)^2 \leq n \leq \left(r(\bar{a} + \bar{b}) + 1\right)^2 - 1$$

и, следовательно,

$$X_{st} = \left\{\langle \bar{x}, n, m\rangle \mid \bar{x} \in \mathbf{Z}_2^{\omega}, \left[\sqrt{n}\right] = r(\bar{a} + \bar{b})\right\} = \bigcup_{n = r(\bar{a}+\bar{b})}^{(r(\bar{a}+\bar{b})+1)^2 - 1} \langle \bar{0}, n, 0\rangle * S.$$

Таким образом, если $s = \langle \bar{a}, i, j\rangle$, $t = \langle \bar{b}, k, l\rangle$ и $X_{st} \neq \emptyset$, то либо $s = t$, и тогда $X_{st} = S = \bar{0} * S$, либо $s = \langle \bar{a}, i, j\rangle$, $t = \langle \bar{b}, i, l\rangle$, $j \neq l$ и $X_{st} = \bigcup_{n = r(\bar{a}+\bar{b})}^{(r(\bar{a}+\bar{b})+1)^2 - 1} \langle \bar{0}, n, 0\rangle * S$, т.е. множество X_{st} конечно порождено как правый идеал.

Так как верно равенство

$$\left\{x \in T \;\middle|\; \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} s_i * x = t_i * x\right\} = \bigcap_{i=1}^{n} X_{s_i t_i},$$

и для любых $s_i, t_i \in T$, $i = 1, \ldots, n$, множество $X_{s_i t_i}$ конечно порождено как правый идеал, то, учитывая соотношение $(*)$, заключаем, что выполняется условие 2 факта 1 и класс ${}_S\Re$ аксиоматизируем. □

Лемма 2. *Класс ${}_S\Re$ не модельно полон.*

Доказательство. По лемме 1 класс ${}_S\Re$ аксиоматизируем, и поэтому к нему применим факт 2. Так как в моноиде S выполняются соотношения

$$S * \langle \bar{0}, 0, 0\rangle \subset S * \bar{0}, \qquad S * \langle \bar{0}, 0, 1\rangle \subset S * \bar{0},$$

$$S * \langle \bar{0}, 0, 0\rangle \cap S * \langle \bar{0}, 0, 1\rangle \emptyset,$$

то множество $\{S * \bar{a} \mid S * \bar{a} \subseteq S * \bar{0}\}$ не является линейно упорядоченным. Следовательно, нарушается условие 1 факта 2, и класс ${}_S\Re$ не модельно полон. □

Для произвольного $n \in \omega \setminus \{0\}$ определим число l_n и множества S_n, S_n^0 и S_n^1 по правилам

$$l_n \rightleftharpoons \max\left\{l(\bar{a}) \;\middle|\; \bar{a} \in \mathbf{Z}_2^{\omega}, r(a) < \frac{n-1}{2}\right\},$$

$$S_n \rightleftharpoons \left\{\langle a, i, j\rangle \mid l(\bar{a}) < l_n, l\left(r^{-1}\left[\sqrt{i}\right]\right) < l_n, j \in \{0, 1\}\right\} \cup$$

$$\cup \{\bar{a} \mid l(\bar{a}) < l_n\},$$

$$S_n^0 \rightleftharpoons S_n \cap S * \langle \bar{0}, 0, 0\rangle, \quad S_n^1 \rightleftharpoons S_n \cap S * \langle \bar{0}, 0, 1\rangle$$

Лемма 3. 1. *Алгебра $\langle S_n, *\rangle$ является конечным подмоноидом моноида S.*

2. *Для любого конечного подмоноида $S' \subset S$ существует число $n \in \omega \setminus \{0\}$ такое, что $S' \subseteq S_n$.*

3. *Если $n \leq m$, то $S_n \subset S_m$*

4. $\bigcup_{n \in \omega \setminus \{0\}} S_n = S$.

Доказательство. Утверждение 1 непосредственно следует из замечания , п.1 и определения операции $*$ на элементах моноида S.

2. Если подмоноид S' конечен, то, выбрав n таким образом, что $l_n > \max\{l(s) \mid s \in S'\}$, получаем $S' \subset S_n$.

3. Если $n \le m$, то, очевидно, $l_n \le l_m$, и из определения множества S_n легко получается включение $S_n \subseteq S_m$.

4. Включение $\bigcup\limits_{n\in\omega\setminus\{0\}} S_n \subseteq S$ очевидно. Так как для произвольного элемента $a \in S$ верно $a \in S_n$ при $n > 2 \cdot r(a) + 1$, то верно и обратное включение. $\square$

Лемма 4. *Если $l\left(r^{-1}\left[\sqrt{i}\right]\right) \ge l_n$, то для любых $a \in \mathbf{Z}_2^\omega$ и $j \in \{0,1\}$ выполняется ${}_{S_n}S_n\langle\bar{a}, i, j\rangle \rightrightarrows {}_{S_n}S_n\bar{0}$.*

Доказательство. Зафиксируем элементы $i, j, \bar{a}$ с условиями $l\left(r^{-1}\left[\sqrt{i}\right]\right) \ge l_n$, $j \in \{0,1\}$, $\bar{a} \in \mathbf{Z}_2^\omega$. Рассмотрим отображение $\chi : S_n\bar{0} \to S_n\langle\bar{a}, i, j\rangle$, действующее по правилу $\chi(s\bar{0}) = s\langle\bar{a}, i, j\rangle$, $s \in S_n$. Так как элемент $\bar{0}$ принадлежит S_n, то $\chi(\bar{0}) = \langle\bar{a}, i, j\rangle$. Очевидно, отображение χ является гомоморфизмом.

Так как для любых $s, t \in S$ таких, что $s \ne t$, выполняется $s\bar{0} \ne t\bar{0}$, то для доказательства того, что χ является биекцией, достаточно показать, что $s\langle\bar{a}, i, j\rangle \ne t\langle\bar{a}, i, j\rangle$ для любых $s, t \in S_n$, $s \ne t$.

Предположим, что для некоторых $s \ne t$, напротив,

$$s\langle\bar{a}, i, j\rangle = t\langle\bar{a}, i, j\rangle. \qquad (*)$$

Если $s = \bar{s}$, $t = \bar{t}$, то равенство $(*)$ эквивалентно равенству

$$\langle\bar{s} + \bar{a}, i, j\rangle = \langle\bar{t} + \bar{a}, i, j\rangle,$$

и, следовательно, $\bar{s} = \bar{t}$, что противоречит предположению.

Если $s = \bar{s}$, $t = \langle\bar{t}, k, q\rangle$, то равенство $(*)$ эквивалентно равенству

$$\langle\bar{s} + \bar{a}, i, j\rangle = \langle\bar{t} + \bar{a} + \varphi(i, q), k, j\rangle,$$

и, следовательно, $i = k$. Так как элемент t принадлежит моноиду S_n, то $l\left(r^{-1}\left[\sqrt{k}\right]\right) < l_n$, но $l\left(r^{-1}\left[\sqrt{i}\right]\right) \ge l_n$, — противоречие. Таким образом, в случае $s = \bar{s}$, $t = \langle\bar{t}, k, q\rangle$ равенство $(*)$ невозможно.

Если $s = \langle\bar{s}, m, p\rangle$, $t = \langle\bar{t}, k, q\rangle$, то то равенство $(*)$ эквивалентно равенству

$$\langle\bar{s} + \bar{a} + \varphi(i, p), m, j\rangle = \langle\bar{t} + \bar{a} + \varphi(i, q), k, j\rangle,$$

и, следовательно, $m = k$,

$$\bar{s} + \varphi(i, p) = \bar{t} + \varphi(i, q).$$

Используя определение функции φ, получаем

$$\bar{s} + r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right) \cdot p = \bar{t} + r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right) \cdot q.$$

Так как $s, t \in S_n$, то $l(\bar{s}) < l_n$ и $l(\bar{t}) < l_n$, а по условию $l\left(r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right)\right) \ge l_n$. Учитывая замечание , п.1 и то, что $p, q \in \{0,1\}$, заключаем, что $p = q$. Отсюда получаем $\bar{s} = \bar{t}$, а поскольку $m = k$ и $p = q$, то $s = t$, — противоречие.

Таким образом, равенство $(*)$ влечет $s = t$ и, значит, ${}_{S_n}S_n\langle a, i, j\rangle \rightrightarrows {}_{S_n}S_n\bar{0}$. $\square$

Лемма 5. *Для любого полигона ${}_SA \in {}_S\Re$ и элемента $a \in A$ полигон ${}_{S_n}a$ содержит собственные подполигоны тогда и только тогда, когда ${}_{S_n}S_na \rightrightarrows {}_{S_n}S_n\bar{0}$. Собственные подполигоны полигона ${}_{S_n}a$ имеют один из трех видов: ${}_{S_n}S_n^0a$, ${}_{S_n}S_n^1a$, ${}_{S_n}S_n^0a \sqcup {}_{S_n}S_n^1a$.*

Доказательство. Покажем сначала, что если ${}_{S_n}S_n\langle\bar{a}, i, j\rangle \not\rightrightarrows {}_{S_n}S_n\bar{0}$, то ${}_{S_n}S_na$ не содержит собственного подполигона. Так как ${}_SA$ — регулярный полигон, то ${}_SSa \rightrightarrows {}_SSe$ для некоторого идемпотента $e \in E(S)$. Поскольку $S_n \subset S$, то ${}_{S_n}S_na \rightrightarrows {}_{S_n}S_ne$. Учитывая, что

$$E(S) = \{\langle\bar{0}, i, j\rangle \mid i \in I, j \in J\} \cup \{\bar{0}\}$$

и то, что ${}_{S_n}S_n\langle a, i, j\rangle \not\rightrightarrows {}_{S_n}S_n\bar{0}$, по лемме 4 получаем ${}_{S_n}S_na \rightrightarrows {}_{S_n}S_n\langle\bar{0}, i, 0\rangle$ для некоторого i такого, что $l\left(r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right)\right) < l_n$.

Пусть b — элемент из $S_n\langle\bar{0}, i, 0\rangle$, т.е. $b = s\langle\bar{0}, i, 0\rangle$ для некоторого $s \in S_n$. Покажем, что $\langle\bar{0}, i, 0\rangle \in S_nb$, т.е. $S_nb = S_n\langle\bar{0}, i, 0\rangle$.

Если $s = \bar{s}$, то $b = \bar{s}\langle\bar{0}, i, 0\rangle = \langle\bar{s}, i, 0\rangle$. Тогда получаем

$$\langle\bar{0}, i, 0\rangle = \langle\bar{s} + \bar{s}, i, 0\rangle = \bar{s} \cdot \langle\bar{0}, i, 0\rangle = \bar{s} \cdot b \in S_nb.$$

Если $s = \langle\bar{s}, m, j\rangle$, то

$$b = s\langle\bar{0}, i, 0\rangle = \langle\bar{s}, m, j\rangle\langle\bar{0}, i, 0\rangle = \langle\bar{s} + \varphi(i, j), m, 0\rangle.$$

Так как $l\left(r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right)\right) < l_n$, то $\langle\bar{0}, i, 0\rangle \in S_n$. Тогда $b = s\langle\bar{0}, i, 0\rangle \in S_n$ и $l(\bar{s} + \varphi(i, j)) < l_n$, следовательно, $t = \langle\bar{s} + \varphi(i, j), i, 0\rangle \in S_n$. Получаем

$$t \cdot b = \langle\bar{s} + \varphi(i, j), i, 0\rangle \cdot \langle\bar{s} + \varphi(i, j), m, 0\rangle =$$

$$= \langle\bar{s} + \varphi(i, j) + \bar{s} + \varphi(i, j) + \varphi(m, 0), i, 0\rangle = \langle\psi(m) \cdot 0, i, 0\rangle = \langle\bar{0}, i, 0\rangle,$$

т.е. $\langle\bar{0}, i, 0\rangle \in S_nb$.

Таким образом, если ${}_{S_n}S_n\langle a, i, j\rangle \not\rightrightarrows {}_{S_n}S_n\bar{0}$, то ${}_{S_n}S_n\langle\bar{0}, i, 0\rangle$, а, значит, и ${}_{S_n}S_na$ не содержит собственных подполигонов.

Остается показать, что если ${}_{S_n}S_na \rightrightarrows {}_{S_n}S_n\bar{0}$, то собственные подполигоны полигона ${}_{S_n}S_na$ существуют и каждый из них имеет один из трех указанных видов. Достаточно показать, что таким свойством обладает полигон ${}_{S_n}S_n\bar{0}$.

Установим, что если $b \in S_n^0$, то $S_n b = S_n^0$. Пусть элементы $\bar{b} \in \mathbf{Z}_2^\omega$, $i \in I$ таковы, что $b = \langle \bar{b}, i, 0 \rangle$, $l(b) < l_n$, $l\left(r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right)\right) < l_n$.

Если $s = \bar{s} \in S_n$, то $sb = \bar{s}\langle \bar{b}, i, 0\rangle = \langle \bar{s} + \bar{b}, i, 0\rangle$. В силу замечания , п.1 получаем $l(\bar{s} + \bar{b}) \leq \max\{l(\bar{s}), l(\bar{b})\} < l_n$ и, следовательно, $sb \in S_n^0$.

Если $s = \langle \bar{s}, m, j\rangle \in S_n$, то

$$sb = \langle \bar{s}, m, j\rangle\langle \bar{b}, i, 0\rangle =$$

$$= \langle \bar{s} + \bar{b} + \varphi(i, j), m, 0\rangle = \left\langle \bar{s} + \bar{b} + r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right) \cdot j, m, 0\right\rangle.$$

Так как $l\left(r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right)\right) < l_n$ и $j \in \{0, 1\}$, то $l(\varphi(i, j)) < l_n$. Тогда в силу замечания , п.1 выполняется неравенство $l\left(\bar{s} + \bar{b} + r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right)\right) < l_n$, и, значит, $sb \in S_n^0$. Следовательно, $S_n b \subseteq S_n^0$.

Докажем обратное включение. Пусть $c = \langle \bar{c}, i, 0\rangle$ — элемент из S_n^0. Тогда $l(\bar{c}) < l_n$ и, следовательно, $l(\bar{b} + \bar{c}) < l_n$. Значит, элемент $\langle \bar{b} + \bar{c}, i, 0\rangle$ принадлежит S_n. Тогда

$$c = \langle \bar{c}, i, 0\rangle = \langle \bar{b} + \bar{c}, i, 0\rangle\langle \bar{b}, i, 0\rangle \in S_n b$$

и, следовательно, $S_n^0 \subseteq S_n b$.

Таким образом, выполнимо $S_n b = S_n^0$ для всех $b \in S_n^0$.

Аналогично доказывается, что если $b \in S_n^1$, то $S_n b = S_n^1$. Заметим также, если $b \in S_n \setminus (S_n^0 \sqcup S_n^1)$, то $b = \bar{b}$, и так как $\bar{b} * \bar{b} = \bar{0}$, то $S_n b = S_n$.

Поскольку $S_n^0 \sqcap S_n^1 = \emptyset$, то собственными подполигонами полигона ${}_{S_n}S_n\bar{0}$ являются только полигоны ${}_{S_n}S_n^0 = {}_{S_n}S_n^0\bar{0}$, ${}_{S_n}S_n^1 = {}_{S_n}S_n^1\bar{0}$ и ${}_{S_n}S_n^0 \sqcup {}_{S_n}S_n^1 = {}_{S_n}S_n^0\bar{0} \sqcup {}_{S_n}S_n^1\bar{0}$. □

Лемма 6. *Для любых элементов $\bar{c}, \bar{d} \in \mathbf{Z}_2^\omega$ если $\langle \bar{c}, 0, 0\rangle \notin S_n * \langle \bar{d}, 0, 0\rangle$, то*

$$_S S\langle \bar{0}, 0, 0\rangle \models \exists^{\geq n} x \left(\langle \bar{0}, 0, 0\rangle x = \langle \bar{c}, 0, 0\rangle \wedge \right.$$

$$\left. \wedge \langle \bar{0}, 0, 1\rangle x = \langle \bar{d}, 0, 0\rangle \wedge \left(\bigwedge_{\langle \bar{0}, m, 0\rangle \in S_n} \langle \bar{0}, m, 0\rangle x \neq x \right)\right).$$

Доказательство. Пусть элементы $\langle \bar{c}, 0, 0\rangle$ и $\langle \bar{d}, 0, 0\rangle$ удовлетворяют условию леммы. Заметим, что для любого элемента $x \in S\langle \bar{0}, 0, 0\rangle$ выполнимо $\langle \bar{0}, 0, 0\rangle x = \langle \bar{c}, 0, 0\rangle$ тогда и только тогда, когда x имеет вид $\langle \bar{c}, i, 0\rangle$ для некоторого $i \in \omega$. Заметим также, что если $x = \langle \bar{c}, i, 0\rangle$, то

$$\langle \bar{0}, 0, 1\rangle x = \langle \bar{0}, 0, 1\rangle\langle \bar{c}, i, 0\rangle = \langle \bar{c} + \varphi(i, 1), 0, 0\rangle,$$

и если $\langle \bar{0}, 0, 1\rangle x = \langle \bar{d}, 0, 0\rangle$, то $\bar{d} = \bar{c} + \varphi(i, 1)$, т.е. $\varphi(i, 1) = \bar{c} + \bar{d}$. Используя определение функции φ, получаем $r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right) = \bar{c} + \bar{d}$, и тогда $\left[\sqrt{i}\right] = r(\bar{c} + \bar{d})$. По условию леммы выполняется $\langle \bar{c}, 0, 0\rangle \notin S_n\langle \bar{d}, 0, 0\rangle$ и, следовательно, $l(\bar{c} + \bar{d}) \geq l_n$ (иначе, если $l(\bar{c} + \bar{d}) < l_n$, то $\langle \bar{c} + \bar{d}, 0, 0\rangle \in S_n$ и тогда $\langle \bar{c}, 0, 0\rangle = \langle \bar{c} + \bar{d}, 0, 0\rangle\langle \bar{d}, 0, 0\rangle \in S_n\langle \bar{d}, 0, 0\rangle$). Из определения числа l_n следует, что $r(\bar{c} + \bar{d}) \geq \frac{n-1}{2}$. Положим $p \rightleftharpoons r(\bar{c} + \bar{d})$. Так как $\left[\sqrt{i}\right] = p$, то по определению целой части числа получаем $p^2 \leq i \leq (p+1)^2 - 1$, или $p^2 \leq i \leq p^2 + 2p$. Поскольку элементы i, p принадлежат ω, то $|\{i \mid p^2 \leq i \leq p^2 + 2p\}| = 2p + 1$, а так как $p \geq \frac{n-1}{2}$, то $2p + 1 \geq n$.

Обозначим через X множество $\left\{x \mid x = \langle \bar{c}, i, 0\rangle, r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right) = \bar{c} + \bar{d}\right\}$. Тогда выполнимо $|X| \geq n$, и $\langle \bar{0}, 0, 0\rangle x = \langle \bar{c}, 0, 0\rangle$ для любого $x \in X$. Кроме того, если $x = \langle \bar{c}, i, 0\rangle \in X$, то

$$\langle \bar{0}, 0, 1\rangle\langle \bar{c}, i, 0\rangle = \langle \bar{c} + \varphi(i, 1), 0, 0\rangle = \langle \bar{c} + \psi(i) \cdot 1, 0, 0\rangle =$$

$$= \left\langle \bar{c} + r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right), 0, 0\right\rangle = \langle \bar{c} + \bar{c} + \bar{d}, 0, 0\rangle = \langle \bar{d}, 0, 0\rangle,$$

и, значит, $\langle \bar{0}, 0, 1\rangle x = \langle \bar{d}, 0, 0\rangle$. Так как для всех $x \in X$ верно $l\left(r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right)\right) \geq l_n$, а для любого m такого, что $\langle \bar{0}, m, 0\rangle \in S_n$, выполнимо $l\left(r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right)\right) < l_n$, то $\langle \bar{0}, m, 0\rangle x \neq x$.

Таким образом, элементы множества X принадлежат множеству $S\langle \bar{0}, 0, 0\rangle$ и являются реализациями формулы

$$\langle \bar{0}, 0, 0\rangle x = \langle \bar{c}, 0, 0\rangle \wedge \langle \bar{0}, 0, 1\rangle x = \langle \bar{d}, 0, 0\rangle \wedge \left(\bigwedge_{\langle \bar{0}, m, 0\rangle \in S_n} \langle \bar{0}, m, 0\rangle x \neq x \right).$$

Лемма доказана.

Для любого непустого конечного множества $A \subset S$ положим $l(A) \rightleftharpoons \max\{l(a) \mid a \in A\}$.

Лемма 7. *Для любого непустого конечного множества $B \subset S$ выполняется $l(S_n B) \geq l_n - 1$.*

Доказательство. Выберем элемент $b \in B$ такой, что $l(b) = l(B)$. Тогда если $l(b) \geq l_n - 1$, то поскольку $l(\langle \bar{0}, 0, 0\rangle b) = l(b)$ и $\langle \bar{0}, 0, 0\rangle b \in S_n b$, получаем $l(S_n B) \geq l_n - 1$. Если же $l(b) < l_n - 1$, то $l(sb) = l_n - 1$ для элемента $s \in S_n$ такого, что $l(s) = l_n - 1$. □

Лемма 8. *Для любого полигона $A \in {}_S\mathfrak{R}$ выполняется ${}_S A \equiv {}_S S\langle \bar{0}, 0, 0\rangle$.*

Доказательство. Пусть S' — конечное подмножество S, r — элемент из ω. Для доказательства леммы достаточно построить множества $F_1(S', r), \ldots, F_r(S', r)$ конечных частичных изоморфизмов, удовлетворяющих условиям факта 3. По лемме 3, п.2 существует элемент

$m \in \omega \setminus \{0\}$ такой, что $S' \subseteq S_m$. Положим $n \rightleftharpoons \max\{r, m\}$. Построим множества $F_1(S_n, n), \ldots, F_n(S_n, n)$ конечных частичных изоморфизмов, удовлетворяющих условиям факта 3 (тогда в качестве искомых множеств $F_1(S', r), \ldots, F_r(S', r)$ можно будет взять $F_1(S_n, n), \ldots, F_r(S_n, n)$).

Обозначим через $F_1(S_n, n)$ множество всех функций $f = \{\langle a_1, b_1\rangle\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$a_1 \in A$, $b_1 \in S\langle\bar{0}, 0, 0\rangle$ и

если ${}_S Sa_1 \rightrightarrows {}_S S\langle\bar{0}, i, 0\rangle$ для $\langle\bar{0}, i, 0\rangle \in S_n$, то ${}_S Sb_1 \rightrightarrows {}_S S\langle\bar{0}, i, 0\rangle$;

если ${}_S Sa_1 \rightrightarrows {}_S S\langle\bar{0}, i, 0\rangle$ для $\langle\bar{0}, i, 0\rangle \notin S_n$ или ${}_S Sa_1 \rightrightarrows {}_S S\bar{0}$, то ${}_S Sb_1 \rightrightarrows {}_S S\langle\bar{0}, l, 0\rangle$ для любого $\langle\bar{0}, l, 0\rangle \notin S_n$.

Очевидно, что множество $F_1(S_n, n)$ непусто и в силу леммы 4 для любого элемента $\{\langle a_1, b_1\rangle\} \in F_1(S_n, n)$ выполнимо ${}_{S_n} S_n a_1 \rightrightarrows {}_{S_n} S_n b_1$.

Предположим, что множество $F_k(S_n, n)$ построено для $k < n$, и для любой функции $f \in F_k(S_n, n)$ такой, что $f(a_l) = b_l$ при $l \in \{1, \ldots, k\}$, выполняются следующие условия:

$$
\begin{aligned}
&1)\ {}_{S_n} S_n a_l \rightrightarrows {}_{S_n} S_n b_l \text{ при } l \in \{1, \ldots, k\}, \qquad (**)\\
&2)\ {}_{S_n} S_n\{a_1, \ldots, a_k\} \cong {}_{S_n} S_n\{b_1, \ldots, b_k\}.
\end{aligned}
$$

Пусть f — функция из $F_k(S_n, n)$ и $f(a_l) = b_l$ при $l \in \{1, \ldots, k\}$. Построим всевозможные функции $\bar{f} \in F_{k+1}(S_n, n)$ такие, что $f \subset \bar{f}$ и удовлетворяющие условиям 1, 2 при замене k на $k+1$. Для этого разобъем множество $A \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ на подмножества $A^1_{k+1}, \ldots, A^5_{k+1}$, для каждого $i \in \{1, \ldots, 5\}$ и $a_{k+1} \in A^i_{k+1}$ определим непустое множество

$$B^i_{k+1}(a_{k+1}) \subseteq S\langle\bar{0}, 0, 0\rangle \setminus \{b_1, \ldots, b_k\}$$

и положим $\bar{f}(a_{k+1}) = b_{k+1}$ для произвольного $b_{k+1} \in B^i_{k+1}(a_{k+1})$.

Обозначим через A^1_{k+1} множество

$$\{x \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_k\} \mid S_n x \subseteq S_n\{a_1, \ldots, a_k\}\}.$$

Очевидно, что для любого $a_{k+1} \in A^1_{k+1}$ существуют $s \in S_n$, $l \in \{1, \ldots, k\}$ такие, что $a_{k+1} = sa_l$. Полагаем

$$B^1_{k+1}(a_{k+1}) \rightleftharpoons \{y \in S\langle\bar{0}, 0, 0\rangle \setminus \{b_1, \ldots, b_k\} \mid y = sb_l\}.$$

Обозначим через A^2_{k+1} множество

$$\{x \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_k\} \mid S_n x \cap S_n\{a_1, \ldots, a_k\} = \emptyset\}.$$

Для любого $a_{k+1} \in A^2_{k+1}$ полагаем

$$B^2_{k+1}(a_{k+1}) \rightleftharpoons \{y \in S\langle\bar{0}, 0, 0\rangle \setminus \{b_1, \ldots, b_k\} \mid {}_{S_n} S_n y \rightrightarrows {}_{S_n} S_n a_{k+1},$$

$$S_n y \cap S_n\{b_1, \ldots, b_k\} = \emptyset\}.$$

Обозначим через A^3_{k+1} множество

$$\{x \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_k\} \mid {}_{S_n} S_n x \rightrightarrows {}_{S_n} S_n \bar{0}, S_n x \cap S_n\{a_1, \ldots, a_k\} = S^0_n x\}.$$

Очевидно, что для произвольного $a_{k+1} \in A^3_{k+1}$ верно $\langle\bar{0}, 0, 0\rangle a_{k+1} \in S_n\{a_1, \ldots, a_k\}$. Следовательно, существуют $s \in S_n$, $l \in \{1, \ldots, k\}$ такие, что $\langle\bar{0}, 0, 0\rangle a_{k+1} = sa_l$. Обозначим через $\langle\bar{c}, 0, 0\rangle$ элемент sb_l. Полагаем

$$B^3_{k+1}(a_{k+1}) \rightleftharpoons \{y \in S\langle\bar{0}, 0, 0\rangle \setminus \{b_1, \ldots, b_k\} \mid {}_{S_n} S_n y \rightrightarrows {}_{S_n} S_n \bar{0},$$

$$\langle\bar{0}, 0, 0\rangle y = \langle\bar{c}, 0, 0\rangle, S_n y \cap S_n\{b_1, \ldots, b_k\} = S^0_n y\}.$$

Обозначим через A^4_{k+1} множество

$$\{x \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_k\} \mid {}_{S_n} S_n x \rightrightarrows {}_{S_n} S_n \bar{0}, S_n x \cap S_n\{a_1, \ldots, a_k\} = S^1_n x\}.$$

Очевидно, что для произвольного $a_{k+1} \in A^4_{k+1}$ верно $\langle\bar{0}, 0, 1\rangle a_{k+1} \in S_n\{a_1, \ldots, a_k\}$. Следовательно, существуют $t \in S_n$, $p \in \{1, \ldots, k\}$ такие, что $\langle\bar{0}, 0, 1\rangle a_{k+1} = ta_p$. Обозначим через $\langle\bar{d}, 0, 0\rangle$ элемент tb_p. Полагаем

$$B^4_{k+1}(a_{k+1}) \rightleftharpoons \{y \in S\langle\bar{0}, 0, 0\rangle \setminus \{b_1, \ldots, b_k\} \mid {}_{S_n} S_n y \rightrightarrows {}_{S_n} S_n \bar{0},$$

$$\langle\bar{0}, 0, 1\rangle y = \langle\bar{d}, 0, 0\rangle, S_n y \cap S_n\{b_1, \ldots, b_k\} = S^1_n y\}.$$

Обозначим через A^5_{k+1} множество

$$\{x \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_k\} \mid {}_{S_n} S_n x \rightrightarrows {}_{S_n} S_n \bar{0}, S_n x \cap S_n\{a_1, \ldots, a_k\} = S^0_n x \cup S^1_n x\}.$$

Очевидно, что для произвольного $a_{k+1} \in A^5_{k+1}$ выполняется $\langle\bar{0}, 0, 0\rangle a_{k+1} \in S_n\{a_1, \ldots, a_k\}$ и $\langle\bar{0}, 0, 1\rangle a_{k+1} \in S_n\{a_1, \ldots, a_k\}$. Следовательно, существуют $s, t \in S_n$ и $l, p \in \{1, \ldots, k\}$ такие, что $\langle\bar{0}, 0, 0\rangle a_{k+1} = sa_l$ и $\langle\bar{0}, 0, 1\rangle a_{k+1} = ta_p$. Обозначим через $\langle\bar{c}, 0, 0\rangle$ и $\langle\bar{d}, 0, 0\rangle$ элементы sb_l и tb_p соответственно. Полагаем

$$B^5_{k+1}(a_{k+1}) \rightleftharpoons \{y \in S\langle\bar{0}, 0, 0\rangle \setminus \{b_1, \ldots, b_k\} \mid {}_{S_n} S_n y \rightrightarrows {}_{S_n} S_n \bar{0},$$

$$\langle\bar{0}, 0, 0\rangle y = \langle\bar{c}, 0, 0\rangle, \langle\bar{0}, 0, 1\rangle y = \langle\bar{d}, 0, 0\rangle\}.$$

Покажем, что для любых $i \in \{1, \ldots, 5\}$, $a_{k+1} \in A^i_{k+1}$ множество $B^i_{k+1}(a_{k+1})$ непусто.

Если $a_{k+1} \in A^1_{k+1}$, то множество $B^1_{k+1}(a_{k+1})$ одноэлементно и состоит из элемента sb_l.

Если $a_{k+1} \in A^2_{k+1}$, то существует элемент b, для которого $l(b) > l(S_n\{b_1, \ldots, b_k\})$ и ${}_{S_n} S_n b \rightrightarrows {}_{S_n} S_n a_{k+1}$. Такой элемент b принадлежит множеству $B^2_{k+1}(a_{k+1})$.

Если $a_{k+1} \in A^3_{k+1}$, то для любого элемента $\langle \bar{c}, i, 0\rangle$ такого, что

$$l\left(r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right)\right) > l\left(S_n\{b_1,\ldots,b_k\}\right),$$

выполняется $\langle \bar{c}, i, 0\rangle \in B^3_{k+1}(a_{k+1})$. Действительно, если

$$l\left(r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right)\right) > l\left(S_n\{b_1,\ldots,b_k\}\right),$$

то, используя лемму 7, получаем $l\left(r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right)\right) \geq l_n$, и, следовательно, по лемме 4 выполняется ${}_{s_n}S_n\langle \bar{c}, i, 0\rangle \rightrightarrows {}_{s_n}S_n\bar{0}$. Поскольку

$$\langle \bar{0}, 0, 0\rangle\langle \bar{c}, i, 0\rangle = \langle \bar{c} + \psi(i)\cdot 0, 0, 0\rangle = \langle \bar{c}, 0, 0\rangle = sb_l \in S_n\{b_1,\ldots,b_k\},$$

то $S^0_n\langle \bar{c}, i, 0\rangle \subseteq S_n\langle \bar{c}, i, 0\rangle \cap S_n\{b_1,\ldots,b_k\}$. Покажем, что $S^1_n\langle c, i, 0\rangle \not\subseteq$ $S_n\{b_1,\ldots,b_k\}$. Для этого докажем, что $\langle \bar{a}, q, 1\rangle\langle \bar{c}, i, 0\rangle \notin S_n\{b_1,\ldots,b_k\}$ для любого $\langle \bar{a}, q, 1\rangle \in S^1_n$. Так как $\langle \bar{c}, 0, 0\rangle, \langle \bar{a}, q, 1\rangle \in S_n\{b_1,\ldots,b_k\}$, то по лемме 7 имеем $l(\bar{c}) < l(S_n\{b_1,\ldots,b_k\})$ и $l(\bar{a}) < l(S_n\{b_1,\ldots,b_k\})$. Поскольку $l\left(r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right)\right) > l\left(S_n\{b_1,\ldots,b_k\}\right)$, то по замечанию , п.1 выполняется

$$l\left(\bar{c} + \bar{a} + r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right)\right) = l\left(r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right)\right) \geq l_n,$$

и, следовательно,

$$\langle \bar{a}, q, 1\rangle\langle c, i, 0\rangle = \langle \bar{a} + \bar{c} + \psi(i)\cdot 1, q, 0\rangle =$$

$$= \left\langle \bar{a} + \bar{c} + r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right), q, 0\right\rangle \notin S_n\{b_1,\ldots,b_k\}.$$

Таким образом, справедливо $\langle \bar{c}, i, 0\rangle \in B^3_{k+1}(a_{k+1})$ и $B^3_{k+1}(a_{k+1}) \neq \emptyset$.

Если $a_{k+1} \in A^4_{k+1}$, то для любого элемента $\left\langle \bar{d} + r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right), i, 0\right\rangle$ такого, что

$$l\left(r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right)\right) > l\left(S_n\{b_1,\ldots,b_k\}\right),$$

выполняется

$$\left\langle \bar{d} + r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right), i, 0\right\rangle \in B^4_{k+1}(a_{k+1}).$$

Проведя рассуждения, аналогичные изложенным в предыдущем случае, и учитывая, что

$$\langle \bar{0}, 0, 0\rangle\left\langle \bar{d} + r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right), i, 0\right\rangle = \left\langle \bar{d} + r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right), 0, 0\right\rangle \notin S_n\{b_1,\ldots,b_k\},$$

$$\langle \bar{0}, 0, 1\rangle\left\langle \bar{d} + r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right), i, 0\right\rangle = \left\langle \bar{d} + r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right) + r^{-1}\left(\left[\sqrt{i}\right]\right), 0, 0\right\rangle =$$

$$= \langle \bar{d}, 0, 0\rangle \in S_n\{b_1,\ldots,b_k\},$$

заключаем, что $B^4_{k+1}(a_{k+1}) \neq \emptyset$.

Если $a_{k+1} \in A^5_{k+1}$, то для элементы $\langle \bar{c}, 0, 0\rangle$ и $\langle \bar{d}, 0, 0\rangle$ удовлетворяют условию леммы 6. Действительно, если бы выполнялось $\langle \bar{c}, 0, 0\rangle = s\langle \bar{d}, 0, 0\rangle$ для некоторого $s \in S_n$, то $S_n\langle \bar{c}, 0, 0\rangle = S_n\langle \bar{d}, 0, 0\rangle$ и в силу изоморфизма

$${}_{s_n}S_n\{a_1,\ldots,a_k\} \cong {}_{s_n}S_n\{b_1,\ldots,b_k\}$$

мы бы имели $S_n s a_l = S_n t a_p$. Но так как $S_n s a_l = S^0_n a_{k+1}$, $S_n t a_p = S^1_n a_{k+1}$ и по определению множества A^5_{k+1} выполняется $S_n s a_l \cap S_n t a_p = \emptyset$, то получаем противоречие. Тогда по лемме 6, поскольку $k+1 \leq n$, справедливо $B^5_{k+1} \neq \emptyset$.

Из определения множеств B^i_{k+1}, $i \in \{1,\ldots,5\}$, следует выполнение условий (**) при замене k на $k+1$.

Покажем, что $\bigcup\limits_{i=1}^{5} A^i_{k+1} = A \setminus \{a_1,\ldots,a_k\}$.

Действительно, если $a \in A \setminus \{a_1,\ldots,a_k\}$, то по лемме 4 выполнимо либо ${}_{s_n}S_n a \rightrightarrows {}_{s_n}S_n\langle \bar{0}, i, 0\rangle$ для некоторого i с условием $\left[\sqrt{i}\right] < \frac{n-1}{2}$, либо ${}_{s_n}S_n a \rightrightarrows {}_{s_n}S_n\bar{0}$. Если ${}_{s_n}S_n a \rightrightarrows {}_{s_n}S_n\langle \bar{0}, i, 0\rangle$ и $\left[\sqrt{i}\right] < \frac{n-1}{2}$, то по лемме 5 полигон ${}_{s_n}S_n a$ не содержит собственных подполигонов, т.е. либо $S_n a \subseteq S_n\{a_1,\ldots,a_k\}$ и, значит, $a \in A^1_{k+1}$, либо $S_n a \cap S_n\{a_1,\ldots,a_k\} = \emptyset$ и, следовательно, $a \in A^2_{k+1}$. Если ${}_{s_n}S_n a \rightrightarrows {}_{s_n}S_n\bar{0}$, то либо $a \in A^1_{k+1}$, либо $a \in A^2_{k+1}$, либо полигон ${}_{s_n}C = {}_{s_n}S_n a \cap {}_{s_n}S_n\{a_1,\ldots,a_k\}$ является собственным подполигоном полигона ${}_{s_n}S_n a$. По лемме 5 полигон ${}_{s_n}C$ имеет один из трех видов: ${}_{s_n}S^0_n a$, ${}_{s_n}S^1_n a$ или ${}_{s_n}S^0_n a \sqcup {}_{s_n}S^1_n a$, т.е. выполняется одно из условий $a \in A^i_{k+1}$ для $i \in \{3,4,5\}$.

Таким образом, справедливо включение $A \setminus \{a_1,\ldots,a_k\} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{5} A^i_{k+1}$. Обратное включение очевидно.

Следовательно, для любого $a_{k+1} \in A \setminus \{a_1,\ldots,a_k\}$ существует изоморфизм $g_1 \in F_{k+1}(S_n, n)$ такой, что $f \subset g_1$ и $a_{k+1} \in \operatorname{dom} g_1$.

Поскольку условия на множества $B^i_{k+1}(a_{k+1})$ аналогичны условиям на множества A^i_{k+1} для $i \in \{1,\ldots,5\}$ и типы изоморфных орбит для элементов множеств $A \setminus \{a_1,\ldots,a_k\}$ и $B \setminus \{b_1,\ldots,b_k\}$ совпадают, то доказательство равенства

$$\bigcup_{i=1}^{5}\left(\bigcup_{a_{k+1}\in A^i_{k+1}} B^i_{k+1}(a_{k+1})\right) = B \setminus \{b_1,\ldots,b_k\}$$

аналогично доказательству, проведенному для равенства $\bigcup\limits_{i=1}^{5} A^i_{k+1} = A \setminus \{a_1,\ldots,a_k\}$.

Следовательно, для любого $b_{k+1} \in B \setminus \{b_1, \dots, b_k\}$ существует изоморфизм $g_2 \in F_{k+1}(S_n, n)$ такой, что $f \subseteq g_2$ и $b_{k+1} \in \operatorname{rang} g_2$.

Таким образом, построено множество $F_{k+1}(S_n, n)$ и вместе с ним по индукции построены множества $F_1(S_n, n), \dots, F_n(S_n, n)$. $\square$

На основании лемм 1, 2, и 8 теорема доказана.

Список литературы

[1] *Овчинникова Е. В.* Полные классы регулярных полигонов с конечным числом идемпотентов // Сиб. матем. журн. 1995. Т.36, N 2. С. 381 384.

[2] *Овчинникова Е. В.* Моноид, над которым класс регулярных полигонов полон, не модельно полон // Сиб. матем. журн. 1997. Т.38, N 5. С. 1110–114.

[3] *Степанова А. А.* Аксиоматизируемость и модельная полнота класса регулярных полигонов // Сиб. мат. журн. 1994. Т.35, No 1. С.181–193.

[4] *Tran Lam Hach.* Characterization of monoids by regular acts // Period. Math. Hungar. 1985. V. 16 . P.273-279.

[5] *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. — М.: Мир, 1972.

[6] *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. — М.: Наука, 1987.

ПОЗИТИВНО УСЛОВНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

А.Г. Пинус*

Новосибирский Государственный Технический Университет, Россия

e-mail: algebra@nstu.ru

В работе автора [1] были введены понятия условного терма, условного тождества, условного многообразия. Обзор результатов связанных с этими понятиями можно найти в работах [2], [3]. В работе [4] введено понятие позитивно условного терма. Настоящая работа посвящена более детальному рассмотрению некоторых аспектов, связанных с этим понятием. Напомним основные определения.

Под позитивным условием $\mathcal{P}(\bar{x})$ сигнатуры σ будем понимать конечную совокупность равенств между термами этой сигнатуры

$$\mathcal{P}(\bar{x}) = \begin{cases} t_1^1(\bar{x}) = t_1^2(\bar{x}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ t_n^1(\bar{x}) = t_n^2(\bar{x}) \end{cases}$$

Понятие позитивно условного терма (п.у.т.) для любого фиксированного класса $\mathcal{K}$ универсальных алгебр сигнатуры σ определяются следующей индукцией.

а) любые переменные, любые константы сигнатуры σ являются п.у.т. для $\mathcal{K}$,

б) если $f(x_1, \cdots, x_m) \in \sigma$ и $t_1(\bar{x}), \cdots, t_m(\bar{x})$ - п.у.т. для $\mathcal{K}$, то $f(t_1(\bar{x}), \cdots, t_m(\bar{x}))$ - п.у.т. для $\mathcal{K}$,

в) если $t_1(\bar{x}), \cdots, t_m(\bar{x})$ - п.у.т. для $\mathcal{K}$, $\mathcal{P}_1(\bar{x}), \cdots, \mathcal{P}_m(\bar{x})$ - позитивные условия сигнатуры σ и

$$\mathcal{K} \models \forall \bar{x}(\mathcal{P}_1(\bar{x}) \vee \dots \vee \mathcal{P}_m(\bar{x})),$$

для любых $1 \le i, j \le m$

$$\mathcal{K} \models \forall \bar{x}(\mathcal{P}_i(\bar{x}) \& \mathcal{P}_j(\bar{x}) \to t_i(\bar{x}) = t_j(\bar{x})),$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00571).

то

$$t(\overline{x}) = \begin{cases} \mathcal{P}_1(\overline{x}) \to t_1(\overline{x}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{P}_m(\overline{x}) \to t_m(\overline{x}) \end{cases}$$

также п.у.т. для $\mathcal{K}$.

Любому п.у.т. $t(\overline{x})$ для $\mathcal{K}$ на любой $\mathcal{K}$-алгебре $\mathcal{A}$ естественным образом соответствует позитивно условно термальная функция, обозначаемая также как $t(\overline{x})$. Определение этой функции естественным образом соответствует индуктивному определению п.у.т. $t(\overline{x})$, при этом в случае в) для любых $\overline{a}, b \in A$ $\mathcal{A} \models t(\overline{a}) = b$ тогда и только тогда, когда для некоторого $i \leq m$ $\mathcal{A} \models \mathcal{P}_i(\overline{a})$ и $\mathcal{A} \models t_i(\overline{a}) = b$.

Под позитивно условным тождеством будем понимать равенство двух позитивно условных термов $t_1(\overline{x}) = t_2(\overline{x})$. Для любой алгебры $\mathcal{A}$ позитивно условное тождество $t_1(\overline{x}) = t_2(\overline{x})$ истинно для $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $t_1(\overline{x})$ и $t_2(\overline{x})$ позитивно условные термы для $\mathcal{A}$ и для любых $\overline{a} \in A$, $\mathcal{A} \models t_1(\overline{a}) = t_2(\overline{a})$. Класс $\mathcal{K}$ алгебр сигнатуры σ назовем позитивно условным многообразием, если для некоторой совокупности $\Im$ позитивно условных тождеств имеет место равенство $\mathcal{K} = \{\mathcal{A} | \mathcal{A} \models \Im\}$.

Для любого класса алгебр $\mathcal{K}$ пусть $\mathcal{M}_{pc}(\mathcal{K})$ - наименьшее позитивно условное многообразие, включающее в себя класс $\mathcal{K}$ (позитивно условное многообразие, порожденное $\mathcal{K}$). Пусть $Q(\mathcal{K})$ - наименьшее квазимногообразие, включающее в себя $\mathcal{K}$, а $U_P(\mathcal{K})$ - наименьший позитивно-универсальный класс, включающий в себя $\mathcal{K}$ (наименьший, включающий в себя $\mathcal{K}$, класс аксиоматизируемый позитивными $\forall$-формулами). Напомним, что, как хорошо известно, $Q(\mathcal{K}) = ISPP_U(\mathcal{K})_e, U_P(\mathcal{K}) = HSP_U(\mathcal{K})$, где операторы $I, S, P, H, P_U, ()_e$ определены на классах алгебр стандартным образом: $I(\mathcal{K}) = \{\mathcal{A} | \exists \mathcal{B} \in \mathcal{K}, \mathcal{A} \cong \mathcal{B}\}, S(\mathcal{K}) = \{\mathcal{A} | \exists \mathcal{B} \in \mathcal{K}, \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}, H(\mathcal{K}) = \{\mathcal{A} | \exists \mathcal{B} \in \mathcal{K}, \mathcal{A}$ гомоморфный образ алгебры $\mathcal{B}\}$, $P(\mathcal{K})$- класс всех прямых, а $P_U(\mathcal{K})$ - всех ультрапроизведений $\mathcal{K}$ - алгебр, $\mathcal{K}_e$ - класс, включающий в себя все $\mathcal{K}$-алгебры и одноэлементную алгебру соответствующей сигнатуры.

ТЕОРЕМА 1. Для любого класса алгебр $\mathcal{K}$ имеет место равенство $\mathcal{M}_{pc}(\mathcal{K}) = Q(\mathcal{K}) \cap U_P(\mathcal{K})$.

Доказательство. Пусть на классе $\mathcal{K}$ истинно позитивное условное тождество $t_1(\overline{x}) = t_2(\overline{x})$. В работе [4] доказано, что можно считать п.у.т. $t_1(\overline{x})$ и $t_2(\overline{x})$ имеющими так называемую нормальную форму, т.е.

$$t_1(\overline{x}) = \begin{cases} \mathcal{P}_1^1(\overline{x}) \to t_1^1(\overline{x}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{P}_n^1(\overline{x}) \to t_n^1(\overline{x}) \end{cases}$$

$$t_2(\overline{x}) = \begin{cases} \mathcal{P}_1^2(\overline{x}) \to t_1^2(\overline{x}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{P}_m^2(\overline{x}) \to t_m^2(\overline{x}) \end{cases}$$

, где $\mathcal{P}_j^i$ - позитивные условия, а t_j^i - термы сигнатуры класса $\mathcal{K}$.

Таким образом, для любой алгебры $\mathcal{A}$, на $\mathcal{A}$ истинно позитивно условное тождество $t_1(\overline{x}) = t_2(\overline{x})$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{array}{l} \mathcal{A} \models \forall\overline{x}(\bigvee_{j=1}^{n} \mathcal{P}_j^1(\overline{x}))\&\forall\overline{x}(\bigvee_{i=1}^{m} \mathcal{P}_i^2(\overline{x}))\& \\ \forall\overline{x}(\&_{j_1,j_2\leq n}\mathcal{P}_{j_1}^1(\overline{x}))\&\mathcal{P}_{j_2}^1(\overline{x})) \to t_{j_1}^1(\overline{x}) = t_{j_2}^1(\overline{x}))\& \\ \forall\overline{x}(\&_{j_1,j_2\leq m}\mathcal{P}_{i_1}^2(\overline{x}))\&\mathcal{P}_{i_2}^2(\overline{x})) \to t_{i_1}^2(\overline{x}) = t_{i_2}^2(\overline{x}))\& \\ \forall\overline{x}(\&_{j\leq n,i\leq m}\mathcal{P}_j^1(\overline{x}))\&\mathcal{P}_i^2(\overline{x})) \to t_j^1(\overline{x}) = t_i^2(\overline{x})\& \end{array}$$

Тем самым, для любой алгебры $\mathcal{B} \in Q(\mathcal{K}) \cap U_P(\mathcal{K})$ имеет место включение $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_{pc}(\mathcal{K})$.

Пусть теперь $\mathcal{B} = \mathcal{M}_{pc}(\mathcal{K})$ и на $\mathcal{K}$ истинно квазитождество $\mathcal{P}(\overline{x}) \to q_1(\overline{x}) = q_2(\overline{x})$. Пусть

$$t_1(\overline{x}) = \begin{cases} \mathcal{P}(\overline{x}) \to q_1(\overline{x}) \\ \overline{x} = \overline{x} \to q_2(\overline{x}) \end{cases} \quad t_2(\overline{x}) = q_2(\overline{x}) \ .$$

Очевидно, что $t_1(\overline{x}), t_2(\overline{x})$ являются позитивно условными термами для класса $\mathcal{K}$ и на $\mathcal{K}$, а значит, и на $\mathcal{B}$ истинно позитивно условное тождество $t_1(\overline{x}) = t_2(\overline{x})$. Последнее же равносильно истинности на $\mathcal{B}$ квазитождества $\mathcal{P}(\overline{x}) \to q_1(\overline{x}) = q_2(\overline{x})$. Тем самым, $\mathcal{M}_{pc}(\mathcal{K}) \subseteq Q(\mathcal{K})$.

Пусть теперь на $\mathcal{K}$ истинна позитивно-универсальная формула $\forall\overline{x}(\bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i(\overline{x}))$, где $\mathcal{P}_i(\overline{x})$ - конъюнкции равенств между термами. Пусть

$$t_1(\overline{x}) = \begin{cases} \mathcal{P}_1(\overline{x}) \to x \\ \mathcal{P}_n(\overline{x}) \to x \end{cases} \quad \text{и} \quad t_2(\overline{x}) = x \ ,$$

где x некоторая из переменных кортежа $\overline{x}$. Тогда $t_1(\overline{x})$ и $t_2(\overline{x})$ - п.у.т. для $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K} \models t_1(\overline{x}) = t_2(\overline{x})$. Тем самым, для любой алгебры $\mathcal{B}$ из $\mathcal{M}_{pc}(\mathcal{K})$, $\mathcal{B} \models t_1(\overline{x}) = t_2(\overline{x})$ и $\mathcal{B} \models \forall\overline{x}(\bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i(\overline{x}))$. То есть $\mathcal{M}_{pc}(\mathcal{K}) \subseteq U_P(\mathcal{K})$. Равенство $\mathcal{M}_{pc}(\mathcal{K}) = Q(\mathcal{K}) \cap U_P(\mathcal{K})$, а вместе с тем и утверждение теоремы, доказаны.

СЛЕДСТВИЕ 1. Любое квазимногообразие и любой позитивно-универсальный класс алгебр являются позитивно условными многообразиями.

Позитивно условно термальные функции очевидным образом коммутируют с гомоморфизмами алгебр, т.е. если φ-гомоморфизм алгебры

$\mathcal{A}_1$ в алгебру $\mathcal{A}_2$ и $t(\overline{x})$ является п.у.т. для $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, то для любых
$\overline{a} \in \mathcal{A}_1$, $\varphi(t(\overline{a})) = t(\varphi(\overline{a}))$. В силу этого, если $t(x_1, \cdots, x_n)$ - п.у.т. для
класса $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}$ содержит n-свободно порожденную $\mathcal{K}$-алгебру $\mathcal{A}$, то най-
дется терм $t'(x_1, \cdots, x_n)$ такой, что $\mathcal{K} \models t(\overline{x}) = t'(\overline{x})$. Действительно,
если

$$t(\overline{x}) = \begin{cases} \mathcal{P}_1(\overline{x}) \to t_1(\overline{x}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{P}_m(\overline{x}) \to t_m(\overline{x}) \end{cases}$$

- представление позитивно условного терма $t(\overline{x})$ в нормальной форме и
$a_1, \cdots, a_n$ - свободные порождающие алгебры $\mathcal{A}$, то для некоторого $i \leq m$
имеет место $\mathcal{A} \models \mathcal{P}_i(\overline{a})$ и, значит, $\mathcal{A} \models t(\overline{a}) = t_i(\overline{a})$. С другой стороны, т.к.
для любой $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$ и любых $b_1, \cdots, b_n$ существует гомоморфизм φ алгебры
$\mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{B}$ такой, что $\varphi(a_j) = b_j$, то $\mathcal{B} \models \mathcal{P}_i(\overline{b})$ и $\mathcal{B} \models t(\overline{b}) = t_i(\overline{b})$. Тем
самым терм $t_i(\overline{x})$ и является искомым термом $t'(\overline{x})$.

Отсюда в частности следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для любого квазимногообразия Q позитивно
условно термальные для Q функции суть термальные.

В работе [5], [6] найдены аналоги теоремы А.И.Мальцева о рациональ-
но эквивалентных многообразиях для условных и элементарно условных
многообразий: условные многообразия условно рационально эквивалент-
ны тогда и только тогда, когда натурально эквивалентны (изоморфны с
помощью изоморфизма, коммутирующего со стирающими функторами)
их категории вложимости; элементарно условные многообразия элемен-
тарно условно рационально эквивалентны тогда и только тогда, когда
натурально эквивалентны некоторые их двойные категории, связанные
с понятием элементарная вложимость. При этом вложения и элементар-
ные вложения суть те морфизмы с которыми коммутируют условно и
элементарно условно термальные функции соответственно. Понятие по-
зитивно условной рациональной эквивалентности двух классов алгебр
определяется аналогично понятиям рациональной, условно рациональ-
ной эквивалентностей на основе понятия позитивно условного терма (см.,
[4]). Так как позитивно условно термальные функции коммутируют с лю-
быми гомоморфизмами между алгебрами на которых определен данный
позитивно условный терм, то естественно было бы ожидать соответству-
ющего результата: позитивно условные многообразия $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ позитивно
условно рационально эквивалентны тогда и только тогда, когда нату-
рально эквивалентны категории $\overrightarrow{\mathcal{K}_1}$ и $\overrightarrow{\mathcal{K}_1}$ (объекты категории $\overrightarrow{\mathcal{K}_i}$ суть
$\mathcal{K}_i$-алгебры, а морфизмы - гомоморфизмы между $\mathcal{K}_i$-алгебрами). Од-
нако это не так, что можно видеть на следующем примере: пусть $\mathcal{K}$ -
некоторый счетный (с точностью до изоморфизма) класс не более чем

двуэлементных алгебр сигнатуры σ, содержащей счетное число одноэлементных функциональных символов. В силу теоремы 1 класс $\mathcal{K}$ является позитивно условным многообразием. Пусть одноместная функция g определена на $\mathcal{K}$-алгебрах с точностью до изоморфизма, т.е. так, что для любых $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \in \mathcal{K}$ обогащения $< \mathcal{A}_1; g >$ и $< \mathcal{A}_2, g >$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Очевидно, что, с точностью до изоморфизма, существует континиум подобных функций g. В тоже время существует не более чем счетное число позитивно условно термальных g-обогащений класса $\mathcal{K}$. Тем самым, существует функция g, определенная на $\mathcal{K}$-алгебрах с точностью до изоморфизма и не являющаяся позитивно условно термальной на $\mathcal{K}$. Через $\mathcal{K}'$ обозначим g-обогащение класса $\mathcal{K}$. В силу простоты каждой из неодноэлементных $\mathcal{K}$-алгебр, категории $\overrightarrow{\mathcal{K}}$ и $\overrightarrow{\mathcal{K}'}$ натурально эквивалентны, но, в силу выбора функции g, не являются позитивно условно рационально эквивалентными.

В тоже время, как показано в работе [4], две конечные алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ позитивно условно рационально эквивалентны тогда и только тогда, когда сопряжены полугруппы их внутренних гомоморфизмов. В частности, если категории $\overrightarrow{\mathcal{M}_{pc}(\mathcal{A}_1)}$ и $\overrightarrow{\mathcal{M}_{pc}(\mathcal{A}_1)}$ натурально эквивалентны, то указанные полугруппы сопряжены и, значит, алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ позитивно условно рационально эквивалентны. Этот результат может быть обобщен на случай конечного числа конечных алгебр.

Позитивно условное многообразие $\mathcal{K}$ назовем конечным, если, с точностью до изоморфизма, оно состоит из конечного числа алгебр. В силу замкнутости $\mathcal{K}$ относительно ультрапроизведений, алгебры, входящие в $\mathcal{K}$ обязаны быть конечными. В силу же теоремы 1 конечная, с точностью до изоморфизма, совокупность $\mathcal{K} = \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n\}$ конечных алгебр является позитивно условным многообразием, если она замкнута относительно подалгебр и гомоморфных образов изоморфных подпрямым произведениям алгебра из $\mathcal{K}$. Пусть $g(x_1, \ldots, x_n)$ - функция, определенная на $\mathcal{K}$-алгебрах и коммутирующая с морфизмами категории $\overrightarrow{\mathcal{K}}$, т.е. с гомоморфизмами между $\mathcal{K}$-алгебрами. Покажем, что g является позитивно условно термальной функцией на $\mathcal{K}$-алгебрах. Пусть $S = \{< a_1, \ldots, a_n > \mid$ для некоторой $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, $a_1 \ldots, a_n \in \mathcal{A}\}$. Определим на S отношение $\leq$ следующим образом: $< a_1, \ldots, a_n > \leq < b_1, \ldots, b_n >$ если существует гомоморфизм φ подалгебры $\mathcal{K}$-алгебры порожденной множеством $\{a_1, \cdots, a_n\}$ на подалгебру $\mathcal{K}$- алгебры, порожденную множеством $\{b_1, \cdots, b_n\}$ такой, что $\varphi(a_i) = b_i$. Для $\overline{a} =< a_1, \ldots, a_n > \in S$ через $\mathcal{P}_{\overline{a}}(x_1, \ldots, x_n)$ обозначим позитивную диаграмму кортежа $\overline{a}$ в соответствующей $\mathcal{K}$-алгебре $\mathcal{A}$, т.е. совокупность всех равенств $t_1(\overline{x}) = t_2(\overline{x})$ между термами алгебры $\mathcal{A}$ таких, что $\mathcal{A} \models t_1(\overline{a}) = t_2(\overline{a})$. Очевидно, что для любых $\overline{a}, \overline{b} \in S$ отношение $\overline{b} \leq \overline{a}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathcal{B} \models \mathcal{P}_{\overline{a}}(\overline{b})$, где $\mathcal{B}$ - любая $\mathcal{K}$-алгебры, содержащая кортеж $\overline{b}$. В силу конечности S, для любого $\overline{a} \in S$ существует конечная часть $\mathcal{P}'_{\overline{a}}(\overline{x})$ позитивной диаграммы $\mathcal{P}_{\overline{a}}(\overline{x})$ такая, что для любого $\overline{b} \in S$, $\mathcal{B} \models \mathcal{P}_{\overline{a}}(\overline{b})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B} \models \mathcal{P}'_{\overline{a}}(b)$ для любой $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$ такой, что $b \in \mathcal{B}$. Так как класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно подалгебр и g коммутирует с вложениями $\mathcal{K}$-алгебр друг в друга, то для любого $\overline{a} \in S$ существует терм $t_{\overline{a}}(\overline{x})$ такой, что для любой $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{A}$, включающей в себя $\overline{a}$ имеет место равенство $\mathcal{A} \models t_{\overline{a}}(\overline{a}) = g(\overline{a})$. В силу того, что термальные функции и функция g коммутируют с гомоморфизмами между $\mathcal{K}$-алгебрами, для любого $\overline{b} \in S$ и любой $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{B}$, включающей $\overline{b}$, если $\overline{b} \leq \overline{a}$, то $\mathcal{B} \models t_{\overline{a}}(\overline{b}) = t_{\overline{b}}(\overline{b}) = g(\overline{b})$. В частности, для любых $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3 \in \mathcal{K}$, любых $\overline{a}_i \in \mathcal{A}_i (i = 1, 2, 3)$, если $\mathcal{A}_3 \models \mathcal{P}'_{\overline{a}_1}(\overline{a}_3) \& \mathcal{P}'_{\overline{a}_2}(\overline{a}_3)$, то $\mathcal{A}_3 \models t_{\overline{a}_1}(\overline{a}_3) = t_{\overline{a}_2}(\overline{a}_3)$. Пусть $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k$ - совокупность всех максимальных элементов частично упорядоченного множества $< S; \leq >$. В силу отмеченного выше, очевидно, что позитивно условный для класса $\mathcal{K}$ терм

$$t(\overline{x}) = \begin{cases} \mathcal{P}'_{\overline{a}_1}(\overline{x}) \to t_{\overline{a}_1}(\overline{x}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{P}'_{\overline{a}_k}(\overline{x}) \to t_{\overline{a}_k}(\overline{x}) \end{cases}$$

определяет на $\mathcal{K}$-алгебрах функцию g. Аналогичные рассуждения справедливы для любого локально конечного (что в силу ультразамкнутости $\mathcal{K}$ равносильно равномерной локальной конечности) позитивно условного многообразия конечной сигнатуры. Таким образом имеет место.

ТЕОРЕМА 2. Для любого локально конечного конечной сигнатуры (для любого конечного) позитивно условного многообразия $\mathcal{K}$ функция g, определенная на $\mathcal{K}$-алгебрах является позитивно условно термальной для $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда она коммутирует с гомоморфизмами между $\mathcal{K}$-алгебрами.

СЛЕДСТВИЕ 2. Два локально конечных конечной сигнатуры (два конечных) позитивно условных многообразия $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ позитивно условно рационально эквивалентны тогда и только тогда, когда натурально эквивалентны категории $\overrightarrow{\mathcal{K}_1}$ и $\overrightarrow{\mathcal{K}_2}$.

Заметим, что в силу приведенного выше примера, условие конечности сигнатуры, для равномерно локально конечных позитивно условных многообразий в утверждениях теоремы 2 и следствия2, существенно.

Столь же существенно условие локальной конечности. Действительно, рассмотрим класс $\mathcal{F}$ всех полей в сигнатуре $< +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1 >$ считая, что $0^{-1} = 0$. Тогда аксиома существования обратного элемента записывается как универсально позитивная формула $\forall x (x = 0 \& 0^{-1} = 0 \vee x \cdot x^{-1} =$

$1)$. Очевидно, что класс $\mathcal{F}$ является позитивно условным многообразием. Все неодноэлементные $\mathcal{F}$-алгебры являются простыми. Тем самым, требования к функции g, определенной на $\mathcal{F}$-алгебрах, коммутировать с $\overrightarrow{\mathcal{F}}$-морфизмами суть требования о коммутировании с вложениями $\mathcal{F}$-алгебр друг в друга. Пусть $\mathcal{F}_p$ - совокупность полей характеристики p (p - простое число, либо $p = 0$). Тогда $\overrightarrow{\mathcal{F}} = \bigcup\limits_{p \in P \cup \{0\}} \overrightarrow{\mathcal{F}}_p$, где P - совокупность всех простых чисел. Таким образом, существует как минимум континуум различных одноместных функций g, определенных на $\mathcal{F}$-алгебрах и коммутирующих с гомоморфизмами между $\mathcal{F}$-алгебр. В тоже время, число различных позитивно условно термальных для $\mathcal{F}$ функций не более чем счетно. Тем самым, действительно, условие локальной конечности в формулировке теоремы 2 существенно.

Список литературы

[1] А.Г.Пинус. Об условных термах и тождествах на универсальных алгебрах.- в "Структурные и алгоритмические свойства вычислимости", Вычислительные системы, т.156, 1996, с.59-78.

[2] A.G.Pinus. Conditional terms and its applications.- in "Algebra. Proc. of the Inter. Alg. Conf. of the Occasion of the 90th Birthday of A.Kurosh", Walter de Grayter Publ., Berlin-New York, 2000, p.291-300.

[3] А.Г.Пинус. Условные термы и их приложения в алгебре и теории вычислений.- Успехи мат. наук, т. 56, №4, 2001, с.35-72.

[4] А.Г.Пинус. Внутренние гомоморфизмы и позитивно условные термы.- Алгебра и логика, т.40, 2001, №2, с. 158-173.

[5] А.Г.Пинус. Исчисление условных тождеств и условно рациональная эквивалентность.- Алгебра и логика, т.37, №4, 1998, 432-459.

[6] А.Г.Пинус. N-элементная вложимость и n-условные термы.- Известия вузов. Математика, №1, 1999, 36-40.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ШКАЛАХ ПОТЕНЦИАЛОВ ВЫЧИСЛИМОСТИ N-ЭЛЕМЕНТНЫХ АЛГЕБР

А.Г.Пинус, С.В.Журков*

Новосибирский государственный технический университет
e-mail: algebra@nstu.ru

Понятие потенциала вычислимости универсальной алгебры $\mathcal{A} =< A;\sigma >$ определено в работе [1] на основе понятия условного терма. По сути дела, условный терм сигнатуры σ являются программой вычисления некоторой функции на множестве A, составленной из простейших подпрограмм, вычисляющих сигнатурные функции с помощью оператора суперпозиции и условного оператора. При этом, в зависимости от трактовки понятия условия: бескванторная формула сигнатуры σ, позитивная бескванторная формула, позитивная $\exists$-формула и элементарная формула сигнатуры σ, мы получаем соответственно совокупность собственно условных термов $CT(\sigma)$, позитивно условных термов $PCT(\sigma)$, $\exists^+$-условных термов $\exists^+CT(\sigma)$ и элементарно условных термов $ECT(\sigma)$ сигнатуры σ. Эти четыре случая определяют четыре класса программно вычислимых функций на универсальной алгебре $\mathcal{A}$: условно термальные функции - $CT(\mathcal{A})$, позитивно условно термальные - $PCT(\mathcal{A})$, $\exists^+$-условно термальные - $\exists^+CT(\mathcal{A})$ и элементарно условно термальные - $ECT(\mathcal{A})$, которые и рассматриваются как потенциалы вычислимости алгебры $\mathcal{A}$. Обзор результатов, связанных с этими понятиями, см. в [2], [3]. При этом считаем, что алгебры $\mathcal{A} =< A;\sigma_1 >$ и $\mathcal{B} =< B;\sigma_2 >$ имеют одинаковый вычислительный потенциал, если существует биекция φ множества A на множество B, сопрягающая совокупности функций $CT(\mathcal{A})$ и $CT(\mathcal{B})$ (либо другие пары: $PCT(\mathcal{A})$ и $PCT(\mathcal{B})$, $\exists^+CT(\mathcal{A})$ и $\exists^+CT(\mathcal{B})$, $ECT(\mathcal{A})$ и $ECT(\mathcal{B})$ при иной трактовке вычислительного потенциала). В работах [4], [5] найдены инварианты вычислительных потенциалов конечных универсальных алгебр. Пусть $Sub(\mathcal{A})$ - совокупность подалгебр алгебры $\mathcal{A}$, $Iso(\mathcal{A})$ - совокупность внутренних изоморфизмов (изоморфизмов между

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Минобразования №E00-1.0-30

подалгебрами) алгебры $\mathcal{A}$; $Ihm(\mathcal{A})$ - совокупность внутренних гомомор-
физмов (эпиморфизмов между подалгебрами) алгебры $\mathcal{A}$; $End(\mathcal{A})$ - сово-
купность эндоморфизмов, а $Aut(\mathcal{A})$ - совокупность автоморфизмов алге-
бры $\mathcal{A}$. Тогда $CT(\mathcal{A})$ и $CT(\mathcal{B})$ ($PCT(\mathcal{A})$ и $PCT(\mathcal{B})$, $\exists^+CT(\mathcal{A})$ и $\exists^+CT(\mathcal{B})$,
$ECT(\mathcal{A})$ и $ECT(\mathcal{B})$) сопряжены некотрой биекцией множества A на B
тогда и только тогда, когда существует биекция φ множества A на B
такая, что $\varphi(Sub(\mathcal{A})) = Sub(\mathcal{B})$ и φ сопрягает $Iso(\mathcal{A})$ и $Iso(\mathcal{B})$ ($Ihm(\mathcal{A})$
и $Ihm(\mathcal{B})$, $End(\mathcal{A})$ и $End(\mathcal{B})$, $Aut(\mathcal{A})$ и $Aut(\mathcal{B})$ соответственно). Понятия
шкал потенциалов вычислимости n-элементных алгебр определены в ра-
боте [6]. Пусть $CT_n = \{CT(\mathcal{A}) | \mathcal{A}$ - произвольная универсальная алгебра
с основным множеством $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$. На CT_n введем отношение
эквивалентности $\sim$: для $F_1, F_2 \in CT_n$ пусть $F_1 \sim F_2$, если существует
перестановка π на n, сопрягающая совокупность функций F_1 с совокуп-
ностью функций F_2. Пусть $CT(n) = CT_n/\sim$. На $CT(n)$ определяется
отношение частичного порядка $\leq$: $F_1/\sim \leq F_2/\sim$, если для некоторой
перестановки π на n имеет место включение $\pi^{-1}F_1\pi \subseteq F_2$. Шкалой по-
тенциалов вычислимости n-элементных алгебр называется конечное ча-
стично упорядоченное множество $< CT(n); \leq >$. Аналогичным образом
определяются шкалы $< PCT(n); \leq >, < \exists^+CT(n) >, < ECT(n); \leq >$. В
работах [6], [7] получены некоторые оценки числа элементов этих шкал,
посчитаны числа их атомов, коатомов, посчитана длина этих частично
упорядоченных множеств, доказано, что эти частичные порядки не явля-
ются ни нижними, ни верхними полурешетками (при $n \geq 3$), а, с другой
стороны, любая конечная решетка изоморфно вложима как решетка в
некоторый интервал этих шкал (являющийся решеткой) при достаточно
большом n. Цель настоящей заметки - сформулировать ответы на некото-
рые естественные вопросы о строении шкал потенциалов вычислимости
n-элементных алгебр, не затронутые в указанных работах.

1. Прежде всего, отметим, что имеет место

Утверждение 1 *Для любых $m < n$ шкала $< CT(m); \leq >$ является ре-
трактом шкалы $< CT(n); \leq >$. Более того, существуют интервал $[a, b]$
шкалы $< CT(n); \leq >$ и эпиморфизм φ шкалы $< CT(n); \leq >$ на интервал
$[a, b]$ такие, что φ тождественен на $[a, b]$, и интервал $[a, b]$ изоморфен
шкале $< CT(m); \leq >$.*

Достаточно доказать это утверждение для $n = m + 1$. Пусть алгебры $\mathcal{A}'$
и $\mathcal{A}''$ таковы, что $Sub(\mathcal{A}' = \{\{0, 1, \ldots, m\}, \{0, 1, \ldots, m-1\}\}$, $Sub(\mathcal{A}'') =$
$\{\{0, 1, \ldots, m\}\} \cup P(m)$, где $P(m)$ - совокупность всех подмножеств мно-
жества $m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, а $Iso(\mathcal{A}')$ состоит из всех тождественных
отображений на себя множеств, входящих в $Sub(\mathcal{A}')$, $Iso(\mathcal{A}'')$ - из то-

ждественного отображения на себя множества $m + 1$ и всевозможных биекций между подмножествами из $P(m)$. В работе [4] описан критерий, когда пара $< P, Q >$ подмножеств некоторого множества и совокупности биекций между этими подмножествами являются парой вида $< Sub(\mathcal{A}), Iso(\mathcal{A}) >$ для некоторой алгебры $\mathcal{A}$, т.е. являются инвариантом потенциала вычислимости некоторой алгебры. В силу этого критерия очевидно, что шкала $< CT(m); \leq >$ изоморфна интервалу $[CT(\mathcal{A}'')/\sim; CT(\mathcal{A}')/\sim]$ шкалы $< CT(m+1); \leq >$. На совокупности алгебр с основным множеством $m + 1$ определим отображение φ: если $\mathcal{A} =< m + 1; \sigma >$, то $\varphi(\mathcal{A})$ - некоторая алгебра с основным множеством $m + 1$ такая, что $Sub(\varphi(\mathcal{A})) = (Sub(\mathcal{A}) \cap P(m)) \cup \{m + 1, m\}$ и $Iso(\varphi(\mathcal{A})) = (Iso(\mathcal{A}) \cap Bi(m)) \cup \{id_{m+1}, id_m\}$, где $Bi(m)$ - совокупность всевозможных биекций между подмножествами множества m, id_A - тождественное отображение на множестве A. Существование алгебры $\varphi(\mathcal{A})$ очевидно в силу критерия из работы [4]. Очевидно, что для любых алгебр $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$: $CT(\varphi(\mathcal{A}))/\sim \in [CT(\mathcal{A}'')/\sim, CT(\mathcal{A}')/\sim]$, если $CT(\mathcal{A})/\sim \in [CT(\mathcal{A}'')/\sim, CT(\mathcal{A}')/\sim]$, то $CT(\varphi(\mathcal{A}))/\sim = CT(\mathcal{A})/\sim$; если $CT(\mathcal{A}_1) \sim \leq CT(\mathcal{A}_2)/\sim$, то $CT(\varphi(\mathcal{A}_1))/\sim \leq CT(\varphi(\mathcal{A}_2))/\sim$. Тем самым, действительно шкала $CT(m); \leq >$ является ретрактом шкалы $< CT(n); \leq >$ при $m \leq n$. Аналогичные утверждения очевидным образом верны и для шкал вида $< PCT(n); \leq >, < \exists^+CT(n); \leq >, < ECT(n); \leq >$.

2. Естественным вопросом является вопрос о разрешимости элементарной теории класса Sk шкал потенциалов вычислимости конечных алгебр - $\{< CT(n); \leq > | n \in \omega\}$. Действительно, в случае разрешимости этой теории, в силу конечности шкал $< CT(n); \leq >$, вся информация о строении этих шкал вытекала бы из алгоритма, разрешающего элементарную теорию класса всех шкал. Но, как и следовало ожидать, имеет место

Утверждение 2 *Элементарная теория класса $Sk = \{< CT(n); \leq > | n \in \omega\}$ неразрешима.*

Действительно, в работе [6] доказано, что для любого натурального n решетка разбиений $Part(n)$ n-элементного множества изоморфна некоторому интервалу шкалы $< CT(m); \leq >$ при достаточно большом m. Тем самым, класс конечных решеток разбиений относительно элементарно определим в классе Sk. Элементарная же теория класса конечных решеток разбиений, как хорошо известно, наследственно неразрешима - в ней очевидным образом интерпретируется наследственно неразрешимая (см. [8]) элементарная теория конечных множеств с двумя отношениями эквивалентности. Тем самым, действительно, элементарная теория класса Sk неразрешима.

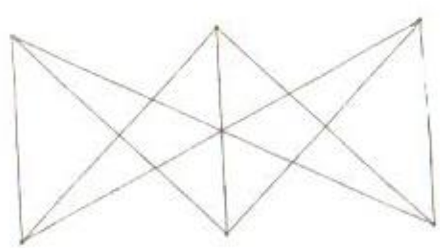
Аналогичные утверждения имеют место и для классов шкал

$\{PCT(n); \leq> | n \in \omega\}, \{< \exists^{+}CT(n); \leq> | n \in \omega\}, \{< ECT(n); \leq> | n \in \omega\}$

3. В связи с конечностью каждой из шкал $< CT(n); \leq>$ естестве-
нен интерес к наглядному изображению этих шкал - к их диаграм-
мам Хассе. Диаграммы Хассе для шкал $< CT(2); \leq>$, $< CT(3), \leq>$ и
шкал $< ECT(2); \leq>$, $< ECT(3); \leq>$ приведены в работе [6]. Естествен-
но возникает вопрос: будет ли граф, соответствующий диаграмме Хас-
се шкалы $< CT(n); \leq>$ (а также шкал $< ECT(n); \leq>$ и прочих) плос-
ким. Плоскость шкал $< ECT(2); \leq> = < CT(2); \leq> = < PCT(2); \leq> = <$
$\exists^{+}CT(2); \leq>$, представляющих из себя решетки N_5 (пентагон), очевид-
на.

Утверждение 3 *Графы, соответствующие диаграммам Хассе шкал* $< ECT(n); \leq>, < CT(n); \leq>, < PCT(n); \leq>, < \exists^{+}CT(n); \leq>$ *не являются плоскими при* $n \geq 3$.

В силу утверждения 1 достаточно доказать утверждение 3 при $n = 3$.
По теореме Понтрягина-Куратовского (см., к примеру, [9]) достаточ-
но показать, что граф шкалы $< CT(3); \leq>$ (так же, как и шкалы
$< ECT(3); \leq>$, и прочих) содержит подграф, стягиваемый к графу вида
$K_{3,3}$.



$K_{3,3}$

Приведем простое замечание, доказывающее, что граф шкалы $<$
$CT(4); \leq>$ не является плоским. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_6$

определенные на множестве $4 = \{0, 1, 2, 3\}$ таковые, что их внутренние изоморфизмы суть тождественные отображения их подалгебр, и при этом

$Sub(\mathcal{A}_1) = \{\{0,1,2,3\}, \{0\}\}$,
$Sub(\mathcal{A}_2) = \{\{0,1,2,3\}, \{0,1\}\}$,
$Sub(\mathcal{A}_2) = \{\{0,1,2,3\}, \{0,1,2\}\}$,
$Sub(\mathcal{A}_4) = \{\{0,1,2,3\}, \{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}\}$,
$Sub(\mathcal{A}_5) = \{\{0,1,2,3\}, \{0\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$,
$Sub(\mathcal{A}_6) = \{\{0,1,2,3\}, \{0,1\}, \{1,2,3\}.\{1\}\}$.

Без труда замечается, что потенциалы вычислимости $CT(\mathcal{A}_1)/\sim, \ldots, CT(\mathcal{A}_6)/\sim$ образуют в шкале $< CT(4); \leq>$ подграф, стягиваемый к графу $K_{3,3}$.

Аналогичным образом замечается справедливость утверждения 3 для шкал вида $< PCT(4); \leq>, < \exists^{+}CT(4); \leq>$ и $< ECT(4); \leq>$. Непосредственно из рассмотрения шкал $< CT(3); \leq>, < ECT(3); \leq>$, приведенных в работе [6], замечается, что алгебры $\mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{13}, \mathcal{A}_{18}, \mathcal{A}_{19}, \mathcal{A}_{22}, \mathcal{A}_{25}$ этих шкал образуют подграф, стягиваемый к графу $K_{3,3}$. То же верно для шкал $< \exists^{+}CT(3); \leq>$ и $< PCT(3); \leq>$.

4. В работах [5],[10] рассматривался вопрос о конечной порожденности клонов функций $PCT(\mathcal{A}), \exists^{+}CT(\mathcal{A}), ECT(\mathcal{A})$ над клоном $T(\mathcal{A})$ термальных функций алгебры $\mathcal{A}$, естественно возникающий в контексте того, что клон $CT(\mathcal{A})$ является всегда однопорожденным (дискриминаторной функцией) над клоном $T(\mathcal{A})$. В связи с этим, а также в связи с вопросом о подмножествах, выделяемых в шкалах потенциалов вычислимости ограничениями на сигнатуру алгебр, естественно возникает вопрос о минимальной порожденности классов функций $CT(\mathcal{A}), ECT(\mathcal{A}), PCT(\mathcal{A}), \exists^{+}CT(\mathcal{A})$ не как клонов, а как классов функций, замкнутых и относительно суперпозиции, и относительно условных операторов, т.е. каково минимальное число функций может быть в сигнатуре алгебры $\mathcal{A}'$ такой, что $CT(\mathcal{A}') = CT(\mathcal{A})$ для любой алгебры $\mathcal{A}'$ и т.д.

Утверждение 4 *Для любой конечной алгебры* $\mathcal{A}$ *существуют алгебры* $\mathcal{A}', \mathcal{A}''$ *сигнатуры, состоящей из одной функции, такие, что* $CT(\mathcal{A}) = CT(\mathcal{A}')$, *и* $ECT(\mathcal{A}) = ECT(\mathcal{A}'')$.

Докажем лишь существование алгебры $\mathcal{A}'$, существование алгебры $\mathcal{A}''$ доказывается аналогично. В силу указанных выше инвариантов совокупности функций $CT(\mathcal{A})$ для конечных алгебр $\mathcal{A} = < A; \sigma >$, достаточно построить алгебру $\mathcal{A}' = < A; \sigma' >$, сигнатура σ' которой состоит из одной функции, такую, что $Sub(\mathcal{A}) = Sub(\mathcal{A}')$ и $Iso(\mathcal{A}) = Iso(\mathcal{A}')$. Пусть

$< B_1^1, b_1^1 >, \dots, < B_1^{k_1}, b_1^{k_1} >, \dots, < B_r^1, b_r^1 >, \dots, < B_r^{k_r}, b_r^{k_r} >$ - совокупность всех пар, где $B_1^j = < b_i^{j_1}, \dots, b_i^{j s_i} >$ пробегает все кортежи попарно различных элементов из A, b_i^j - элемент из подалгебры алгебры $\mathcal{A}$, порожденной множеством $\{b_i^{j_1}, \dots, b_i^{j s_i}\}$, и при этом для любых $i \leq r, p, q \leq k_i$ существует $\varphi \in Iso(\mathcal{A})$ такой, что $\varphi(B_i^p) = B_i^q, \varphi(b_i^p) = b_i^q$, а для $i \neq j \leq r$ подобных $\varphi \in Iso(\mathcal{A})$ не существует. Определим на A $(n+1) * r$-местную функцию: $f(x_1^1, \dots, x_{n+1}^1, x_1^2, \dots, x_{n+1}^2, \dots, x_1^r, \dots, x_{n+1}^r)$, где $n = |A|$, следуюощим образом:

для любых $i \leq r, j \leq k_i$

$$\overbrace{\underbrace{f(b_i^{j_1}, \dots, b_i^{j s_i}, b_i^{j_1}, \dots, b_i^{j_1}}_{n+1}, \dots, \underbrace{b_i^{j_1}, \dots, b_i^{j s_i}, b_i^{j_1}, \dots, b_i^{j_1}}_{n+1}}^{i}, b_i^{j_1}, \dots, b_i^{j_1}) = b_i^j$$

и во всех других случаях

$$f(x, \overline{y}) = x$$

Пусть $\mathcal{A}' = < A; f >$. Непосредственно замечается, что $Sub(\mathcal{A}) = Sub(\mathcal{A}')$ и $Iso(\mathcal{A}) = Iso(\mathcal{A}')$.

Список литературы

[1] А.Г.Пинус. Об условно рационально эквивалентных алгебрах. // Структурные и сложностные проблемы вычислимости. Вычислительные системы, вып.165, 1999, с.3-29.

[2] A.G.Pinus. Conditional terms and its applications. // in "Algebra. Proceedings of the International Algebraic Conference of the Occasion of the 90th Birthday of A.Kurosh". Walter de Grayter Publ., Berlin-New York, 2000, p.291-300.

[3] А.Г.Пинус. Условные термы и их приложения в алгебре и теории вычислений. // Успехи мат. наук., т.56, №4, 2001, с.35-72.

[4] А.Г.Пинус. Исчисление условных термов и условно рациональная эквивалентность. // Алгебра и логика, т.37, №4, 1998, с.432-459.

[5] А.Г.Пинус. О функциях, коммутирующих с полугруппами преобразований алгебр. // Сибирский математический журнал, т.41, №6, 2000, с.1409-1418

[6] A.G.Pinus, S.V.Zhurkov. On the scales of computability potentials of finite algebras (in appear).

[7] А.Г.Пинус, С.В.Журков. О длинах шкал потенциалов вычислимости n-элементных алгебр (в печати).

[8] Ю.Л.Ершов. Неразрешимость теорий симметрических и простых конечных групп. // ДАН СССР, т.15, №4, 1964, с.777-779.

[9] С.В.Яблонский. Введение в дискретную математику. // Наука, Москва, 1979.

[10] A.G.Pinus. The positive and generalized discriminators don't exist. // Discussiones Math., General Algebra and Appl., v.20, 2000, p.121-128.

ON NEAR-MODULES, NEAR-ALGEBRAS AND ON THE NOTION OF CENTROID FOR NEAR-RINGS.

S.Yenigul*

e-mail: yenigul@sci.ege.edu.tr.

K.N.Ponomarev

e-mail: ponom@online.sinor.ru

In the middle of former century Herstein and Jacobson introduced the notion of centroid in the theory of rings (see books [2], and [1]). The paper is devoted to extension of centroid notion from ring theory to the theory of near-ring.

From the beginning the notion of centroid was a meaning to introduce on arbitrary ring the additional structure of algebra over some scalar ring. So it gives us a method to simplify a problem by introducing of some addition structure on the ring.

Moreover, centroid $\Gamma(R)$ of a ring R includes any scalar ring of R by some natural way. So it is a maximal scalar ring.

More rigid ring structure gives us more clear structure of the centroid. In extreme case when the ring R is a simple ring centroid of the ring $\Gamma(R)$ forms a field. These remarks give us Herstein's theorem for associative algebras and Jacobson's theorem for Lie algebras.

Of course, this notion seems to be most useful for description of abstract isomorphisms of algebras. Indeed, it defines on a ring some structure of a scalar ring (see paper [3]).

In this paper for the class of near-rings we introduce notions of near-module, near-algebra and centroid. As general reference book we use monograph of G.Pilz [4].

1 Definitions.

Remember *near-ring* N is the set with two binary operations +and·. For addition operation this set forms a group $< N, + >$ (may be non abelian group). For multiplication operation it forms a semigroup $< N, \cdot >$, i.e. for any $u, v, w \in N$ we have equality $(uv)w = u(vw)$. And right distributive law is satisfied: $(u+v)w = uw + vw$. See [4], (1.1).

*The work was supported by NATO PC-B Advanced Fellowship Programme and Scientific and Technical Research Council of Turkey.

Let N be a near-ring and $< G, + >$ be a group. G is called *N-group* if there is an action $N \times G \to G$ of N on G with the following two properties for any $n_1, n_2 \in N, g \in G$(see loc.cit., 1.17):

a)$(n_1 + n_2)g = n_1g + n_2g$;

b)$(n_1n_2)g = n_1(n_2g)$.

As an example of N-group we can consider any near-ring with adjoint action on himself by left multiplications. The following definition see in (loc.cit., 1.116).

Near-algebra over a field F is a vector space A over F with additional operation of multiplication ·. And for two these operations the set A forms near-ring and for $f \in F$ and $a, b \in A$ we have property:

*)$(fa)b = f(ab)$.

Here we have to remark that near-notions are extensions of notions from associative ring theory. So any (associative) ring is a near-ring and any algebra over a field is near-algebra too.

As we wish to consider algebras over associative rings we have to extend the definitions above. And we shall have in mind that new notions have to be in coincidence with ring theory notions.

We shall introduce the following definition of near-module. Let the group G to be N-group and action of N on G is faithful. Then G is called *Near-module* over N if, for any permutable $g, h \in G, g + h = h + g$ for any $n \in N$ we have:

c)$n(g+h) = ng + nh$;

for any $g, h \in G, n \in N$ we have

d)$n(-g+h+g) = -g + nh + g$.

Let us remark any module G over a ring N is near-module as G is abelian group. For abelian group G the axiom (d) is fulfilled by trivial way $-g+h+g = h$. And the axiom (c) are satisfied for any pare $g, h \in G$ by definition of module.

Near-algebra over ring R is a near-ring A and a faithful action of R on A, $R \times A \to A$ with the following properties.

for any $r, s \in R, a \in A$ we have

1) $(r+s)a = ra + sa$;

2) $(rs)a = r(sa)$;
and for any $a, b \in A, r \in R$ we have
3) if $a + b = b + a$ then $r(a + b) = ra + rb$;
4) $r(-a + b + a) = -a + rb + a$;
5) $(ra)b = r(ab)$.
In other words, it is near-module and we have one additional axiom similar to axiom of near-algebra (*) over a field.

We easy see any algebra over associative ring is near-algebra as it is module and near-module (1-4) and axiom (5) is axiom of algebra.

The purpose of the paper – for a given near-ring A define associative ring $\Gamma(A)$ and structure of near-algebra over $\Gamma(A)$ on A which is maximal in proper sense.

2 Factor-morphisms and quasi-endomorphisms.

In the section we repeat definition and theorems from papers [5] and [6]. But we present them in the proper form.

Let G be some additive group with addition operation + (it is not necessarily abelian group). Remember *endomorphism* of G is a map $\varphi : G \to G$ that for any $r, s \in G$ we have $\varphi(r + s) = \varphi(r) + \varphi(s)$. We shall follow to definition from [6].

Quasi-endomorphism of G is a map $\varphi : G \to G$ that
for any permutable $r, s \in G, r + s = s + r$, we have:
1)$\varphi(r + s) = \varphi(r) + \varphi(s)$,
and for any $r, s \in G$ we have:
2)$\varphi(-r + s + r) = -r + \varphi(s) + r$.

We easy see if G is abelian group then quasi-endomorphisms are in coincidence with endomorphisms. For non abelian group G this notion are different from endomorphism notion.

Lemma 1 *For any $\varphi, \psi \in \Phi$ and permutable elements $r, s \in R, r + s = s + r$, elements $\varphi(r), \psi(s)$ are permutable too, $\varphi(r) + \psi(s) = \psi(r) + \varphi(s)$.*

In particular, $\varphi(r) + \varphi(s) = \varphi(r) + \varphi(s)$ and $\varphi(r) + \psi(r) = \psi(r) + \varphi(r)$.

Indeed, for any $r, s \in R$ we have $-r + s + r = s$.

By axiom (2) for any $\varphi \in \Phi$ we have equality: $\varphi(s) = \varphi(-r + s + r) = -r + \varphi(s) + r$ and elements $r, \varphi(s)$ are permutable. So $-\varphi(s) + r + \varphi(s) = r$ too.

Now let $\psi \in \Phi$. From the above we conclude $\psi(r) = \psi(-\varphi(s) + r + \varphi(s)) = -\varphi(s) + \psi(r) + \varphi(s)$. So $\varphi(r) + \psi(s) = \psi(s) + \varphi(r)$ and first assertion of the lemma is proved.

The last statement of lemma easy follows from the first. Firstly, we take $\varphi = \psi$, and we get $r = s$ secondly.

The following statement was proved in the papers above.

Proposition 2 *Let G be any additive group.*

Then the set of quasi-endomorphisms $\Phi(G)$ with operations of pointwise addition and multiplication as composition forms associative ring with the unity (identity map).

Moreover, if Φ is any associative ring and G has a structure of near-module over Φ then there is a natural embedding of Φ into $\Phi(G)$ which is compatible with the action of Φ and $\Phi(G)$ on G.

Let us prove proposition and let us define operations on $\Phi(G)$ by formulas:
+) $(\varphi + \psi)(g) = \varphi(g) + \psi(g)$,
$\cdot$) $(\varphi \cdot \psi)(g) = \varphi(\psi(g))$.

We see $g = g + 0$ and $\varphi(g) = \varphi(g) + \varphi(0)$, so $\varphi(0) = 0$. Moreover, $0 = g + (-g)$ and $0 = \varphi(0) = \varphi(g) + \varphi(-g)$. We conclude $\varphi(-g) = -\varphi(g)$. It follows $< G, + >$ forms a group with unit – zero map $0(g) = 0$ and with converse for φ defined by formula $-\varphi(g) = \varphi(-g)$.

By lemma $\varphi(g)$ and $\psi(g)$ are commutative elements so the set Φ with addition operation + forms an abelian group.

As multiplicative operation is defined by composition we see the set Φ with multiplication operation forms a semi-group. So we have to prove only distributive laws.

But right distributive law $(\alpha + \beta)\varphi = \alpha\varphi + \beta\varphi$ easy follows from definition of addition operation. Let us prove left distributive law $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi\alpha + \varphi\beta$.

We use lemma and see that for any $r \in R$ elements $\alpha(r), \beta(r)$ are permutable. So $\varphi(\alpha(r) + \beta(r)) = \varphi\alpha(r) + \varphi\beta(r)$.

Let us prove the last statement. Let we have on G the structure of near-module over Φ. We define embedding of Φ into $\Phi(G)$ by natural way. For any $\varphi \in \Phi$ we consider the action of φ on G. From the definition of near-module we see the image present some element from $\Phi(G)$.

Proposition is proved.

3 Centroid for near-rings.

Let R be some near-ring and $\Phi = \Phi(R^+)$ be the ring of quasi-endomorphisms of additive group R^+. We define *centroid* of R as a subset in Φ defined by property of elements:

$$\Gamma(R) = \{\varphi \in \Phi | (\forall r, s \in R)\varphi(rs) = \varphi(r)s\}.$$

Proposition 3 *Let R be some near-ring.*

Then centroid $\Gamma(R)$ forms subring in the ring of quasi-endomorphisms $\Phi(R^+)$. The action of $\Gamma(R)$ on R defines on R a structure of near-algebra over $\Gamma(R)$.

Moreover, if Γ is any associative ring and R is near-algebra over Γ then there is natural embedding of Γ into $\Gamma(R)$ compatible with the action on R.

Indeed, from the definition of centroid we see $\Gamma(R)$ is closed for addition and multiplication. So it is subring of $\Phi(R^+)$.

From the definition of centroid we see near-ring R is near-module and near-algebra over $\Gamma(R)$.

The last statement of proposition 3 can be proved as in proposition 2. Proposition is proved.

References

[1] N.Jacobson. Lie algebras. J.Wiley, N.Y. (1962).

[2] I.N.Herstein. Noncommutative rings. The Carus Mathematical Monographs, No. 15. J.Wiley, N.-Y. (1968).

[3] K.N.Ponomarev, Fields of representatives of commutative local rings and maximal scalar fields of finite dimensional algebras. Algebra and Logic, 37 N. 6 (1998), 667-686.

[4] G.Pilz, Near-rings. The theory and its applications. North-Holland Mathematics Studies, N. 23. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, (1977).

[5] K.N.Ponomarev, Factor morphisms of nilpotent groups. Siberian Math.J., 32 N.3 (1991), 449-454.

[6] S.Lioutikov, A.Myasnikov, Centroids of groups. J. Group Theory, 3 N. 2(2000), 177-197.

UNITS IN INTEGRAL GROUP RINGS OF FINITE GROUPS

Asya M. Popova, Ilya Dm. Tchernykh*

Department of Algebra,
Novosibirsk State Technical University,
pr. Marksa, 20,
Novosibirsk 630092 Russia
e-mail: algebra@nstu.ru

In this paper we present a description of the generating multiplicative groups of the integral group rings of finite groups in terms of generators and construct an algorithm for determining these generators. Much research has been devoted to various particular cases of this problem. For example, Goodaire, Jespers, and Parmenter ([1]) describe the units in the ring ZG for a finite group G, assuming that $G/Z(G) \cong C_2 \times G_2$, and the exponents of the groups G/G' and $Z(G)$ are 2,3,4, or 6. Ritter and Sehgal ([2]) find generators of the subgroups of finite index of the multiplicative groups of integral group rings for a broad class of finite groups. Allen and Hobby, and Hughers and Pearson consider units in the rings ZS_3 and ZA_4 [3],[4],[5]. Aleev ([6]) describes central units. Even this short list of papers shows the importance of the problem under consideration.

The structure of the paper is following. In first section the algorithm and the main idea under it are presented. The second section discusses the problems of computer implementation of the algorithm described.

1 Algorithm: the main idea and description

The main idea of this paper is based on the first author's results about multiplicative groups of finitely generated matrix rings [7],[8],[9],[10]. It is well known that for every finite group there exists a faithful matrix representation.

Let $G = \{1, g_2, ..., g_N\}$ be a finite group and let $R(G)$ denote the regular representation of G, q is the exponent of G. The following *algorithm* is proposed:

*Research is supported by RFFR grant N 99-01-00-571.

STEP 1. Find the classes of conjugate elements of the group G: $H_1 = 1$, $H_2, \ldots, H_s$. Denote $|H_i|$ as h_i.

STEP 2. Designate the orders of the irreducible non-equivalent representations of G by $z_1, ..., z_s$. It is well known ([11]), that

1) $z_i \mid [G : Z(G)]$;

2) the number of units in $z_1, ..., z_s$, i.e. the number of one-dimensional non-equivalent representations of the group G over $Q(\sqrt[q]{1})$ is equal to $[G : G']$;

3) $z_1^2 + z_2^2 + ... + z_s^2 = N$.

It is clear that there is only a finite number of sets z_i, $1 \leq z_i \leq [G : Z(G)]$, satisfying these conditions. Determine all these sets.

STEP 3. Let $\chi_1, ..., \chi_s$ be the characters of the irreducible non-equivalent representations of the group G. Their values on the classes $H_1, ..., H_s$ are sums of qth roots of unity. Let us show that these values can be found by a finite exhaustion procedure. Each set $z_1, ..., z_s$ corresponds to a finite number of sets of values $\chi_1, ..., \chi_s$, which satisfy a system of equations. This system is described as follows. Let $C_i = \sum_{g_j \in H_i} g_j$ be the class sums, then $C_iC_j = \sum_{k=1}^{s} c_{ijk}C_k$, $c_{ijk} \in Q(\sqrt[q]{1})$ [11]. c_{ijk} are determined uniquely, since C_i is a base of the center of the algebra QG. Actually, $c_{ijk} \in N$ [11]. Let $Z_i(G)$, $i = 1, ..., s$ be the irreducible non-equivalent representations of G, and χ_i^j be the value χ_i on the class $Z_i(H_j)$. It is easy to show [11] that $Z_j(C_i) = w_i^{(j)}E_{z_j}$, where E_{z_j} is the unit matrix of order z_j, $w_i^{(j)} \in Q(\sqrt[q]{1})$ and $w_i^{(j)} = \frac{h_i\chi_j^i}{z_j}$, $i = 1, ..., s$, $j = 1, ..., s$. In this case $w_i^{(r)}$ is an eigenvalue of the matrix $V_j = (c_{ijk})$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq k \leq s$ at any r $(1 \leq r \leq s)$. Now it is clear that for any set χ_i^j we can obtain the set $w_i^{(j)}$ and check whether or not these values are eigenvalues of the matrices V_j.

STEP 4. Knowing χ_j^i and z_j, it is possible ([12]) to find subspaces of Q^n invariant with respect to $R(G)$ as subspaces of the eigenvectors of the matrices A_j with the eigenvalue $\lambda = 1$, where

$$A_j = \frac{z_j}{N} \sum_{g \in G} \chi_j(g)R(g).$$

STEP 5. Every irreducible representation is contained in a regular one with a multiplicity which is equal to its degree [12]. Since Schur's index [11] divides the degree of an irreducible representation, the summands in the regular representation either are irreducible over Q, or can be decomposed by the matrices A_j in sums with summands irreducible over Q.

STEP 6. Since G is a finite group, $R(G)$ is completely reducible, and, owing to steps 1–5, the finding of the direct summands of the representation

$R(G)$ which are irreducible over Q is effective. Let $T(G)$, $T(G) \subseteq Q_n$, be a representation of G irreducible over Q. Let us describe the group of units $U(ZT(G))$ by using results of [7]–[9]. For $QT(G)$ there are three alternatives:

1) $QT(G) = Q_n$;

2) $QT(G) \cong F_k$, F is a field;

3) $QT(G) \cong T_k$, T is a non-commutative field.

The first alternative is realized if $T(G)$ is absolutely irreducible. The second and third alternatives are realized when $T(G)$ is irreducible over Q. Consider all the cases.

STEP 7. Let $T(G)$ be absolutely irreducible. We can assume that $T(G) \subset Z_n$, since G is finite [11]. Denote $ZT(G) = O$ for brevity. Let $m \in N$ be the minimum non-zero integer such that $me_{ij} \in O$, $i, j = 1, ..., n$. Here e_{ij} are matrix units, and $I = (m) \triangleleft Z$ is the ideal generated by m. We denote:

$$t_{ij}(\lambda) = E_n + \lambda e_{ij}, d(\lambda) = diag(1, ..., 1, \lambda);$$

$$\gamma_m : Z \longrightarrow Z/I = \bar{Z};$$

$$\psi_m : Z_n \longrightarrow \overline{Z_n};$$

$$\varphi_m : GL_n(Z) \longrightarrow GL_n(\bar{Z});$$

$$GL_n(Z, I) = ker\varphi_m;$$

$$SL_n(Z, I) = GL_n(Z, I) \cap SL_n(Z);$$

$$E_n(Z, I) = gr(t_{ij}(\lambda) | \lambda \in I, i, j = 1, ..., n);$$

$$U_0 = U(O) \cap GL_n(Z, I).$$

It is easy to see ([13]) that $U_0 = gr(t_{ij}(m) | i, j = 1, ..., n)$. As shown in [7], we can effectively find $g_1, ..., g_t \in O$ such that $O = \{g_1, ..., g_t\}_Z$. Denote $\bar{O} = \{\bar{g}_1, ..., \bar{g}_t\}_Z$, where $\bar{g}_i = \psi_m(g_i)$, $\overline{U(O)} = U(O)/U_0$. It is obvious that $\overline{U(O)} \subset U(\bar{O})$. The elements of $U(\bar{O})$ are easily determined. An algorithm has been constructed to select the elements of $\overline{U(O)}$ from these elements [7]. Let $\bar{u}_1, ..., \bar{u}_r$ be representatives of the cosets of the factor group $\overline{U(O)}$. Then it is clear that

$$U(ZT(G)) = gr(t_{ij}(m), d(-1), \bar{u}_1, ..., \bar{u}_r | i, j = 1, ..., n).$$

STEP 8. Let $T(G)$ be irreducible over Q and $QT(G) \cong F_k$, where F is a field. And in this case we can effectively find $g_1, ..., g_t \in O$ such that $O = \{g_1, ..., g_t\}_Z$ [8]. Denote $\Gamma = Hom_O(Q^n, Q^n)$. It follows from Schur's lemma that Γ is a division ring. If $|\Gamma : Q| = l$, then $\Gamma \cong \bar{\Gamma} \subset Q_l$ and $F = Hom_\Gamma(Q^l, Q^l)$. It has been proved (see [8]) that F is commutative if and only if Γ^* is a solvable - by - finite group. Recall that, according to Tits' alternative, Γ^* either is a solvable-by-finite group, or contains a free group of rank 2. It is well known that there exists such an element $f \in F$ that $F = \{E_l, f, ..., f^{l-1}\}_Q$ and $\Im = \{E_l, f, ..., f^{l-1}\}_Z$ is the maximum order. Moreover, we can find this element effectively. For details see [14]. The elements of O have a cellular structure at which a matrix of order n consists of k^2 cells of order l. Let e_{ij} denote a matrix from Q_n such that the cell with number ij $(i, j = 1, ..., n)$ is the unit matrix E_l from Q_l, and all the remaining cells are zero. Let $m \in N$ be the least nonzero integer such that $\forall i, j = 1, ..., k(me_{ij} \in O)$, $I = (mE_l) \triangleleft \Im$. Denote:

$$\gamma_m : \Im \longrightarrow \Im/I = \overline{\Im};$$

$$\psi_m : \Im_k \longrightarrow \overline{\Im}_k;$$

$$\varphi_m : GL_k(\Im) \longrightarrow GL_k(\overline{\Im});$$

$$U_0 = U(O) \cap ker\varphi_m$$

$$\overline{U(O)} = U(O)/U_0.$$

Let γ_m^* be the group homomorphism induced by γ_m on $U(\Im)$. To find the generators of $ker\gamma_m^*$, form the complete module $M = \{E_l, mf, ..., mf^{l-1}\}_Z$. Since M is an order, we can effectively find the generators of the group of units $U(M)$. Now we select the generators of $ker\gamma_m^*$ from the generators of $U(M)$ by comparing them with E_l modulo m. Assume that $ker\gamma_m^* = gr(\tau_1, ..., \tau_v)$ $\Im$ is a Dedekind-ring. Then (see [13])

$$ker(SL_k(\Im) \longrightarrow SL_k(\overline{\Im})) = gr(t_{ij}(mf))$$

Hence, in a similar way as above,

$$U_0 = gr(t_{ij}(mf), d(-E_l), d(\tau_1), ..., d(\tau_v), |i, j = 1, ..., k).$$

And in this case there also exists an algorithm to find the generators of $\overline{U(O)}$ [8]. Let $\bar{u}_1, ..., \bar{u}_r$ be representatives of the cosets of the factor group $U(O)/U_0$. Then

$$U(ZT(G)) = gr(t_{ij}(mf), d(-E_l), d(\tau_\nu), \bar{u}_1, ..., \bar{u}_r | i, j = 1, ..., k, \nu = 1, ..., v)$$

STEP 9. Let $T(G)$ be irreducible over Q and $QT(G) \cong T_k$, where T is a non-commutative field. Then $[T : Q] = d^2$ and there exist two subfields of T, $F = \{1, f, ..., f^{d-1}\}_Q$ and $H = \{1, h, ..., h^{d-1}\}_Q$, such that

$$1) T = \{f^i h^j | i, j = 0, ..., d-1\}\}_Q;$$

$$2) \exists \xi \in T | f = \xi^{-1} h \xi\}.$$

In a similar way as above, by virtue of irreducibility, there exists the non-zero minimum $m \in N$ such that $mT_k \subset O$. Denote $T_Z = \{f^i h^j | i, j = 0, ..., d-1|\}_Z$.

Let us generate the ideal $I = (mE_{d^2})$ in the ring T_Z. Denote

$$\gamma_m : T_Z \longrightarrow T_Z/I = \overline{T_Z};$$

$$\psi_m : (T_Z)_k \longrightarrow \overline{(T_Z)}_k;$$

$$\varphi_m : GL_k(T_Z) \longrightarrow GL_k(\overline{T_Z});$$

$$U_0 = U(O) \cap ker\varphi_m$$

$$\overline{U(O)} = U(O)/U_0$$

Let γ_m^* be the group homomorphism induced by γ_m on $U(T_Z)$. An algorithm to find the generators of $ker\gamma_m^* = gr(\tau_1, ..., \tau_q)$, U_0 and $\overline{U(O)}$ is described in [9]. Let $\bar{u}_1, ..., \bar{u}_r$ be representatives of the cosets of the factor group $\overline{U(O)}$. Then

$$U(ZT(G)) = gr(t_{ij}(mf), t_{ij}(mh), d(-E_{d^2}), d(\tau_\beta), \bar{u}_1, ..., \bar{u}_r |$$

$$i, j = 1, ..., k, \beta = 1, ..., q)$$

STEP 10. Now return to the regular representation $R(G)$. Similarly to [10], since we can find the generators of the groups of units for every cell irreducible over Q, we can also find the generators of $U(ZR(G))$. Since G is finite and $R(G)$ is a faithful representation, we have

$$ker(ZG \longrightarrow ZR(G)) = \{0\},$$

that is, $U(ZG) \cong U(ZR(G))$.

2 Implementation: problems and solutions

The practical background of this work is the implementation of the algorithm described as a computer program. Having such an instrument one may use it for finding the generators of group of units of the integer group ring for any particular group given. As a side-product one can obtain the table of characters of the group.

Now let's discuss the possibility of an implementation of the algorithm. Suppose that the group G given is somehow represented. The algorithm is described in terms of group's regular representation, so the first (or let's say the zero) step is the calculation of that representation. After we'll have to operate with matrices, rational numbers and qth roots of unity, so it would be convenient to use any program for symbolic calculations to implement the algorithm. We're going to use the MAPLE system for the implementation.

There're two main problems of the implementation: defining the orders of the irreducible non-equivalent representations of G (denoted as $z_1, \dots, z_s$) (STEP 2) and finding the table of characters (STEP 3). As follows from the description of STEP 3 these problems are connected: $z_1, \dots, z_s$ and $\chi_1, \dots, \chi_s$ are the values needed iff $w_i^{(j)} = \frac{h_i \chi_j^i}{z_j}$, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, s$ are the eigenvalues of the matrix $V_j = (c_{ijk})$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq k \leq s$ at any r $(1 \leq r \leq s)$. So the have to look through all the possible sets of values of z_i (the number of such sets is bounded due to conditions 1)–3) from the description of STEP 2) and all the possible values of the characters (they are also not arbitrary: any χ_j^i is some root of kind $\sqrt[q]{1}$ and the well known ortogonality conditions on them should be held [11]). Thus the process of determinating the necessary values is finite although may take time.

Our first aim is to build a program which uses simplified version of the algorithm for the symmetric groups with known tables of characters. Such a simplification makes the implementation of STEP 3 much more easy (we don't have to calculate the table of characters). Also in the case of symmetric group all the character's values are integer (see [16, Chap. 5]).

Let us note that even this cutted version of the program is of interest: symmetric groups are representative enough and tables of characters for plenty number of such groups can be found in [15].

References

[1] Goodaire E.G., Jespers E. and Parmenter M.M. Determining units in some integral group rings. Canad. Math. Bull. Vol.33(2), 1990, 242-246.

[2] Ritter J. and Sehgal S.K. Construction of units in integral group rings of finite nilpotent groups. Trans. Amer.Math. Soc. 324(1991), no2,603-621.

[3] Allen P.J. and Hobby C. A note on the unit group of ZS_3. Proc. A.M.S. 99(1) (1987),9-14.

[4] Hughers J. and Pearson K.R. The group of units of the integral group rings ZS_3. Canad. Math. Bull. 15 (1973), 529-534.

[5] Allen P.J. and Hobby C. A characterization of units in $Z[A_4]$. J.Algebra 66. (1980), 534-543.

[6] Aleev R.Ž. Units of character fields and central units of integral group rings of finite groups. Math. proc., vol.3 N1,(2000),3-37.

[7] Popova A.M. Group of units of absolutely irreducible matrix rings. Col. "Actual problems of modern mathematics", vol.3, Novosibirsk, 1997,152-159.

[8] Popova A.M. Multiplicative groups of finitely generated irreducible matrix rings. Fundamental and applied mathematics, vol.5, N3, 1999, 843-849.

[9] Popova A.M. A description of groups of units of irredusible matrix rings. Col. "Algebra and model theory", Novosibirsk, 1997, 152-159.

[10] Popova A.M. Groups of invertible elements of matrix rings. Siber. Math. J., 40(1999), N5, 1127-1136.

[11] Curtis C.W. and Reiner J. Representation theory of finite groups and associative algebras. Moscow, 1969, 668.

[12] Serre J.-P. Linear representations of finite groups. Moscow, 1970, 132.

[13] Bass H., Milnor J. and Serre J.-P. Solution of the congruence subgroup problem for $SL_n (n \geq 3)$ and $Sp_{2n} (n \geq 2)$,Publ. Math. N33 (1967), 59-137.

[14] Borevich Z.I. and Shafarevich I.R. Theory of numbers. Moscow, 1985, 503.

[15] Atlas of finite groups. Clarendon Press, Oxford, 1985, 252pp.

[16] Murnaghan F.D. The theory of group representations (in Russian). Moscow, 1950. 485pp.

Σ-ДОПУСТИМЫЕ СЕМЕЙСТВА В СТРУКТУРАХ ВИДА HYP($\mathfrak{M}$)

А.И. Стукачев

Новосибирский госуниверситет
630090,ул.Пирогова,2
e-mail: aistu@math.nsc.ru

Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество, то есть модель сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}} =$
$\{\varepsilon^2, U^1, \ldots\}$, удовлетворяющая системе аксиом Крипке-Платека KPU.
Элементы $\mathbb{A}$ делятся на два класса: праэлементы, выделяемые преди-
катом U, и множества. Случай, когда в качестве праэлементов берутся
элементы некоторой модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ, и $\sigma \subseteq \sigma_{\mathbb{A}}$, интересен тем,
что позволяет рассматривать обобщенную вычислимость над моделью
$\mathfrak{M}$. Наиболее важным в этом смысле является $HYP(\mathfrak{M})$ - наименьшее
допустимое множество, содержащее носитель $\mathfrak{M}$ как элемент. В частно-
сти, если $\mathbb{N} = \langle \omega, +, \cdot, s, 0 \rangle$ - стандартная модель арифметики, то для
произвольного $S \subseteq \omega$ имеем $S \in HYP(\mathbb{N}) \iff S \in \Delta^1_1$, т.е. $HYP(\mathbb{N})$
содержит как элементы те и только те подможества натуральных чисел,
которые являются гиперарифметическими.

Пусть $A, B \subseteq \omega$. Отношение сводимости $\leqslant_h$ определяется следующим
образом: $A \leqslant_h B$, если $A \in \Delta^{1,B}_1$ (или, что то же самое, $A \in HYP(\mathbb{N}, B)$).

Теорема 1 (Spector) $\forall A, B \in \Pi^1_1 \setminus \Delta^1_1 \ A \equiv_h B$.

Пусть теперь $A, B \subseteq HYP(\mathbb{N})$. Отношение сводимости $\leqslant_w$ определя-
ется так: $A \leqslant_w B$, если в $HYP(\mathbb{N})$ существуют Σ-формулы Φ и Ψ такие,
что для любого $x \in HYP(\mathbb{N})$ верно

$$x \in A \Leftrightarrow (\exists b, b' \in HYP(\mathbb{N}))(b \subseteq B \wedge b' \subseteq \overline{B} \wedge HYP(\mathbb{N}) \models \Phi(x, b, b'))$$

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow (\exists b, b' \in HYP(\mathfrak{M}))(b \subseteq B \wedge b' \subseteq \overline{B} \wedge HYP(\mathbb{N}) \models \Psi(x, b, b')).$$

Теорема 2 (Sacks) $\exists A, B \in \Pi^1_1 \setminus \Delta^1_1 \ (A \nleqslant_w B)$.

Для произвольного допустимого множества $\mathbb{A}$ независимо Ершовым и
Адамсоном были введены и изучались семейства подмножеств A с опре-
деленным свойством Σ-допустимости ($+$-допустимости в терминологии
Адамсона [5]). Непосредственным обобщением понятия Σ-допустимого
семейства является понятие Σ-регулярного семейства из [7]

Определение 1 *Пусть $\mathbb{A}$ - допустимое множество, $P_1, \ldots, P_n \subseteq A$. Конечное семейство $\{P_1, \ldots, P_n\}$ называется Σ-регулярным, если для любой $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$-позитивной Σ-формулы $\Phi(x)$ сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}} \cup \{\bar{\mathrm{P}}\}$ и любого набора a из A верно следующее: если $\langle \mathbb{A}, P_1, \ldots, P_n \rangle \models \Phi(\bar{a})$, то существуют $\pi_1, \ldots, \pi_n \in A$ такие, что $\pi_1 \subseteq P_1, \ldots, \pi_n \subseteq P_n$ и $\mathbb{A} \models \Phi^{P_1, \ldots, P_n}_{\pi_1, \ldots, \pi_n}(a)$ (последняя запись означает, что в формуле Φ все вхождения атомарных подформул вида $\mathrm{P}_i(t)$ заменяются на подформулы $t \in \pi_i$).*

Если одноэлементное семейство $\{P\}$ Σ-регулярно, то P называется Σ_*-множеством. Класс $\Sigma_*(\mathbb{A})$ всех Σ_*-множеста в $\mathbb{A}$ является естественным расширением класса $\Sigma(\mathbb{A})$ всех Σ-подмножеств (см.[1, 6]). Выделим теперь еще один важный частный случай этого понятия.

Определение 2 *Подмножество $P \subseteq A$ называется Δ_*-множеством, если $\{P, A \setminus P\}$ — Σ-регулярная пара в $\mathbb{A}$.*

Для допустимого множества $\mathbb{A}$ через $\Sigma(\mathbb{A}), \Delta(\mathbb{A})$ и $\Delta_*(\mathbb{A})$ будем обозначать классы подмножеств A, являющихся соответственно Σ-, Δ- и Δ_*-множествами в $\mathbb{A}$. В случае, когда $\mathbb{A}$ имеет вид $HF(\mathfrak{M})$ для некоторой системы $\mathfrak{M}$, любое подмножество $P \subseteq A$ будет Σ_*-множеством в $\mathbb{A}$ (см.[1]), поэтому всякое Σ-подмножество будет Δ_*-множеством. Таким образом, для этого случая справедливо соотношение $\Sigma(\mathbb{A}) \subseteq \Delta_*(\mathbb{A})$. Следующая теорема дает пример допустимого множества, для которого это не так.

Теорема 3 *Для $\mathbb{A} = HYP(\mathbb{N})$ справедливо $\Sigma(\mathbb{A}) \cap \Delta_*(\mathbb{A}) = \Delta(\mathbb{A})$.*

Для доказательства этой теоремы сделаем предварительно несколько замечаний. Определим на подмножествах $HYP(\mathbb{N})$ отношение $\leqslant_H$ следующим образом: для $A, B \subseteq HYP(\mathbb{N})$ верно $A \leqslant_H B$, если $p(A) \leqslant_h p(B)$, где $p : HYP(\mathbb{N}) \to \omega$ — некоторое вычислимое проектирующее отображение (см.[3]). Тогда для $A, B \subseteq \omega$ имеем $A \leqslant_H B \iff A \leqslant_h B$. Легко убедиться, что $A \leqslant_H B$ равносильно условию $A \in HYP(\mathbb{N}, p(B))$.

Лемма 1 $\forall A, B \subseteq HYP(\mathbb{N})$ $A, B \in \Sigma \setminus \Delta$ *в* $HYP(\mathbb{N}) \Rightarrow A \equiv_H B$.

Доказательство Если $A, B \in \Sigma \setminus \Delta$ в $HYP(\mathbb{N})$, то $p(A), p(B) \in \Pi^1_1 \setminus \Delta^1_1$, поэтому $p(A) \equiv_h p(B)$ по теореме Спектора. $\square$

Лемма 2 *Если B — Δ_*-множество в $HYP(\mathbb{N})$, то для любого подмножества $A \subseteq HYP(\mathbb{N})$ верно $A \leqslant_H B \Leftrightarrow A \leqslant_w B$.*

Доказательство Импликация справо налево очевидно верна для любых A и B. Пусть $A \leqslant_H B$, что по определению означает, что $p(A) \in \Delta_1^{1,p(B)}$. Вследствие этого, так как p — Δ-функция в $HYP(\mathbb{N})$, существуют Σ-формулы Φ и Ψ в сигнатуре, расширенной одноместным предикатом P, такие, что для любого $x \in HYP(\mathbb{N})$

$$x \in A \iff \langle HYP(\mathbb{N}), B\rangle \models \Phi(x),\ x \notin A \iff \langle HYP(\mathbb{N}), B\rangle \models \Psi(x).$$

Так как B является Δ_*-подмножеством в $HYP(\mathfrak{N})$, то

$$x \in A \iff \exists \pi \subseteq B \exists \pi' \subseteq \overline{B}\ HYP(\mathbb{N}) \models \Phi_{\pi,\pi'}^{P,\neg P}(x),$$

$$x \notin A \iff \exists \pi \subseteq B \exists \pi' \subseteq \overline{B}\ HYP(\mathbb{N}) \models \Psi_{\pi,\pi'}^{P,\neg P}(x)$$

для любого $x \in HYP(\mathbb{N})$, то есть $A \leqslant_w B$. □

Доказательство [**Доказательство теоремы**] От противного, допустим, что существует C — Δ_*-подмножество в $HYP(\mathbb{N})$, такое, что $C \in \Sigma \setminus \Delta$. Покажем, что тогда $\Sigma \subseteq \Delta_*$. Действительно, $\forall B \in \Sigma$ имеем $B \leqslant_H C$, а значит и $\overline{B} \leqslant_H \overline{C}$, откуда, в обозначениях [7], $\{B, \overline{B}\} \leqslant_\Sigma \{C, \overline{C}\}$. Поэтому из Σ-регулярности пары $\{C, \overline{C}\}$ следует Σ-регулярность пары $\{B, \overline{B}\}$, то есть $B \in \Delta_*$.

По лемме 1, $\forall A, B \in \Sigma \setminus \Delta\ A \equiv_H B$, поэтому, по лемме 2, из условия $\Sigma \subseteq \Delta_*$ следует, что $\forall A, B \in \Sigma \setminus \Delta\ A \equiv_w B$. Последнее противоречит результату Сакса о существовании $\Pi_1^1 \setminus \Delta_1^1$-множеств $A, B \subseteq \omega$ таких, что $A \nleqslant_w B$. □

Если через $\Sigma(\mathfrak{M}), \Delta(\mathfrak{M})$ и $\Delta_*(\mathfrak{M})$ обозначить классы отношений на $\mathfrak{M}$, являющихся соответственно Σ-, Δ- и Δ_*-множествами в допустимом множестве $HYP(\mathfrak{M})$, то из принципа Δ-выделения (см.[1]) непосредственно следует, что $\Sigma(\mathfrak{M}) \cap \Delta_*(\mathfrak{M}) = \Delta(\mathfrak{M})$. Поэтому, в общем случае, в $HYP(\mathfrak{M})$ далеко не всякое Σ-отношение на $\mathfrak{M}$ будет Δ_*-множеством. Однако существует класс моделей, для которых $HYP(\mathfrak{M})$ устроен почти так же "просто", как и $HF(\mathfrak{M})$.

Лемма 3 *Если* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *ω-категорична, то* $\Sigma(\mathfrak{M}) = \Delta(\mathfrak{M})$.

Доказательство Действительно, если $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ ω-категорична, то $\mathfrak{M}$ рекурсивно насыщена (так как, по теореме Рыль-Нардзевского, всякая бесконечная конъюнкция формул сигнатуры σ эквивалентна в $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ некоторой конечной своей части). Известно (см. [7]), что для рекурсивно насыщенной системы $\mathfrak{M}$ элементами допустимого множества $HYP(\mathfrak{M})$ являются элементы наследственно конечной надстройки $HF(\mathcal{D}(\mathfrak{M}))$, где $\mathcal{D}(\mathfrak{M})$ — множество всех определимых отношений на $\mathfrak{M}$. Поэтому всякое отношение на $\mathfrak{M}$, являющееся Σ-множеством в $HYP(\mathfrak{M})$, определяется в $\mathfrak{M}$ (вычислимой) бесконечной $L_{\omega_1\omega}$-формулой сигнатуры σ (доказательство этого факта аналогично доказательству соответствующего утверждения для $HF(\mathfrak{M})$, единственной особенностью здесь являются ограниченные кванторы вида $\exists \bar{x} \in D$ и $\forall \bar{x} \in D$, где $D \subseteq M^n$ — определимое отношение). По теореме Рыль-Нардзевского, для ω-категоричной теории любые бесконечные конъюнкции и дизъюнкции формул сигнатуры σ эквивалентны конечным формулам, поэтому в модели $\mathfrak{M}$ выразительные возможности языков $L_{\omega_1\omega}$ и $L_{\omega\omega}$ совпадают. Таким образом, в $HYP(\mathfrak{M})$ всякое Σ-отношение на $\mathfrak{M}$ определимо формулой сигнатуры σ, поэтому очевидно является Δ-отношением. □

Теорема 4 *Если* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *ω-категорична, то для допустимого множества* $\mathbb{A} = HYP(\mathfrak{M})$ *имеет место соотношение* $\Sigma(\mathbb{A}) \subseteq \Delta_*(\mathbb{A})$.

Доказательство Пусть $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ ω-категорична, и пусть $P \subseteq HYP(\mathfrak{M})$ Δ_*-множество. Поскольку P — Σ-множество, это эквивалентно тому, что в $\langle HYP(\mathfrak{M}), \overline{P}\rangle$ выполняется импликация

$$(\forall x \in a)(\exists \pi \subseteq \overline{P})\Phi_\pi^Q(x) \to (\exists \pi \subseteq \overline{P})(\forall x \in a)\Phi_\pi^Q(x)$$

для любой Q-позитивной Σ-формулы Φ и любого $\in HYP(\mathfrak{M})$. Так как $a \in HF(\mathcal{D}(\mathfrak{M}))$, то число элементов в a бесконечно лишь в случае, когда $a = D$ для некоторого определимого подмножества $D \subseteq M^n$. Пусть D определяется в $\mathfrak{M}$ формулой с параметрами $\psi(\bar{x}, \bar{c})$. Условие $(\forall \bar{x} \in D)(\exists \pi \subseteq \overline{P})\Phi_\pi^Q(\bar{x})$ ввиду Π-определимости множества $\overline{P}$ эквивалентно некоторой $L_{\omega_1\omega}$-формуле сигнатуры σ, поэтому, в силу теоремы Рыль-Нардзевского, его выполнимость в $HYP(\mathfrak{M})$ эквивалентна выполнимости в $\mathfrak{M}$ некоторой формулы $\forall \bar{x}(\psi(\bar{x}, \bar{c}) \to \varphi(\bar{x}, \bar{e}))$ сигнатуры σ с параметрами из $\mathfrak{M}$. Вследствие ω-категоричности формула $\psi(\bar{x}, \bar{c})$ эквивалентна в $\mathfrak{M}$ дизъюнкции $\theta_1(\bar{x}, \bar{c}, \bar{e}) \vee \ldots \vee \theta_k(\bar{x}, \bar{c}, \bar{e})$ главных формул. Поэтому, если наборы $\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_k \in M^n$ таковы, что $\mathfrak{M} \models \theta_1(\bar{s}_1, \bar{c}, \bar{e}) \wedge \ldots \wedge \theta_k(\bar{s}_k, \bar{c}, \bar{e})$, то $\mathfrak{M} \models \forall \bar{x}(\psi(\bar{x}, \bar{c}) \to \varphi(\bar{x}, \bar{e}))$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{s}_1, \bar{e}) \wedge \ldots \wedge \varphi(\bar{s}_k, \bar{e})$. Таким образом, $HYP(\mathfrak{M}) \models (\forall x \in D)(\exists \pi \subseteq \overline{P})\Phi_\pi^Q(\bar{x})$ тогда и только тогда, когда существуют $\pi_1 \subseteq \overline{P}, \ldots, \pi_k \subseteq \overline{P}$, для которых $HYP(\mathfrak{M}) \models \Phi_{\pi_1}^Q(\bar{s}_1) \wedge \ldots \wedge \Phi_{\pi_k}^Q(\bar{s}_k)$. Вследствие Q-позитивности формулы Φ для элемента $\pi = \pi_1 \cup \ldots \cup \pi_k$ имеем $HYP(\mathfrak{M}) \models (\forall \bar{x} \in D)\Phi_\pi^Q(\bar{x})$. □

Список литературы

[1] *Ю.Л.Ершов*, Определимость и вычислимость, Новосибирск, Научная книга, 1996.

[2] *G.E.Sacks*, Higher recursion theory, Berlin, 1990.

[3] *J.Barwise*, Admissible sets and structures, Berlin, 1975.

[4] *Y.N.Moschovakis*, Elementary induction on abstract structures, North-Holland, 1974.

[5] *A.Adamson*, Admissible sets and the saturation of structures, Ann.Math.Logic, **14**, N 2, 111 - 157, (1978).

[6] *Ю.Л.Ершов*, Σ-допустимые множества, в сб."Логические вопросы теории типов данных", (Вычислительные системы, **114**), Новосибирск, Ин-т м тем. СО РАН, 1986, 35 - 39.

[7] *А.И.Стукачев*, Σ-допустимые семейства над линейными порядками, (Алгебра и логика, принято к печати).

CLOSED SETS OF SIDE-ANGLE MATRIXES AND CORRESPONDENT GEOMETRICAL STRUCTURES

S.V. Sudoplatov*

Novosibirsk State Technical University,
RUSSIA
e-mail: algebra@nstu.ru

As shown in [1–3] the class of group polygonometries includes classical trigonometrics and allowes to model the main structural properties of stable theories having a finite number of countable models.

In this paper we present a generalization of the notion of group polygonometry, show that any closed set of side-angle matrices can be realized in some generalized group polygonometry and define the class **K** of graphs such that

1) any graph from **K** contains a generalized group polygonometry;

2) **K** contains graphs playing the fundamental role for the constructions of complete theories having a finite number of countable models.

We shall use the terminology of [1].

Let G_1 and G_2 be some groups. By *side-angle matrix* or SA-*matrix* (over the pair (G_1, G_2)) we mean any matrix $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$, where $a_i \in G_1 \cup \{\infty\}$, $\alpha_i \in G_2 \cup \{\infty\}$, $i = 1, \dots, n$, $n \geq 3$. The set $\mathbf{S}$ of some SA-matrices is said to be *closed*, if the following conditions are satisfied:

1) $\Delta_e(G_1, G_2) \subseteq \mathbf{S}$ (see [1]);

2) if some element of first row of a matrix from $\mathbf{S}$ is equal to ∞, then $\mathbf{S}$ contains $\begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty \\ e & e & e \end{pmatrix}$ and all matrices of form $\begin{pmatrix} \infty & g_1 & \infty \\ e & e & e \end{pmatrix}$, $g_1 \in G_1$;

3) if some element of second row of a matrix from $\mathbf{S}$ is equal to ∞, then $\mathbf{S}$ contains $\begin{pmatrix} e & e & e \\ \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$ and all matrices of form $\begin{pmatrix} e & e & e \\ \infty & g_2 & \infty \end{pmatrix}$, $g_2 \in G_2$;

4) for any $S \in \mathbf{S}$ the set $\mathbf{S}$ containes cyclic permutations and turns of S, and it is closed under joinings of matrices where values of $\alpha \cdot \infty$ and

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Researches (the code of project 99-01-00571).

$\infty \cdot \alpha$ are equal to ∞, $\infty^{-1} = \infty$ and values of $\infty \cdot \infty$ can be arbitrary from $G_1 \cup G_2 \cup \{\infty\}$.

By a *generalized polygonometry* $\mathrm{gpm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ of group pair (G_1, G_2) on a system $\mathcal{P} = \langle P, L, \in \rangle$ containing the *set of points* P and the *set of lines* L (where any line is a subset of P) we mean an algebraic system

$$\mathcal{M} = \langle P, \langle Q^{(2)}_{g_1} \mid g_1 \in G_1 \rangle, \langle R^{(3)}_{g_2} \mid g_2 \in G_2 \rangle \rangle,$$

containing nonempty relations Q_{g_1}, $g_1 \in G_1$, and R_{g_2}, $g_2 \in G_2$, and satisfying the following conditions:

a) $\mathcal{M} \models \forall x\, R_e(x, x, x)$ and ($\mathcal{M} \models R_e(a, b, c) \Leftrightarrow$ elements a, b and c are collinear);

b) if $\mathcal{M} \models Q_{g_1}(a, b)$, then elements a and b belong to a common line;

c) if $\mathcal{M} \models R_{g_2}(a, b, c)$, then there is a line l_1, containing elements a and b, and there is a line l_2, containing elements b and c;

d) $\mathcal{M} \models (R_e(a, b, c) \wedge Q_{g_1}(a, b) \wedge Q_{g'_1}(b, c)) \to (Q_{g_1 \cdot g'_1}(a, c) \wedge Q_{g_1^{-1}}(b, a))$;

e) $\mathcal{M} \models (R_{g_2}(a, b, c) \wedge R_{g'_2}(c, b, d)) \to (R_{g_2 \cdot g'_2}(a, b, d) \wedge R_{g_2^{-1}}(c, b, a))$;

f) if p_1 and p_2 are points belonging to lines l_1 and l_2 accordingly, then there exists an automorphism $f \in \mathrm{Aut}\mathcal{M}$ such that $f(p_1) = p_2$ and $f(l_1) = l_2$.

Obviously, homogeneous models of theories of group pair polygonometries [1] are generalized polygonometries. Group pair polygonometries with symmetrical conditions [4] also can be considered as generalized polygonometries.

Let $S = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ be a *polygon* of generalized polygonometry $\mathrm{gpm} = \mathrm{gpm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$, i.e. a sequence of points, for which there are lines $l(p_i, p_{i+1}) \ni p_i, p_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, and $l(p_n, p_1) \ni p_n, p_1$. Define parameters of *sides* $p_i\hat{\ }p_{i+1}$ and $p_n\hat{\ }p_1$ of polygon S as elements a_i of *side group* G_1 such that $\models Q_{a_i}(p_i, p_{i+1})$, $i = 1, \ldots, n-1$, and $\models Q_{a_n}(p_n, p_1)$. Here if the pair (p_i, p_{i+1}) (or (p_n, p_1)) doesn't belong to the relation $\bigcup\limits_{g_1 \in G_1} Q_{g_1}$, we set $a_i \rightleftharpoons \infty$ ($a_n \rightleftharpoons \infty$). Accordingly we define parameters of *angles* $l(p_{i-1}, p_i)\hat{\ }l(p_i, p_{i+1})$, $i = 2, \ldots, n-1$, $l(p_{n-1}, p_n)\hat{\ }l(p_n, p_1)$ and $l(p_n, p_1)\hat{\ }l(p_1, p_2)$ in S as elements α_i of *angle group* G_2 such that $\models R_{\alpha_{i-1}}(p_{i-1}, p_i, p_{i+1})$, $i = 2, \ldots, n-1$, $\models R_{\alpha_{n-1}}(p_{n-1}, p_n, p_1)$ and $\models R_{\alpha_n}(p_n, p_1, p_2)$. Here if a sequential 3-tuple of points doesn't belong to the relation $\bigcup\limits_{g_2 \in G_2} R_{g_2}$, then according element α_i is equal to ∞. Thus the parameters of polygon S are defined by SA-matrices of form $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Denote by $\mathbf{S}(\mathrm{gpm})$ the set of all SA-matrices correspondent to polygons from gpm.

It's easy to see that any set $\mathbf{S}(\mathrm{gpm})$ is closed. On the other hand we have the following theorem.

Theorem 1. *For any closed set of* SA-*matrices* $\mathbf{S}$ *over group pair* (G_1, G_2) *there exists a generalized polygonometry* $\mathrm{gpm} = \mathrm{gpm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ *such that* $\mathbf{S}(\mathrm{gpm}) = \mathbf{S}$.

Proof. Let $\mathbf{S}$ be a closed set of side-angle matrices over (G_1, G_2). Denote by $\mathrm{St}_p(\mathbf{S})$ the set

$$\left\{ g_1 \in G_1 \;\middle|\; \begin{pmatrix} e & g_1 & e \\ e & e & e \end{pmatrix} \in \mathbf{S} \right\}.$$

It's easy to check that $\mathrm{St}_p(\mathbf{S})$ is a normal subgroup of G_1. Analogously the set

$$\mathrm{St}_l(\mathbf{S}) \rightleftharpoons \left\{ g_2 \in G_2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} e & e & e \\ e & g_2 & e \end{pmatrix} \in \mathbf{S} \right\}$$

is a normal subgroup of G_2. By the definition of $\mathbf{S}$ we can consider the groups $\mathrm{St}_p(\mathbf{S})$ and $\mathrm{St}_l(\mathbf{S})$ accordingly as stabilizers of points on a line and as stabilizers of lines containing a point.

Denoting $G_1/\mathrm{St}_p(\mathbf{S})$ by G'_1 and $G_2/\mathrm{St}_l(\mathbf{S})$ by G'_2 and replacing in matrices from $\mathbf{S}$ side parameters a_i by $a_i \cdot \mathrm{St}_p(\mathbf{S})$ and angle parameters α_i by $\alpha_i \cdot \mathrm{St}_l(\mathbf{S})$ we get the set of side-angle matrices $\mathbf{S}' = \mathbf{S}/(\mathrm{St}_p(\mathbf{S}), \mathrm{St}_l(\mathbf{S}))$ over the pair (G'_1, G'_2).

It's easy to see that any matrix $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbf{S}'$ is uniquely defined by any its $(2n-2)$ defining parameters from $G_1 \cup G_2$. Moreover the set $\mathbf{S}''$ consisting of all matrices from $\mathbf{S}'$ having only parameters from $G_1 \cup G_2$ is a polygonometrical set.

Now for any $S \in \mathbf{S}' \setminus \mathbf{S}''$ consider a free group pair (F^1_S, F^2_S) with free generators g^i_j, $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, \ldots, k_i\}$, bijective to infinite entries to S: $F^1_S = \langle g^1_1, \ldots, g^1_{k_1} \rangle$, $F^2_S = \langle g^2_1, \ldots, g^2_{k_2} \rangle$. Denote by $\overline{S}$ matrices obtained from S by substitutions of elements g^i_j instead of according infinite parameters. Denote by $\overline{G}_i$ the group $G_i * *_S F^i_S$, $i = 1, 2$. Let $\overline{\mathbf{S}}$ be a polygonometrical set

$$GN\left(\mathbf{S}'' \cup \{\overline{S} \mid S \in \mathbf{S}' \setminus \mathbf{S}''\} \cup \Delta_e(\overline{G}_1, \overline{G}_2)\right),$$

$\mathrm{pm} = \mathrm{pm}(\overline{G}_1, \overline{G}_2, \langle P, L, \in \rangle)$ be a connected polygonometry with $\mathbf{S}(\mathrm{pm}) = \overline{S} \setminus \mathbf{S}^e(\overline{G}_1, \overline{G}_2)$.

Now let g_1 be an arbitrary element of G_1. Denote by Q_{g_1} the set

$$\{\langle p, p' \rangle \in P^2 \mid p' = p \cdot (g_1 \mathrm{St}_p(\mathbf{S})) \text{ on some line}\}.$$

Analogously if $g_2 \in G_2$ we denote by R_{g_2} the set of all 3-tuples $\langle p, p'', p' \rangle \in P^3$ such that p and p'' belong to a line l, p'' and p' belong to a line l' and $l' = l \cdot (g_2 \mathrm{St}_l(\mathbf{S}))$ on the set of lines containing p''.

One can see that the set $\mathbf{S}(\mathrm{gpm})$ (where $\mathrm{gpm} = \langle P, Q_{g_1}, R_{g_2}\rangle_{g_1\in G_1, g_2\in G_2}$) is equal to the given set $\mathbf{S}$. □

Denote by $\mathbf{K}$ the class of all graphs $\Gamma = \langle P, Q\rangle$ satisfying the following conditions:

1) for any $(a,b), (a',b') \in Q$ there is an automorphism $f \in \mathrm{Aut}\Gamma$ such that $f(a) = a'$, $f(b) = b'$;

2) $\Gamma \models \forall x, y\, (Q(x,y) \to \exists z\, (Q(z,x) \wedge Q(z,y)))$.

We are going to show that any graph from $\mathbf{K}$ can be considered as a generalized polygonometry of pair $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$.

Let Γ be a graph from the class $\mathbf{K}$. We shall say that P is the *set of points* (of Γ), $L \rightleftharpoons \{Q(a,\Gamma) \mid a \in P\}$ is the *set of lines* (of Γ). Thus we define a relation R_0 of collinearity as the set

$$\left\{(a,b,c) \in P^3 \mid \Gamma \models \exists x\, (Q(x,a) \wedge Q(x,b) \wedge Q(x,c))\right\}.$$

Denote by Q^0_0 the set id_P, by Q^0_1 the relation Q, by Q^0_{n+1} $(n \geq 1)$ the set

$$\left\{(a,b) \in P^2 \mid \Gamma \models \exists x\, (Q^0_n(a,x) \wedge Q(x,b) \wedge R_0(a,x,b))\right\},$$

by Q^0_{-n} $(n \in \omega)$ the relation $(Q^0_n)^{-1}$, by Q_n $(n \in \mathbf{Z})$ the least relation containing Q^0_n and satisfying the condition d. Denote by R_n $(n \in \mathbf{Z})$ the set

$$\left\{(a,b,c) \subset P^3 \mid \Gamma \models Q(b,a) \wedge Q(b,c) \wedge Q_n(a,c)\right\}.$$

Now we see that all axioms of generalized polygonometries are true for the system $\langle P, Q_n, R_n\rangle_{n\in\mathbf{Z}}$. Thus we have the following theorem.

Theorem 2. *Any graph $\Gamma = \langle P, Q\rangle$ from the class $\mathbf{K}$ contains a generalized polygonometry $\langle P, Q_n, R_n\rangle_{n\in\mathbf{Z}}$.*

Corollary. *Any complete graph and the countable graph of dense linear order without end points contain structures of generalized polygonometries of group pair $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$.*

Using an acyclic stable graph from the class $\mathbf{K}$ and satisfying the global projectivity property (see [5]) the author solved the known problem on the existence of stable theory having a finite number of countable models:

Theorem 3 [6]. *For any natural number $n \geq 3$ there is a stable theory T having exactly n pairwise nonisomorphic countable models.*

Group polygonometries and group polygonometries with symmetrical conditions can be easily characterized up to isomorphism (see [1, theorem 3.2] and [4, theorem 2.2]). The problem of analogous characterization for generalized polygonometries is open and seems to be difficult enough.

1. *Sudoplatov S. V.* Group polygonometries and related algebraic systems (an informative survey) // Contributions to General Algebra 11. Klagenfurt: Verlag Johannes Heyn, 1999. P. 191–210.
2. *Sudoplatov S. V.* ω-Stable trigonometries on a projective plane. — Preprint, 2001. (passed to "Matematicheskie trudy", in russian)
3. *Sudoplatov S. V.* Small stable trigonometries with infinite weight. — Preprint, 2001. (passed to "Matematicheskie trudy", in russian)
4. *Sudoplatov S. V.* Group polygonometries with symmetrical conditions // Algebra and Model Theory 2 (Edited by A. G. Pinus and K. N. Ponomaryov). Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University, 1997. P. 140–159.
5. *Sudoplatov S. V.* Stable theories with a finite number of countable models. I. — Preprint, 2001. (passed to "Algebra and Logic", in russian)
6. *Sudoplatov S. V.* Stable theories with a finite number of countable models. II. — Preprint, 2001. (passed to "Algebra and Logic", in russian)

NON-UNIFORMLY WEAKLY O-MINIMAL GROUP

Viktor V. Verbovskiy*

Institute of Problems of Informatics and Control
Ministry of Education and Science
Ul. Pushkina 125
Almaty 480100
Kazakhstan
e-mail: vvver@mail.ru

Definition 1 (Dickmann [1]) A *weakly o-minimal* structure is a totally ordered structure $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ such that any definable subset of M is a finite union of convex disjoint sets under the ordering $<$.

A theory is *weakly o-minimal* if all its models are.

A weakly o-minimal structure is *non-uniformly weakly o-minimal*, if its elementary theory is not weakly o-minimal.

Fact 2 [2] *A weakly o-minimal ordered group is abelian and divisible.*

We will construct our counterexample by the following way. First we take an abelian ordered divisible group whose archimedian classes densely ordered without end points. We consider the elementary theory of this structure in the language $\{<, +, -, E, 0\}$, where E is an equivalence relation with archimedian classes as E-classes, and prove that this theory admits quantifier elimination and weakly o-minimal. Let G be a countable model of this theory. Then we take an arbitrary countable weakly o-minimal structure, say $(M, \mathcal{L})$, with dense order without end points. As orders of M and G^+/E are isomorphic, we may define all relations of M in G^+/E such that $(M, \mathcal{L}) \cong (G^+/E, \mathcal{L})$. Consider $(G^+, \mathcal{L}, E)$, where $G^+ \models P(x_1, \dots, x_n)$ iff $G^+/E \models P([x_1]_E, \dots, [x_n]_E)$ for any $P \in \mathcal{L} \setminus \{=, <, E\}$. Clearly, this structure is weakly o-minimal. We may assume that the elementary theory of this structure admits quantifier elimination. Then we prove that the elementary theory of $M^+ = (G, \mathcal{L}, E, +, -, 0)$ admits quantifier elimination and weakly o-minimal. If $(M, \mathcal{L})$ is non-uniformly weakly o-minimal, then so is M^+.

*The research described in this publication was made possible in part by Award No. KM2-2246 of the U.S. Civilian Research & Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF).

So the problem is reduct to existence of a non-uniformly weakly o-minimal structure, which was announced in the preprint version of [2] in 1993, and was proved in the revision version of this paper in 1998, also one can find examples in [3].

Proposition 3 *Let T_E be a theory in the language $\mathcal{L}_E = \{<, E, +, -, 0\}$ with the following set of axioms:*

1. the axioms for a linearly ordered abelian divisible group;

2. E is an equivalence relation with convex classes;

3. order induced on E-classes is dense without end points;

4. $x \le y \le nx \to E(x, y)$, for any $n < \omega$;

5. $E(x, 0) \to x = 0$.

Then T_E admits quantifier elimination.

Proof. First, claim that any term in variables $x_1, \dots, x_n$ is equal to $k_1 x_1 + \dots + k_n x_n$, where $k_i \in \mathbb{Z}$. Second we consider how we can reduct $E(t_1, t_2)$, where t_1, t_2 are terms, to a more simple form. Let x be a variable, and u, v terms.

$$
\begin{aligned}
E(x+u, x) &\leftrightarrow E(x, u) \vee [\neg E(x, u) \wedge |u| < |x| \wedge \neg E(x, -u)] \vee \\
&\qquad [E(x, -u) \wedge |u| < |x| \wedge E(x+u, -u)]; \\
E(x+u, -x) &\leftrightarrow |u| > |x| \wedge E(x, -u) \wedge E(x+u, u); \\
E(x+u, v) &\leftrightarrow [E(x+u, u) \wedge E(u, v)] \vee [E(x+u, x) \wedge E(x, v)] \vee \\
&\qquad [\neg E(x+u, u) \wedge \neg E(x+u, x) \wedge E(x, -u) \wedge E(x+u, v)];
\end{aligned}
$$

Denote

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(x, u) &:= E(x, -u) \wedge E(x+u, u); \\
\Phi_2(x, u) &:= E(x, -u) \wedge E(x+u, -u); \\
\Psi_1(x, u, v) &:= E(x, -u) \wedge \neg E(x+u, u) \wedge \neg E(|v|, |u|) \wedge E(x+u, v).
\end{aligned}
$$

Consider now $E(x+u, x+v)$. We twice apply the last identity from above to obtain the following.

$$\begin{aligned}
E(x+u,x+v) \leftrightarrow\ & [E(x+u,u)\wedge E(x+v,v)\wedge E(u,v)]\vee\\
& [E(x+u,u)\wedge E(x+v,x)\wedge E(u,x)]\vee\\
& [E(x+u,u)\wedge \neg E(x+v,v)\wedge \neg E(x+v,x)\wedge E(u,x+v)]\vee\\
& [E(x+u,x)\wedge E(x+v,x)]\vee\\
& [\neg E(x+u,x)\wedge \neg E(x+u,u)\wedge E(x+v,v)\wedge E(x+u,v)]\vee\\
& [\neg E(x+u,x)\wedge \neg E(x+u,u)\wedge E(x+v,x)\wedge E(x+u,x)]\vee\\
& [\neg E(x+u,x)\wedge \neg E(x+u,u)\wedge \neg E(x+v,v)\wedge \neg E(x+v,x)\wedge\\
& \qquad \wedge E(x+u,x+v)]
\end{aligned}$$

Denote the last disjunct by $\Theta(x,u,v)$. Claim that 3-d, 5-th and 6-th disjuncts are inconsisntent. Consider 3-d disjunct. We have that $E(x,-v)$ and then $\forall t(E(|x|,t)\to |u|<t)$. Consequently $E(x+u,x)\wedge\neg E(x+u,u)$, this is inconsist with $E(x+u,u)$. Disjuncts 5-th and 6-th are considered analogiously. Now we reduct Θ. To simplify notation denote $E_1(x,y):=E(x,y)\wedge\neg E(|x|,|y-x|)$. Clearly it is an equivalence relation.

$$\begin{aligned}
\Theta(x,u,v)\wedge 0<u<v \leftrightarrow\ & E_1(x,-u)\wedge E_1(u,v)\wedge\\
& [(-x<u\wedge[v-u<u+x<u\vee E(v-u,x+v)])\vee\\
& (v<-x\wedge[v-u<-v-x<u\vee E(v-u,-x-v)])]
\end{aligned}$$

Indeed, $u+x$ and $v+x$ must be of the same sign, so $-x$ cannot belong to $[u,v]$. Let $-x<u$. We have that $x+u<x+v=(x+u)+(v-u)$ and then $E(x+u,x+u+(v-u))$, so we obtain $E(x+u,v-u)$ or $v-u<x+u$. Case $v<-x$ is similar. Also cases $0<v<u$, $u<v<0$, $v<u<0$ are similar.

Case $E(x+u,-x+v)$ is very similar. When we reduct the last conjunct Θ in this situation, the cases will be following: $0<-u<v$, $0<v<-u$, $0<-v<u$, and $0<u<-v$.

Thus we can express $E(x+u,\pm x+v)$ by a disjunction of conjunctions of formulas of the form $x<u$, $u<x$, $E(x,u)$, Φ_1, Φ_2, Ψ_1.

Consider now $\neg E(x,y)$.

$$\begin{aligned}
\neg E(x+u,x) \leftrightarrow\ & [|u|>|x|\wedge\neg E(|x|,|u|)]\vee[E(x,-u)\wedge|u|>|x|]\\
& [E(x,-u)\wedge|u|\le|x|\wedge\neg E(x+u,-u)];\\
\neg E(x+u,-x) \leftrightarrow\ & \neg E(u,-x)\vee[E(x,-u)\wedge|u|\le|x|]\vee\\
& [E(x,-u)\wedge|u|>|x|\wedge\neg E(x+u,u)];\\
\neg E(x+u,v) \leftrightarrow\ & [E(x+u,x)\wedge\neg E(x,v)]\vee\\
& [E(x+u,u)\wedge\neg E(u,v)]\vee\\
& [\neg E(x+u,x)\wedge\neg E(x+u,u)\wedge E(x,-u)\wedge\neg E(x+u,v)].
\end{aligned}$$

Denote

$$\begin{aligned}
\Phi_3(x,u) &:= E(x,-u)\wedge\neg E(x+u,-u)\wedge\neg E(x+u,u);\\
\Psi_2(x,u,v) &:= \Phi_3(x,u)\wedge\neg E(|u|,|v|)\wedge\neg E(x+u,v).
\end{aligned}$$

Again similar to $E(x+u,x+v)$ we can reduct $\neg E(x+u,x+v)$, the situation is similar, and we write down only the last disjunct, which we can reduct similar to Θ.

$$\begin{aligned}
\Theta_1(x,u,v):=\ & \neg E(x+u,x)\wedge\neg E(x+u,u)\wedge\neg E(x+v,x)\wedge\\
& \neg E(x+v,v)\wedge E(x,-u)\wedge E(u,v)\wedge\neg E(x+u,x+v).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_1(x,u,v)\wedge 0<u<v \leftrightarrow\ & E(x,-u)\wedge E(u,v)\wedge[u\le -x\le v\vee\\
& (-x<u\wedge x+u<v-u\wedge\neg E(x+u,v-u))\vee\\
& (v<-x\wedge x+v>u-v\wedge\neg E(x+v,u-v))].
\end{aligned}$$

Case $\neg E(x+u,-x+v)$ is very similar. When we reduct the last conjunct Θ in this situation, the cases will be following: $0<-u<v$, $0<v<-u$, $0<-v<u$, and $0<u<-v$.

Thus we can express $\neg E(x+u,\pm x+v)$ by a disjunction of conjunctions of formulas of the form $x<u$, $u<x$, $E(x,u)$, $\neg E(x,u)$, Φ_3, Ψ_2.

So, to prove the lemma it is enough to consider a formula $\exists x\bigwedge_i\phi_i(x,\bar y)$, where every ϕ_i is one of the following forms:

1. $mx=u$,
2. $mx<u$, or $mx>u$,
3. $E(mx,u)$,
4. $\neg E(mx,u)$,
5. $\Psi_1(mx,u,v)$,
6. $\Psi_2(mx,u,v)$,
7. $\Psi_3(mx,u):=E(-mx,u)\wedge[E(mx+u,u)\vee E(mx+u,-u)]$.

Note, $\Psi_3(x,u)\leftrightarrow E(-x,u)\wedge\neg E_1(-x,u)$ and

$$E(x,y)\leftrightarrow\Psi_1(-x,y,0)\vee\Psi_2(-x,y,0)\vee\Psi_3(-x,y).$$

It follows from the above that ϕ_i is one of these form or Φ_i, for $1\le i\le 3$. But we can express Φ_i as:

$$\Phi_1(x,u)\ \leftrightarrow\ |x|<|u|\wedge\Psi_3(x,u);$$

$$\Phi_2(x,u) \leftrightarrow |u| < |x| \wedge \Psi_3(x,u);$$
$$\Phi_3(x,u,v) \leftrightarrow \Psi_1(x,u,0) \vee \Psi_2(x,u,0)$$

As we have $E(x,y)$ iff $E(-x,-y)$, and $\Psi_i(x,u,v)$ iff $\Psi_i(-x,-u,-v)$ we may suppose that x occurs in each conjunct with the same sign. All relations remains after multiplying left and right parts by n for 1.–4. and $\Psi_i(x,u,v)$ iff $\Psi_i(nx,ny,nv)$, so we may assume that m occuring in the various ϕ_i is always the same. As we work with divisible group without lost of generality we can suppose that $m=1$. Moreover, we may assume that that at most one of the ϕ_i is of the form 1.–3., 5. (where $<$ and $>$ count separately): for instance, $x<u \wedge x<v$ is equivalent to $[x<u \wedge u \le v] \vee [x<v \wedge v<u]$. Cases 1. and 3. is similar. And we show it for 5..

$$\Psi_1(x,u_1,v_1) \wedge \Psi_1(x,u_2,v_2) \wedge 0<v_1<v_2 \wedge \neg E(v_1,v_2) \leftrightarrow$$
$$E(u_2-u_1,v_2) \wedge \Psi_1(x,u_1,v_1);$$

Indeed, for any $0<x<y$ we have $E(x+y,y)$. Then as $x+u_2 = x+u_1+(u_2-u_1)$, so $E(x+u_1,u_2-u_1)$ and $E(x+u_2,v_2)$. Cases $0<-v_1<v_2$, $0<v_1<-v_2$, $0<-v_1<-v_2$ are similar. So we obtain a disjunction of conjunctions and each conjunct contains at most one occurence of Ψ_1.

$$\Psi_1(x,u_1,v_1) \wedge \Psi_1(x,u_2,v_2) \wedge E(v_1,v_2) \wedge 0<u_1 \le u_2 \leftrightarrow$$
$$(E(|u_1-u_2|,|v_1|) \vee |u_1-u_2| < |v_1|) \wedge ([0=v \wedge x=-u_1 \wedge u_1=u_2] \vee$$
$$[v<0 \wedge x<-u_1 \wedge \Psi_1(x,u_1,v_1)] \vee [0<v \wedge x>-u_2 \wedge \Psi_1(x,u_2,v_2)]).$$

It is also follows from the fact that $0<x<y \to E(y,x+y)$.

If ϕ_0 (say) is $x=u$, then $\exists x \bigwedge_i \phi_i(x,\bar{y})$ is T-equivalent to $\bigwedge_{i>0} \phi_i(u,\bar{y})$.

If a formula contains $E(x,u) \wedge \neg E(x,v)$, then we may replace it by $E(x,u) \wedge \neg E(u,v)$. So if ϕ_0 (say) is $E(x,u)$ or $\neg E(x,u)$, then other ϕ_i are of the forms 2.

Consider $(\exists x)u<x<v \wedge E(x,t)$. It is T-equivalent to $u<v \wedge (u<t \vee E(u,t)) \wedge (t<v \vee E(v,t))$.

Consider $(\exists x)u<x<v \wedge \bigwedge_i \neg E(x,t_i)$. It is T-equivalent to $u<v \wedge \bigwedge_i(\neg E(u,t_i) \vee \neg E(v,t_i))$.

Thus we may assume that no ϕ_i is of the form 3. or 4..

Let ϕ_i be of the forms 2. and 5. Then

$$(\exists x)t<x<w \wedge \Psi_1(x,u,v) \wedge 0<v<u \leftrightarrow$$
$$t<w \wedge (t<u-v \vee E(u-t,v)) \wedge (u-v<w \vee E(u-w,v)) \wedge 0<v<u.$$

Indeed, the right parts says that intersection of the interval (t,w) with $\{g \in G : E(u-g,v)\}$ is non-empty. Cases $0<-v<u$, $0<v<-u$, and $0<-v<-u$ are similar.

Let ϕ_i be of the forms 2. and 6. Then

$$(\exists x)t<x<w \wedge \bigwedge_i \Psi_2(x,u_i,v_i) \wedge 0<v_i<u_i \leftrightarrow$$
$$t<w \wedge \bigwedge_i(\neg E(u_i-t,v_i) \vee \neg E(u_i-w,v_i) \wedge 0<v_i<u_i).$$

We have to express that the interval (t,w) is not contained in each set $\{g \in G : E(u_i-g,v_i\}$. As G/E is dense, it is sufficient. Cases $0<-v<u$ and other are similar.

Consider $(\exists x)t<x<w \wedge \Psi_1(x,u,v) \wedge \bigwedge_i \Psi_2(x,u_i,v_1) \wedge 0<u<v \wedge \bigwedge_i 0<v_i<u_i$. It is T-equivalent to the conjunction of the right parts of two previous cases.

Let ϕ_i be of the forms 2. and 7. Then

$$(\exists x)t<x<w \wedge \bigwedge_i \Psi_3(x,u_i) \leftrightarrow$$
$$(\exists x)t<x<w \wedge E(x,u_0) \wedge \bigwedge_i \neg E_1(x,u_i) \wedge \bigwedge_{i,j} E(u_i,u_j) \leftrightarrow$$
$$t<w \wedge (t<u_0 \vee E(t,u_0) \wedge u_0<w \vee E(w,u_0)) \wedge$$
$$\bigwedge_i \neg(E_1(t,w) \wedge E_1(t,u_i)) \wedge \bigwedge_{i,j} E(u_i,u_j).$$

In other cases (2., 5., 6., 7. or without 5. or 6.) $\exists x \bigwedge_i \phi_i$ will be equivalent to the conjunction of right parts of cases (2., 5.), (2., 6.), (2., 7.). □

Corollary 4 *T_E is weakly o-minimal.*

Proof. By the previous proposition it is sufficient to consider formulas of the forms 1.–7.. Formulas of the forms 1.–3., 5. are obviously convex, and $\neg E(x,u)$, $\Psi_2(x,u,v)$, $\Psi_3(x,u)$ are a union of two convex sets. □

Now we construct (non-uniformly) weakly o-minimal expansion of a group. Let G be a countable model of T_E and $\mathcal{M} = (M,<,\mathcal{L})$ countable densely ordered structure wihtout endpoints. Let f be an arbitrary isomorphism between $(G^+/E,<)$ and $(M,<)$, and $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{<,+,-,E,0\}$. Define $(G,\mathcal{L}^+)$ by the following: for any $P \in \mathcal{L}$ put

$$G \models P(x_1,\ldots,x_n) \text{ iff } G \models \bigwedge_i 0<x_i \text{ and } M \models P(f([x_1]_E),\ldots,f([x_n]_E)).$$

We may assume that the elementary theory of the restriction $\mathcal{G}_L$ of $\mathcal{G}^+ = (G, \mathcal{L}^+)$ to the language $\mathcal{L}_L = \mathcal{L} \cup \{<, E, 0\}$ admits quantifier elimination. Obviously $\mathcal{G}_L$ is (non-uniformly) weakly o-minimal iff $\mathcal{M}$ is (non-uniformly) weakly o-minimal. We show that $\mathrm{Th}(\mathcal{G}^+)$ admits quantifier elimination and as corollary we obtain that $\mathcal{G}^+$ is weakly o-minimal, maybe non-uniformly if so is $\mathcal{G}_L$. Let $T_L = \mathrm{Th}(\mathcal{G}_L)$.

Proposition 5 *Theory $T^+ = \mathrm{Th}(\mathcal{G}^+)$ admits quantifier elimination.*

Proof. Let $\varphi(x)$ be an arbitrary formula of $\mathcal{L}_L$, t_i terms in $\mathcal{L}_E$. Then a formula of $\mathcal{L}^+$ has the form $\phi(t_1, \ldots, t_n)$. Let ϕ be quanifier-free. We have to show that $\exists x\phi(k_1x + t_1, \ldots, k_nx + t_n)$, where $k_n \in \mathbb{Z}$, is T^+-equivalent to a quantifier-free formula.

By definition we have $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ is T^+-equivalent to $\varphi(l_1x_1, \ldots, l_nx_n)$ for any $l_i > 0$. So we may assume that all $k_i \neq 0$, are the same up to sign. As we work with divisible group without lost of generality we may assume that $k_i \in \{-1, 0, 1\}$. To simplify notation we shall omit terms without occuring x and write $\phi(x + t_1, \ldots, x + t_k, -x + t_{k+1}, -x + t_m)$ instead of $\phi(x + t_1, \ldots, x + t_k, -x + t_{k+1}, -x + t_m, t_{m+1}, \ldots, t_n)$.

We often shall use the following fact. Let $\psi_i(x, \bar{y})$, for $i < n$, is a partition of G. Then $\exists x\phi(x, \bar{y})$ iff $\bigvee_i \exists x[\phi(x, \bar{y}) \wedge \psi_i(x, \bar{y})]$.

For each term we have the following possibilites: $E(x+t_i, t_i)$, $E(x+t_i, x) \wedge \neg E(x + t_i, t_i)$, and $\neg E(x + t_i, t_i) \wedge \neg E(x + t_i, x)$. We denote a conjunction of one of three these formulas for each $1 \leq i \leq n$ by $\theta(x, \bar{t})$. We shall consider all possible θ.

Case 0. First consider the most simple case

$$(\exists x) \bigwedge_i E(x + t_i, t_i) \wedge \bigwedge_i E(-x + t_i, t_i) \wedge \phi(x + t_1, \ldots, -x + t_m) \iff$$
$$[(\exists x) \bigwedge_i E(x + t_i, t_i) \wedge \bigwedge_i E(-x + t_i, t_i)] \wedge \phi(t_1, \ldots, t_m).$$

Conjunct $(\exists x) \bigwedge_i E(x + t_i, t_i) \wedge \bigwedge_i E(-x + t_i, t_i)$ is a formula of $\mathcal{L}_E$, so by Proposition 3 it is T_E-equivalent to a quantifier-free formula. Since $T_E \subset T^+$, it is T^+-equivalent to this quantifier-free formula.

We shall use the following fact in our further reasoning.

Fact 6 *Let $\phi(x, \bar{u})$ be a formula such that x does not occur in any term u_i. Then*

$$\exists x\phi(x, \bar{u}) \iff \exists \bar{y}[\exists x\phi(x, \bar{y})] \wedge \bigwedge_i y_i = u_i \iff \exists y\psi(\bar{y}) \wedge \bigwedge_i y_i = u_i \iff \psi(\bar{u}),$$

where $\exists x\phi(x, \bar{y})$ is an $\mathcal{L}_L$-formula and T_L-equivalent to a quantifier-free formula $\psi(\bar{y})$.

As we defined the extra structure on positive elements, we may assume that all $x + t_i$, for $i \leq k$, and $-x + t_i$, for $k < i \leq m$, are positive.

Case 1. θ does not contain $\neg E(x + t_i, x) \wedge \neg E(x + t_i, t_i)$ for any i.

Let θ contains $\neg E(x + t_i, t_i) \wedge E(x + t_i, x) \wedge x + t_i > 0$. It is T_E-equivalent to the disjunction of formulas $0 < |t_i| < x \wedge \neg E(t_i, x) \wedge \neg E(-t_i, x)$ and $0 < -t_i < x \wedge E(-t_i, x) \wedge E(x + t_i, -t_i)$.

Note that $E(x + t_i, t_i)$ is T_E-equivalent to the disjunction of formulas $0 < |x| < t_i \wedge E(-t_i, x)$ and $0 < -x < t_i \wedge E(-t_i, x) \wedge E(x + t_i, t_i)$.

If we consider a conjunction of first disjuncts for $\neg E(x + t_i, t_i) \wedge E(x + t_i, x) \wedge x + t_i > 0$ and $E(x + t_i, t_i)$ we obtain a formula $\theta'(x, t) \wedge \phi(x, \ldots, x, t_i, \ldots, t_m)$ (up to order of x and t_i) which has a T^+-equivalent quantifier-free formula by Fact 6.

Suppose that a second disjunct occurs in a formula. Then we can replace x in $\phi(x, \ldots, x, t_j, \ldots, t_m)$ by $-t_i$ as we have $E(x, -t_i)$, and we obtain situation similar to Case 0.

Let θ contains $\neg E(-x + t_i, t_i) \wedge E(-x + t_i, -x) \wedge -x + t_i > 0$. This case is similar to the previous one.

Case 2. θ contains $\neg E(x + t_i, x) \wedge \neg E(x + t_i, t_i)$ for only i, say, $i = 1$. Then we obtain $E(x, -t_1)$.

Let $t_1 > 0$. Then $x < 0$. We can re-write $E(x + t_j, t_j)$ as $-t_j < x \wedge \neg E_1(t_j, t_1)$. Also we can re-write $E(-x + t_s, t_s)$ as $t_1 < t_s \vee E(t_s, t_1)$, as it does not contain x we omit it. If we have occurence of $E(x + t_p, x)$, then ϕ is inconsistence, because it defines on only positive elements. At last consider $E(-x + t_q, -x) \wedge \neg E(-x + t_q, t_q)$. It is T_E-equivalent to the disjunction of $|t_q| < t_1 \wedge \neg E(t_q, t_1) \wedge \neg E(-t_q, t_1)$ and $E(-t_q, t_1) \wedge \neg E_1(-t_q, t_1)$. We may exclude this case, as it does not contain x.

As a result we obtain

$$\exists x \bigwedge_{j \neq 1} -t_j < x < 0 \wedge \neg E_1(t_j, t_1) \wedge E_1(x, -t_1) \wedge \phi(x + t_1, t_2, \ldots, t_m) \wedge t_1 > 0;$$

which is equivalent to

$$\exists x[E_1(x, -t_1) \wedge \phi(x + t_1, t_2, \ldots, t_m)] \wedge t_1 > 0 \wedge \bigwedge_{j \neq 1} t_j > t_1 \wedge \neg E_1(t_j, t_1).$$

It is enough to consider part in square brackets. Clearly, it is T^+-equivalent to a formula

$$\exists y\phi(y, t_1, \ldots, t_m) \wedge y < t_1 \wedge \neg E(y, t_1)$$

which is T^+-equivalent to a quantifier-free formula by Fact 6.

When $t_1 = 0$ it is trivial, and when $t_1 < 0$ it is similar to the $t_1 > 0$.

Case θ contains $\neg E(-x + t_i, t_i) \wedge \neg E(-x + t_i, t_i)$ is similar.

Case 3. θ contains $\neg E(x + t_i, x) \wedge \neg E(x + t_i, t_i)$ for two different i, say, $i = 1, 2$. Then we obtain $E(x, -t_1) \wedge E_1(t_1, t_2)$. If $t_1 = t_2$, then it is equivalent to the Case 2. Consider case $t_1 < t_2$, the opposite is similar.

Let $0 < t_1 < t_2$. Since $x + t_i > 0$, we have $-x < t_1$. Then $x + t_2 = (x+t_1) + (t_2 - t_1)$. If $x + t_1 \geq t_2 - t_1 \vee E(x+t_1, t_2 - t_1)$, then $E(x + t_1, x + t_2)$ and we may replace occurences of $x + t_2$ in ϕ by $(x + t_1)$. And again it is similar to Case 2.

Consider case when $t_2 - t_1 < x \wedge \neg E(x + t_1, t_2 - t_1)$. Then we have $E(x + t_2, t_2 - t_1)$ and we may replave in ϕ occurences of $x + t_2$ by $t_2 - t_1$, reducing this case to Case 2.

Case 3′. θ contains $\neg E(k_i x + t_i, k_i x) \wedge \neg E(k_i x + t_i, t_i)$ for two different i, say, $i = 1, 2$, and $k_1 = 1$, $k_2 = -1$.

Let $t_1 > 0$. Since $x + t_i > 0$, we have $-t_1 < x < t_2 < 0$. Also we have $E(x, -t_1) \wedge E_1(-t_1, t_2)$. If $t_1 = t_2$, then it is equivalent to the Case 2.

Note that $(x + t_1) + (-x + t_2) = t_1 + t_2$. As all items are positive, so one item or both is E-equivalent to $t_1 + t_2$ and we obtain 3 possibilities for x:

1. $E(x + t_1, t_1 + t_2) \wedge \neg E(-x + t_2, t_1 + t_2)$;
2. $E(x + t_1, t_1 + t_2) \wedge E(-x + t_2, t_1 + t_2)$;
3. $\neg E(x + t_1, t_1 + t_2) \wedge E(-x + t_2, t_1 + t_2)$;

Similar to Case 3 we can reduce this case to Case 2.

Case n + 1. θ contains $\neg E(k_i x + t_i, k_i x) \wedge \neg E(k_i x + t_i, t_i)$ for n different i. Similar to Cases 3 and 3′ we can reduce our situation to Case n. □

Theorem 7 *$\mathcal{G}^+$ is weakly o-minimal.*

Proof. Since T^+ admits quantifier elimination it is sufficient to consider formulas of the form $\phi(k_1 x + u_1, \ldots, k_n x + u_n)$, where $k_i \in \{-1, 0, 1\}$, u_i is term, for $1 \leq i \leq n$, and ϕ is a quantifier-free formula of $\mathcal{L}_L$.

As in Proposition 5 consider θ. All possible $\theta(x, \bar{u})$ form a finite partition of G. So, it is enough to show that $\theta(x, \bar{u}) \wedge \phi(x, \bar{u})$ is a finite union of convex sets. Further we shall refer to Cases 0, 1 etc in Proposition 5.

Case 0. We obtain a formula of $\mathcal{L}_E$. By Corollary 4 it is a finite union of convex sets.

Case 1. We obtain a boolean combination of formulas of languages $\mathcal{L}_E$ and $\mathcal{L}_L$, each of these formulas is a finite union of convex sets, so is their boolean combination.

Case 2. Here it suffices to consider a formula of the form $\phi(x + u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Obviously,

$$\phi(x + u_1, u_2, \ldots, u_n)^G = \{g \in G : \exists y \phi(y, u_2, \ldots, u_n) \wedge x = y - u_1\}$$

Since the first conjunct of $\phi(G, a_2, \ldots, a_n) \wedge \bigwedge_i a_i = u_i$ is an $\mathcal{L}_L$-formula, it is a finite union of convex sets.

Case n. It can be reduced to Case 2. As a result we obtain a boolean combination of $\mathcal{L}_E$ and $\mathcal{L}_L$ formulas, and we are done as in Case 1. □

References

[1] M. A. Dickmann, *Elimination of quantifiers for ordered valution rings*, Proceedings 3rd Easter Model Theory Conference at Gross Koris, Berlin, 1985.

[2] D. Macpherson, D. Marker, C. Steinhorn, *Weakly o-minimal structures and real closed fields*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 352 (2000), 5435–5483.

[3] V. V. Verbovskiy. *On formula depth of weakly o-minimal structures*, Algebra and Model theory, Proceedings of 2-nd Summer International School "Intermediate problems of model theory and universal algebra", 1997, pp. 209 - 224.

О СПЕЦИАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ РЕШЕТОК КОНГРУЭНЦИЙ G-МНОЖЕСТВ

Б. М. Верников*

Россия
620083 г. Екатеринбург
пр. Ленина, 51
Уральский государственный университет
математико-механический факультет
e-mail: boris.vernikov@usu.ru

Пусть A — непустое множество, G — группа, а φ — гомоморфизм из G в группу всех перестановок множества A. Для всякого $g \in G$ определим унарную операцию g^* на A правилом $g^*(a) = (\varphi(g))(a)$ для всякого $a \in A$. Унарная алгебра с носителем A и множеством операций $\{g^* \mid g \in G\}$ называется *G-множеством*. Изучение конгруэнций на G-множествах представляет определенный самостоятельный интерес. Отметим в этой связи, что если решетки конгруэнций *унаров*, т. е. унарных алгебр с одной унарной операцией, изучались ранее весьма активно, то о решетках конгруэнций унарных алгебр с произвольным числом операций до недавнего времени было известно совсем немного. Но наш интерес к решеткам конгруэнций G-множеств имеет другое происхождение. В работах [1]–[3] было показано, что эти решетки естественно возникают и играют важную роль при описании строения решеток подмногообразий в некоторых обширных и важных классах многообразий полугрупп. Для применения этих структурных результатов при решении конкретных задач о полугрупповых многообразиях необходима информация о решетках конгруэнций G-множеств как таковых. Ряд результатов такого рода получен нами в [4]–[6]. Это позволило нам получить обширную информацию о решетках многообразий полугрупп (см., в частности, [6]–[13]). В данной работе продолжается изучение решеток конгруэнций G-множеств.

Напомним, что элемент x решетки $\langle L; \vee, \wedge\rangle$ называется *дистрибутивным*, если

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-01-00258) и межвузовской научной программы "Университеты России — фундаментальные исследования" Министерства образования Российской Федерации (проект № 617).

$$\forall y, z \in L: \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$$

стандартным, если

$$\forall y, z \in L: \quad (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z);$$

нейтральным, если

$$\forall y, z \in L: \quad (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x).$$

Кодистрибутивные и *костандартные* элементы определяются двойственно к дистрибутивным и стандартным соответственно. Обширную информацию об элементах всех указанных типов, показывающую естественность и важность их изучения, можно найти, например, в §III.2 монографии [14]. Кратко говоря, дистрибутивные и кодистрибутивные элементы "отвечают" за гомоморфизмы решетки на свои интервалы, а нейтральные — за ее разложение в подпрямое произведение своих интервалов.

В работе [6] описаны дистрибутивные, кодистрибутивные, стандартные, костандартные и нейтральные элементы решеток конгруэнций G-множеств в случае, когда группа G произвольна, но само G-множество удовлетворяет некоторому весьма сильному дополнительному ограничению. В данной работе описаны элементы пяти указанных типов для произвольных G-множеств, но при условии, что группа G абелева.

Приведем необходимые определения и обозначения. G-множество A называется *транзитивным*, если для любой пары элементов $a, b \in A$ существует $g \in G$ такой, что $g^*(a) = b$. Транзитивное G-подмножество G-множества A называется *орбитой* в A. Хорошо известно, что решетка конгруэнций произвольного транзитивного G-множества изоморфна некоторому интервалу решетки подгрупп группы G (см., например, [15], лемма 4.20). Решетки подгрупп изучены достаточно хорошо (см., например, [16]). Поэтому решетки конгруэнций G-множеств (и, в частности, их специальные элементы) естественно изучать "по модулю орбит". Множество всех орбит G-множества A будем обозначать через $\mathrm{Orb}(A)$. Пусть B и C — различные орбиты G-множества A, а α — отношение эквивалентности на A. Будем говорить, что:

α *изолирует* B, если из того, что $x \in B$ и $x\alpha y$ вытекает, что $y \in B$;

α *связывает* B и C, если $x\alpha y$ для некоторых элементов $x \in B$ и $y \in C$;

α *разделяет* B и C, если не существует элементов $x \in B$ и $y \in C$ таких, что $x\alpha y$;

α *склеивает* B и C, если $x\alpha y$ для любых элементов $x, y \in B \cup C$. Конгруэнцию α на G-множестве A будем называть *жадной*, если она склеивает любые две орбиты, которые она связывает. Множество всех жадных конгруэнций G-множества A обозначим через $\mathrm{GCon}(A)$. Для всякой конгруэнции α на A определим отношение α^* на $\mathrm{Orb}(A)$ правилом: если $B, C \in \mathrm{Orb}(A)$, то $B\alpha^*C$ тогда и только тогда, когда либо $B = C$, либо α связывает B и C. Очевидно, что α^* — отношение эквивалентности на $\mathrm{Orb}(A)$. Как обычно, решетку эквивалентностей на множестве X будем обозначать через $\mathrm{Eq}(X)$. Нам понадобится следующая лемма, доказанная в [4].

Лемма 1 *Пусть A — G-множество и $\mathrm{Orb}(A) = \{A_i \mid i \in I\}$. Множество $\mathrm{GCon}(A)$ является подрешеткой решетки $\mathrm{Con}(A)$. Решетка $\mathrm{GCon}(A)$ изоморфна подпрямому произведению решеток $\mathrm{Eq}(\mathrm{Orb}(A))$ и $\mathrm{Con}(A_i)$, где i пробегает I. Отображение f из $\mathrm{GCon}(A)$ в решетку*

$$\mathrm{Eq}(\mathrm{Orb}(A)) \times \prod_{i \in I} \mathrm{Con}(A_i),$$

задаваемое правилом $f(\alpha) = (\alpha^*; \ldots, \alpha_i, \ldots)$, где α_i есть ограничение конгруэнции α на орбиту A_i ($i \in I$), является изоморфным вложением. ■

Из этой леммы легко вытекает

Лемма 2 *Если α — жадная конгруэнция G-множества A, являющаяся дистрибутивным (кодистрибутивным, стандартным, костандартным, нейтральным) элементом решетки $\mathrm{Con}(A)$, то*

а) *α^* — либо универсальное отношение, либо отношение равенства на множестве $\mathrm{Orb}(A)$;*

б) *ограничение α на произвольную орбиту G-множества A, является дистрибутивным (кодистрибутивным, стандартным, костандартным, нейтральным) элементом решетки конгруэнций этой орбиты.*

Доказательство. Поскольку, в силу леммы 1, $\mathrm{GCon}(A)$ — подрешетка в $\mathrm{Con}(A)$, из жадности конгруэнции α вытекает, что она является дистрибутивным (кодистрибутивным, стандартным, костандартным, нейтральным) элементом решетки $\mathrm{GCon}(A)$. Отсюда и из леммы 1 непосредственно вытекает утверждение б) и тот факт, что α^* — дистрибутивный (кодистрибутивный, стандартный, костандартный, нейтральный) элемент решетки $\mathrm{Eq}(\mathrm{Orb}(A))$. Остается учесть тот хорошо известный факт, что решетка эквивалентностей на произвольном множестве не содержит элементов ни одного из пяти указанных типов, отличных от универсального отношения и отношения равенства. ■

В дальнейшем нам понадобится следующая простая

Лемма 3 *Если конгруэнция α на G-множестве A связывает две его различные орбиты B и C, то для всякого $b \in B$ существует $c \in C$ такой, что $b\alpha c$.*

Доказательство. По условию существуют элементы $x \in B$ и $y \in C$ такие, что $x\alpha y$. Пусть теперь $b \in B$. В силу транзитивности B существует элемент $g \in G$ такой, что $b = g^*(x)$. Положим $c = g^*(y)$. Тогда $c \in C$ и $b\alpha c$. ■

Если A — G-множество, $\mu \in \mathrm{Con}(A)$, а X — орбита в A, то через μ_X мы обозначаем ограничение μ на X. Следующая лемма доказана в [4].

Лемма 4 *Пусть A — G-множество, B и C — различные орбиты в A, а μ — конгруэнция на A, связывающая, но не склеивающая B и C. Тогда $B/\mu_B \cong C/\mu_C$. Пусть $X \in B/\mu_B$, $x \in X$, x' — элемент из C такой, что $x\mu x'$ (элемент x' существует в силу леммы 3), а X' — μ_C-класс, содержащий x'. Отображение $\varphi_{B,C}$ из B/μ_B в C/μ_C, определяемое правилом $\varphi_{B,C}(X) = X'$, является изоморфизмом.* ■

Для удобства ссылок сформулируем следующую хорошо известную лемму (см., например, [14], лемма III.2.5).

Лемма 5 *(Ко)стандартный элемент произвольной решетки (ко)дистрибутивен; элемент произвольной решетки нейтрален тогда и только тогда, когда он стандартен и костандартен одновременно.* ■

Важную роль в дальнейших рассмотрениях играет следующая конструкция. Пусть μ — конгруэнция G-множества A, которая связывает, но не склеивает две его различные орбиты B и C. Тогда ограничение μ на B не является универсальным отношением. Следовательно, существуют элементы $v, w \in B$ такие, что $(v, w) \notin B$. В силу транзитивности B существует элемент $g_0 \in G$ такой, что $w = g_0^*(v)$. Обозначим через $\mu_{v,w}$ бинарное отношение на A, определяемое следующим образом:

$$(x, y) \in \mu_{v,w} \iff \text{либо } x, y \in X \cup \varphi_{B,C}(g_0^*(X)) \text{ для некоторого}$$

μ_B – класса X, где $g_0^*(X) = \{g_0^*(x) \mid x \in X\}$,
либо $x = y$

(см. рис. 7, где горизонтальные линии разбивают орбиты B и C на μ_B- и μ_C-классы соответственно). Отметим, что в силу леммы 4 $\varphi_{B,C}(g_0^*(X)) = g_0^*(\varphi_{B,C}(X))$.

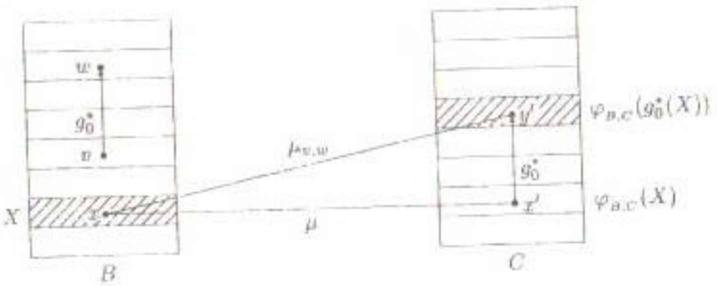


Рис. 7: отношение $\mu_{v,w}$

Лемма 6 *Отношение $\mu_{v,w}$ является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Очевидно, что отношение $\mu_{v,w}$ рефлексивно и сим- Случай, метрично. Проверим, что оно транзитивно. Пусть $x\,\mu_{v,w}\,y\,\mu_{v,w}\,z$. когда по крайней мере один из элементов x, y, z не принадлежит $B \cup C$, очевиден. Без ограничения общности можно считать, что $x \in B$. Если $y \in B$ или $y, z \in C$, то все очевидно. Пусть теперь $y \in C$ и $z \in B$. Тогда $y \in \varphi_{B,C}(g_0^*(X))$. Иначе говоря, существуют элементы $x', x'' \in B$ такие, что $x'\mu y$, $x''\mu x$ и $x' = g_0^*(x'')$. С другой стороны, $y \in \varphi_{B,C}(g_0^*(Z))$, где Z – μ_B-класс, содержащий z. Следовательно, существуют элементы $z', z'' \in B$ такие, что $z'\mu y$, $z''\mu z$ и $z' = g_0^*(z'')$. Имеем

$$x \;\mu\; x'' = (g_0^{-1})^*(x') \;\mu\; (g_0^{-1})^*(y) \;\mu\; (g_0^{-1})^*(z') = (g_0^{-1})^*(g_0^*(z'')) = z'' \;\mu\; z.$$

Учитывая, что $x, z \in B$, получаем, что $(x, z) \in \mu_B$, и потому $x\mu_{v,w}z$. ∎

В следующей лемме указаны те свойства отношения $\mu_{v,w}$, на которые мы будем опираться в дальнейшем.

Лемма 7 *Если группа G абелева, то всякое отношение вида $\mu_{v,w}$ является конгруэнцией, разделяющей орбиты B и C.*

Доказательство. Проверим сначала, что $\mu_{v,w}$ – конгруэнция. В силу леммы 0.6 $\mu_{v,w}$ – отношение эквивалентности. Осталось убедиться в его стабильности. Пусть $x, y \in A$, $(x, y) \in \mu_{v,w}$ и $g \in G$. Из определения отношения $\mu_{v,w}$ видно, что либо $x, y \notin B \cup C$, либо $x, y \in B \cup C$. Если $x, y \notin B \cup C$, то $x = y$, и все очевидно. Пусть теперь $x, y \in B \cup C$. Если $x, y \in B$ или $x, y \in C$, то $x\mu y$, и остается учесть, что μ – конгруэнция. Поэтому можно считать, что либо $x \in B$, а $y \in C$, либо $x \in C$, либо $y \in B$. Эти два случая симметричны, и потому достаточно рассмотреть первый из них. Итак, пусть $x \in B$, а $y \in C$. Тогда существует такой элемент $x' \in C$, что $x\mu x'$ и $y = g_0^*(x')$. С учетом абелевости группы G имеем

$$\begin{aligned} g^*(y) &= g^*(g_0^*(x')) = (gg_0)^*(x') = (g_0g)^*(x') = \\ &= g_0^*(g^*(x')) \in g_0^*(\varphi_{B,C}(g^*(X))) = \varphi_{B,C}(g_0^*(g^*(X))). \end{aligned}$$

Следовательно, $(g^*(x), g^*(y)) \in \mu_{v,w}$.

Убедимся теперь в том, что отношение $\mu_{v,w}$ разделяет B и C. По определению отношения $\mu_{v,w}$ существует такой элемент $g_0 \in G$, что $w = g_0^*(v)$ и $(v, w) \notin \mu$. Проверим, что если $x \in B$, то $(x, g_0^*(x)) \notin \mu$. Пусть, напротив, $x\,\mu\,g_0^*(x)$. В силу транзитивности B существует элемент $g_1 \in G$ такой, что $v = g_1^*(x)$. С учетом абелевости группы G имеем

$$v = g_1^*(x) \;\mu\; g_1^*(g_0^*(x)) = (g_1g_0)^*(x) = (g_0g_1)^*(x) = g_0^*(g_1^*(x)) = g_0^*(v) = w,$$

что противоречит выбору элементов v и w. Пусть теперь $(x, y) \in \mu \wedge \mu_{v,w}$, причем $x \in B$, а $y \in C$. В силу сказанного выше, μ_B-классы, соответствующие элементам x и $g_0^*(x)$, различны. Обозначим первый из них через X. В силу леммы 0.4, μ_C-классы $\varphi_{B,C}(X)$ и $\varphi_{B,C}(g_0^*(X))$ также различны. Пусть $x' \in \varphi_{B,C}(X)$. Тогда $x\mu x'$. Из того, что $(x, y) \in \mu_{v,w}$, вытекает, что $(x', y) \notin \mu$. Но $y\,\mu\,x\,\mu\,x'$. Противоречие. ∎

Если B и C – различные орбиты в A, μ – конгруэнция на B, а ν – конгруэнция на C, то через $\mu \oplus \nu$ мы будем обозначать конгруэнцию на A, определяемую правилом:

$(x, y) \in \mu \oplus \nu \iff$ либо $x = y$, либо $x, y \in B$ и $x\mu y$, либо $x, y \in C$ и $x\nu y$.

Через Δ будем обозначать универсальное отношение на A.

Основным результатом работы является

Теорема. *Пусть G – абелева группа, а A – G-множество. Конгруэнция α на A является дистрибутивным (кодистрибутивным, стандартным, костандартным, нейтральным) элементом решетки* $\mathrm{Con}(A)$ *тогда и только тогда, когда либо α – универсальное отношение, либо выполнены следующие условия:*

(i) *ограничение α на произвольную орбиту G-множества A является дистрибутивным (кодистрибутивным, стандартным, костандартным, нейтральным) элементом решетки конгруэнций этой орбиты;*

(ii) *α изолирует каждую орбиту G-множества A;*

(iii) *если конгруэнция β на A связывает орбиту B G-множества A с некоторой другой его орбитой, то $\alpha_B \subseteq \beta_B$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть α — конгруэнция на A, отличная от универсального отношения. В силу леммы 0.5 мы можем не рассматривать специально случай, когда α — нейтральный элемент решетки $\mathrm{Con}(A)$. Дальнейшие рассмотрения естественно распадаются на три случая.

Случай 1: α — *дистрибутивный элемент решетки* $\mathrm{Con}(A)$. Прежде всего проверим, что α — жадная конгруэнция. Предположим, напротив, что существуют различные орбиты B и C в A, которые связываются, но не склеиваются конгруэнцией α. Положим $\beta = \alpha_B \oplus \Delta_C$ и $\gamma = \Delta_B \oplus \alpha_C$. Пусть $x, y \in B$ и $(x, y) \notin \alpha$ (такие элементы существуют, поскольку α не склеивает B и C). Ясно, что $(x, y) \in \gamma \subseteq \alpha \vee \gamma$. В силу леммы 0.3 существуют элементы $x', y' \in C$ такие, что $x\alpha x'$ и $y\alpha y'$. Тогда $x\,\alpha\, x'\,\beta\, y'\,\alpha\, y$, и потому $(x, y) \in \alpha \vee \beta$. Следовательно, $(x, y) \in (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$. Предположим теперь, что $(x, y) \in \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$. Тогда существует последовательность (*) элементов из A такая, что $x_0 = x$, $x_n = y$ и для всякого $i = 0, 1, \dots, n-1$ либо $x_i \alpha x_{i+1}$, либо $(x_i, x_{i+1}) \in \beta \wedge \gamma$. Пусть (*) — кратчайшая последовательность с таким свойством. Предположим, что $x_i \notin B \cup C$ для некоторого i. Пусть i — наименьший индекс с таким свойством. Ясно, что $0 < i < n$. Из определения конгруэнций β и γ вытекает, что $x_{i-1}\,\alpha\, x_i\,\alpha\, x_{i+1}$. Но это противоречит тому, что (*) — кратчайшая последовательность с указанным выше свойством. Итак, $x_0, x_1, \dots, x_n \in B \cup C$. Предположим теперь, что $x_i \in C$ для некоторого i, причем i — наименьший индекс с таким свойством. Ясно, что вновь $0 < i < n$. В частности, $x_{i-1} \in B$. Поскольку каждая из конгруэнций β и γ разделяет орбиты B и C, получаем, что $x_{i-1} \alpha x_i$. Если $x_{i+1} \in B$, то, по той же причине, $x_i \alpha x_{i+1}$. Если же $x_{i+1} \in C$, то вновь $x_i \alpha x_{i+1}$, поскольку $(\beta \wedge \gamma)_C = \alpha_C$. Итак, в любом случае $x_{i-1}\,\alpha\, x_i\,\alpha\, x_{i+1}$, что, как уже отмечалось выше, невозможно. Таким образом, $x_0, x_1, \dots, x_n \in B$. Учитывая, что $(\beta \wedge \gamma)_B = \alpha_B$, получаем, что $x = x_0\,\alpha\, x_n = y$, что противоречит выбору элементов x и y. Мы показали, что $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \neq (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$, что противоречит предположению о том, что α — дистрибутивный элемент решетки $\mathrm{Con}(A)$. Следовательно, α — жадная конгруэнция.

Из леммы 0.2 вытекает, что выполнен нужный нам вариант условия (i) и что α^* — либо отношение равенства, либо универсальное отношение на $\mathrm{Orb}(A)$. Но α^* не может быть универсальным отношением, так как в противном случае из жадности α вытекало бы, что α — универсальное отношение на A. Итак, α^* — отношение равенства на $\mathrm{Orb}(A)$. Это означает, что выполнено условие (ii) теоремы.

Осталось проверить выполнение условия (iii). Пусть β — конгруэнция на A, которая связывает некоторую орбиту B G-множества A с некоторой другой его орбитой C. Предположим, что $\alpha_B \not\subseteq \beta_B$. Тогда существуют элементы $x, y \in B$ такие, что $x\alpha y$, но $(x, y) \notin \beta$. В силу леммы 0.3 существует элемент $y' \in C$ такой, что $y\beta y'$. Положим $\gamma = \beta_{x,y}$. В силу леммы 0.7 $\beta \wedge \gamma$ является конгруэнцией, разделяющей орбиты B и C. Поскольку α изолирует каждую орбиту, конгруэнция $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$ также разделяет орбиты B и C. В частности, $(x, y') \notin \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$. В то же время, $(x, y') \in \alpha \vee \beta$, поскольку $x\,\alpha\, y\,\beta\, y'$, а из построения конгруэнции γ вытекает, что $x\gamma y'$. Следовательно, $(x, y') \in (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \subseteq (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$. Таким образом, $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \neq (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ вопреки предположению о том, что α — дистрибутивный элемент решетки $\mathrm{Con}(A)$. Полученное противоречие завершает разбор случая 1.

Случай 2: α — *кодистрибутивный элемент решетки* $\mathrm{Con}(A)$. Как и при рассмотрении первого случая, проверим сначала, что α — жадная конгруэнция. Предположим, напротив, что существуют различные орбиты B и C в A, которые связываются, но не склеиваются конгруэнцией α. Положим $\beta = \alpha_B \oplus \Delta_C$. Пусть $x, y \in B$ и $(x, y) \notin \alpha$ (такие элементы существуют, поскольку α не склеивает B и C). В силу леммы 0.3 существуют элементы $x', y' \in C$ такие, что $x\alpha x'$ и $y\alpha y'$. Положим $\gamma = \alpha_{x,y}$. Тогда $x\,\gamma\, y'\,\beta\, x'$, откуда $(x, x') \in \beta \vee \gamma$. Поскольку, кроме того, $x\alpha x'$, получаем, что $(x, x') \in \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$. С другой стороны, из леммы 0.7 и определения конгруэнций β и γ вытекает, что каждая из конгруэнций $\alpha \wedge \beta$ и $\alpha \wedge \gamma$ разделяет орбиты B и C. Учитывая, что $x \in B$, а $x' \in C$, получаем, что $(x, x') \notin (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$. Следовательно, $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \neq (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ вопреки предположению о том, что α — кодистрибутивный элемент решетки $\mathrm{Con}(A)$. Следовательно, α — жадная конгруэнция. Как и в случае 1, отсюда вытекает, что выполнены нужный нам вариант условия (i) и условие (ii) теоремы.

Осталось проверить выполнение условия (iii). Пусть β — конгруэнция на A, которая связывает некоторую орбиту B G-множества A с некоторой другой его орбитой C. Предположим, что $\alpha_B \not\subseteq \beta_B$. Тогда существуют элементы $x, y \in B$ такие, что $x\alpha y$, но $(x, y) \notin \beta$. Определим конгруэнцию γ на A правилом: $x\gamma y$ тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо

$x, y \in C$. В силу леммы 3 существуют элементы $x', y' \in C$ такие, что $x\beta x'$ и $y\beta y'$. Тогда $x \,\beta\, x' \,\gamma\, y' \,\beta\, y$, и потому $(x, y) \in \beta \vee \gamma$. Поскольку $x\alpha y$, получаем, что $(x, y) \in \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$. Предположим, что $(x, y) \in (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$. Тогда существует последовательность $(*)$ элементов из A такая, что $x_0 = x$, $x_n = y$ и для всякого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ либо $(x_i, x_{i+1}) \in \alpha \wedge \beta$, либо $(x_i, x_{i+1}) \in \alpha \wedge \gamma$. В силу условия (ii) каждая из конгруэнций $\alpha \wedge \beta$ и $\alpha \wedge \gamma$ изолирует B. Поскольку $x_0 = x \in B$, отсюда вытекает, что $x_1, \ldots, x_n \in B$. Учитывая, что ограничение конгруэнции $\alpha \wedge \gamma$ на B есть отношение равенства, получаем, что $(x, y) \in \alpha \wedge \beta$. Но это противоречит тому, что $(x, y) \notin \beta$. Итак, $(x, y) \notin (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$. Следовательно, $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \neq (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ вопреки предположению о том, что α — кодистрибутивный элемент решетки $\mathrm{Con}(A)$. Полученное противоречие завершает разбор случая 2.

Случай 3: α — *стандартный или костандартный элемент решетки* $\mathrm{Con}(A)$. Из леммы 5 и доказанного выше вытекает, что выполнен условие (iii) теоремы и что α — жадная конгруэнция. А из последнего обстоятельства также, как и выше, выводится, что выполнены условие (ii) и нужный нам вариант условия (i).

Достаточность. Здесь нам понадобится следующая

Лемма 8 *Пусть* α *— конгруэнция на* G*-множестве* A*, удовлетворяющая условиям* (ii) *и* (iii) *теоремы, а* β *— произвольная конгруэнция на* A*. Пусть, далее,* $x, y \in A$*, а* B *— орбита* G*-множества* A*, содержащая* x*. Если* $(x, y) \in \alpha \vee \beta$*, то либо* $(x, y) \in \alpha_B \vee \beta_B$*, либо* $x\beta y$.

Доказательство. В силу условия существует последовательность $(*)$ элементов из A такая, что $x_0 = x$, $x_n = y$ и для всякого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ либо $x_i \alpha x_{i+1}$, либо $x_i \beta x_{i+1}$. Если $x_1, \ldots, x_n \in B$, то $(x, y) \in \alpha_B \vee \beta_B$. Предположим теперь, что $x_i \notin B$, причем i — наименьший индекс с таким свойством. Ясно, что $i > 0$. Обозначим орбиту G-множества A, содержащую x_i, через C. Поскольку в силу условия (ii) α изолирует B, получаем, что $x_{i-1} \beta x_i$. Таким образом, β связывает орбиты B и C. В силу условия (iii) $\alpha_B \subseteq \beta_B$, и потому $x \beta x_{i-1}$. Следовательно, $x \beta x_i$. Предположим теперь, что $x_j \notin C$ для некоторого $j > i$. Пусть j — наименьший индекс с таким свойством. Рассуждая также, как и выше, получаем, что $x_i \beta x_j$, и потому $x \beta x_j$. Продолжая эти рассуждения, мы в конце концов получим, что $x \beta y$. ■

Пусть теперь α — конгруэнция на A, отличная от универсального отношения. Предположим, что α удовлетворяет условиям (ii) и (iii). В силу второго утверждения леммы 5 мы можем не рассматривать специально случая, когда ограничение α на произвольную орбиту G-множества

A является нейтральным элементом решетки конгруэнций этой орбиты. Дальнейшие рассмотрения естественно распадаются на четыре случая.

Случай 1: *ограничение* α *на произвольную орбиту — дистрибутивный элемент решетки конгруэнций этой орбиты.* Требуется доказать, что α — дистрибутивный элемент решетки $\mathrm{Con}(A)$. Пусть $\beta, \gamma \in \mathrm{Con}(A)$. Достаточно установить, что $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \subseteq \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$ (так как обратное включение очевидно). Пусть $(x, y) \in (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$. Обозначим через B орбиту, содержащую x. В силу леммы 0.8 возможны следующие четыре варианта.

1) $x\beta y$ и $x\gamma y$. В этом случае $(x, y) \in \beta \wedge \gamma \subseteq \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$.

2) $x\beta y$ и $(x, y) \in \alpha_B \vee \gamma_B$. Из второго соотношения вытекает, что $y \in B$. Следовательно, $(x, y) \in \beta_B$. Но тогда $(x, y) \in (\alpha_B \vee \beta_B) \wedge (\alpha_B \vee \gamma_B)$, и мы можем сослаться на условие (i).

3) $(x, y) \in \alpha_B \vee \beta_B$ и $x\gamma y$. Этот случай разбирается вполне аналогично предыдущему.

4) $(x, y) \in \alpha_B \vee \beta_B$ и $(x, y) \in \alpha_B \vee \gamma_B$. В этом случае все сразу вытекает из условия (i).

Случай 2: *ограничение* α *на произвольную орбиту — кодистрибутивный элемент решетки конгруэнций этой орбиты.* Требуется доказать, что α — кодистрибутивный элемент решетки $\mathrm{Con}(A)$. Пусть $\beta, \gamma \in \mathrm{Con}(A)$. Достаточно установить, что $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \subseteq (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ (так как обратное включение очевидно). Пусть $(x, y) \in \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$. В частности, $x\alpha y$. Обозначим через B орбиту, содержащую x. В силу условия (ii) $y \in B$. Далее, $(x, y) \in \beta \vee \gamma$. Следовательно, существует последовательность $(*)$ элементов из A такая, что $x_0 = x$, $x_n = y$ и для всякого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ либо $x_i \beta x_{i+1}$, либо $x_i \gamma x_{i+1}$. Если $x_1, \ldots, x_n \in B$, то все вытекает из условия (i). Предположим поэтому, что $x_i \notin B$, причем i — наименьший индекс с таким свойством. Ясно, что $i > 0$. Обозначим орбиту, содержащую x_i, через C. Без ограничения общности можно считать, что $x_{i-1} \beta x_i$. Тогда β связывает B и C. В силу условия (iii) $\alpha_B \subseteq \beta_B$. Учитывая, что $x, y \in B$ и $x\alpha y$, получаем, что $x\beta y$, и потому $(x, y) \in \alpha \wedge \beta \subseteq (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$.

Случай 3: *ограничение* α *на произвольную орбиту — стандартный элемент решетки конгруэнций этой орбиты.* Требуется доказать, что α — стандартный элемент решетки $\mathrm{Con}(A)$. Пусть $\beta, \gamma \in \mathrm{Con}(A)$. Достаточно установить, что $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \subseteq (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$ (так как обратное включение очевидно). Пусть $(x, y) \in (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma$. Обозначим через B орбиту, содержащую x. В силу леммы 0.8 либо $(x, y) \in \alpha_B \vee \beta_B$, либо $x\beta y$. В первом случае $y \in B$, откуда $(x, y) \in (\alpha_B \vee \beta_B) \wedge \gamma_B$ и мы можем сослаться на условие (i). Во втором случае $(x, y) \in \beta \wedge \gamma \subseteq (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$.

Случай 4: *ограничение α на произвольную орбиту — костандартный элемент решетки конгруэнций этой орбиты.* Требуется доказать, что α — костандартный элемент решетки $\mathrm{Con}(A)$. Пусть $\beta, \gamma \in \mathrm{Con}(A)$. Достаточно установить, что $(\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) \subseteq (\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$ (так как обратное включение очевидно). Пусть $(x, y) \in (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$. Обозначим через B орбиту, содержащую x. Ясно, что $(x, y) \in \alpha \vee \gamma$. В силу леммы 0.8 либо $(x, y) \in \alpha_B \vee \gamma_B$, либо $x\gamma y$. Во втором случае сразу получаем, что $(x, y) \in (\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$. Пусть теперь $(x, y) \in \alpha_B \vee \gamma_B$. Поскольку $(x, y) \in \beta \vee \gamma$, существует последовательность $(*)$ элементов из A такая, что $x_0 = x$, $x_n = y$ и для всякого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ либо $x_i \beta x_{i+1}$, либо $x_i \gamma x_{i+1}$. Если $x_1, \ldots, x_n \in B$, то все вытекает из условия (i). Предположим поэтому, что $x_i \notin B$, причем i — наименьший индекс с таким свойством. Если $x_{i-1} \beta x_i$, то $\alpha_B \subseteq \beta_B$ в силу условия (iii). Следовательно, в этом случае $(x, y) \in \alpha_B \vee \gamma_B = (\alpha_B \vee \gamma_B) \wedge (\beta_B \vee \gamma_B)$, и мы можем сослаться на условие (i). Пусть, наконец, $x_{i-1} \gamma x_i$. Теперь из условия (iii) вытекает, что $\alpha_B \subseteq \gamma_B$. Но тогда $\alpha_B \vee \gamma_B = \gamma_B \subseteq (\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$, откуда $(x, y) \in (\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$.

Теорема доказана. ∎

Автору неизвестен ответ на следующий естественно возникающий

Вопрос. Справедливо ли утверждение теоремы в случае, когда G — произвольная группа?

Автор благодарит профессора М. В. Волкова за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Б. М. Верников, М. В. Волков. *Решетки нильпотентных многообразий полугрупп. II.* — Изв. УрГУ. 1998. № 10. (Матем., механ. Вып. 1.) С. 13–33.

[2] Б. М. Верников, М. В. Волков. *Строение решеток многообразий нильполугрупп.* — Изв. УрГУ. 2000. № 18. (Матем., механ. Вып. 3.) С. 34–52.

[3] M. V. Volkov. *Young diagrams and the structure of the lattice of overcommutative semigroup varieties.* — Transformation Semigroups. Proc. Int. Conf. held at the Univ. Essex. Colchester, 1994. P. 99–110.

[4] B. M. Vernikov. *On congruences of G-sets.* — Comment. Math. Univ. Carol. Vol. 38, № 3 (1997). P. 603–613.

[5] B. M. Vernikov. *Modular elements in congruence lattices of G-sets.* — Beiträge zur Algebra und Geometrie. 2000. Vol. 41, № 1. P. 85–92.

[6] Б. М. Верников. *Специальные элементы решетки надкоммутативных многообразий полугрупп.* — Мат. заметки, сдано в печать.

[7] Б. М. Верников. *Полудистрибутивность в решетках многообразий полугрупп.* — III Междунар. алгебраич. конф. Сумы, 2001. С. 141–142.

[8] Б. М. Верников. *Квазитождества, влекущие модулярность, в решетках многообразий полугрупп.* — Изв. УрГУ. (Матем., механ.), сдано в печать.

[9] B. M. Vernikov. *Quasiidentities implying modularity and related conditions in lattices of overcommutative semigroup varieties.* — Semigroup Forum. 1998. Vol. 57, № 1. P. 142–150.

[10] B. M. Vernikov. *Distributivity, modularity, and related conditions in lattices of overcommutative semigroup varieties.* — Semigroups with Applications, including Semigroup Rings. St Petersburg, 1999. P. 411–439.

[11] B. M. Vernikov. *Distributive elements in the lattice of nilpotent semigroup varieties.* — Colloq. on Semigroups: Abstracts. Szeged, 2000. P. 32–33.

[12] B. M. Vernikov, M. V. Volkov. *Commuting fully invariant congruences on free semigroups.* — Contrib. General Algebra. 2000. Vol. 12. P. 391–417.

[13] B. M. Vernikov, M. V. Volkov. *Semimodular and arguesian varieties of semigroups.* — Semigroup Forum, submitted.

[14] Г. Гретцер. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.

[15] R. N. McKenzie, G. F. McNulty, W. F. Taylor. Algebras. Lattices. Varieties. Vol. I. Monterey: Wadsworth&Brooks/Cole. 1987.

[16] R. Schmidt. Subgroup Lattices of Groups. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.

Abstracts

N.V. Bayanova, N.Ya. Medvedev. *The group of automorphisms of free vector lattice.*

In this work it is proved that the centre of the group of automorphisms $Aut(FLV(n))$ of a free vector lattice $FLV(n)$ with any finite number n of free generators is isomorphic to the multiplicative group of positive real numbers.

Ivan Chajda. *Ternary deductive systems.*

A concept of ternary deductive system, i.e. of a subset of a given algebra closed under inherence rules using ternary term functions is introduced. It is specified a connection between ternary deductive systems and congruence classes for a given algebra A. If A is of a regular variety and the considered ternary functions are just the terms involved by B.Csákány, ternary deductive systems coincide with congruence classes.

A.M.W. Glass. *Central orders on linear groups.*

In the first talk I discussed conjugation in automorphism groups of linearly ordered sets, and gave an easy lemma which helps determine whether an automorphism group has decidable first order theory. This gives a uniform method that yields many past results and many new ones; e.g, both the automorphism group of the countable universal poset and that of the random graph are undecidable. (Joint work with M. Giraudet & J.K. Truss.)

In the second talk, I discussed the question: if a soluble orderable group has every (linear) order central (weakly Abelian), is the group locally nilpotent? I showed that this is true if it is true for nilpotent-by-Abelian groups. The work applies equally to finitely generated linear groups. (Joint work with A.H. Rhemtulla.)

A.M.W. Glass. *Convex sublattice subgroups of free Abelian lattice-ordered groups.*

In 1973 Bleier asked if a non-trivial proper convex sublattice subgroup of a finitely generated free Abelian lattice-ordered group could ever be a free Abelian lattice-ordered group. The purpose of this note is to prove that the answer is "no".

Theorem. *If A_n is the free Abelian lattice-ordered group on n generators and $H \neq A_n, \{0\}$ is a convex sublattice subgroup of A_n, then H is not a free Abelian lattice-ordered group.*

The proof uses simplicial geometry.

Kazimierz Głazek. *Weak automorphisms in general algebras — a short survey.*

Every bijection of non-empty set A (a carrier of an algebra) induces a bijection of the set of all finitary operations on A. If this induced mapping preserves the set

of all term operations of a general algebra then the considered bijection is called a weak automorphism. This notion is a special case of notions of weak isomorphisms (introduced by A. Goetz) or weak homomorphisms (introduced by E. Marczewski) of general algebras. The notion of weak automorphisms was investigated by several authors. We give a short survey of general results about weak automorphisms and a description of weak automorphisms of some concrete algebras (e.g., infinite integral domains). We mostly concentrate on weak automorphisms of finite fields. In this case, weak automorphisms are represented by polynomial permutations.

K. Głazek, W. Korczyński. *On some connections between Petri nets and semirings.*

We recall the notions of Petri net and semiring, and give some examples between both notions. The article contain also many informations about literature on these topics.

Waldemar Korczyński. *On a topological presentation of hypergraphs.*

In the paper a multitopological presentation of hypergraphs has been described.

V.M. Kopytov, J.Rachůnek. *About varieties of monotonous transformations groups.*

We give short review of results about lattice semi-ordered groups and about connections with m-groups.

The concept of m-group was introduced by M.Giraudet and F.Lucas. Let's remind that m-group is an algebraic system G of signature $m = \{\cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, _\ast\}$ such, that $\langle G | \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge \rangle$ is l-group, and the operation $_\ast$ is involute automorphism of the group $\langle G | \cdot, e, ^{-1} \rangle$ and antiautomorphism of the lattice $\langle G | \vee, \wedge \rangle$.

The class of m-groups is in the same connection with the class of groups monotonous transformations of linearly ordered sets as the class of l-groups and the class of groups ordered automorphisms of linearly ordered sets. The class of all m-groups is a variety of signature m.

In this article we present theorem that variety of m-groups, which are normal valued l-groups, is a maximal proper subvariety of m-groups variety.

B.Sh. Kulpeshov. *On $\aleph_0$ categorical weakly o-minimal theories of convexity rank 1.*

A. Pillay and Ch. Steinhorn have described all $\aleph_0$-categorical o-minimal theories. Their description implies binarity of these theories. Here we present for each natural $n \geq 3$ an example of $\aleph_0$ categorical weakly o-minimal theory of convexity rank 1 which is n-ary non $n-1$-ary. And also we give a description of $\aleph_0$ categorical binary weakly o-minimal theories of convexity rank 1 generalizing their result.

S.I. Mardaev. *Fixed points in quasiordered Kripke models.*

A condition to be imposed on a preordered model is proposed that is sufficient for the least fixed point of a modal positive operator to be definable.

E.V. Ovchinnikova. *Non linear ordered monoid over which the class of regular polygons composes complete but not model complete class.*

It is proved that there exists a non-linearly ordered monoid of depth 2 and the class of all regular polygons over it is a complete but not model complete class.

A.G. Pinus. *Positive conditionally varieties.*

We give some concept of positive conditionally varieties and study the structure of these classes of algebras and the classes of functions which commutes with the homomorphisms between algebras from the class.

A.G. Pinus, C.V. Gurkov. *Some remarks on the scales of calculation potentials of n-element algebras.*

In this paper we study the problems concerned with the concept of calculation potentials of n-element algebras, the problems of decidability of elementary theory of the classes and other questions.

S.Yenigul, K.N.Ponomarev. *On near-modules, near-algebras and on the notion of centroid for near-rings.*

In the class of near-rings we introduce the notions of near-module and near-algebra over associative rings.

We extend the concept of centroid from the class of rings to the class of near-rings.

Asya M. Popova, Ilya Dm. Tchernykh. *Units in Integral Group Rings of Finite Groups.*

Let G be an arbitrary finite group, and let $U(ZG)$ be the group of units of the integral group ring ZG. A description of $U(ZG)$ in terms of generators and an algorithm for determining these generators are presented. The algorithm is completely prepared to be implemented on the computer.

A.I. Stukachev. *Σ-admissible families on structures of kind $HYP(M)$.*

Σ-admissible families in structures of kind $\mathrm{HYP}(M)$.
For arbitrary admissible structure the notion of Δ_*-set is defined. It is showh that $\Sigma(A) \subseteq \Delta_*(A)$ in case when $A = HYP(M)$ and $\mathrm{Th}(M)$ is ω-categorical. In case when $A = HYP(N)$ it is shown that $\Sigma(A) \cap \Delta_*(A) = \Delta(A)$.

S.V. Sudoplatov. *Closed sets of side-angle matrixes and correspondent geometrical structures.*

The author presents a generalization of the notion of group polygonometry. It is shown that any closed set of side-angle matrices can be realized in some generalized group polygonometry. We define a class $\mathbf{K}$ of graphs such that any graph from $\mathbf{K}$ can be considered as a generalized group polygonometry. The class $\mathbf{K}$ contains graphs playing the fundamental role for the constructions of complete theories having a finite number of countable models.

Viktor V. Verbovskiy. *Non-uniformly weakly o-minimal group.*

Ordered structure is said to be *weakly o-minimal*, if any definable subset is a finite union of convex subsets. One of the first question may be the following: if a structure is elementarily equivalent to a weakly o-minimal one, must it be weakly o-minimal, too. In general, no, it must not. Marker, Macpherson and Steinhorn asked in their paper if it is true for weakly o-minimal ordered groups. Here we construct a counterexample.

B.M. Vernikov. *Concerning special elements of congruences' lattices of G-sets.*

We determine all distributive, codistributive, standard, costandard or neutral elements in the congruence lattices of G-sets under the hypothesis that the group G is abelian.

Contents

Александр Георгиевич Пинус

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ 3

Учебное пособие

Компьютерная верстка *И.Д. Черных*

Лицензия ИД № 04303 от 20.03.01. Подписано в печать 28.11.2001. Формат 60 x 84 1/16.
Бумага офсетная. Тираж 300 экз. Уч.-изд. л. 10,0. Печ. л. 10,25.
Изд. № 308. Заказ № 632 Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20